Facultad de Ciencias

# SOBRE LA CLASIFICACIÓN ANALÍTICA DE CURVAS PLANAS: CURVAS CON NÚMERO DE MILNOR MENOS NÚMERO DE TJURINA MENOR O IGUAL A UNO

## (About the analytic classification of plane curves: curves whose difference between the Milnor and Tjurina numbers is at most one)

Trabajo de Fin de Máster
para acceder al

**MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN**

Autor: Luis González de la Fuente

Directora: Nuria Corral Pérez

Julio – 2019

“La España de charanga y pandereta,
cerrado y sacristía,
devota de Frascuelo y de María,
de espíritu burlón y de alma quieta,
ha de tener su mármol y su día,
su infalible mañana y su poeta.”

Antonio Machado

# Resumen

En este trabajo vamos a introducir algunas herramientas básicas sobre los gérmenes de curvas planas irreducibles para poder analizar dos casos de clasificación analítica de curvas planas. Entre estas herramientas destacan los exponentes característicos, el semigrupo de una curva, el número de Milnor e invariantes analíticos como el número de Tjurina o el invariante lambda de Zariski. En la última sección definiremos el invariante analítico $r$, que es la diferencia entre el número de Milnor y el de Tjurina, para poder clasificar analíticamente a curvas que cumplan $r = 0$ y $r = 1$.



**Palabras clave:** *curva plana, clasificación analítica, invariante analítico, semigrupo.*



# Abstract

In this work we introduce some basic tools about the germs of plane irreducible curves in order to study two cases about analytic classification of plane curves. This tools are, for instance, the characteristic exponents, the semigroup of a curve, the Milnor number and analytic invariants such as the Tjurina number and the lambda invariant of Zariski. In the last section we are going to define the $r$ invariant, which is the difference between the Milnor number and the Tjurina number, in order to classify analytically plane curves with $r = 0$ and $r = 1$.



**Key words:** *plane curve, analytic classification, analytic invariant, semigroup.*

## Índice

## 1. Introducción.

El objetivo del presente trabajo es abordar el estudio local de gérmenes de curvas planas singulares. En particular, nos centraremos en el estudio de curvas irreducibles. Consideraremos dos tipos de clasificaciones: la topológica y la analítica.
La principal noción de equivalencia entre curvas planas, introducida por Zariski en [17], es la noción de *equisingularidad*: dos curvas son equisingulares si tienen la misma reducción de singularidades.
Las curvas pueden clasificarse como subespacios topológicos de $\mathbb{C}^2$: dos curvas planas irreducibles $B$ y $B'$ son *topológicamente equivalentes* (y escribiremos $B \equiv B'$) si existe un homeomorfismo $\Phi : U_B \longrightarrow U_{B'}$, con $U_B$ y $U_{B'}$ entornos abiertos del origen en $\mathbb{C}^2$, tales que:

- $B$ está definida en $U_B$ y $B'$ está definida en $U_{B'}$ (una curva plana está definida por una serie que converge en un entorno del origen);
- $\Phi(B \cap U_B) = B' \cap U_{B'}$.

Una descripción de la topología de la curva permite probar que las nociones de equisingularidad y equivalencia topológica para curvas planas son equivalentes (ver [6], p.96, para más detalles).
La clasificación analítica está dad por la siguiente relación: dos curvas planas irreducibles $B$ y $B'$ son *analíticamente equivalentes* (y escribimos $B \simeq B'$) si existe un isomorfismo analítico $\Phi : U_B \longrightarrow U_{B'}$, con $U_B$ y $U_{B'}$ entornos abiertos del origen de $\mathbb{C}^2$, tales que:

- $B$ está definida en $U_B$ y $B'$ está definida en $U_{B'}$;
- $\Phi(B \cap U_B) = B' \cap U_{B'}$.

En este trabajo se van a estudiar invariantes topológicos y analíticos para la clasificación de curvas planas (tales como el *número de Milnor* o el *número de Tjurina*).
En el capítulo 2 se enunciará el Teorema de Puiseux que permite obtener parametrizaciones de curvas singulares y a partir de ellas definir los *exponentes característicos* $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ de una curva plana. Los exponentes característicos permiten clasificar las curvas desde el punto de visto topológico, ya que Zariski probó en [16] que dos curvas planas irreducibles son equisingulares si, y sólo si, tienen los mismos exponentes característicos. Las parametrizaciones de Puiseux nos permiten calcular el exponente de contacto entre dos curvas irreducibles, y a partir de los exponentes de contacto entre las parametrizaciones obtener la multiplicidad de intersección de las dos curvas irreducibles.
Otro invariante de equisingularidad de una curva plana irreducible es el semigrupo de la curva que se define y estudia en el capítulo 3. El semigrupo $S(B)$ de una curva $B$ es el conjunto de todas las multiplicidades de intersección de la curva $B$ con cualquier otra curva. Los generadores de este semigrupo se pueden calcular a partir de los exponentes característicos de $B$.
En el capítulo 4 introducimos un nuevo invariante de una curva plana, el número de Milnor. Probaremos que para una curva irreducible $B$, el número de Milnor, $\mu(B)$, coincide con el conductor $c$ del semigrupo de la curva, obteniendo así que el número de Milnor también es un invariante topológico.
Por último, en el capítulo 5 introduciremos otro invariante de una curva plana, el número de Tjurina, $\tau(B)$. Este invariante es analítico y daremos un ejemplo para probar que no es topológico. Además el capítulo se centrará en el estudio de la clasificación analítica de las curvas planas $B$ tales que la diferencia entre su número de Milnor $\mu(B)$ y su número de Tjurina $\tau(B)$ es menor o igual a 1. En este estudio desempeñará un papel importante el módulo de las diferenciales de Kähler de la curva $B$, $\Omega_B$.

Actualmente el problema de clasificación analítica de curvas planas irreducibles ha sido completamente resuelto en el año 2011 por A.Hefez y M.E.Hernandes en el artículo [8].

## 2. Conocimientos Previos.

En esta sección vamos a introducir los objetos con los que vamos a trabajar y a fijar la notación que utilizaremos en todo el trabajo.
La primera pregunta es, ¿a qué nos referimos cuándo hablamos de curvas planas?. La idea básica para pensar qué es una curva es entenderla como un conjunto de puntos (en nuestro caso de $\mathbb{C}^2$) que verifican una cierta ecuación $f(x,y)=0$.
Pero, ¿qué podemos tomar por $f$?. Vamos a considerar que $f$ es una serie de potencias formal con coeficientes complejos, que no es más que expresiones del tipo,

$$f(x,y)=\sum_{i,j\geq 0}^{\infty} a_{i,j}x^iy^j,$$

que forman un anillo, denotado por $\mathbb{C}[[x,y]]$, con las operaciones naturales que ya se conocen. En particular, trabajaremos con un subanillo de dicho anillo, el anillo de series de potencias convergentes, $\mathbb{C}\{x,y\}$. Esto se debe a que vamos a estudiar las curvas desde un punto de vista local. Los elementos de dicho subanillo se definen en un entorno de un punto (en nuestro caso del origen de coordenadas). Tienen la particularidad que son series de potencias formales tales que si sustituimos en la serie puntos de un entorno del origen tenemos series convergentes, con lo que el conjunto:

$$\{(x,y)\in\mathbb{C}:\ f(x,y)=0\}$$

no es vacío, cosa que sí podía ocurrir si consideramos el anillo de series de potencias formales. Los cálculos del presente trabajo se pueden ver también en dicho anillo.
Los elementos que poseen inverso en el anillo de series de potencias convergentes, es decir las unidades del anillo, son aquellos elementos tales que $a_{0,0}\neq 0$.
El *orden*(o *multiplicidad*) de una serie de potencias convergente es el menor número, $n$, distinto de 0 tal que, para algunos $i,j$ se tiene que $i+j=n$, de manera que $a_{i,j}\neq 0$. La denotarmemos por $m_O(f)$. Escrita esta definición de manera matemática:

$$m_O(f)=\text{mín}\{i+j:\ a_{i,j}\neq 0\}.$$

Otra forma de ver/estudiar las curvas es mediante el concepto de parametrizaciones. La idea más cercana es la de grafos, donde la coordenada $y$ se expresa en función de la coordenada $x$. De manera general, tenemos un parámetro $t$, con cada $x$ e $y$ expresado en función de $t$,

$$x=\eta(t);\ y=\varphi(t),$$

con $\eta$ y $\varphi$ series de potencias en la variable $t$.
Lo que se busca para obtener parametrizaciones de este tipo es que se cumpla que:

$$f(\eta(t),\varphi(t))=0.$$

Vamos, por tanto, a dar una definición de *curva plana.*

**Definición 2.1.** Un (germen de) *curva plana* $C$ en $O$ es el conjunto

$$C=\{p\in U: f(p)=0\},$$

donde $f\in\mathbb{C}\{x,y\}$ es una serie de potencias convergente en un entorno $U$ del origen $O$ y $f(0,0)=0$.

Como la multiplicidad de una serie de potencias se conserva por el producto de una unidad definimos la *multiplicidad de una curva* $C=(f=0)$ como la multiplicidad de $f$.
En el presente trabajo vamos a estudiar a curvas planas en entornos del origen $O=(0,0)\in\mathbb{C}^2$. Decimos que una curva $C$, definida como antes, tiene una *singularidad* en $O$ si $f(0,0)=0$ y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0;\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Observamos que si una curva tiene multiplicidad 1, entonces no puede ser singular. Si la multiplicidad es mayor que 1 entonces diremos que la curva es singular y coincide con la definición que acabamos de dar en términos de sus derivadas parciales.
Ahora, vamos a definir un concepto que vamos a utilizar posteriormente, que es el de *germen de una curva plana.* Dadas dos funciones $f_1: U_1\longrightarrow\mathbb{C}$ y $f_2: U_2\longrightarrow\mathbb{C}$, con $U_1$ y $U_2$ dos entornos de $O$ en $\mathbb{C}^2$,

decimos que definen el mismo *germen* en $O$ si existe otro entorno $U$ de $O$ en $\mathbb{C}^2$, con $U \subset U_1 \cap U_2$, de manera que:

$$f_1(u) = f_2(u), \text{ para todo } u \in U.$$

Dada una curva plana $C = (f = 0)$, decimos que $C$ es irreducible si la serie $f$ es irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$. Una curva plana irreducible también lo llamaremos *rama*.
Uno de los problemas fundamentales de este campo de estudio es la clasificación de curvas planas módulo la relación de equivalencia que vamos a dar a continuación.

**Definición 2.2.** Dos curvas planas $(f = 0)$ y $(g = 0)$ se dicen *equivalentes*, y escribimos $(f = 0) \sim (g = 0)$, si existe un $\mathbb{C}$-automorfismo $\Phi$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$, de manera que:

$$(\Phi(f) = 0) = (g = 0),$$

es decir, $(f = 0)$ y $(g = 0)$ son equivalentes si existe un $\mathbb{C}$-automorfismo $\Phi$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ y una unidad $u \in \mathbb{C}\{x, y\}$, tal que:

$$\Phi(f) = u \cdot g.$$

Para darnos cuenta de la dificultad del problema de clasificación vamos a dar dos curvas que, a priori, son muy diferentes, pero que son equivalentes.
La serie de potencias,

$$f = y^2 - x^3,$$

y,

$$g = (-x^3 - 6x^2 - 12x - 8)y^3 + (-3x^3 - 12x^2 - 12x + 9)y^2 + (-3x^3 - 6x^2 - 12x)y - x^3 + 4x^2$$

son equivalentes, ya que:

$$\Phi(f) = g,$$

donde,

$$\Phi(x, y) = (x + 2y + xy, 2x - 3y),$$

luego tenemos que $(f = 0) \sim (g = 0)$.
Vamos a seguir dando más definiciones sobre curvas. Supongamos que $(f = 0)$ es una curva plana con multiplicidad $n$, entonces podemos escribir:

$$f = f_n + f_{n+1} + \dots,$$

donde cada $f_i$ es un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}[x, y]$ de grado $i$ y $f_n \neq 0$. Llamamos a la curva $(f_n = 0)$ el *cono tangente* de la curva $(f = 0)$.
Como ya sabemos, todo polinomio homogéneo en dos variables con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado se descompone en factores lineales, entonces,

$$f_n(x, y) = \prod_{i=1}^{s} (a_i x + b_i y)^{r_i},$$

con $\sum_{i=1}^{s} r_i = n$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, para todo $i, j = 1, \dots, s$. Luego el cono tangente de una curva consiste en rectas de la forma $(a_i x + b_i y = 0)$, con $i = 1, \dots, s$. Dichas rectas se llamas las *rectas tangentes* de la curva $(f = 0)$.

