



Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

**Representaciones Planas de Sólidos Tridimensionales por Estudiantes de
Educación Secundaria en Cantabria**

**Two-Dimensional Representations of Three Dimensional Solids
by Secondary Students in Cantabria**

Alumna: Raquel Carmen López Martínez

Especialidad: Matemáticas

Directora: Irene Polo Blanco

Curso académico: 2014/2015

Fecha: Junio de 2015

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN.....	2
2. LITERATURA	4
2.1. La enseñanza de la geometría.....	4
2.2. La visualización espacial y sus componentes	6
2.3. Representaciones planas de objetos en 3 dimensiones	8
2.4. Visualización y representaciones planas en la Educación Secundaria Obligatoria.....	13
3. OBJETIVOS.....	16
4. METODOLOGÍA.....	17
4.1. Estrategia de investigación	17
4.2. Descripción de la muestra.....	17
4.3. Descripción y desarrollo de la prueba	18
4.4. Análisis de datos	19
5. RESULTADOS	20
6. DISCUSIÓN.....	32
7. CONCLUSIONES	33
8. BIBLIOGRAFÍA.....	36

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El presente Trabajo Fin de Máster se centra en el análisis de las representaciones planas de objetos tridimensionales que realizan alumnos de 12 y 14 años (1º y 3º de Educación Secundaria Obligatoria) de Cantabria.

Se trata de un tema de gran relevancia en el ámbito de la didáctica de la geometría por su relación con la visualización espacial, factor determinante en la representación plana de un objeto tridimensional. Las habilidades de visualización están presentes no sólo en el área de las matemáticas (Gutiérrez, 1991), sino en otras áreas de conocimiento como la ingeniería, el arte, la medicina, la economía o la química (Gutiérrez, 1996). Además, son muy útiles en la resolución de situaciones de la vida cotidiana, como en la interpretación o realización de mapas o planos (que constituyen una representación plana de nuestra realidad), a la hora de seleccionar el camino más adecuado para acudir a un lugar (que implica la visualización mental de los posibles caminos y la selección del más ventajoso), al organizar las maletas en un maletero (para lo que mentalmente desplazamos y giramos los bultos hasta alcanzar la combinación óptima), etc.

A nuestro alrededor encontramos personas más hábiles que otras en el desarrollo de este tipo de tareas. Además, en el ámbito escolar conviven compañeros con una gran visión espacial con otros con dificultades para resolver actividades específicas relacionadas con la visualización y la representación. Esto nos lleva a preguntarnos en qué medida estas habilidades son innatas y hasta qué punto se pueden entrenar.

En el año 1989 los investigadores Ben-Chaim, Lappan y Houang, realizaron un estudio en el que participaron chicos y chicas de 6º, 7º y 8º grado estadounidenses. En dicho estudio a cada alumno se le mostró una construcción realizada con 10 cubos, que debían describir de manera gráfica o verbal, a un compañero, el cual no podía verla. El compañero, en base a las instrucciones dadas, debía realizar la construcción.

La prueba se realizó en dos ocasiones. Antes de la primera, los alumnos no recibieron instrucción alguna, mientras que, previamente a la segunda, recibieron instrucción sobre visualización y representación.

El resultado de la investigación mostró que antes de la instrucción únicamente el 26% de los alumnos resolvió con éxito la tarea, mientras que tras ella este porcentaje de éxito incrementó hasta alcanzar el 83%.

Los resultados de este y otros estudios muestran que la visualización espacial y la representación son habilidades que se pueden entrenar y que, con este entrenamiento, se consigue una importante mejora de los resultados en este campo (Ben-Chaim, Lappan, y Houang, 1989).

A partir de aquí nos queda preguntarnos qué puede hacer un docente para entrenar la capacidad de visualización espacial y representación de sus alumnos. Según la teoría de Vygotsky (1988), enmarcada dentro del constructivismo social, los profesores juegan el papel de facilitadores o guías en el aprendizaje de sus alumnos. Por ello, deben conocer el nivel alcanzado por ellos de manera autónoma, con el fin de determinar el tipo de ayuda que necesitan para llegar al siguiente nivel, denominado por Vygotsky *Zona de Desarrollo Próximo* (Santrock, 2004).

Si trasladamos esta teoría al tema que nos ocupa, es decir, las representaciones planas de sólidos tridimensionales, resulta fundamental conocer qué nivel de destreza muestran los alumnos al realizarlas. Con este fin, nos basaremos en la clasificación desarrollada por Mitchelmore (1976), quien propuso a partir de su estudio cuatro etapas de representaciones: (1) esquemática plana, (2) esquemática espacial, (3) pre-realista y (4) realista.

Únicamente una vez conocida la etapa de desarrollo en la que se encuentran nuestros alumnos, seremos capaces de diseñar tareas y actividades pedagógicas, de nivel de dificultad adecuado, con las que ayudarles a alcanzar la siguiente etapa.

Comenzaremos realizando una revisión de la bibliografía existente relacionada con el tema que nos ocupa (§ 2.). A continuación estableceremos

los objetivos del estudio llevado a cabo (§ 3.) y expondremos la metodología (§ 4.) empleada en el mismo. Tras esto, presentaremos los resultados (§ 5.) obtenidos en la prueba, que comentaremos en el apartado de discusión (§ 6.), para finalizar con las conclusiones del estudio (§ 7.).

2. LITERATURA

La sección de literatura está dedicada a la revisión de la bibliografía existente referida a los modelos didácticos de la enseñanza de la geometría (§ 2.1.), a la definición de la visualización espacial y sus componentes (§ 2.2.) y a las representaciones planas de objetos en tres dimensiones (§ 2.3.).

Además, recoge un análisis del currículum de la Educación Secundaria Obligatoria de la nueva ley de educación, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (L.O.M.C.E.), para comprobar la importancia que esta ley otorga a la visualización y a las representaciones planas de objetos tridimensionales.

2.1. LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

En el presente apartado realizaremos una breve introducción a dos modelos didácticos para la enseñanza de la geometría. Comenzaremos con el modelo de razonamiento de Van Hiele, que constituye el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes (Gutiérrez y Jaime, 2012).

A continuación presentaremos el modelo de Vinner, que explica cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos con fuerte contenido gráfico o visual, y propone a los profesores formas de prevenir o corregir aprendizajes erróneos.

Van Hiele (1986) caracteriza el aprendizaje como el resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas. Las fases de aprendizaje de Van Hiele constituyen una propuesta metodológica para los

profesores, que les indican cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos para que faciliten el progreso de los estudiantes y la graduación de su aprendizaje. En cada una de ellas, el estudiante adquiere las experiencias necesarias que le lleven al nivel superior de razonamiento. Estas fases son: Información, Orientación Dirigida, Explicitación, Orientación Libre e Integración (Gutiérrez y Jaime, 2012).

Los niveles de razonamiento de Van Hiele son cuatro (Jaime y Gutiérrez, 1990):

Nivel 1: De Reconocimiento

Es el nivel más elemental. Los estudiantes perciben las figuras geométricas de manera global, sin ser capaces de reconocer explícitamente sus partes o propiedades matemáticas. Las entienden como objetos individuales y las describen por sus propiedades físicas.

Nivel 2: De Análisis

Los estudiantes ahora comprenden que las figuras geométricas están formadas por partes y poseen propiedades matemáticas que describen y enuncian de manera informal. A través de la experimentación pueden deducir otras propiedades, aunque no son capaces de relacionar unas con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas.

Nivel 3: De Clasificación

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal. Pueden realizar clasificaciones lógicas de figuras geométricas, pero basándose en la experimentación. Son capaces de comprender los pasos de un razonamiento lógico formal, pero de manera aislada, y no son capaces de realizarlo por sí mismos.

Nivel 4: De Deducción Formal

Los alumnos que alcanzan este nivel pueden entender y realizar razonamientos lógicos formales y logran una visión globalizadora del área que están estudiando.