**Ejemplo 2.1.** Sea la curva $(y^2 - x^3 = 0)$, su cono tangente es la recta $(y = 0)$ contada con multiplicidad 2.
El cono tangente de la curva $(y^2 - x^2(x + 1) = 0)$ son las dos rectas $(y + x = 0)$ e $(y - x = 0)$ contadas cada una con multiplicidad 1.

Dada una serie de potencias convergente en una varible, $\mathrm{A}(x) \in \mathbb{C}\{x\}$, la podemos considerar como la suma:

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i.$$

De la misma manera que hemos definido el orden o multiplicidad de una serie de potencias en dos variables, definimos en este caso la multiplicidad en $x$ de la serie $\mathrm{A}(x)$ como:

$$\mathrm{ord}_x(\mathrm{A}(x)) := \min\{i : a_i \neq 0\}.$$

**2.1. Teorema de Puiseux y exponentes característicos.** En esta subsección vamos a enunciar el Teorema de Puiseux el cual nos permite obtener parametrizaciones de curvas planas (lo que se conocen como *parametrizaciones de Puiseux*). A partir de ellas definiremos lo que se conocen como *exponentes característicos.*
Antes de comenzar daremos una serie de definiciones y resultados que motivarán la introducción del Teorema de Puiseux.
En esta subsección seguiremos principalmente [7], [9] y [14].

**Definición 2.3.** Un *polinomio de Weierstrass* en la variable $y$ es una serie de potencias en $\mathbb{C}\{x,y\}$ de la forma,

$$P(x,y) = y^n + \mathrm{A}_1(x)y^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n(x) \in \mathbb{C}\{x\}[y],$$

de manera que $n \geq 1$ y $\mathrm{ord}_x(\mathrm{A}_i) \geq i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

El siguiente resultado se puede encontrar en [7].

**Proposición 2.4.** Sea $f \in \mathbb{C}\{x,y\} \setminus \{0\}$ una serie de potencias convergente con multiplicidad $n$. Existe un $\mathbb{C}$-automorfismo $T$ de $\mathbb{C}\{x,y\}$, una unidad $u \in \mathbb{C}\{x,y\}$ y series $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}\{x\}$ con $\mathrm{ord}_x(A_i) \geq i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, de manera que:

$$T(f) \cdot u = y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Luego esta proposición nos dice que toda curva algebraica plana es equivalente a un *polinomio de Weierstrass* en $\mathbb{C}\{x\}[y]$, es decir, que es equivalente a un polinomio en la variable $y$ con coeficientes en $\mathbb{C}\{x\}$, con lo que es coherente pensar en alguna manera de encontrar las raíces del polinomio en el anillo de series de potencias formales en la variable $x$.
Dada una curva $(f = 0)$, con $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$, nos planteamos si existe algún método que nos permita calcular series de potencias $y = s(x)$, de manera que:

$$f(x, s(x)) = 0.$$

Si consideramos, como en casos anteriores, la curva $(y^2 - x^3 = 0)$ y queremos encontrar una seire $s(x)$ tal que $s(x)^2 - x^3 = 0$. Podemos ver que $s(x) = x^{3/2}$ es una expresión válida. El inconveniente es que $s(x) \notin \mathbb{C}\{x\}$ (tampoco pertenece a $\mathbb{C}[[x]]$). Este ejemplo nos lleva a introducir las series de potencias fraccionarias.
Consideramos el anillo de series de potencias formales en una variable $\mathbb{C}\{x\}$ y denotamos por $\mathbb{C}((x))$ su cuerpo de fracciones. Los elementos del cuerpo $\mathbb{C}((x))$ se escriben como,

$$h(x) = \left(\frac{1}{x^k}\right) \sum_{i \geq 0} a_i x^i,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y $a_0 \neq 0$. Es decir, los elementos del cuerpo $\mathbb{C}((x))$ son *series de Laurent.*
Consideramos $\mathbb{C}((t))$ el anillo de series de Laurent en la variable $t$. Si fijamos $m \in \mathbb{N}$, la siguiente aplicación es un homomorfismo inyectivo de anillos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{m,1}\colon & \mathbb{C}((x)) & \longrightarrow & \mathbb{C}((t)) \\ & \sum_{i \geq k} a_i x^i & \longmapsto & \sum_{i \geq k} a_i t^{m \cdot i} \end{array}$$

Como es inyectiva podemos identificar los elementos de $\mathbb{C}((x))$ con los elementos de $\Phi_{m,1}(\mathbb{C}((x))) \subset \mathbb{C}((t))$. Así, si escribimos $x = t^m$, por lo tanto $t = x^{1/m}$, luego:

$$\mathbb{C}((t)) = \mathbb{C}((x^{1/m})).$$

De esta manera, un elemento $s(x) \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$ se escribe como una serie de Laurent formal con exponentes racionales del tipo $\sum_{i \geq k} a_i x^{i/m}$.
Cuando $n \in \mathbb{N}$ sea múltiplo de $m$, es decir $n = dm$ con $d \in \mathbb{N}$, podemos definir un homomorfismo inyectivo,

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{m,n}\colon & \mathbb{C}((x^{1/m})) & \longrightarrow & \mathbb{C}((x^{1/n})) \\ & \sum_{i \geq k} a_i x^{i/m} & \longmapsto & \sum_{i \geq k} a_i x^{di/dm} \end{array}$$

Consideramos así el conjunto,

$$\mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}((x^{1/n})).$$

Podemos considerar así las aplicaciones,

$$\begin{array}{rccc} \Phi_n\colon & \mathbb{C}((x^{1/n})) & \longrightarrow & \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle \\ & \sum_{i\geq k} a_i x^{i/n} & \longmapsto & \sum_{i\geq k} a_i x^{i/n}, \end{array}$$

que las podemos entender como inclusiones.
Un elemento $s(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ tiene algún representante en $\mathbb{C}((x^{1/n}))$, es decir, un elemento $s_n(x) \in \mathbb{C}((x^{1/n}))$ de manera que $\Phi_n(s_n(x)) = s(x)$. Dicho representante es único en $\mathbb{C}((x^{1/n}))$. Por otra parte, si $s_m(x) \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$ es otro representante de $s(x)$, tomando $k$ un múltiplo común a $n$ y $m$, tenemos que $s_k(x) = \Phi_{m,k}(s_m(x)) = \Phi_{n,k}(s_n(x))$ es otro representante de $s(x)$ en $\mathbb{C}((x^{1/k}))$. Esto permite realizar operaciones en $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$. Dadas dos series $s(x), p(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$, tomamos $n \in \mathbb{N}$ de manera que $s(x)$ y $p(x)$ tengan representantes $s_n(x)$ y $p_n(x)$ en $\mathbb{C}((x^{1/n}))$. Hacemos las operaciones de suma y producto entre las series de Laurent $s_n(x)$ y $p_n(x)$ en $\mathbb{C}((x^{1/n}))$ y, seguidamente, hacemos la inclusión en $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$, es decir:

$$s(x) + p(x) := \Phi_n(s_n(x) + p_n(x)); \;\; s(x)\cdot p(x) = \Phi_n(s_n(x)\cdot p_n(x)).$$

Como cada $\mathbb{C}((x^{1/n}))$ es un cuerpo y cada $\Phi_n$ es inyectiva se puede comprobar fácilmente que $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ con las operaciones definidas es también un cuerpo. Este es al que llamamos *cuerpo de series de potencias fraccionarias.*
Sea $s(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$. Tomando un representante en algún $\mathbb{C}((x^{1/n}))$ podemos escribir $s(x)$ en serie de Laurent $\sum_{i\geq k} a_i x^{i/n}$. El *orden de* $s(x)$, denotado por $\mathrm{ord}_x(s(x))$, se define por $\mathrm{ord}_x(s(x)) = \infty$ si $s(x) = 0$ y por:

$$\mathrm{ord}_x(s(x)) = \frac{\min\{i : \; a_i \neq 0\}}{n}, \text{ si } s \neq 0.$$

Tal como lo hemos definido, el orden no depende del representante escogido. Un elemento $s(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ tal que $\mathrm{ord}_x(s(x)) \geq 0$ es llamado *serie de Puiseux.* Si una serie de Puiseux $s(x)$ tiene representante en algún $\mathbb{C}((x^{1/m}))$, del tipo $\sum_{i\geq k} a_i x^{i/m}$ entonces $k \geq 0$. Denotaremos por $\mathbb{C}\{x^{1/m}\}$ al conjunto de las series de Puiseux en $\mathbb{C}((x^{1/m}))$.

Si tomamos $s(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ una serie de potencias fraccionaria, tomando un representante en algún $\mathbb{C}((x^{1/m}))$, podemos escribir $s(x) = \sum_{i\geq k} a_i x^{i/m}$. Cancelando los factores comunes, podemos suponer que los exponentes $i$ tales que $a_i \neq 0$ y $m$ no tienen factores en común. Esto es equivalente a tomar de entre todos los $\mathbb{C}((x^{1/m}))$ para los cuales $f$ tiene representante aquel con $m$ minimal. Dicho $m$ será llamado *orden de polidromía* de $f$.
Sea $s(x) \in \mathbb{C}\{x^{1/m}\}$ una serie de Puiseux. Si $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es una serie de potencias formal, si sustituimos la variable $y$ por la serie $s(x)$ obtenemos un elemento en el conjunto de series de Puiseux $f(x, s(x)) \in \mathbb{C}\{x^{1/m}\}$. Así, definimos el siguiente homomorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \Psi_s\colon & \mathbb{C}\{x,y\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{x^{1/m}\} \\ & f(x,y) & \longmapsto & f(x,s(x)). \end{array}$$

**Definición 2.5.** Dada $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, decimos que $s(x) \in \mathbb{C}\{x^{1/m}\}$ con término constante no nulo es una *$y$-raíz* de $f$ si $\Psi_s(f) = 0$.

Dada $\xi \in \mathbb{C}$ una raíz $m$-ésima de la unidad, podemos definir el automorfismo,

$$\begin{array}{rccc} \Delta_\xi\colon & \mathbb{C}((x^{1/m})) & \longrightarrow & \mathbb{C}((x^{1/m})) \\ & \sum_{i\geq k} a_i x^{i/m} & \longmapsto & \sum_{i\geq k} a_i \xi^i x^{i/m} \end{array}$$

Si $s(x) \in \mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ tiene un representante, $s_m(x)$ en $\mathbb{C}((x^{1/m}))$, entonces los elementos de $\mathbb{C}\langle\langle x\rangle\rangle$ que corresponden a $\Delta_{\xi_l}(s_m(x))$, para $l = 1, \ldots, m$, son llamados *conjugados de* $s(x)$, donde $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$ son las $m$ raíces $m$-ésimas de la unidad. Un resultado básico en esta teoría es el siguiente (ver [9]).

**Proposición 2.6.** Si $s(x) \in \mathbb{C}\{x^{1/m}\}$ es una $y$-raíz de una serie de potencias convergente $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, entonces todos sus conjugados también lo son.

Vamos a dar por supuesto que ya es conocido por el lector el *algoritmo de Newton-Puiseux.* Dicho algoritmo nos permite calcular todas las $y$-raíces de una serie $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ (ver [9]). Como consecuencia de este procedimiento tenemos el Teorema de Puiseux (ver [14]):

**Teorema 2.7.** *(Puiseux)* Si $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ y $x$ no es tangente a $f$, entonces existe una serie de Puiseux $s(x)$ que es $y$-raíz de $f$, esto es, $f(x, s(x)) = 0$.

Como corolario de este teorema (ver [14]):

**Corolario 2.8.** Si $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$, entonces dicha serie tiene una descomposición única:

$$f = u \cdot x^r \cdot \prod_{j=1}^{n} (y - s_j(x)),$$

donde $s_j(x)$ son series de Puiseux, $r \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathbb{C}\{x,y\}$ es una unidad. Además, las series $s_j(x)$ son las $y$-raíces de $f$ dadas por el algoritmo de Newton-Puiseux.