Las principales características del modelo de razonamiento de Van Hiele, que son la jerarquización y secuenciación de los niveles (no es posible pasar al siguiente nivel de razonamiento sin haber superado el anterior), su estrecha relación con el lenguaje (dos personas que razonan e interpretan en distintos niveles utilizan distinto lenguaje) y el paso de un nivel al siguiente de forma continua (con un periodo de transición en el que combinará razonamientos de dos niveles) (Jaime y Gutiérrez, 1990).

Según Vinner (1991), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido nos viene a la mente su imagen y no su definición verbal, que en ocasiones no se corresponde. A esta imagen Vinner la denomina imagen del concepto. Esta imagen del concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son relevantes (Vinner, 1991).

El modelo de Vinner da pautas a los profesores sobre cómo analizar y mejorar las imágenes que los estudiantes se forman de los conceptos geométricos, a través de los ejemplos que los profesores les ofrecen. Estos ejemplos deben ser variados, de tal manera que les permitan detectar los defectos de sus imágenes del concepto, y han de hacer hincapié en aquellos directamente relacionados con los errores (Gutiérrez y Jaime, 2012).

2.2. LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y SUS COMPONENTES

Numerosos estudios han demostrado la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría (Gutierrez, 1996; Bishop, 1988). A lo largo de los años, diferentes autores del ámbito de las matemáticas han contribuido a desarrollar el concepto de visualización y sus componentes.

Gutiérrez define la visualización en matemáticas como el tipo de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, desarrollados para resolver problemas o comprobar propiedades. Para este autor, la visualización está formada por cuatro componentes: (1) las imágenes mentales, (2) los procesos de visualización, (3) las habilidades de visualización y (4) las representaciones externas (Gutiérrez,

1996). A continuación describiremos cada una de las componentes desde el punto de vista de diversos autores.

La primera componente de la visualización dada por Gutiérrez (1996), *imágenes mentales*, recibe distintos nombres por diversos autores. Así, Yakimanskaya (1991) emplea el término imagen espacial para referirse a ella, mientras que otros autores como Lean y Clements (1981), Presmeg (1986) y el propio Gutiérrez la denominan imagen mental. Bishop (1988), por su parte adopta la expresión imagen visual.

Para Yakimanskaya (1991) una imagen espacial, primera componente de la visualización, se crea a partir de la cognición sensorial de las relaciones espaciales y puede ser expresada de diferentes formas verbales o gráficas. Esta autora describe el pensamiento espacial como una forma de actividad mental que hace posible la creación de imágenes y su manipulación para resolver problemas prácticos y teóricos. Considera además que las imágenes son la unidad operativa del pensamiento espacial y los objetos geométricos constituyen el material básico empleado para crear y manipular imágenes espaciales (Gutiérrez, 1996).

Lean y Clements (1981) definen las imágenes mentales como la aparición de actividad mental correspondiendo con la percepción de un objeto, pero cuando el objeto no está presente. Para estos autores las imágenes visuales son como una fotografía con el ojo de la mente y la habilidad espacial es la habilidad de crear imágenes mentales y manipularlas en la mente (Gutiérrez, 1996).

Norma Presmeg (1986) define las imágenes mentales como un esquema mental que representa información visual o espacial. Establece cinco tipos de imágenes mentales (Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres, 1989): imágenes pictóricas concretas, imágenes de fórmulas, imágenes de patrones, imágenes cinéticas e imágenes dinámicas.

Para Bishop (1988) las imágenes visuales son los objetos que se manipulan en la visualización. Esta manipulación se realiza según dos tipos de procesos, el procesamiento visual (VP) y la interpretación de información

figurativa (IFI) (Gutiérrez, 1991). Estos procesos constituyen la segunda componente de la visualización dada por Gutiérrez (1996), *procesos de visualización*. El procesamiento visual (VP), es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes mentales y proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. La interpretación de información figurativa (IFI) es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen.

La tercera componente de la visualización, las *habilidades de visualización*, fue definida por Del Grande (1990) como las habilidades empleadas para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Del Grande identificó las siguientes habilidades de visualización: la coordinación motriz de los ojos, la identificación visual, la conservación de la percepción, el reconocimiento de posiciones en el espacio, el reconocimiento de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual (Gutiérrez, 1991).

La cuarta componente de la visualización, las *representaciones externas* se definen como todo tipo de representación de conceptos o propiedades, ya sean gráficas o verbales, que ayudan a la creación o transformación de imágenes mentales y al razonamiento visual (Gutiérrez, 1996).

Es esta cuarta componente en la que se centra el presente trabajo, por lo que la analizaremos más detalladamente en el siguiente apartado.

2.3. REPRESENTACIONES PLANAS DE OBJETOS EN 3 DIMENSIONES

Este apartado está dedicado al análisis de la bibliografía relativa a la cuarta componente de la visualización: las representaciones externas. En concreto, trataremos las representaciones planas de figuras tridimensionales.

Está demostrado que el aprendizaje y la enseñanza en el ámbito de las matemáticas escolares resulta más sencillo y significativo si se apoya en representaciones o modelizaciones que los estudiantes puedan observar, construir, manipular, etc. Es fundamental elegir un modelo que represente y

transmita fielmente los conceptos matemáticos y a la vez resulte fácilmente interpretable por los alumnos, pues representaciones demasiado complejas pueden llevarles a adquirir los conceptos de forma parcial o errónea (Gutiérrez, 1998).

En el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial, resulta imprescindible la elección de un buen modelo de representación plana que nos permita conectar los espacios de dos y tres dimensiones. De esta manera estudiantes y profesores podrán representar en el papel o la pizarra objetos geométricos tridimensionales o interpretar correctamente representaciones realizadas por otros, lo que es fundamental para el aprendizaje de la geometría espacial (Gutiérrez, 1998).

Según Gaulin y Puchalska (1987), hay diversas formas de representación plana de objetos tridimensionales: (1) la descripción verbal, (2) la representación ortogonal de las vistas laterales de un sólido, (3) la representación ortogonal codificada, que está asociada a módulos policubos, (4) la representación plano a plano, también asociada a módulos policubos, (5) la representación isométrica y (6) la representación en perspectiva (Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres, 1989). La elección de una u otra va a depender del uso que se va a hacer de ella (Gutiérrez, 1998).

Como señala Parzysz (1988) ninguna forma de representación plana de cuerpos espaciales es perfecta, pues en todas ellas se pierde información. La parte de información que se conserva se debe a que, tanto al hacer la representación como al interpretarla, se han compartido determinados códigos y claves. Los profesores, por tanto, deben transmitir a sus alumnos estos códigos y claves (Gutiérrez, 1998).

A lo largo de las últimas décadas, numerosos autores han centrado sus investigaciones en el estudio de las representaciones planas de objetos tridimensionales que los alumnos realizan. A continuación realizaremos un breve recorrido por las más relevantes.

Piaget (Piaget e Inhelder, 1956, citado por Dickson, Gibson y Brown, 1991, pp. 50-51), realizó un experimento destinado a estudiar la comprensión de los niños a las propiedades proyectivas de las figuras. En dicho experimento mostró a niños de entre cuatro y trece años, a los que previamente había enseñado lo que es el desarrollo de un objeto tridimensional, un cilindro, un cono y un tetraedro, y les pidió que dibujasen primero el cuerpo en tres dimensiones y luego su desarrollo.

Observó que los niños de entre 5 y 8 años dibujaban igual la vista y el desarrollo; los de entre 7 y 9 años realizaron intentos más razonables del desarrollo, coordinando distintos puntos de vista; a partir de los 8 años y medio fueron capaces de dibujar desarrollos de cilindro, cono y cubo; sin embargo, no fue hasta los 11 años y medio cuando consiguieron dibujar correctamente el desarrollo de tetraedro (Piaget e Inhelder, 1956, citado por Dickson, Gibson y Brown, 1991, pp. 50-51).