Dada una curva $C$ irreducible definida por la serie $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Supongamos que $s_1(x), \dots, s_n(x)$ son las $y$-raíces que obtenemos a partir del algoritmo de Newton-Puiseux. Sabemos que $s_j(x) \in \mathbb{C}\{x^{1/n}\}$, para todo $j = 1, \dots, n$ y, fijada una $y$-raíz $s_{i_0}(x)$, con $1 \leq i_0 \leq n$, las demás $y$-raíces se obtienen como conjugadas de esta, mediante la aplicación antes descrita $\Delta_\xi$, con $\xi$ una raíz $n$-ésima de la unidad.
Si $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$, y consideramos una $y$-raíz de $f$ de la forma $y = s(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i/n}$, si identificamos $t = x^{1/n}$, podemos parametrizar la curva $C : (f = 0)$ definida por la serie $f$ mediante las siguientes expresiones,

$$x(t) = \eta(t) = t^n; \quad y(t) = \varphi(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i.$$

A dichas parametrizaciones las vamos a llamar *parametrizaciones de Puiseux*. En lo que sigue escribiremos directamente $x(t) = t^n$, pero seguiremos manteniendo la notación $y(t) = \varphi(t)$ para referirnos a la parametrización de Puiseux.
Nótese que si $s(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{i/n}$ es una $y$-raíz de la curva $C$, tenemos que $\varphi(t) = s(t^n)$. Por lo tanto, denotar la parametrización por $\varphi(t)$ no tiene mayor significado que el de simplificar la notación.
Si $C$ es una curva irreducible y $x = 0$ no es tangente a la rama $C$, entonces haciendo un cambio de coordenadas podemos suponer que tenemos una parametrización de la forma:

$$x(t) = t^n; \quad y(t) = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} a_i t^i,$$

con $m > n$ y $a_m \neq 0$.
Podemos definir en este momento los *exponentes característicos o de Puiseux* como:

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = e_0 = n \\
&\beta_i = \min\{k : \ a_k \neq 0, \ k \not\equiv 0 \bmod e_{i-1}\} \\
&e_i = GCD(\beta_i, e_{i-1}).
\end{aligned}$$

Hallamos dichos números hasta llegar a un $g$ tal que $e_g = 1$.

Para todo $k = 0, \dots, g$, definimos:

$$G_k := \{\xi \in \mathbb{C} : \ \xi^{e_k} = 1\},$$

es decir, $G_k$ es el conjunto de las raíces $e_k$-ésimas de la unidad. Por construcción, $e_k$ divide a $e_{k-1}$, por lo tanto:

$$G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_g = \{1\}.$$

Sea $C : (f = 0)$ una curva plana e irreducible, con parametrización de Puiseux:

$$x(t) = t^n; \; y(t) = \varphi(t) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i.$$

Entonces, tenemos el siguiente resultado (ver [7]):

**Lema 2.9.** Si $\xi \in G_k \setminus G_{k+1}$, entonces $\mathrm{ord}_t(\varphi(t) - \varphi(\xi t)) = \beta_{k+1}$, para todo $k = 0, 1, \dots, g - 1$.

*Demostración.* Dado $k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$, podemos escribir

$$\varphi(t) = \sum_{i=m}^{\beta_{k+1}-1} a_i t^i + \sum_{i \geq \beta_{k+1}} a_i t^i.$$

Si $\xi \in G_k \setminus G_{k+1}$ sabemos, por cómo construimos los $\{e_i\}_i$ que,

$$\sum_{i=m}^{\beta_{k+1}-1} a_i (\xi t)^i = \sum_{i=m}^{\beta_{k+1}-1} a_i t^i,$$

luego,

$$\varphi(t) - \varphi(\xi t) = (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) a_{\beta_{k+1}} t^{\beta_{k+1}} + \ldots,$$

y como $\xi \in G_k \setminus G_{k+1}$, entonces $\xi^{\beta_{k+1}} \neq 1$. □

Hacemos especial mención al hecho de que estamos trabajando con las expresiones $\varphi(t)$ y $\varphi(\xi t)$, pero es lo mismo que considerar una $y$-raíz $s(x)$ y trabajar con sus conjugados, ya que estos se obtienen como $\Delta_\xi(s(x))$, luego la parametrización que corresponde a los conjugados es $\varphi(\xi t)$.
El resultado del lema anterior nos relaciona a los exponentes característicos $\beta_k$ con las $y$-raíces que obtenemos mediante el algoritmo de Newton-Puiseux.

A continuación, vamos a asociar a cada par de curvas planas un número natural, que se conoce como *multiplicidad de intersección*. Como estamos trabajando con gérmenes de curvas en el origen, vamos a considerar la multiplicidad de intersección en dicho punto. Este número nos da información de cómo se cortan las curvas en $O$, es decir, intenta medir de alguna manera la intersección de dos curvas. Se puede pensar que la manera en la que se cortan dos rectas transversales que pasen por el origen no es la misma forma de intersección que la parábola $(y - x^2 = 0)$ con la recta $(y = 0)$. De esta manera, definimos la multiplicidad de intersección entre dos curvas $B = (f = 0)$ y $B' = (f' = 0)$ como,

$$\mathrm{I}_O(B, B') := \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, f')} \right),$$

donde $(f, f')$ es el ideal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ generado por $f$ y $f'$. También denotaremos la multiplicidad de intersección entre dos ramas $B = (f = 0)$ y $B' = (f' = 0)$ por $\mathrm{I}_O(f, f')$.
Para finalizar esta sección vamos a dar unas propiedades básicas de la multiplicidad de intersección. Definimos por $\mathcal{M} = (x, y)$ el ideal maximal del anillo $\mathbb{C}\{x, y\}$. El siguiente resultado se puede encontrar en [7].

**Proposición 2.10.** Sean $f, f', h \in \mathcal{M}$, $\Phi$ un automorfismo de $\mathbb{C}\{x, y\}$ y $u, v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ dos unidades. Entonces,

1. $\mathrm{I}_O(f, f') < \infty$ si, y sólo si $f$ y $f'$ son primos relativos en $\mathbb{C}\{x, y\}$.
2. $\mathrm{I}_O(f, f') = \mathrm{I}_O(f', f)$.
3. $\mathrm{I}_O(\Phi(f), \Phi(f')) = \mathrm{I}_O(uf, vf') = \mathrm{I}_O(f, f')$.
4. $\mathrm{I}_O(f, f'h) = \mathrm{I}_O(f, f') + \mathrm{I}_O(f, h)$.
5. $\mathrm{I}_O(f, f' - hf) = \mathrm{I}_O(f, f')$.

Como última propiedad de la multiplicidad de intersección de dos curvas vamos a enunciar y a demostrar un resultado que nos permite calcular la multiplicidad de intersección de dos curvas a partir de una parametrización de una curva y la ecuación de la otra.
Antes de probar este resultado enunciaremos un resultado que nos ayudará a demostrarlo. La demostración usa técnicas de Álgebra Lineal (ver [7]):

**Teorema 2.11.** Sean $V$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y $L : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal inyectiva. Sea $W \subset V$ un subespacio vectorial de $V$, de manera que $L(W) \subset W$. Entonces, se tienen las dos afirmaciones siguientes:

1. $\frac{V}{W} \simeq \frac{L(V)}{L(W)}$.

2. Si $\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{W}\right) < \infty$ y $\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{L(V)}\right) < \infty$, entonces:

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{W}{L(W)}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{L(V)}\right).$$

Sea $B$ una rama definida por $f(x,y)$, con $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$. Definimos el anillo local de la rama $B$, y lo denotamos por $\mathcal{O}_B$, como el anillo cociente:

$$\mathcal{O}_B := \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f)}.$$

Llegamos al resultado principal (ver [7]):

**Teorema 2.12.** Sean $B$ y $B'$ dos ramas, definidas por $f$ y $f'$, respectivamente. Supongamos que $x(t) = t^n;\ y(t) = \varphi(t)$ es una parametrización de Puiseux de $f$, con $n = m_O(f)$, la multiplicidad de la rama $B$. Entonces,

$$\mathrm{I}_O(B,B') = \mathrm{ord}_t(f'(x(t),y(t))).$$

*Demostración.* Como tanto $f$ como $f'$ son irreducibles, por ser $B$ y $B'$ ramas, tenemos que $f'(x(t),y(t)) \neq 0$. Definimos la aplicación lineal:

$$\begin{array}{rccc} L\colon & \mathbb{C}\{t\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & g(t) & \longmapsto & g(t)\cdot f'(x(t),y(t)), \end{array}$$

Por lo dicho anteriormente, si $g \neq 0$, entonces $L(g) \neq 0$, con lo que $L$ es inyectiva.
Denotamos por $V$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}\{t\}$ y por $W$ el subespacio vectorial $\mathbb{C}\{t^n,\varphi(t)\}$ de $V$. Está claro que:

$$W \simeq \mathcal{O}_B,$$

ya que, si definimos el siguiente homomorfismo de anillos,

$$\begin{array}{rccc} \gamma^*\colon & \mathbb{C}\{x,y\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & g(x,y) & \longmapsto & g(t^n,\varphi(t)), \end{array}$$

tenemos que $\mathrm{Ker}(\gamma^*) = (f)$. Por el primer teorema de isomorfía

$$\mathcal{O}_B = \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{\mathrm{Ker}(\gamma^*)} \simeq \mathrm{Im}(\gamma^*) = \{g(t^n,\varphi(t)):\ g \in \mathbb{C}\{x,y\}\} = W.$$

Además,

$$L(W) = \{g(t^n,\varphi(t))f'(t^n,\varphi(t)):\ g \in \mathbb{C}\{x,y\}\},$$

por lo tanto, $L(W) \simeq (\overline{f'})$, donde $\overline{f'}$ es la imagen del elemento $f'$ en el anillo $\mathcal{O}_B$.
Tenemos que,

$$\frac{V}{L(V)} = \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(f'(t^n,\varphi(t)))}.$$

Por resultados acerca del discriminante (ver [7], Teorema 4.4. y Corolario 4.5.) tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{W}\right) < \infty.$$

Por último,

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{L(V)}\right) = \mathrm{ord}_t(f'(t^n,\varphi(t))) < \infty.$$

Por lo tanto, estamos en el caso de todas las hipótesis del teorema anterior que hemos enunciado, salvo por el hecho de que no hemos comprobado que $L(W) \subset W$, pero esto es claro, ya que:

$$L(W) = \{h(t^n,\varphi(t))f'(t^n,\varphi(t)):\ h \in \mathbb{C}\{x,y\}\}.$$

Es evidente que toda expresión del tipo $h(t^n, \varphi(t))f'(t^n, \varphi(t))$ es una serie de potencias en las variables $t^n$ y $\varphi(t)$, por lo tanto $L(W) \subset W$.
Si aplicamos el teorema anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_O(B, B') = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f,f')}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\mathcal{O}_B}{(\overline{f'})}\right) = \\ = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{W}{L(W)}\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{V}{L(V)}\right) = \mathrm{ord}_t(f'(t^n, \varphi(t))).\end{aligned}$$

$\square$

En lo que sigue, dada una rama $B$ con ecuación $f(x, y) = 0$ y parametrización de Puiseux,

$$x(t) = t^n; \; y(t) = \varphi(t),$$

vamos a definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl}\nu_f: & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & g(x,y) & \longmapsto & \mathrm{ord}_t(g(t^n, \varphi(t))).\end{array}$$

Esta aplicación verifica las propiedades de una *valoración*, pues verifica

- $\nu_f(g(x, y)) = \infty$ si, y sólo si, $g(x, y) = 0$.
- $\nu_f(g(x, y) \cdot h(x, y)) = \nu_f(g(x, y)) + \nu_f(h(x, y))$ para todo $g(x, y), h(x, y) \in \mathcal{O}_B$.
- $\nu_f(g(x, y) + h(x, y)) \geq \text{mín}(\nu_f(g(x, y)), \nu_f(h(x, y)))$ para todo $g(x, y), h(x, y) \in \mathcal{O}_B$.

En lo que sigue denotaremos por $\nu$ a dicha valoración. Dicha valoración $\nu$ jugará un papel fundamental en lo que resta de trabajo.
Por lo tanto, con lo que acabamos de demostrar, si $B'$ es otra rama con ecuación $f'(x, y) = 0$, entonces la multiplicidad de intersección en el origen entre $B$ y $B'$ es:

$$\mathrm{I}_O(B, B') = \nu(f').$$

**2.2. Contacto y multiplicidad de intersección de dos ramas.** En esta sección vamos a introducir lo que se conoce como contacto y multiplicidad de intersección entre dos ramas, que es una manera de relacionar a las ramas teniendo en cuenta sus parametrizaciones de Puiseux.
Primeramente, hablaremos sobre el contacto que pueden tener dos ramas, para en la sección siguiente relacionarlo con el semigrupo de un rama y obtener importantes fórmulas.
En esta subsección hemos seguido fundamentalmente la referencia [14].