En 1967, Lewis y Livson realizaron en San Francisco un estudio con alumnos de entre primer y sexto grado sobre la influencia de factores como el curso, la edad cronológica, la edad mental y el nivel de lectura tienen sobre el nivel de desarrollo de sus representaciones planas de figuras espaciales.

A estos alumnos se les mostraron cuatro figuras espaciales, un cubo, una pirámide, un prisma pentagonal y un cilindro y se les pidió que los dibujaran. Además, se recopilaron datos de nivel socioeconómico, edad cronológica, edad mental y edad lectora.

Se clasificaron los dibujos en cuatro categorías: la categoría 1 recogía los dibujos en los que únicamente se había representado una cara de la figura; los dibujos de la categoría 2 mostraban más de una cara pero de manera plana; en la categoría 3 se incluyeron los dibujos que mostraban más de un plano; la categoría 4 agrupaba los dibujos correctos de las tres dimensiones.

La investigación demuestra la existencia de un proceso de desarrollo progresivo en la representación de plana de figuras tridimensionales. Este proceso es más rápido en edades más tempranas. A estas edades se da una

mayor variedad de representaciones de la misma figura, mientras que, a medida que los alumnos avanzan de curso, sus representaciones se vuelven más uniformes. Además, en general, la calidad de las representaciones aumenta con el curso (Lewis y Livson, 1967).

En los años 1976 y 1980, Mitchelmore llevó a cabo sendos estudios sobre el desarrollo de la habilidad de representación en perspectiva de los estudiantes. En el primero de ellos empleó un test tipo Piagetiano, que consistía en mostrar a los alumnos un prisma recto de base rectangular, un cilindro, una pirámide y un cubo y pedirles que los representaran tal y como los veían (Mitchelmore, 1976). Mitchelmore clasificó sus representaciones en cuatro etapas (Gutiérrez, 1998):

Etapas 1: Esquemática plana

Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente.

Etapas 2: Esquemática espacial

Las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente en ocasiones incluyendo las caras ocultas. Las representaciones de esta etapa carecen de sensación de profundidad.

Etapas 3: Pre-realista

Los dibujos muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad, aunque sin conseguirlo plenamente. Mitchelmore dividió esta etapa en dos subetapas, en función de la perfección tridimensional de los dibujos.

Etapas 4: Realista

Los dibujos característicos de esta etapa son bastante correctos y siguen las reglas del dibujo en perspectiva.

Tal y como puede observarse en la imagen 2, recogida en la página siguiente, para cada uno de los cuatro sólidos considerados, Mitchelmore

aportó ejemplos de representaciones típicas de cada etapa, que facilitan el empleo de su sistema de clasificación de representaciones.






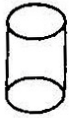
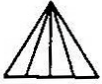

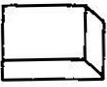

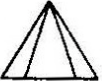



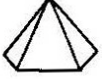





Stage	Solid			
	Cuboid	Cylinder	Pyramid	Cube
1				
2				
3A				
3B				
4				

Imagen 1. Esquema de clasificación de representaciones planas de sólidos tridimensionales de Mitchelmore (1976)

La investigación de Mitchelmore de 1980 le sirvió para poner a prueba su esquema de clasificación de representaciones planas de figuras espaciales regulares. Para ello seleccionó una muestra de estudiantes de una cultura diferente a la del estudio inicial y trató de predecir, con éxito, como serían las representaciones de un prisma recto de base triangular típicos de cada etapa de desarrollo. Esta figura no estaba incluida en el estudio original (Mitchelmore, 1980).

Posteriormente otros investigadores han desarrollado estudios que han confirmado los resultados de Mitchelmore. Entre estos autores se encuentran Gaulin (1985), Ben-Chaim, Lappan y Houan (1989) y Woodrow (1991), que

estudiaron las representaciones que los estudiantes realizaban de figuras tridimensionales empleando figuras formadas por cubos.

2.4. VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIONES PLANAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

En la introducción del presente Trabajo Fin de Máster establecimos la importancia de la visualización y de las representaciones planas de objetos tridimensionales tanto en aspectos cotidianos de la vida como en contextos laborales de diverso ámbito. Cabría esperar, por lo tanto, que su fomento, que se materializa en el currículum, tuviera un gran peso en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Para comprobar este hecho, analizamos la presencia de la visualización y las representaciones planas de objetos tridimensionales en el currículum de la Educación Secundaria Obligatoria de la nueva ley de educación, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (L.O.M.C.E.).

La L.O.M.C.E., a través del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, estructura la E.S.O. de la siguiente manera (OrientaGuía):

1 ^{er} ciclo ESO	TRONCALES (5 + 1) (Mínimo 50 % del horario)		ESPECÍFICAS (Mínimo 3-máximo 6)	DE LIBRE CONFIGURACIÓN AUTONÓMICA (nº indeterminado)
	TRONCALES GENERALES (5)	TRONCALES DE OPCIÓN (cursar 1)		
1º - 2º *	<ul style="list-style-type: none"> • Biología y Geología (en 1º) • Física y Química (en 2º) • Geografía e Historia • Lengua Castellana y Literatura • Matemáticas • Primera Lengua Extranjera 		<p><u>Siempre:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Educación Física • Religión / Valores Éticos <p><u>Entre 1 y 4</u> (podrán ser diferentes en cada curso):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cultura Clásica • Música • Educación Plástica, Visual y Audiovisual • Segunda Lengua Extranjera • Iniciación a la Actividad Emprendedora y Empresarial • Tecnología • Religión • Valores Éticos 	<p><u>Siempre:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Lengua Cooficial y Literatura <p><u>Otras</u> (podrán ser diferentes en cada curso):</p> <ul style="list-style-type: none"> • Materias a determinar • Materias del bloque específicas no cursada
3º	<ul style="list-style-type: none"> • Biología y Geología • Física y Química • Geografía e Historia • Lengua castellana y literatura • Primera lengua extranjera 	<ul style="list-style-type: none"> • Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas • Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 		

2º ciclo (4º ESO)	TRONCALES Número de materias: 4 + 2 (Mínimo 50 % del horario)		ESPECÍFICAS (Mínimo 3 - máximo 6)	DE LIBRE CONFIGURACIÓN AUTONÓMICA (nº indeterminado)
	TRONCALES GENERALES (4)	TRONCALES DE OPCIÓN (2)		
Enseñanzas Académicas para la iniciación al Bachillerato	<ul style="list-style-type: none"> • Geografía e Historia • Lengua Castellana y Literatura • Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas • Primera Lengua Extranjera 	<ul style="list-style-type: none"> • Biología y Geología • Economía • Física y Química • Latín 	<p><u>Siempre:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Educación Física • Religión / Valores Éticos <p><u>Entre 1 y 4:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Artes Escénicas y Danza • Cultura Científica • Cultura Clásica • Educación Plástica, Visual y Audiovisual • Filosofía • Música • Segunda Lengua Extranjera • Tecnologías de la Información y la Comunicación • Religión • Valores Éticos • Una materia troncal no cursada por el alumno 	<p><u>Siempre:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Lengua Cooficial y Literatura <p><u>Otras:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Una materia del bloque específicas no cursada • Materias de ampliación de los contenidos de las materias troncales o específicas • Materias a determinar
Enseñanzas Aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional	<ul style="list-style-type: none"> • Geografía e Historia • Lengua Castellana y Literatura • Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas • Primera Lengua Extranjera 	<ul style="list-style-type: none"> • Ciencias Aplicadas a la Actividad Profesional • Iniciación a la Actividad Emprendedora y Empresarial • Tecnología 		

Examinados de manera exhaustiva los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de las asignaturas troncales y los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de las asignaturas troncales y específicas hemos observado la presencia de actividades relacionadas con la visualización y las representaciones planas en las siguientes asignaturas:

Biología y Geología (1º, 2º y 4º ESO)

En 1º y 3º de ESO los alumnos deben aprender a interpretar gráficos y esquemas relacionados con la posición relativa de la Tierra, la Luna y el Sol. En 4º de ESO aprender a interpretar mapas topográficos, realizar perfiles interpretar cortes geológicos sencillos y perfiles topográficos como procedimiento para el estudio de una zona o terreno.

Física y Química (2º, 3º y 4º ESO)

La interpretación y ejecución de gráficos y esquemas planos y espaciales aparece de manera transversal a lo largo de esta asignatura, por ejemplo en la representación del átomo siguiendo el modelo planetario, el movimiento relativo, los desplazamientos de partículas, las trayectorias, etc.

Geografía e Historia (1º - 4º ESO)

En esta asignatura, a lo largo de toda la Educación Secundaria, se estudian los mapas, como forma de representación de nuestro planeta. Los alumnos trabajan con distintos tipos de mapas y proyecciones, y aprenden a localizar espacios geográficos a través de sus coordenadas geográficas. Además aprenden las diferentes representaciones cartográficas y sus escalas.

Matemáticas (1º - 4º ESO)

En el bloque temático de la geometría se trabaja con figuras planas, cuerpos geométricos, polígonos regulares, círculo, circunferencia, esfera, cono, poliedros... Se realizan secciones y desarrollos planos de cuerpos geométricos. Se trabaja con simetrías y transformaciones de figuras mediante movimientos en el plano.

Educación Plástica, Visual y Audiovisual (1º, 2º y 4º ESO)

En el bloque de dibujo técnico se trasladan conocimientos teórico-prácticos sobre diferentes formas geométricas y sistemas de representación y se aplican estos conocimientos a la resolución de problemas y a la realización de distintos diseños.

Entre los conceptos que se estudian se encuentran la visualización de objetos definidos por sus vistas, la perspectiva caballera, isométrica y cónica.

Se trabajan los distintos sistemas de representación gráfica y su utilidad como representación objetiva de la realidad en el ámbito de las artes, la arquitectura, el diseño y la ingeniería. También se emplean programas de dibujo por ordenador.

Tecnología (1º y 2º ESO)

En esta asignatura se estudia la creación de un producto tecnológico, desde su origen hasta su comercialización, pasando por su diseño. La interpretación y producción, por medios manuales o con la ayuda de programas de ordenador, de documentos técnicos, en los que aparecen vistas y perspectivas, juega un papel fundamental en la fase de diseño del producto.

Tras analizar el currículum de la LOMCE, observamos que la visualización y las representaciones planas de objetos tridimensionales aparecen de manera transversal y práctica en las asignaturas de Biología y Geología, Física y Química, Geografía e Historia y Tecnología, por lo que se cuenta con que los alumnos tienen adquiridas estas destrezas.

En matemáticas, en el bloque temático de geometría, se tratan aspectos relacionados con la visualización y las representaciones planas, pero de un punto de vista muy teórico y analítico.

Es en la asignatura de Educación Plástica, Visual y Audiovisual donde la visualización y las representaciones planas alcanzan el protagonismo y la relevancia esperada. No obstante, si nos fijamos en la estructura que la LOMCE establece para la ESO, observamos que se trata de una asignatura específica no obligatoria.

3. OBJETIVOS

En el apartado de literatura (§ 2.) pudimos comprobar la importancia de las representaciones planas de objetos tridimensionales en el aprendizaje de la geometría. También constatamos las dificultades y los diferentes grados de consecución que los alumnos presentan a la hora de realizarlas, que se materializan en distintas etapas de desarrollo, como las definidas por Mitchelmore en 1976.

El presente estudio tiene por objetivos conocer, con la ayuda de la clasificación desarrollada por Mitchelmore (1976), en qué nivel se sitúan las representaciones planas de sólidos tridimensionales realizadas por estudiantes de secundaria y de qué manera evolucionan estas representaciones a medida que avanza la edad de los alumnos.

Se pretende que, a partir de los resultados del trabajo, el profesorado disponga de una herramienta que le permita conocer el nivel de las representaciones de sus alumnos y así adecuar las tareas para que puedan desarrollar sus habilidades de representación.

Para ello trataremos de dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿En qué etapa, de las descritas por Mitchelmore (1976), se engloban las representaciones planas de sólidos tridimensionales realizadas por los alumnos?
- ¿De qué manera evolucionan estas representaciones a medida que avanza la edad de los alumnos?
- ¿Existe diferencia en el nivel de representación alcanzado para los distintos sólidos?

4. METODOLOGÍA

En este apartado se detalla la metodología empleada. Comenzaremos con la exposición de la estrategia de investigación utilizada (§ 4.1.) tras lo que señalaremos las características la muestra seleccionada para el estudio (§ 4.2.). A continuación describiremos la prueba empleada para la recogida de datos y su desarrollo (§ 4.3.) para concluir con la técnica de análisis de datos (§ 4.4.).

4.1. ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

Los objetivos y características del estudio que nos ocupa nos llevan a plantear una estrategia de investigación y análisis de datos de tipo cuantitativo, ya que analizaremos el porcentaje de alumnos que realiza representaciones planas típicas de cada una de las etapas de Mitchelmore.

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra de alumnos que participaron en el estudio está compuesta por 65 estudiantes de un centro de educación concertado situado en la localidad de Santander, en el que la autora realizó las prácticas de enseñanza. El perfil socioeconómico de los alumnos de este centro concertado es muy heterogéneo y encontramos alumnos tanto de nivel medio-alto, como medio-bajo.

De los 65 estudiantes, 38 se encuentran cursando 1º de ESO y tienen entre 12 y 13 años. Los 27 restantes cursan actualmente 3º de ESO y tienen entre 14 y 15 años. Ninguno de ellos ha repetido curso con anterioridad.

4.3. DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO DE LA PRUEBA

Como herramienta de recogida de datos se diseñó una prueba, similar a la empleada por Mitchelmore, inspirada en el experimento que Piaget llevó a cabo en 1956 (Dickson, Gibson y Brown, 1991). Esta prueba consistió en lo siguiente: se mostraron a los alumnos cuatro sólidos tridimensionales, un prisma recto de base rectangular, un cilindro, una pirámide y un cubo y se les pidió que los representaran tal y como los veían en las hojas de respuesta diseñadas a tal efecto.

Con el fin de centrarnos en la evaluación de las habilidades de representación y no en los conocimientos geométricos de los alumnos, no se utilizó el nombre geométrico de los sólidos, sino que se los denominó sólido A, B, C y D respectivamente.

Los sólidos, que se fabricaron con cartulina, tenían unas dimensiones adecuadas para que sus diferentes caras y aristas pudieran ser apreciadas con claridad. Así, el prisma recto de base rectangular medía 28x10x20 cm, las bases del cilindro tenían 14 cm de diámetro y su altura era de 20 cm, la pirámide tenía una base cuadrada de 14x14 cm y 20 cm de altura y las dimensiones del cubo eran 15x15x15 cm.

Durante la prueba se dispusieron los cuatro sólidos en la parte delantera de la clase sobre pupitres. Tal y como se puede apreciar en la imagen 2, recogida en la página siguiente, delante de cada sólido se colocó un cartel identificativo del mismo.

Los sólidos estuvieron expuestos durante toda la prueba, cuya duración no estaba limitada y en ningún caso superó los veinte minutos.

Para realizar las representaciones los alumnos podían emplear lápiz o bolígrafo, regla y goma de borrar. Además se les permitió levantarse de su sitio para poder observar los sólidos más de cerca.



Imagen 2. Disposición de los sólidos durante la prueba

4.4. ANÁLISIS DE DATOS

Una vez realizada la prueba pasamos al análisis de datos. Teniendo en cuenta el sistema de clasificación de Mitchelmore, incluimos cada representación en una de las etapas, tal y como explicaremos en el apartado 5, resultados (§ 5.).