Sea $C$ una rama, con ecuación $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ y supongamos que el eje $y$ no es tangente a $C$ en el origen $O$. Por el *teorema de Puiseux* tenemos que existirá una $y$-raíz de $f$ dada por:

$$s(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^{i/n}$$

Vamos a introducir el *exponente de contacto de dos ramas*. Sean $C$ y $D$ dos gérmenes de curvas planas irreducibles en $(\mathbb{C}^2, O)$. Denotamos por $\{s_i^C(x)\}_{i=1}^{n}$ e $\{s_j^D(x)\}_{j=1}^{n'}$ las parametrizaciones de Puiseux de $C$ y $D$, respectivamente, con $n = m_O(C)$ y $n' = m_O(D)$ las multiplicidades en el origen de $C$ y $D$. Si una parametrización de Puiseux de la rama $C$ es de la forma,

$$s(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^{i/n},$$

las demás parametrizaciones se consiguen tomando las raíces $n$-ésimas de la unidad y sustituyéndolas en $s(x)$ de la siguiente manera,

$$s_l^C(x) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \xi_l^i x^{i/n},$$

con $\xi_l^n = 1$ y $1 \leq l \leq n$. Definimos el *exponente de contacto* de dos parametrizaciones $s_i^C(x)$ e $s_j^D(x)$ como,

$$\mathcal{O}(s_i^C, s_j^D) := \mathrm{ord}_x\{s_i^C(x) - s_j^D(x)\}. \tag{2.1}$$

Escribimos $\mathcal{Z}(C)$ para denotar al conjunto de parametrizaciones de Puiseux de una rama dada $C$. Así, definimos el *exponente de contacto de dos ramas* como:

$$\mathcal{O}(C,D) := \sup_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n'}} \{ord_x(s_i^C(x) - s_j^D(x))\}.$$

Supongamos que $C$ es un germen de curva plana irreducible en un entorno del origen en $\mathbb{C}^2$ que tiene por exponentes característicos $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$. Definimos los siguientes números,

$$\alpha_q := \frac{\beta_q}{n},$$

donde $n = m_O(C)$ y $0 \leq q \leq g$. Así, podemos probar el siguiente resultado que relaciona dichos exponentes característicos de una rama con los exponentes de contacto entre dos ramas.

**Proposición 2.13.** Sea $C$ un germen de curva plana irreducible en $(\mathbb{C}^2, O)$ con exponentes característicos $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ y con $\alpha_q = \frac{\beta_q}{n}$, para $q = 0, \ldots, g$. Consideremos $D$ otro gérmen de curva plana e irreducible en un entorno del origen en $\mathbb{C}^2$ con $\mathcal{O}(C,D) = \mathcal{K}$ verificando $\alpha_q < \mathcal{K} \leq \alpha_{q+1}$. Dada una $y$-raíz $s^D \in \mathcal{Z}(D)$, tenemos que

1. el cardinal del conjunto $\{s^C \in \mathcal{Z}(C) : \ \mathcal{O}(s^C, s^D) = \alpha_i\}$ es igual a $e_{i-1} - e_i$ para $1 \leq i \leq q$.
2. el cardinal del conjunto $\{s^C \in \mathcal{Z}(C) : \ \mathcal{O}(s^C, s^D) = \mathcal{K}\}$ es igual a $e_q$.

*Demostración.* Centrémonos en cómo escribimos la parametrización de Puiseux para las distintas parametrizaciones de la rama $C$. Como ya hemos comentado, si:

$$s^C(x) = \sum_{i\geq m} a_i x^{i/n},$$

es una parametrización de Puiseux de $C$, entonces las demás parametrizaciones se obtienen tomando raíces $n$-ésimas de la unidad, $\xi_l \in \mathbb{C}$,

$$s_l^C(x) = \sum_{i\geq m} a_i \xi_l^i x^{i/n}.$$

Por otra parte, las raíces $n$-ésimas de la unidad se pueden expresar de la siguiente forma,

$$\xi_l = e^{\frac{2\pi i l}{n}},$$

con $1 \leq l \leq n$.
A continuación vamos a probar que, dada una parametrización $s^D(x) \in \mathcal{Z}(D)$, existe un $1 \leq i \leq n$, de manera que:

$$\mathcal{O}(s_i^C(x), s^D(x)) = \mathcal{K}.$$

Por hipótesis sabemos que $\mathcal{O}(C,D) = \mathcal{K}$, por lo tanto existirán $1 \leq i_0 \leq n$ y $1 \leq j_0 \leq n'$ tales que:

$$\mathcal{O}(s_{i_0}^C(x), s_{j_0}^D(x)) = \mathcal{K}.$$

Suponemos que:

$$s_{i_0}^C(x) = \sum_{p=m}^{\infty} a_p \xi_{i_0}^p x^{p/n},$$

$$s_{j_0}^D(x) = \sum_{p=m'}^{\infty} b_p \zeta_{j_0}^p x^{p/n'},$$

donde $\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ y $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_{n'}\}$ son las raíces $n$-ésimas y $n'$-ésimas de la unidad, respectivamente.

Suponemos que $a_m \neq 0$ y $b_{m'} \neq 0$. Como sabemos que $\mathcal{O}(s_{i_0}^C(x), s_{j_0}^D(x)) = \mathcal{K}$ debe cumplirse que $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$ sean proporcionales. De hecho, si $\mathcal{K} = \frac{k_0}{n} = \frac{k_1}{n'}$, donde $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, tenemos que todos los coeficientes tales que $a_p \neq 0$ son proporcionales con los correspondientes exponentes de la serie $s_{j_0}^D(x)$.
Además, los exponentes hasta $\mathcal{K}$ que sean 0 en la serie $s_{i_0}^C(x)$ también deben serlo en la serie $s_{j_0}^D(x)$.

Para fijar notación, si $m \leq p \leq k_0$ y $a_p \neq 0$, los exponentes de ambas series los denotamos por $\frac{p}{n}$ y $\frac{p'}{n'}$ para $s^C_{i_0}(x)$ y $s^D_{j_0}(x)$, respectivamente. Por lo tanto, si $\{m, z_1, \ldots, z_h, k_0\}$ son los números tales que $a_p \neq 0$ en la $y$-raíz de $C$, con $h \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} a_m \xi^m_{i_0} = b_{m'} \zeta^{m'}_{j_0} \\ a_{z_1} \xi^{z_1}_{i_0} = b_{z'_1} \zeta^{z'_1}_{j_0} \\ \vdots \\ a_{z_h} \xi^{z_h}_{i_0} = b_{z'_h} \zeta^{z'_h}_{j_0} \\ a_{k_0} \xi^{k_0}_{i_0} \neq b_{k'_0} \zeta^{k'_0}_{j_0} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} a_m e^{\frac{2\pi i i_0 m}{n}} = b_{m'} e^{\frac{2\pi i j_0 m'}{n'}} \\ a_{z_1} e^{\frac{2\pi i i_0 z 1}{n}} = b_{z'_1} e^{\frac{2\pi i j_0 z'_1}{n'}} \\ \vdots \\ a_{z_h} e^{\frac{2\pi i i_0 z_h}{n}} = b_{z'_h} e^{\frac{2\pi i j_0 z'_h}{n'}} \\ a_{k_0} e^{\frac{2\pi i i_0 k_0}{n}} \neq b_{k'_0} e^{\frac{2\pi i j_0 k'_0}{n'}} \end{cases}$$

Suponemos que $i_0 \geq j_0$. Entonces:

$$\begin{cases} b_{m'} = a_m e^{\frac{2\pi i m(i_0 - j_0)}{n}} \\ b_{z'_1} = a_{z_1} e^{\frac{2\pi i z_1 (i_0 - j_0)}{n}} \\ \vdots \\ b_{z'_h} = a_{z_h} e^{\frac{2\pi i z_h (i_0 - j_0)}{n}} \\ b_{k'_0} \neq a_{k_0} e^{\frac{2\pi i k_0 (i_0 - j_0)}{n}} \end{cases}$$

Fijamos un $j_1 \in \{1, \ldots, n'\}$. Buscamos un $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$, de manera que:

$$\mathcal{O}(s^C_{i_1}(x), s^D_{j_1}(x)) = \mathcal{K}.$$

Se cumple que:

$$\begin{cases} a_m \xi^m_{i_1} = b_{m'} \zeta^{m'}_{j_1} \\ a_{z_1} \xi^{z_1}_{i_1} = b_{z'_1} \zeta^{z'_1}_{j_1} \\ \vdots \\ a_{z_h} \xi^{z_h}_{i_1} = b_{z'_h} \zeta^{z'_h}_{j_1} \\ a_{k_0} \xi^{k_0}_{i_1} \neq b_{k'_0} \zeta^{k'_0}_{j_1} \end{cases}$$

Si suponemos que $i_0 \geq j_0$ y utilizamos todo lo dicho anteriormente tenemos que:

$$\begin{cases} a_m \cdot e^{\frac{2\pi i i_1 m}{n}} = a_m \cdot e^{\frac{2\pi i m (i_0 - j_0 + j_1)}{n}} \\ a_{z_1} \cdot e^{\frac{2\pi i i_1 z_1}{n}} = a_{z_1} \cdot e^{\frac{2\pi i z_1 (i_0 - j_0 + j_1)}{n}} \\ \vdots \\ a_{z_h} \cdot e^{\frac{2\pi i i_1 z_h}{n}} = a_{z_h} \cdot e^{\frac{2\pi i z_h (i_0 - j_0 + j_1)}{n}} \\ a_{k_0} \cdot e^{\frac{2\pi i i_1 k_0}{n}} \neq a_{k_0} \cdot e^{\frac{2\pi i k_0 (i_0 - j_0 + j_1)}{n}} \end{cases}$$

Por lo tanto, si tomamos $i_1 = i_0 - j_0 + j_1 \mod n$, obtenemos que:

$$\mathcal{O}(s^C_{i_1}(x), s^D_{j_1}(x)) = \mathcal{K}.$$

Tomamos una parametrización, $s^D(x)$, de $D$. Por lo dicho anteriormente existe un $1 \leq i \leq n$ tal que $\mathcal{O}(s^C_i(x), s^D(x)) = \mathcal{K}$. En lo que sigue, iremos distinguiendo casos, dependiendo del valor de $\mathcal{O}(s^C(x), s^D(x))$, con $s^C(x) \in \mathcal{Z}(C)$.
Así, que:

$$\mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \operatorname{ord}_x \left( s^C(x) - s^D(x) \right)$$

sea igual a $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{n}$ ocurrirá cuando el coeficiente del monomio $x^{\alpha_1}$, de la serie $s^C(x)$, cambie al tomar sus conjugados, es decir, cuando:

$$a_{\alpha_1}\xi^{\beta_1}x^{\alpha_1} \neq a_{\alpha_1}x^{\alpha_1},$$

donde $\xi \in \mathbb{C}$ es una raíz $n$-ésima de la unidad, con lo que dicha raíz cumple que:

$$\xi^n = 1;\ \xi^{\beta_1} \neq 1.$$

Vamos a estudiar cuántas raíces $n$-ésimas hay que cumplan que $\xi^{\beta_1} = 1$. Si suponemos que $\xi = e^{\frac{2\pi i p}{n}}$, tenemos que,

$$\xi^{\beta_1} = e^{\frac{2\pi i p \beta_1}{n}}.$$

Para que $\xi^{\beta_1} = 1$ tiene que ocurrir que $\frac{p\beta_1}{n} \in \mathbb{N}$. Como $e_1$ es el máximo común divisor entre $n$ y $\beta_1$ la anterior propiedad se cumple cuando $p$ sea múltiplo de $\frac{n}{e_1}$. Como $1 \leq p \leq n$ esto ocurre en $e_1$ ocasiones, luego existen $e_1$ números complejos que son a su vez raíces $n$-ésimas y $\beta_1$-ésimas. Por lo tanto, los elementos que verifican $\xi^n = 1$ y $\xi^{\beta_1} \neq 1$ son $n - e_1$, por lo tanto:

$$\sharp\left(\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \alpha_1\}\right) = n - e_1 = e_0 - e_1.$$