Tras la clasificación, volcamos los datos en una hoja de cálculo y calculamos, para cada uno de nuestros dos grupos de edad y para cada sólido, el porcentaje de representaciones incluidas en cada una de las etapas.

5. RESULTADOS

A continuación analizaremos las representaciones realizadas por los estudiantes con el fin de situarlas dentro de una de las etapas del sistema de clasificación de representaciones planas propuesto por Mitchelmore en el año 1976.

Comenzamos el análisis con los estudiantes de 1º de ESO, es decir, los de **12 y 13 años**. En la tabla inferior se puede observar el porcentaje de alumnos de esta edad que realizó representaciones de cada una de las etapas de Mitchelmore, para cada uno de los cuatro sólidos considerados.

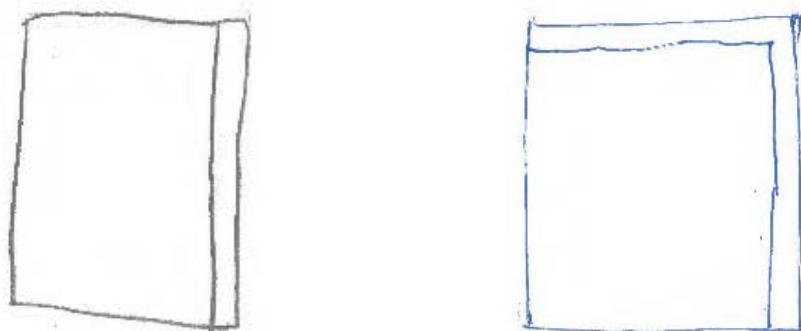
Como se observa en la tabla 1, se han encontrado representaciones del prisma recto de base rectangular susceptibles de ser incluidas en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapa A, pre-realista subetapa B y realista. La etapa esquemática espacial es la que menos se manifiesta con un 13,16% de las representaciones. El 28,95% de las representaciones se incluyen en la etapa pre-realista, dentro de la que predomina la subetapa B con un 18,42% de las representaciones. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 57,89%, pertenecen a la etapa realista.

	ETAPA	SÓLIDO			
		Prisma Rectangular	Cilindro	Pirámide	Cubo
1º ESO	Esquemática Plana 1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	Esquemática Espacial 2	13,16%	28,95%	7,89%	5,26%
	Pre-realista 3A	10,53%	5,26%	15,79%	5,26%
	Pre-realista 3B	18,42%	34,21%	23,68%	39,47%
	Realista 4	57,89%	31,58%	52,63%	50,00%
			28,95%	39,47%	39,47%

Tabla 1. Porcentaje de alumnos de 1º de ESO en cada etapa de Mitchelmore para cada sólido

En relación a las representaciones del prisma en la etapa esquemática espacial encontramos diversos tipos. Como se observa en la figura 1 (izquierda), Pablo (12 años) realiza una representación en la que aparece una

de las caras laterales, mientras que Laura (13 años) representa dos de las caras laterales (figura 1, derecha). Ninguno de ellos logra dar profundidad a la figura.



Izda: Representación de Pablo (12 años) **Dcha:** Representación de Laura (13 años)

Figura 1

En las representaciones pertenecientes a la etapa pre-realista encontramos distintos grados de perfección en los dibujos. El 10,53% de las representaciones de los alumnos fueron situadas en la etapa pre-realista subetapa A por mostrar un nivel inferior de perfección tridimensional. En la figura 2 se muestra como ejemplo la representación realizada por Juan (13 años).

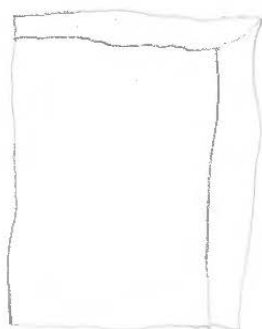


Figura 2. Representación de Juan (13 años)

El 18,42% de los alumnos representó el sólido de una forma más aproximada a la realidad, como la que se muestra en la figura 3 realizada por Amaya (13 años) y situada en la etapa pre-realista subetapa B.

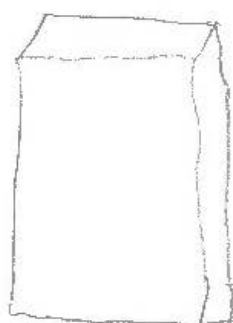


Figura 3. Representación de Amaya (13 años)

En ambas representaciones se aprecian intentos de dotar a la figura de profundidad, especialmente en la de Amaya, aunque no lo consiguen.

Finalmente, se muestra en la figura 4 un ejemplo de representación del prisma recto de base rectangular perteneciente a la etapa realista (María, 12 años). En dicho dibujo se aprecia que se siguen las reglas del dibujo en perspectiva.



Figura 4. Representación de María (12 años)

Como se observa en la tabla 1, se han encontrado representaciones del cilindro susceptibles de ser situadas en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapa A, pre-realista subetapa B y realista. El 28,95% de las representaciones se incluyen en la etapa esquemática, que es la que menos se manifiesta. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 39,47%, pertenecen a la etapa pre-realista. Dentro de esta etapa, predomina la subetapa B con un 34,21% de las representaciones. El 31,58% de las representaciones se incluyen en la etapa realista.

Las representaciones incluidas en la etapa esquemática espacial son similares a la realizada por Manuel (13 años), que se puede observar el la

figura 5. En ella no se aprecian intentos de dotar de profundidad al dibujo y se muestra una cara oculta.



Figura 5. Representación de Manuel (13 años)

En relación a las representaciones pertenecientes a la etapa pre-realista encontramos distintos grados de perfección en los dibujos. El 5,26% de las representaciones de los alumnos fueron situadas en la etapa pre-realista subetapa A por mostrar un nivel inferior de perfección. En la figura 6 se muestra como ejemplo la representación realizada por Marta (12 años).



Figura 6. Representación de Marta (12 años)

El 34,21% de los alumnos representó el cilindro de forma más aproximada a la realidad, como la que se muestra en la figura 7, realizada por Sergio (12 años) y situada en la etapa pre-realista subetapa B.



Figura 7. Representación de Sergio (12 años)

En ambas representaciones se aprecian intentos de dotar a la figura de profundidad, especialmente en la de Sergio, aunque no lo consiguen.

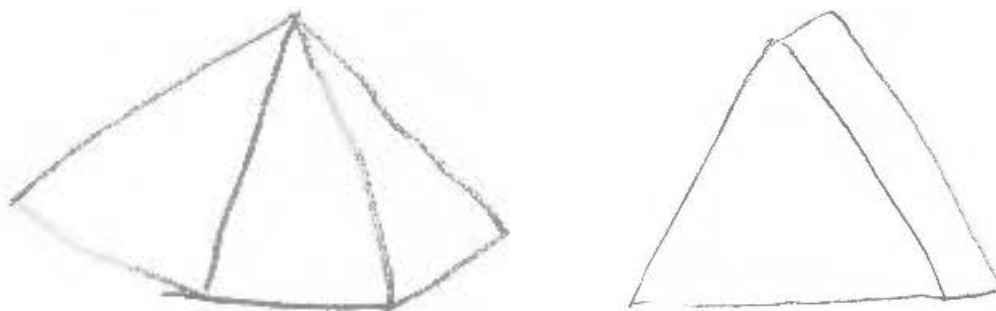
Finalmente, se muestra en la figura 4 un ejemplo de representación del cilindro perteneciente a la etapa realista (Marina, 12 años). En dicho dibujo se aprecia que se siguen las reglas del dibujo en perspectiva.



Figura 8. Representación de Marina (12 años)

Como se observa en la tabla 1, se han encontrado representaciones de la pirámide susceptibles de ser incluidas en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapa A, pre-realista subetapa B y realista. El 7,89% de las representaciones se incluyen en la etapa esquemática espacial, que es la que menos se manifiesta. El 39,47% de las representaciones se incluyen en la etapa pre-realista, dentro de la que predomina la subetapa B con un 23,68% de las representaciones. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 52,63%, pertenecen a la etapa realista.