De forma análoga, si tomamos $1 < i \leq q$, verificando que:

$$\mathcal{O}(s^C(x), s^D(x))$$

sea igual a $\alpha_i = \frac{\beta_i}{n}$ ocurrirá en la serie $s^C(x)$ el coeficiente del monomio $x^{\alpha_i}$ cambiará al tomar conjugados, es decir, si $\xi \in \mathbb{C}$ es una raíz $n$-ésima de la unidad tiene que ocurrir:

$$a_{\beta_i}\xi^{\beta_i}x^{\alpha_i} \neq a_{\beta_i}x^{\alpha_i},$$

por lo tanto, $\xi$ debe verificar que $\xi^{\beta_i} = 1$ y que $\xi^{\beta_i} \neq 1$. Si procedemos por inducción, suponemos que:

$$\sharp\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \alpha_{i-1}\} = e_{i-2} - e_{i-1},$$

y vamos a probar que:

$$\sharp\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \alpha_i\} = e_{i-1} - e_i,$$

Por la hipótesis de inducción sabemos,

$$\sharp\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \alpha_i\} = e_{i-1} - Q$$

con $Q = \sharp\{\xi \in \mathbb{C} :\ \xi^n = 1,\ \xi^{\beta_i} = 1\}$. De esta manera, vamos a estudiar cuál es el valor de $Q$. Si expresamos las raíz $n$-ésima de la unidad $\xi$ como $e^{\frac{2\pi i p}{n}}$, con $1 \leq p \leq n$, tenemos que,

$$\xi^{\beta_i} = e^{\frac{2\pi i p \beta_i}{n}} = 1$$

si, y sólo si, $p \cdot \frac{\beta_i}{n} \in \mathbb{Z}$. Como hemos visto anteriormente, esto ocurre cuando $p$ es múltiplo de $\frac{n}{e_i}$, ya que $e_i$ es el máximo común divisor entre $\beta_i$ y $e_{i-1}$. Así $p = \frac{n}{e_i} \cdot k$ con $1 \leq p \leq n$, luego hay $e_i$ posibilidades para $p$, con lo que:

$$Q = \sharp\{\xi \in \mathbb{C} :\ \xi^n = 1,\ \xi^{\beta_i} = 1\} = e_i,$$

por lo tanto,

$$\sharp\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \alpha_i\} = e_{i-1} - e_i.$$

La segunda afirmación de la proposición es resultado de todo lo dicho anteriormente. Como $\alpha_q < \mathcal{O}(C, D)$ y por la definición de exponente de contacto entre dos ramas, tenemos que los casos en que $\mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \mathcal{K}$ son los restantes que no hemos considerado en todo lo anterior, es decir, $e_q$, luego:

$$\sharp\{s^C(x) \in \mathcal{Z}(C) :\ \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x)) = \mathcal{K}\} = e_q.$$

□

Como consecuencia de esta proposición tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.14.** Sean $C$ y $D$ dos gérmenes de curvas planas irreducibles en $(\mathbb{C}^2, O)$ y $s_i^C(x)$ una serie de Puiseux de $C$. Entonces el conjunto de exponentes de contacto de $s_i^C(x)$ con las diferentes series de Puiseux de $D$ no depende de la elección de $s_i^C(x)$.

*Demostración.* Con las notaciones anterioes, sabemos por la proposición 2.13 que, dada una $y$-raíz cualquierad $s^D(x)$, el conjunto:

$$A = \{\mathcal{O}(s_i^C(x), s^D(x)) : \; 1 \leq i \leq n\}$$

está formado por los elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ y $\mathcal{K}$. Además, cada $\alpha_i$ se repite $e_{i-1} - e_i$ veces y $\mathcal{K}$ se repite $e_q$ veces. Como:

$$(e_0 - e_1) + (e_1 - e_2) + \ldots + (e_{q-1} - e_q) + e_q = n$$

tenemos que, dada cualquier $y$-raíz de $D$, el conjunto $A$ siempre es el mismo, por lo tanto queda probada el corolario. $\square$

A continuación, vamos a enunciar y demostrar un resultado que relaciona los exponentes de contacto de las parametrizaciones con la multiplicidad de intersección de dos ramas $\mathrm{I}_O(C, D)$.
En lo que sigue nos referiremos a $C$ y $D$ como dos ramas, es decir, como dos gérmenes de curvas planas irreducibles en $(\mathbb{C}^2, O)$.

**Proposición 2.15.** Sean $C$ y $D$ dos gérmenes de curvas planas irreducibles en $(\mathbb{C}^2, O)$, definidas por $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ respectivamente, con $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Sea $\mathrm{I}_O(C, D)$ la multiplicidad de intersección en el origen de $C$ y $D$. Entonces,

$$\mathrm{I}_O(C, D) = \sum_{\substack{s^C \in \mathcal{Z}(C), \\ s^D \in \mathcal{Z}(D)}} \mathcal{O}(s^C, s^D),$$

*Demostración.* Como ya hemos visto en el teorema 2.12, la multiplicidad de intersección entre dos curvas se puede calcular de la manera siguiente. Sea $g(x, y) = 0$ una ecuación de la rama $D$ y sea $(\eta(t), \varphi(t))$ una parametrización de la rama $C$. Entonces la multiplicidad de intersección, $\mathrm{I}_O(C, D)$, de las ramas $C$ y $D$ es:

$$\mathrm{I}_O(C, D) = \mathrm{mult}_t(g(\eta(t), \varphi(t))) = \nu_f(g).$$

Elegimos un sistema de coordenadas de manera que $x = 0$ no sea tangente a ninguna de las dos ramas. Por el corolario 2.8 si $f(x, y) = 0$ es una ecuación de la rama $C$, podemos escribir $f$ como:

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^{n} (y - s_i^C(x)),$$

donde $s_i^C(x)$ son las series de Puiseux, luego una parametrización de la curva $C$ está dada por

$$x(t) = t^n; \; y(t) = \varphi(t) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i,$$

con $m > n$, donde $\varphi(t) = s^C(t^n)$ y $s^C(x) \in \mathcal{Z}(C)$.
Lo mismo podemos hacer para la rama $D$. Luego,

$$g(x, y) = \prod_{r=1}^{n'} (y - s_r^D(x)),$$

donde $s_r^D(x)$ son las series de Puiseux de $D$. Si sustituimos en la anterior ecuación $x = t^n$ e $y = \varphi(t)$, tenemos:

$$g(t^n, \varphi(t)) = \prod_{r=1}^{n'} (\varphi(t) - s_r^D(t^n)).$$

El orden en $t$ de dicha expresión es:

$$\mathrm{I}_O(C, D) = \mathrm{ord}_t(g(t^n, \varphi(t))) = \sum_{r=1}^{n'} \mathrm{ord}_t(\varphi(t) - s_r^D(t^n)).$$

Como $\mathrm{ord}_t(\varphi(t) - s_r^D(t^n)) = n \cdot \mathrm{ord}_t(s^C(x) - s_r^D(x))$, tenemos

$$\mathrm{I}_O(C, D) = n \cdot \sum_{r=1}^{n'} \mathrm{ord}_x(s^C(x) - s_r^D(x)) = n \cdot \sum_{s^D \in \mathcal{Z}(D)} \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x))$$

Por el corolario 2.14, tenemos que el conjunto de los exponentes de contacto anteriores no depende serie de Puiseux escogida, $s^C(x)$, luego,

$$\mathrm{I}_O(C,D) = \sum_{\substack{s^C \in \mathcal{Z}(C) \\ s^D \in \mathcal{Z}(D)}} \mathcal{O}(s^C(x), s^D(x))$$

□

A continuación, ya podemos probar la siguiente fórmula, probada por *M.Noether*, que relaciona la multiplicidad de intersección de dos ramas con los exponentes característicos o de Puiseux de una de ellas.
Sea $C$ una rama y consideramos $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ sus exponentes característicos. Por convención vamos a escribir $\alpha_{g+1} = \infty$.

**Teorema 2.16.** Sean $C$ y $D$ dos gérmenes de curvas planas irreducibles en $(\mathbb{C}^2, O)$, de manera que $\mathcal{O}(C,D) = \mathcal{K}$, con $\alpha_q < \mathcal{K} \leq \alpha_{q+1}$. Si denotamos la multiplicidad en el origen de $C$ por $n = m_O(C)$ y la multiplicidad en el origen de $D$ por $n' = m_O(D)$, tenemos la siguiente fórmula,

$$\mathrm{I}_O(C,D) = \frac{n'}{n} \cdot \left[(e_0 - e_1)\beta_1 + \ldots + (e_{q-1} - e_q)\beta_q + e_q n\mathcal{K}\right],$$

con $0 \leq q \leq g$.

*Demostración.* Utilizando la proposición 2.13, tenemos que, si fijamos una parametrización $s^D \in \mathcal{Z}(D)$, el conjunto:

$$\{\mathcal{O}(s^D, s^C) : s^C \in \mathcal{Z}(C)\},$$

está compuesto por $(e_{i-1} - e_i)$ veces $\alpha_i$ y por $e_q$ veces $\mathcal{K}$. Por lo tanto, por la proposición 2.15,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_O(C,D) &= \sum_{\substack{s^C \in \mathcal{Z}(C), \\ s^D \in \mathcal{Z}(D)}} \mathcal{O}(s^C, s^D) = n' \cdot \sum_{s^C \in \mathcal{Z}(C)} \mathcal{O}(s^C, s^D) = \\
&= n' \cdot \left[(e_0 - e_1)\alpha_1 + \ldots + (e_{q-1} - e_q)\alpha_q + e_q\mathcal{K}\right] = \\
&= n' \cdot \left[(e_0 - e_1)\frac{\beta_1}{n} + \ldots + (e_{q-1} - e_q)\frac{\beta_q}{n} + e_q\mathcal{K}\right] = \\
&= \frac{n'}{n} \cdot \left[(e_0 - e_1)\beta_1 + \ldots + (e_{q-1} - e_q)\beta_q + e_q n\mathcal{K}\right]
\end{aligned}$$

□

Dada una rama $C$, denotamos por $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g\}$ los exponentes característicos de la rama y por $\{e_0, e_1, \dots, e_g\}$ la sucesión de GCD's. Vamos a definir la *función de Herbrand asociada a la rama C*. Dicha función, que denotaremos por $H_C$, se define como sigue, $H_C(t) = t$ si $t \leq \beta_1$ y si $\beta_i \leq t \leq \beta_{i+1}$, entonces,

$$H_C(t) = \frac{1}{n}\left[n\beta_1 + e_1(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + e_{i-1}(\beta_i - \beta_{i-1}) + e_i(t - \beta_i)\right],$$

donde $n = m_O(C)$ denota la multiplicidad de la rama $C$ en el origen.
Por la manera de construir dicha función, tenemos que la multiplicidad de intersección de dos ramas $C$ y $D$ se puede expresar en términos de la función de Herbrand $H_C$ de la rama $C$, de la siguiente forma.