En relación a las representaciones de la pirámide en la etapa esquemática espacial encontramos dos tipos. Se observa en la figura 9 (izquierda) como Andrea (12 años) realiza un dibujo ortogonal de las caras de la pirámide, incluso representando algunas ocultas y sin dotarla de profundidad. Sin embargo Enrique (12 años) realiza una representación errónea de la pirámide, tal y como se aprecia en la figura 9 (derecha).



Izda: Representación de Andrea (12 años) **Dcha:** Representación de Enrique (12 años)

Figura 9

En las representaciones pertenecientes a la etapa pre-realista encontramos distintos grados de perfección en los dibujos. El 15,79% de las representaciones de los alumnos se situaron en la etapa pre-realista subetapa A por mostrar un nivel inferior de perfección tridimensional. En la figura 10 se muestra como ejemplo la representación realizada por Ana (13 años).

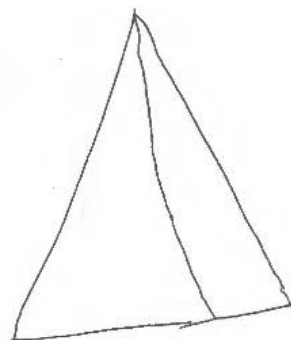


Figura 10. Representación de Ana (13 años)

El 23,68% de los alumnos representó la pirámide de forma más aproximada a la realidad, como la que se muestra en la figura 11, realizada por Mario (13 años) y situada en la etapa pre-realista subetapa B.

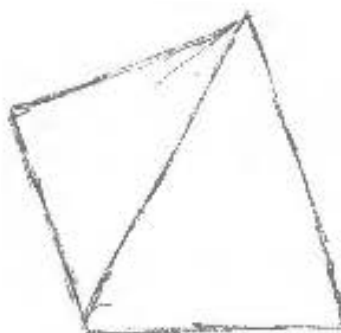


Figura 11. Representación de Mario (13 años)

En ambas representaciones se aprecian intentos de dotar a la figura de profundidad, especialmente en la de Mario, aunque no lo consiguen.

Finalmente, se muestra en la figura 12 un ejemplo de representación de la pirámide perteneciente a la etapa realista (Emma, 12 años). En dicho dibujo se aprecia que se siguen las reglas del dibujo en perspectiva.



Figura 12. Representación de Emma (12 años)

Como se observa en la tabla 1, se han encontrado representaciones del cubo susceptibles de ser incluidas en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapa A, pre-realista subetapa B y realista. El 5,26% de las representaciones se incluyen en la etapa esquemática, que es la que menos se manifiesta. El 44,74% de las representaciones se incluyen en la etapa pre-realista, dentro de la que predomina la subetapa B con un 39,47% de las representaciones. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 50,00%, pertenecen a la etapa realista.

Las representaciones incluidas en la etapa esquemática espacial son similares a la realizada por Jorge (13 años), que se puede observar en la figura 13. En ella no se aprecian intentos de dotar de profundidad al dibujo, sino que se dibujan varias caras de manera ortogonal.

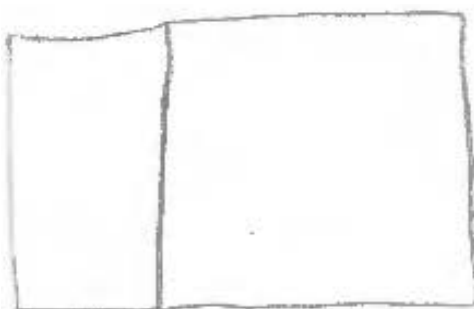


Figura 13. Representación de Jorge (13 años)

En relación a las representaciones pertenecientes a la etapa pre-realista encontramos distintos grados de perfección en los dibujos. El 5,26% de las representaciones de los alumnos fueron situadas en la etapa pre-realista subetapa A por mostrar un nivel inferior de perfección tridimensional. En la figura 14 se muestra como ejemplo la representación realizada por Martín (13 años).

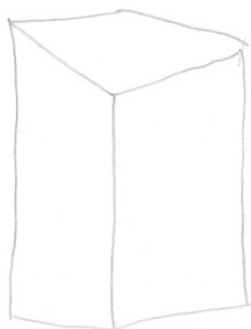
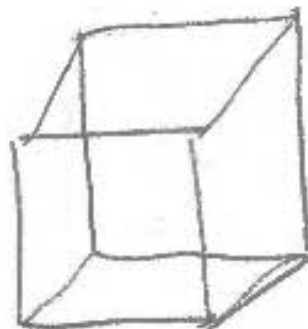
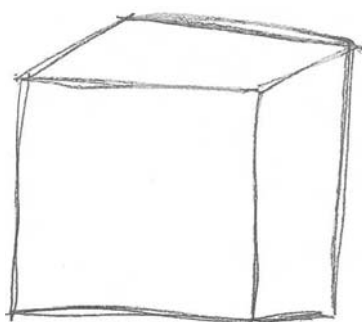


Figura 14. Representación de Martín (13 años)

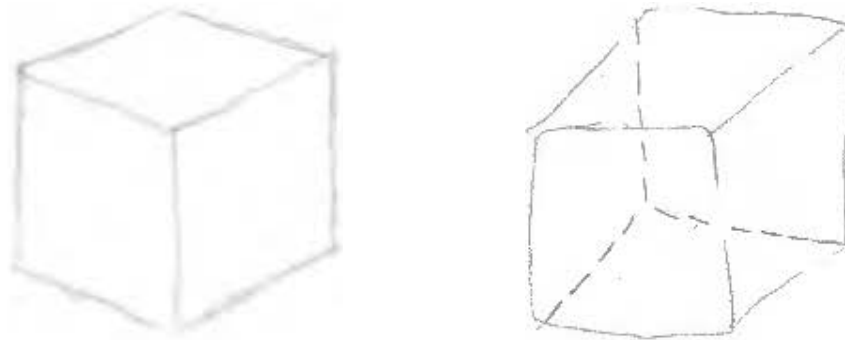
El 39,47% de los alumnos representó el cubo de forma más aproximada a la realidad, como la que se muestra en la figura 15 (izquierda), realizada por Amalia (12 años), que se sitúa en la etapa pre-realista subetapa B. Las representaciones similares a la realizada por Joaquín (12 años), que se puede observar en la figura 15 (derecha), también se han incluido en la etapa pre-realista subetapa B. Las características de estas representaciones, como los ángulos entre distintos planos o el paralelismo entre líneas, sugieren que el estudiante tiene interiorizadas las reglas del dibujo en perspectiva, aunque dibuje caras ocultas. Esto es achacable al desconocimiento del convenio de las líneas ocultas dibujadas a trazos.



Izda: Representación de Amalia (12 años) **Dcha:** Representación de Joaquín (12 años)

Figura 15

Finalmente, se muestra en la figura 16 (izquierda) un ejemplo de representación del cubo perteneciente a la etapa realista (Begoña, 13 años). En dicho dibujo se aprecia que se siguen las reglas del dibujo en perspectiva. En la representación de la figura 16 (derecha), realizada por Pedro (12 años), se dibujan caras ocultas, pero se distinguen de las vistas por las líneas de trazos.



Izda: Representación de Begoña (13 años) *Dcha:* Representación de Pedro (12 años)

Figura 16

Continuamos el análisis con los estudiantes de 3º de ESO, es decir, los de **14 y 15 años**. En la tabla recogida en la página siguiente se puede observar el porcentaje de alumnos de esta edad que realizó representaciones de cada una de las etapas de Mitchelmore, para cada uno de los cuatro sólidos considerados.