**Corolario 2.17.** Sean $C$ y $D$ dos ramas con multiplicidades en el origen $n$ y $n'$, respectivamente y sea $\mathcal{O}(C,D) = \mathcal{K}$. Sea $H_C$ la función de Herbrand para la rama $C$. Entonces,

$$\mathrm{I}_O(C,D) = n' \cdot H_C(n\mathcal{K}).$$

*Demostración.* Está claro que existirá un $q$, de manera que $0 \leq q \leq g$, que cumpla que $\alpha_q < \mathcal{K} \leq \alpha_{q+1}$. Luego, por el teorema 2.16, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_O(C,D) &= \frac{n'}{n}\left[(e_0-e_1)\beta_1 + \ldots + (e_{q-1}-e_q)\beta_q + e_q n\mathcal{K}\right] = \\
&= n' \cdot \frac{1}{n}\left[e_0\beta_1 + e_1(\beta_2-\beta_1) + \ldots + e_{q-1}(\beta_q - \beta_{q-1}) + e_q(n\mathcal{K}-\beta_q)\right] = \\
&= n' \cdot H_C(n\mathcal{K})
\end{aligned}$$

□

A continuación, dada una rama $C$ con exponentes característicos $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$, con multiplicidad en el origen $n = m_O(C)$ y con función de Herbrand $H_C$, definimos los números:

$$\overline{\beta}_i := \frac{n}{e_{i-1}} H_C(\beta_i), \text{ con } 1 \leq i \leq g.$$

También definimos $\overline{\beta}_0 = n$. Probemos la siguiente fórmula,

$$\frac{e_i}{n}\overline{\beta}_{i+1} - \frac{e_{i-1}}{n}\overline{\beta}_i = \frac{e_i}{n}(\beta_{i+1}-\beta_i) \tag{2.2}$$

la cual va tener un significado especial en lo que sigue. Por definición:

$$\frac{e_i}{n}\overline{\beta}_{i+1} - \frac{e_{i-1}}{n}\overline{\beta}_i = \frac{e_i}{n}\frac{n}{e_i}H_C(\beta_{i+1}) - \frac{e_{i-1}}{n}\frac{n}{e_{i-1}}H_C(\beta_i) = H_C(\beta_{i+1}) - H_C(\beta_i).$$

Si utilizamos la definición de la función de Herbrand de la rama $C$,

$$\begin{aligned}
H_C(\beta_{i+1}) - H_C(\beta_i) &= \frac{1}{n}\left[e_0\beta_1 + e_1(\beta_2-\beta_1) + \ldots + e_{i-1}(\beta_i-\beta_{i-1}) + e_i(\beta_{i+1}-\beta_i)\right] - \\
&- \frac{1}{n}\left[e_0\beta_1 + e_1(\beta_2-\beta_1) + \ldots + e_{i-1}(\beta_i-\beta_{i-1}) + e_i(\beta_i-\beta_i)\right] = \\
&= \frac{e_i}{n}(\beta_{i+1}-\beta_i),
\end{aligned}$$

luego queda probada la fórmula. De esta manera, podemos definir, tomando $\overline{\beta}_0 = n$, de manera inductiva los $\overline{\beta}_i$, para todo $i = 1, \ldots, g$, de la siguiente manera,

$$\overline{\beta}_{i+1} = \frac{e_{i-1}}{e_i}\overline{\beta}_i + \beta_{i+1} - \beta_i. \tag{2.3}$$

Como $\overline{\beta}_0$ es un entero y $\frac{e_{i-1}}{e_i} \in \mathbb{N}$, tenemos que $\overline{\beta}_i$ es entero, para todo $0 \leq i \leq g$. Además, como $\beta_{i+1} > \beta_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, g-1$, entonces:

$$\overline{\beta}_{i+1} > \frac{e_{i-1}}{e_i}\overline{\beta}_i, \tag{2.4}$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, g-1$.

## 3. Semigrupo de una curva.

En esta sección vamos a definir y a estudiar algunas de las propiedades básicas del llamado semigrupo de una curva que nos serán de utilidad en las secciones siguientes. También lo relacionaremos con los exponentes característicos introducidos en la sección anterior.
En este capítulo hemos seguido fundamentalmente [14].

Sea $B$ una curva plana e irreducible, entonces el conjunto de todas las multiplicidades de intersección de la rama $B$ con otras curvas forman un semigrupo algebraico, que denotaremos por $S(B)$. El resultado más importante que veremos es que el semigrupo se puede determinar a partir de los exponentes característicos o de Puiseux. De hecho, veremos la equivalencia entre $S(B)$ y los exponentes característicos. Antes de dicho resultados, vamos a definir formalmente a $S(B)$. Consideremos $\gamma : (\mathbb{C}, O) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, O)$ una parametrización de Puiseux de la rama $B$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, para todo $t \in (\mathbb{C}, O)$. Sea $\gamma^*$ la aplicación ya descrita en el teorema 2.12:

$$\gamma^* : \mathbb{C}\{x,y\} \longrightarrow \mathbb{C}\{t\}$$

definida como $\gamma^*(g(x,y)) = g(x(t),y(t)) \in \mathbb{C}\{t\}$, para todo $g(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$.
El *semigrupo de la rama B* está dado por

$$S(B) := \{\mathrm{ord}_t(\gamma^*(g)) : \ g \in \mathbb{C}\{x,y\}, \ g \notin (f)\}.$$

Como $\mathcal{O}_B = \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f)}$ es el anillo local de la rama $B = (f = 0)$ tenemos también

$$S(B) = \{\mathrm{ord}_t(\gamma^*(\phi)) : \ \phi \in \mathcal{O}_B\}.$$

Como ya vimos en el teorema 2.12, esto no es más que,

$$S(B) = \{\mathrm{I}_O(B,B') : \ \text{con } B' \text{ un germen de curva en } O.\},$$

es decir, el semigrupo de una rama $B$ también se puede ver como el conjunto de todas las multiplicidades de intersección de la rama $B$ con las demás curvas.
También definimos el conjunto de *gaps del semigrupo* (o *lagunas del semigrupo*), $\delta(B)$, como el cardinal del conjunto de elementos que no pertenecen a $S(B)$, esto es,

$$\delta(B) := \sharp\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : r \notin S(B)\}$$

Claramente el conjunto que denotamos por $S(B)$ es un semigrupo, pues $\mathrm{ord}_t(\phi_1\phi_2) = \mathrm{ord}_t(\phi_1) + \mathrm{ord}_t(\phi_2)$, cualquiera que sean $\phi_1$ y $\phi_2$ en $\mathbb{C}\{t\}$. A continuación vamos a dar un resultado que comienza a relacionar los exponentes característicos con $S(B)$.

**Lema 3.1.** Con las notaciones anteriores, tenemos las siguientes propiedades:
1. Para cada $k \geq 0$, $\overline{\beta}_k \in S(B)$.
2. Para toda rama $B$, $\delta(B)$ es finito.

*Demostración.* Para la primera afirmación vamos a construir una curva cuya multiplicidad de intersección con la rama $B$ sea $\overline{\beta}_k$. Si denotamos por $n$ la multiplicidad en el origen de la rama $B$ y suponemos que

$$x(t) = t^n, \ y(t) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i,$$

es una parametrización de la rama $B$. Definimos las curvas $B_k$ mediante las parametrizaciones,

$$x(t) = t^n, \ y_k(t) = \sum_{1 \leq i < \beta_k} a_i t^i$$

Observamos que todos los términos de $y_k(t)$ son potencias de $t^{e_{k-1}}$, luego la multiplicidad de la rama $B_k$ es $\frac{n}{e_{k-1}}$. Por construcción, el exponente de contacto de $B$ con $B_k$ es $\frac{\beta_k}{n}$.
Si denotamos por $H_B$ la función de Herbrand de la rama $B$ tenemos que $H_B(\beta_k)$ es

$$H_B(\beta_k) = \frac{1}{n}\left[n\beta_1 + e_1(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + e_{k-1}(\beta_k - \beta_{k-1})\right]$$

Por el corolario 2.17:

$$\mathrm{I}_O(B,B_k) = \frac{n}{e_{k-1}} H_B(\beta_k) = \overline{\beta}_k.$$

Luego $\overline{\beta}_q \in S(B)$, para todo $q \geq 0$.
Observamos que el máximo común divisor de $(\beta_0,\ldots,\beta_g)$ es el mismo que el máximo común divisor de $(\overline{\beta}_0,\ldots,\overline{\beta}_g)$. Por la ecuación (2.2) tenemos,

$$GCD(\beta_k,\beta_{k+1}) = GCD(\overline{\beta}_k,\overline{\beta}_{k+1}), \text{ para todo } k,$$

luego nuestra afirmación se obtiene por inducción.
Por definición de los exponentes característicos, tenemos que $GCD(\beta_0,\ldots,\beta_g) = 1$, luego existirán enteros $a_k$, con $0 \leq k \leq g$, de manera que,

$$1 = \sum_{k=0}^{g} a_k \overline{\beta}_k.$$

Con el motivo de tomar los $a_k \geq 0$, para todo $1 \leq k \leq g$, sumamos $n$ a $a_k$ y restamos $\overline{\beta}_k$ a $a_0$. Hacemos esto las veces que hagan falta y de esta manera, podemos suponer que $a_k \geq 0$, para todo $k \geq 1$.

Tomamos $c = \sum_{k=1}^{g} a_k\overline{\beta}_k$. Por lo que hemos probado, tenemos que $c \in S(B)$ y $c \equiv 1(\text{mod n})$. Esto último se obtiene de que,

$$c = -a_0\beta_0 + 1 = -a_0 n + 1.$$

Si tomamos un $m \in \mathbb{N}$, podemos dividirlo por $n$ y obtenemos una expresión $m = nk+r$, con $0 \leq r < n$, con lo que $r \leq n-1$. Si suponemos que $m \geq c(n-1)$, entonces,

$$m + c(n-1) \geq c(n-1) + rc \Longrightarrow m - rc \geq c(n-1) - c(n-1) = 0.$$

Además, como ya hemos dicho $c \equiv 1(\text{mod n})$, con lo que existe un $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$c = -a_0\beta_0 + 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} m - rc = m + (-m+nk)c = m(1-c) + nkc = \\ = m\cdot(-z_0 n) + n\cdot(kc) = n\cdot(kc - z_0 m) \end{aligned}$$

con lo que $m = n\cdot(kc - z_0 m) + c\cdot r \in S(B)$.
En resumen, lo que hemos demostrado es que si $m \geq c(n-1)$, entonces $m \in S(B)$, luego $\delta(B)$ es finito, ya que $c(n-1)$ es una cantidad finita. □

A continuación vamos a dar un resultado sobre la estructura que posee el anillo local de una curva, $\mathcal{O}_B$. La demostración se puede encontrar en [14] (Proposición 4.3.2.).

**Proposición 3.2.** Con las notaciones anteriores,

1. Sea $B$ una rama. Para un $N > 0$ suficientemente grande, cualquier elemento de $\mathbb{C}\{t\}$ de orden mayor que $N$ pertenece a $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$.
2. Las potencias $t^r$ con $r \notin S(B)$ forman una base de $\mathbb{C}\{t\}/\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ (entendido a dicho cociente como $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$-módulo). Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{t\}/\gamma^*(\mathcal{O}_B)) = \delta(B)$.

Antes de continuar haremos algunas consideraciones generales sobre semigrupos. Sea $S$ un semigrupo de $\mathbb{Z}$, es decir, un subconjunto de $\mathbb{Z}$ cerrado por la suma y conteniendo a 0.
Veamos que si $S$ contiene elementos positivos y negativos, entonces $S$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Para ello basta probar que si $r \in S$, entonces $-r \in S$. Suponemos que $r > 0$ es un elemento de $S$ y que $S$ contiene un elemento negativo $-s$. Así,

$$-r = r(-s) + (s-1)r \in S.$$

Luego $S$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto será de la forma $S = d\mathbb{Z}$, con $d \in \mathbb{N}$.

A partir de ahora, suponemos que $S \subset \mathbb{N}$ y que $S \neq \{0\}$. Escribimos $d(S)$ para referirnos al máximo común divisor de todos los elementos de $S$. También escribimos $N(S)$ para referirnos al número entero que es el múltiplo más grande de $d(S)$ que no pertenece a $S$. Como ejemplo, supongamos que $S = d\mathbb{N}$, entonces $d(S) = d$ y $N(S) = -d$. Decimos que $S$ es un *semigrupo dual* si, para todo $r$ divisible por $d(S)$, se tiene que $r \in S$ si, y sólo si $(N(S) - r) \notin S$, luego $S = d\mathbb{N}$ es un semigrupo dual.
Consideramos ahora el semigrupo $S_1 = S + b\mathbb{N}$ generado por $S$ y un elemento $b$ que no está en $S$. Está claro que $d(S_1) = GCD(b, d(S))$. Definimos $q := \frac{d(S)}{d(S_1)}$. Dicho $q$ es el entero más pequeño de manera que $qb$ es divisible por $d(S)$.

**Lema 3.3.** Si $S$ es un semigrupo dual y $qb > N(S)$, entonces $S_1$ es un semigrupo dual, con $N(S_1) = N(S) + b(q-1)$.

*Demostración.* Como $qb > N(S)$, entonces $qb \in S$ ya que $qb$ es múltiplo de $d(S)$. Tenemos que todo elemento de $S_1$ se puede escribir como $s + ub$, con $s \in S$ y $0 \leq u < q$. Además, esta expresión es única. Así, cualquier múltiplo de $d(S_1) = GCD(b, d(S))$ se puede expresar, de manera única, como $x = rd(S) + ub$, con $r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq u < q$.

Tenemos las siguientes propiedades:

- Si $x = rd(S) + ub$ con $r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq u < q$, entonces $x \in S_1$ si, y sólo si, $rd(S) \in S$. Es evidente que si $rd(S) \in S$, entonces $x \in S_1$. Recíprocamente, si $x = s + nb$, con $s \in S$ y $n \geq 0$, entonces $n \equiv u \bmod q$. Luego, $n \geq u$ y:

$$rd(S) - s = (n-u)b.$$

Así, $rd(S) - s$ es múltiplo de $b$ y de $d(S)$, ya que $s \in S$, luego $rd(S) - s \geq qb > N(S)$, luego $rd(S) \in S$.

- $N(S_1) = N(S) + b(q-1)$. Como $q$ es el menor entero de manera que $qb$ es divisible por $d(S)$, entonces $N(S) + b(q-1)$ es el mayor entero que es múltiplo de $d(S_1)$, pero que no está en $S_1$, por el punto anterior. Luego esa es la definición del elemento $N(S_1)$, por lo tanto $N(S_1) = N(S) + b(q-1)$.
- $S_1$ es un semigrupo dual. Veamos que para todo $x$ divisible por $d(S_1)$, se tiene que $x \in S_1$ si, y sólo si, $N(S_1) - x \notin S_1$.
  Si $x$ es divisible por $d(S_1)$, se puede expresar de forma única como $x = y + ub$, con $y$ divisible por $d(S)$ y $0 \leq u < q$. Por el primer punto, tenemos que $x \in S_1$ si, y sólo si, $y \in S$. Como

$$N(S_1) - x = N(S) + b(q-1) - y - ub = (N(S) - y) + (q - u - 1)b$$

  entonces, $N(S_1) - x \in S_1$ si, y sólo si, $N(S) - y \in S$. Teniendo en cuenta que $S$ es un semigrupo dual, obtenemos las siguientes equivalencias

$$N(S_1) - x \in S_1 \iff N(S) - y \in S \iff y \in S \iff x \in S_1,$$

  luego $S_1$ es un semigrupo dual.

□

Escribimos $S_k$ para denotar al semigrupo generado por $\overline{\beta}_0 = n, \ldots, \overline{\beta}_k$, para todo $0 \leq k \leq g$.

**Lema 3.4.** Con las notaciones anteriores, tenemos

1. $d(S_k) = e_k$ para todo $0 \leq k \leq g$.
2. $S_k$ es un semigrupo dual para todo $0 \leq k \leq g$.
3. $N(S_k) = -n - \beta_k + \frac{e_{k-1}}{e_k}\overline{\beta}_k$ para todo $1 \leq k \leq g$.

**Observación 3.1.** Usando la expresión dada en la ecuación (2.3) obtenemos que $N(S_k)$ también está dado por

$$N(S_k) = -\overline{\beta}_0 + \overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1}, \text{ si } 0 \leq k \leq g-1.$$

*Demostración.* Para demostrar este lema vamos a proceder por inducción en $k$.
Comenzamos con la afirmación 1. Si $k = 0$, entonces $S_0 = n\mathbb{N}$, luego $d(S_0) = e_0 = n$. Si $k = 1$ entonces $S_1 = n\mathbb{N} + \beta_1\mathbb{N}$. Entonces $d(S_1) = GCD(n, \beta_1) = e_1$. Suponemos que se cumple que $d(S_k) = e_k$, probémoslo para $k+1$. Como $S_{k+1} = S_k + \overline{\beta}_{k+1}\mathbb{N}$, entonces:

$$d(S_{k+1}) = GCD(d(S_k), \overline{\beta}_{k+1}) = GCD(e_k, \overline{\beta}_{k+1}).$$

La ecuación (2.3) se puede reescribir como:

$$\overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1} = \frac{e_{k-1}}{e_k}\overline{\beta}_k - \beta_k.$$

Por definición de $e_k$, tenemos que $\beta_k$ es divisible por $e_k$. Por hipótesis de inducción, $\overline{\beta}_k$ es divisible por $e_k$, por lo tanto, $e_k$ divide a $\overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1}$. Luego

$$d(S_{k+1}) = GCD(e_k, \overline{\beta}_{k+1}) = GCD(e_k, \beta_{k+1}) = e_{k+1},$$

como queríamos probar.

En las afirmaciones 2. y 3., para $k = 0$, $S_0 = n\mathbb{N}$ es un semigrupo dual y además $N(S_0) = -n$. Para $k = 1$, aplicando el lema 3.3 como $q = \frac{e_0}{e_1}$, entonces $q\overline{\beta}_1 > N(S_0)$ y por lo tanto $S_1$ es un semigrupo dual, con:

$$N(S_1) = N(S_0) + \overline{\beta}_1(\frac{e_0}{e_1} - 1) = -n - \beta_1 + \frac{e_0}{e_1}\overline{\beta}_1.$$

Supongamos que las afirmaciones 2. y 3. son ciertas para $S_k$. Veamos que se cumplen para el semigrupo $S_{k+1} = S_k + \overline{\beta}_{k+1}\mathbb{N}$. En este caso, y haciendo uso del punto 1., $q = \frac{d(S_k)}{d(S_{k+1})} = \frac{e_k}{e_{k+1}}$. Si probamos que

$q\overline{\beta}_{k+1} > N(S_k)$, por el lema 3.3 habremos probado que $S_{k+1}$ es un semigrupo dual y que:

$$\begin{aligned} N(S_{k+1}) &= N(S_k) + \overline{\beta}_{k+1}\left(\frac{e_k}{e_{k+1}} - 1\right) = \\ &= -n + \frac{e_{k-1}}{e_k}\overline{\beta}_k - \beta_k + \overline{\beta}_{k+1}\left(\frac{e_k}{e_{k+1}} - 1\right) = \\ &= -n + \overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1} + \overline{\beta}_{k+1}\left(\frac{e_k}{e_{k+1}} - 1\right) \\ &= -n - \beta_{k+1} + \frac{e_k}{e_{k+1}}\overline{\beta}_{k+1}, \end{aligned}$$

y se obtienen las afirmaciones 2. y 3. Vamos a probar que $\frac{e_k}{e_{k+1}}\overline{\beta}_{k+1} > N(S_k)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{e_k}{e_{k+1}}\overline{\beta}_{k+1} &> -n - \beta_{k+1} + \frac{e_k}{e_{k+1}}\overline{\beta}_{k+1} = \\ &= -n - \beta_{k+1} + \overline{\beta}_{k+1} + \overline{\beta}_{k+1}\left(\frac{e_k}{e_{k+1}} - 1\right) = \\ &= N(S_k) + \overline{\beta}_{k+1}\left(\frac{e_k}{e_{k+1}} - 1\right) > \\ &> N(S_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto quedan probadas todas las propiedades anteriores. □

**Teorema 3.5.** Con las notaciones anteriores, tenemos que:

1. El semigrupo $S(B)$ está generado por $\overline{\beta}_0 = n, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_g$.
2. Este es un conjunto de generadores minimal, esto es, $\overline{\beta}_k$ es el elemento más pequeño de $S(B)$ que no es divisible por $e_{k-1}$, para todo $k = 1, 2, \ldots, g$.
3. El semigrupo $S(B)$ es un semigrupo dual.

*Demostración.* Escribimos $S_k$ para denotar el semigrupo generado por $\overline{\beta}_0 = n, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_k$ para cada $0 \leq k \leq g$.
Está claro que las afirmaciones 2. y 3. del teorema son consecuencia de la afirmación 1. y del lema 3.4, ya que si se cumple la afirmación 1., entonces $S(B) = S_g$. Por lo tanto vamos a demostrar que $S(B)$ está generado por $\{\overline{\beta}_0, \ldots, \overline{\beta}_g\}$.
Como ya vimos en el lema 3.1, $\overline{\beta}_k \in S(B)$, para todo $0 \leq k \leq g$.
Sea $n = m_O(B)$ la multiplicidad en el origen de la rama $B$. Consideramos una rama $B'$. Supongamos que el exponente de contacto, $\mathcal{O}(B, B') = \mathcal{K}$, verifica que para algún $k$, $\beta_k < n\mathcal{K} \leq \beta_{k+1}$. Probemos que $\mathrm{I}_O(B, B') \in S_k$.
Por la definición que hemos dado de exponente de contacto, las series de Puiseux de las ramas $B$ y $B'$ coinciden hasta el término $x^{\mathcal{K}}$. Por lo tanto, el vector $(\beta_0 = n, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ de $B$ es proporcional al correspondiente vector de $B'$.
Lo mismo se puede decir del vector:

$$(n = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k, e_1, \ldots, e_k, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_k, n\mathcal{K}).$$

Conviene aclarar que la constante de proporcionalidad entre ambos vectores de $B$ y $B'$ es $\frac{n'}{n}$, donde $n' = m_O(B')$ denota la multiplicidad en el origen de la rama $B'$. Así, $\beta'_i = \frac{n'}{n}\beta_i$ con $0 \leq i \leq k$, donde $\{\beta'_0, \ldots, \beta'_{g'}\}$ son los exponentes característicos de la rama $B'$.
Como vimos en el corolario 2.17 y por las definiciones que hemos dado sobre la función de Herbrand,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_O(B, B') &= n' H_B(n\mathcal{K}) = n'\left[H_B(\beta_k) + (n\mathcal{K} - \beta_k)\frac{e_k}{n}\right] = \\ &= \frac{n'}{n}\left[e_{k-1}\overline{\beta}_k + e_k(n\mathcal{K} - \beta_k)\right] = e'_{k-1}\overline{\beta}_k + e_k(n'\mathcal{K} - \beta'_k). \end{aligned}$$

Así, la multiplicidad de intersección de $B$ con $B'$ es una combinación lineal de $\overline{\beta}_k$ y $e_k$, luego es divisible por $e_k$. Como hemos probado en el lema 3.4 $d(S_k) = e_k$ y $N(S_k)$ es el mayor múltiplo de $e_k$ de manera que no pertenece a $S_k$ luego para ver que $\mathrm{I}_O(B,B') \in S_k$ solo hace falta demostrar que $\mathrm{I}_O(B,B') > N(S_k)$. Como $(n'\mathcal{K} - \beta'_k) > 0$ (ya que es una de nuestras hipótesis) y $e'_{k-1} \geq \frac{e'_{k-1}}{e'_k} = \frac{e_{k-1}}{e_k}$, entonces,

$$\mathrm{I}_O(B.B') = e'_{k-1}\overline{\beta}_k + e_k(n'\mathcal{K} - \beta'_k) \geq \frac{e_{k-1}}{e_k}\overline{\beta}_k > N(S_k),$$

donde la última desigualdad se deduce del apartado 3. del lema 3.4. Por lo tanto, $\mathrm{I}_O(B,B') \in S_k$ y hemos probado el resultado. □

Dada una rama $B$, como $d(S(B)) = 1$ tenemos que $N(S(B))$ coincide con $N(S_g)$ y tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.6.** Con las notaciones anteriores, $2\delta(B) = 1 + N(S(B))$.

*Demostración.* Por el teorema anterior, sabemos que $S(B)$ es un semigrupo dual. Además,

$$d(S(B)) = d(S_g) = e_g = GCD(\beta_0, \ldots, \beta_g) = 1.$$

Por lo tanto, $r \in S(B)$ si, y sólo si $N(S(B)) - r \notin S(B)$. Está claro que los $r \in \mathbb{N}$ que sean mayores que $N(S(B))$ pertenecen al semigrupo. Entonces exactamente la mitad de enteros del conjunto $\{0, 1, \ldots, N(S(B))\}$ pertenecen al $S(B)$ y la otra mitad no. Luego,

$$2\delta(B) = 1 + N(S(B)).$$

□

Veamos ahora un pequeño ejemplo que aplique los resultados que hemos demostrado.

**Ejemplo 3.1.** Sea $B$ una rama con una parametrización de Puiseux,

$$x(t) = t^4,\ y(t) = \varphi(t) = t^6 + 2t^7 + t^{12}.$$

Hallamos los $\beta_i$, $e_i$ y los $\overline{\beta}_i$,

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = 4,\ \beta_1 = 6,\ \beta_2 = 7\\
&e_0 = 4,\ e_1 = GCD(\beta_1, e_0) = 2,\ e_2 = GCD(\beta_2, e_1) = 1\\
&\overline{\beta}_0 = 4,\ \overline{\beta}_1 = 6,\ \overline{\beta}_2 = \frac{e_0}{e_1}\overline{\beta}_1 + \beta_2 - \beta_1 = 13.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $S(B)$ es un semigrupo generado por $\{4, 6, 13\}$. Los primeros elementos de $S(B)$ son 0, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18; además sabemos que,

$$N(S(B)) = N(S_2) = -n - \beta_2 - \frac{e_1}{e_2}\overline{\beta}_2 = -4 - 7 + 2 \cdot 13 = 15,$$

luego se puede comprobar que,

$$r \in S(B) \text{ si, y sólo si } 15 - r \notin S(B).$$

Además, como $N(S(B)) + 1 = 16$, entonces $\delta(S(B)) = 8$.