	ETAPA	SÓLIDO			
		Prisma Rectangular	Cilindro	Pirámide	Cubo
3º ESO	Esquemática Plana 1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
	Esquemática Espacial 2	0,00%	11,11%	0,00%	0,00%
	Pre-realista 3A	0,00% 7,41%	0,00% 29,63%	0,00% 22,22%	7,41% 25,93%
	Pre-realista 3B	7,41%	29,63%	22,22%	18,52%
	Realista 4	92,59%	59,26%	77,78%	74,07%

Tabla 2. Porcentaje de alumnos de 3º de ESO en cada etapa de Mitchelmore para cada sólido

Como se observa en la tabla 2, se han encontrado representaciones del prisma recto de base rectangular susceptibles de ser incluidas en las etapas pre-realista subetapa B y realista. Para este sólido, los estudiantes de 14 y 15 años han abandonado las etapas esquemática espacial y pre-realista subetapa A, que sí manifiestan los estudiantes de 12 y 13 años. La mayoría de los estudiantes, el 92,59%, realizó representaciones pertenecientes a la etapa realista, mientras que el resto, el 7,41%, realizó representaciones situadas en la etapa pre-realista subetapa B.

Las representaciones del prisma recto de base rectangular realizadas por estudiantes de este grupo de edad son similares a las de los estudiantes de 12 y 13 años (figuras 3 y 4). Cabe destacar la representaciones como la realizada por Luis (14 años). En ella se aprecia que el alumno tiene interiorizadas las reglas del dibujo en perspectiva pero utiliza mal el convenio de las líneas ocultas dibujadas a trazos. Por ello se han incluido representaciones como ésta en la etapa pre-realista subetapa B.

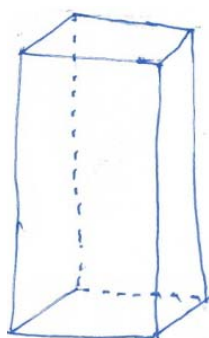


Figura 17. Representación de Luis (14 años)

Tal y como se puede apreciar en la tabla 2, se han encontrado representaciones del cilindro susceptibles de ser incluidas en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapa B y realista. No se ha situado ninguna representación en la etapa pre-realista subetapa A. El 11,11% de las representaciones pertenece a la etapa esquemática espacial, que es la que menos se manifiesta. El 29,63% de las representaciones se incluyen en la etapa pre-realista, subetapa B. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 59,26%, pertenecen a la etapa realista.

Las representaciones del cilindro realizadas por estudiantes de este grupo de edad son similares a las de los estudiantes de 12 y 13 años (figuras 7 y 8).

Se han encontrado representaciones de la pirámide típicas de las etapas pre-realista subetapa B y realista, tal y como puede observarse en la tabla 2. Para este sólido, los estudiantes de 14 y 15 años han abandonado las etapas esquemática espacial y pre-realista subetapa A, que sí manifiestan los estudiantes de 12 y 13 años. La mayoría de los estudiantes, el 77,78%, realizó representaciones pertenecientes a la etapa realista, mientras que el resto, el 22,22%, realizó representaciones situadas en la etapa pre-realista subetapa B.

Las representaciones de la pirámide realizadas por estudiantes de este grupo de edad son similares a las de los estudiantes de 12 y 13 años (figuras 11 y 12).

Como se observa en la tabla 2, se han encontrado representaciones del cubo susceptibles de ser incluidas en las etapas pre-realista, subetapas A y B, y realista. Para este sólido, los estudiantes de 14 y 15 años han abandonado la etapa esquemática espacial, que sí manifiestan los estudiantes de 12 y 13 años.

El 25,93% de las representaciones se incluyen en la etapa pre-realista, dentro de la que predomina la subetapa B con un 18,52% de las representaciones. La mayoría de las representaciones de los estudiantes, el 74,07%, pertenecen a la etapa realista.

Las representaciones del cubo realizadas por estudiantes de este grupo de edad son similares a las de los estudiantes de 12 y 13 años (figuras 14, 15 y 16). Entre ellas destacan representaciones como la realizada por Javier (15 años), que se puede observar en la figura 18. En ella se aprecia que el alumno tiene interiorizadas las reglas del dibujo en perspectiva pero utiliza mal el convenio de las líneas ocultas dibujadas a trazos. Por ello se han incluido representaciones como ésta en la etapa pre-realista subetapa B.

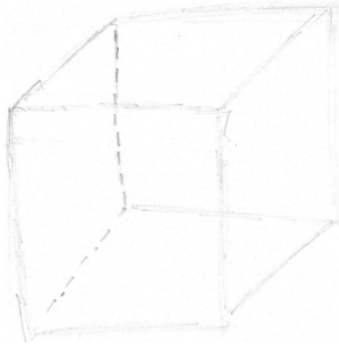


Figura 18. Representación de Javier (15 años)

Si analizamos los resultados obtenidos de manera global para todos los sólidos, comprobamos que al comienzo de la secundaria, es decir, a los 12 o 13 años, los alumnos ya han abandonado la etapa esquemática plana. Las representaciones de los alumnos de 12 y 13 años se incluyen en las etapas esquemática espacial, pre-realista subetapas A y B y realista. A excepción del cilindro, con un porcentaje importante de las representaciones, un 28,95%, pertenecientes a la etapa esquemática espacial, la mayoría de las representaciones se incluyen en las etapas pre-realista subetapa B y realista.

A los 14 y 15 años los alumnos abandonan también la etapa esquemática espacial, excepto para el cilindro, que mantiene un 11,11% de las representaciones. Apenas existen tampoco representaciones incluidas en la etapa pre-realista subetapa A. Únicamente el 7,41% de los alumnos realizó representaciones del cubo pertenecientes a esta subetapa. La mayoría de las representaciones se incluyen en la etapa realista.

Además, al comparar las representaciones realizadas por los alumnos de 14 y 15 años con las de los alumnos de 12 y 13 años se observa un claro incremento en la calidad de los dibujos.

6. DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos prueban la secuenciación de las etapas de Mitchelmore a medida que la edad de los alumnos avanza. Tal y como se ha evidenciado en el apartado anterior, hay una clara progresión entre las etapas que encontramos entre los alumnos de 12 y 13 años y los de 14 y 15 años. La gran mayoría de las representaciones realizadas por alumnos de 14 y 15 años pertenecen a la etapa realista y el resto a la etapa pre-realista subetapa B. La etapa mayoritaria en la que se incluyen las representaciones de los alumnos de 12 y 13 años es también la realista, aunque se manifiesta con menos fuerza, seguida de la pre-realista subetapa B y de la pre-realista subetapa A. Este grupo de edad también realizó representaciones correspondientes a la etapa esquemática espacial.

Asimismo, se ha comprobado que los alumnos presentan distinto nivel de dificultad al representar unos sólidos u otros. Este es sin duda el caso del cilindro. Mientras la mayoría de las representaciones del prisma recto de base triangular, la pirámide y el cubo realizadas por alumnos de entre 12 y 13 años se clasifican como realistas o pre-realistas, existe un gran número de representaciones del cilindro incluidas en la etapa esquemática espacial. Además el porcentaje de representaciones realistas del cilindro es claramente inferior al del resto. Este hecho se manifiesta de manera similar entre las representaciones de los alumnos de entre 14 y 15 años. Los alumnos de este grupo de edad han abandonado la etapa esquemática espacial para todos los sólidos representados excepto para el cilindro, para el cual esta etapa aún se manifiesta.

El distinto nivel de las representaciones del cilindro respecto al resto de sólidos podría deberse a que los alumnos se encuentran más cómodos trabajando con poliedros, cuyas aristas les sirven de referencia a la hora de realizar las representaciones, que con cuerpos redondos. Otra posible explicación es que, a lo largo de su formación escolar, han trabajado mucho y recibido una gran instrucción sobre poliedros como el cubo. Esto puede verse reflejado en que los alumnos son capaces de generalizar sus propiedades a las

representaciones de otros poliedros como el prisma o la pirámide. Esto, sin embargo, no con el cilindro. La escasez de instrucción en la representación de cuerpos redondos hace que carezcan de un referente a la hora de aplicar las reglas de representación a otros casos.

El prisma recto de base rectangular y el cubo son sólidos de características muy similares, por lo que cabría esperar que el porcentaje de representaciones incluidas en cada una de las etapas de Mitchelmore fuera también similar. Esto ocurre para los alumnos de 12 y 13 años pero no para los de 14 y 15. Este grupo de edad representa claramente mejor el prisma recto de base rectangular que el cubo. Esto podría deberse a una diferencia en la cantidad de instrucción recibida sobre cada sólido, es decir, a que estén más acostumbrados a trabajar con uno que con otro.

También se ha comprobado la mejora en la grafomotricidad de los alumnos a medida que aumenta su edad ya que, en general, la calidad de los dibujos de los alumnos de entre 14 y 15 años es superior a la de los alumnos de entre 12 y 13 años.

Hemos visto también las dificultades que presentan los alumnos al representar caras ocultas de los sólidos, especialmente del prisma recto de base rectangular y del cubo, mediante líneas discontinuas. Esto avala la teoría de Gutiérrez (1998), que sostiene que es fundamental transmitir a los alumnos los códigos y claves del sistema de representación que empleen.

7. CONCLUSIONES

En el presente Trabajo Fin de Máster hemos podido comprobar la importancia de la visualización y la representación, tanto para la vida cotidiana como para la vida académica de los alumnos. Por esta razón son numerosas las investigaciones dedicadas a su estudio. Muchas de ellas, como la llevada a cabo por Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989), demuestran que las habilidades de visualización y representación pueden mejorarse con la instrucción.

En el campo de las representaciones planas de sólidos tridimensionales, diversos autores han llevado a cabo estudios encaminados a evaluar el nivel de desarrollo de las representaciones que los alumnos espontáneamente realizan de este tipo de sólidos. Entre ellas destacan las investigaciones de Mitchelmore (1976), en las que desarrolló el sistema de clasificación de representaciones planas empleadas en nuestro estudio. La fiabilidad de este sistema de clasificación ha sido suficientemente contrastada por autores posteriores a Mitchelmore (1980), como Woodrow (1991) o Gutiérrez (1998).

A la vista de los resultados obtenidos en la prueba, el presente trabajo pretende servir de llamada de atención para que los docentes sean conscientes de las carencias que el alumnado presenta en cuanto a su habilidad de representación. A pesar de que con frecuencia se asume que los alumnos de Educación Secundaria tienen plenamente adquirida esta habilidad, los resultados obtenidos apuntan a lo contrario, especialmente entre los alumnos de entre 12 y 13 años.

Asimismo, se pone a disposición del profesorado la prueba incluida en el estudio, como herramienta que les permite determinar el nivel y las dificultades que muestran sus alumnos al representar sólidos tridimensionales. A partir del conocimiento del grado de desarrollo de los alumnos, los docentes podrán planificar de forma adecuada la instrucción necesaria en cada caso e implementar medidas que contribuyan a superar las dificultades manifestadas.

Si, por ejemplo, comprobáramos que los alumnos tienen problemas al representar aristas vistas y ocultas, diseñaríamos actividades que contribuyeran a discriminar unas de otras como la representación de sólidos contruidos con material "Orbit". Si detectáramos que sus representaciones no siguen las reglas del dibujo en perspectiva, podríamos centrar nuestra estrategia pedagógica en ayudarles a comprender que las líneas que son paralelas en el espacio también son paralelas en el papel (si la representación se realiza en perspectiva isométrica, que es la más comúnmente empleada por los alumnos de secundaria). Si, como es el caso de la muestra de alumnos que realizó la prueba para el presente estudio, observamos que nuestros alumnos

presentan más dificultades al representar cuerpos redondos que poliedros, haríamos más énfasis en este tipo de sólidos, realizando actividades con cuerpos como el cono o la esfera, de tal manera que nuestros alumnos tengan algún referente y puedan generalizar sus propiedades y características a otros cuerpos redondos.

De esta manera contribuiremos a que la calidad de las representaciones de los estudiantes aumente significativamente y a la mejora de su habilidad de visualización.

Las posibles líneas a seguir por las futuras investigaciones sobre representaciones planas de sólidos tridimensionales podrían ir encaminadas a profundizar en las diferencias de las representaciones de distintos sólidos, especialmente los cuerpos redondos, así como a determinar el grado de mejoría de las representaciones que realizan los alumnos con la instrucción. Para esto último resultaría interesante realizar un seguimiento de la evolución de las representaciones de un grupo de alumnos a lo largo de la etapa de Educación Secundaria.

Por otra parte, a pesar de existencia de los estudios mencionados, que constatan la importancia de la habilidad de visualización y la sustancial mejora que en ella supone la instrucción, la nueva ley de educación, la LOMCE, relega su estudio en profundidad a una asignatura de carácter no obligatorio, Educación Plástica, Visual y Audiovisual. Esto significa que la formación de parte del alumnado nunca se centrará específicamente en la habilidad de visualización y representación, con las consecuencias que este hecho puede acarrear para su vida académica (pues la visualización aparece de forma transversal en otras asignaturas) y cotidiana.

Por lo tanto, aunque el presente trabajo no se centra en promover un cambio en el sistema educativo, es necesario destacar la importancia de incluir la promoción y mejora de la habilidad de visualización y representación dentro del currículum obligatorio de la Educación Secundaria, para que la totalidad del alumnado sea instruido en esta fundamental competencia.

8. BIBLIOGRAFÍA

- Ben-Chaim, D., Lappan, G., y Houang, R. T. (1989). Adolescent's ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting student's performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.
- Bishop, A. J. (1988). A review of research on visualisation in mathematics education. *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 170-176.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Dickson, L., Gibson, O., y Brown, M. (1991). Pensamiento Espacial. En *El Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 15-87). Editorial Labor, S.A.
- Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. *Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 53-71.
- Gaulin, C., y Puchalska, E. (1987). Coded graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry. En I. Wirszup, y R. Streit (Eds.), *Development in School Mathematics Education around the World. Applications-Oriented Curricula and Technology-Supported Learning for all Students* (pp. 514-539). Reston, USA: N.C.T.M.
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., y Cáceres, M. (1989). La Enseñanza de la Geometría de Sólidos en la E.G.B. *Proyecto de investigación en curso de la Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo"*. Valencia, España.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memoria del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia.

- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. (L. Puig, y A. Gutiérrez, Eds.) *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-19.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en Primaria y Secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55-70.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares, y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.
- Lean, G., y Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Lewis, H. P., y Livson, N. (1967). Correlates of developmental level of spatial representation in children's drawings. *Studies in Art Education*, 8(2), 46-55.
- Mitchelmore, M. C. (1976). Cross-cultural research on concepts of space and geometry. En J. L. Martin, y D. A. Bradbard (Eds.), *Space and Geometry* (pp. 143-184).
- Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representations of regular space figures. *Journal of Research in Mathematics Education*, 11(2), 83-93.
- OrientaGuía. (s.f). Recuperado el 22 de 01 de 2015, de <https://orientaguia.wordpress.com/2014/10/15/todo-sobre-la-lomce/>

- Parzysz. (1988). "Knowing" vs. "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- Santrock, J. W. (2004). El desarrollo del pensamiento en los adolescentes. In *Psicología del desarrollo en la adolescencia* (pp. 90-93). Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España.
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. *Academic Press*.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vygotsky, L. (1988). Interacción entre aprendizaje y desarrollo. En *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (pp. 123-140). Grijalbo: Austral.
- Woodrow, D. (1991). Children drawing cubes. *Mathematics Teaching*, 136, 30-33.
- Yakimanskaya, I. S. (1991). The development of spatial thinking in school children. *Soviet Studies in Mathematics Education*, 3.