Por último vamos a considerar los elementos que no están en $S(B)$. Tenemos la siguiente cadena ascendente de contenidos:

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_g = S(B).$$

Por el lema 3.3, $N(S_k) = N(S_{k-1}) + \overline{\beta}_k(q-1)$, con $q = \frac{d(S_{k-1})}{d(S_k)}$. Como $N(S_0) = -n$ y $d(S_k) = e_k$, obtenemos la siguiente fórmula,

$$N(S(B)) = -n + \sum_{k=1}^{g} \overline{\beta}_k \left( \frac{e_{k-1}}{e_k} - 1 \right). \tag{3.1}$$

De la ecuación (2.3) tenemos la siguiente fórmula:

$$\frac{e_{k-1}}{e_k}\overline{\beta_k} = \overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1} + \beta_k,$$

y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
N(S(B)) &= -n + \sum_{k=1}^{g-1} \left(\overline{\beta}_{k+1} - \beta_{k+1} + \beta_k - \overline{\beta}_k\right) + \overline{\beta_g}(e_{g-1} - 1) = \\
&= -n + \overline{\beta}_g e_{g-1} - \beta_g = \qquad (3.2)\\
&= -n + nH_B(\beta_g) - \beta_g = \\
&= -n + [e_0\beta_1 + e_1(\beta_2 - \beta_1) + \ldots + e_{g-1}(\beta_g - \beta_{g-1})] - \beta_g = \\
&= -n + \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)\beta_q = \\
&= \sum_{k=1}^{g} (e_{k-1} - e_k)(\beta_k - 1) - 1. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

En particular, por todo lo dicho anteriormente, llegamos al teorema fundamental de esta sección (ver [14], Proposición 4.3.8., página 85).

**Proposición 3.7.** Con las notaciones anteriores, cualquiera de los siguientes conjuntos determina a los demás:

1. Los exponentes característicos o de Puiseux $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$.
2. La función de Herbrand $H_B(t)$.
3. El conjunto $\{\overline{\beta}_0, \ldots, \overline{\beta}_g\}$.
4. El semigrupo $S(B)$.

Por lo dicho en la introducción, Zariski demostró que dos curvas son equisingulares si, y sólo si, poseen los mismo exponentes característicos. Por el anterior resultado tenemos que dos curvas son equisingulares si, y sólo si, poseen el mismo semigrupo. Esta propiedad va a ser fundamental para probar en la sección siguiente que el número de Milnor (ya lo definiremos) es un invariante topológico.

## 4. Número de Milnor y su relación con el Conductor del Semigrupo.

En esta sección vamos a definir lo que se conoce como el número de Milnor de una curva y probaremos que coincide con el conductor del semigrupo de la curva (que es un elemento característico de dicho semigrupo). Por lo dicho en la introducción y al final de la sección anterior tenemos que el número de Milnor es el mismo en curvas topológicamente equivalentes, con lo que se trata de un invariante topológico.
En esta sección seguiremos fundamentalmente [7].

Por la definición que hemos dado si $B$ es una rama, entonces $N(S(B))$ es el mayor múltiplo de $d(S(B))$ que no pertenece al semigrupo $S(B)$. Como ya vimos, si $(f = 0)$ es una ecuación que representa a $B$ y $\{\beta_0; \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ son los exponentes característicos de Puiseux, entonces,

$$1 = e_g = GCD(\beta_g, e_{g-1}) = GCD(\beta_0, \ldots, \beta_g) = GCD(\overline{\beta_0}, \ldots, \overline{\beta_g}).$$

por lo tanto, $d(S(B)) = 1$, con lo que $N(S(B))$ representa el último entero que no pertenece al semigrupo. Luego, todos los enteros mayores o iguales a $N(S(B)) + 1$ pertenecen a $S(B)$.
Denotamos por $c = N(S(B)) + 1$ y lo llamamos *conductor del semigrupo* $S(B)$, luego $\delta(B) = \frac{c}{2}$. En esta sección vamos a intentar demostrar que el conductor del semigrupo de una rama es el *número de Milnor*.
Definimos el número de Milnor de una rama $B = (f = 0)$ como la dimensión como $\mathbb{C}$-espacio vectorial de

$$\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f_x, f_y)},$$

donde $f_x$ denota la derivada de $f$ respecto de la variable $x$ y $f_y$ la derivada de $f$ respecto de la variable $y$. Lo definimos para una serie en concreto que define a la curva $B$, pero otro de los propósitos de esta sección es ver que dada una curva $B$, $\mu(f)$ no depende de la elección de $f$, por lo tanto el número de Milnor de una curva está bien definido.

Muchas de las siguientes expresiones para el conductor del semigrupo $S(B)$ son consecuencia directa de los cálculos en la sección anterior.
Para comenzar, definimos $n_0 := 1$ y $n_i := \frac{e_{i-1}}{e_i}$, para todo $i = 1, 2, \ldots, g$. Por la fórmula (3.1), sabemos que

$$c = N(S(B)) + 1 = \sum_{i=1}^{g} (n_i - 1)\overline{\beta_i} - \overline{\beta_0} + 1. \tag{4.1}$$

Sea $B = (f = 0)$ una rama y $\overline{\beta}_0, \ldots, \overline{\beta}_g$ los generadores del semigrupo $S(B)$. Si $c$ es el conductor del semigrupo de $B$, entonces:

$$c = n_g\overline{\beta_g} - \beta_g - \overline{\beta_0} + 1.$$

Esto es claro, pues por la ecuación (3.2) tenemos que,

$$c = N(S(B)) + 1 = e_{g-1}\overline{\beta_g} - \beta_g - \overline{\beta_0} + 1,$$

pero como $e_g = 1$, tenemos que $n_g = \frac{e_{g-1}}{e_g} = e_{g-1}$.
A continuación daremos otra fórmula sobre el conductor empleando únicamente los exponentes de Puiseux y los $\{e_i\}_i$. Con las notaciones anteriores,

$$c = \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)\beta_q - \beta_0 + 1. \tag{4.2}$$

Por la ecuación (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned} c = N(S(B)) + 1 &= \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)(\beta_q - 1) = \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)\beta_q + \sum_{q=1}^{g} (e_q - e_{q-1}) = \\ &= \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)\beta_q + e_g - e_0 = \sum_{q=1}^{g} (e_{q-1} - e_q)\beta_q - \beta_0 + 1. \end{aligned}$$

**Definición 4.1.** Decimos que una serie $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ es regular de orden $n$ en $y$ si $f(0, y)$ es divisible por $y^n$, pero no por $y^{n+1}$.

Decimos que $f$ es regular en $y$ cuando $f$ es regular respecto de $y$ de orden $n = m_O(f)$. En este caso,

$$m_O(f) = \mathrm{ord}_y(f(0, y)).$$

Como el número de Milnor se define a partir de las derivadas parciales de la serie de potencias $f$ vamos a enunciar y demostrar algunos resultados relativos a la multiplicidad de intersección de una serie respecto a sus derivadas parciales.
Por comodidad con la notación escribiremos $f_y^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial y^j}$. El siguiente resultado se puede encontrar en [7], Lema 6.16.

**Teorema 4.2.** Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una serie de potencias convergente, irreducible y regular en $y$ con multiplicidad $n$. Sean $j, k$ enteros de manera que $1 \leq j \leq n$ y $0 \leq k \leq g-1$. Si $e_{k+1} \leq j \leq e_k$, entonces,

$$I_O(f, f_y^{(j)}) = (n - e_1)\beta_1 + \ldots + (e_{k-1} - e_k)\beta_k + (e_k - j)\beta_{k+1}.$$

*Demostración.* Sea $x(t) = t^n$, $y(t) = \varphi(t)$ una parametrización de Puiseux de $f$. Entonces, como ya sabemos podemos expresar la serie de potencias $f$ como,

$$f(x, y) = \prod_{\xi \in G_0} (y - \varphi(\xi x^{1/n})),$$

donde $G_0 = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^{e_0} = \xi^n = 1\}$ es el conjunto de las raíces $n$-ésimas de la unidad.
Si derivamos una vez respecto de $y$ dicha expresión obtenemos la siguiente fórmula,

$$\begin{aligned} f_y^{(1)}(x,y) &= (y - \varphi(\xi_2 x^{1/n})) \cdot \ldots \cdot (y - \varphi(\xi_n x^{1/n})) + \ldots + \\ &+ (y - \varphi(\xi_1 x^{1/n})) \cdot \ldots \cdot (y - \varphi(\xi_{n-1} x^{1/n})) = \\ &= \sum_{\substack{\Lambda \subset G_0 \\ \sharp(\Lambda) = n-1}} \left[ \prod_{\xi \in \Lambda} (y - \varphi(\xi x^{1/n})) \right], \end{aligned}$$

donde denotamos por $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ las $n$ raíces $n$-ésimas de la unidad.
De manera general, si derivamos $j$ veces obtenemos la fórmula análoga,

$$f_y^{(j)}(x,y) = j! \cdot \sum_{\substack{\Lambda \subset G_0 \\ \sharp(\Lambda) = n-j}} \left[ \prod_{\xi \in \Lambda} (y - \varphi(\xi x^{1/n})) \right].$$

Por lo tanto,

$$I(f, f_y^{(j)}) = \mathrm{ord}_t \left( \sum_{\substack{\Lambda \subset G_0 \\ \sharp(\Lambda) = n-j}} \left[ \prod_{\xi \in \Lambda} (\varphi(t) - \varphi(\xi t)) \right] \right).$$

Sabemos por el lema 2.9 que el orden en $t$ de

$$\prod_{\xi \in \Lambda} (\varphi(t) - \varphi(\xi t))$$

depende del conjunto $G_i \setminus G_{i+1}$ al que pertenezca $\xi$, y a menor $i$ menor será el orden en $t$.
Como $e_{k+1} \leq j \leq e_k$, entonces $n - e_k \leq n - j \leq n - e_{k+1}$, por lo tanto los órdenes más bajos se obtienen cuando,

$$\Lambda = (G_0 \setminus G_k) \cup J,$$

donde $J \subset G_k \setminus G_{k+1}$. Tenemos por tanto que calcular el orden en $t$ de

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \sharp(J) = e_k - j}} \left[ \prod_{\xi \in (G_0 \setminus G_k) \cup J} (\varphi(t) - \varphi(\xi t)) \right] = \\ &= \prod_{\xi \in G_0 \setminus G_k} (\varphi(t) - \varphi(\xi t)) \cdot \sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \sharp(J) = e_k - j}} \left[ \prod_{\eta \in J} (\varphi(t) - \varphi(\eta t)) \right] \end{aligned}$$

Por el lema 2.9 el orden en $t$ del primer factor es

$$\mathrm{ord}_t \left( \prod_{\xi \in G_0 \setminus G_k} (\varphi(t) - \varphi(\xi t)) \right) = (n - e_1)\beta_1 + \ldots + (e_{k-1} - e_k)\beta_k.$$

En el segundo factor el orden en $t$ de cada sumando es,

$$(e_k - j)\beta_{k+1},$$

y su coeficiente director es,

$$b_{\beta_{k+1}}^{e_k - j} \cdot \prod_{\eta \in J} (1 - \eta^{\beta_{k+1}}),$$

donde $y(t) = \varphi(t) = b_m t^m + \ldots$. Para acabar con la demostración, tenemos que probar que,

$$\mathrm{A} = \sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \sharp(J) = e_k - j}} \left[ \prod_{\eta \in J} (1 - \eta^{\beta_{k+1}}) \right] \neq 0.$$

Como $1-\eta^{\beta_{k+1}}=0$, para todo $\eta \in G_{k+1}$ entonces,

$$A = \sum_{\substack{J\subset G_k \\ \sharp(J)=e_k-j}} \left[ \prod_{\eta\in J} (1-\eta^{\beta_{k+1}}) \right].$$

Se puede ver que cuando $\eta$ pertenece a $G_k$, la expresión $\eta^{\beta_{k+1}}$ toma $n_{k+1}=\frac{e_k}{e_{k+1}}$ valores distintos, cada uno de ellos repetido $e_{k+1}$ veces.
Así, módulo el signo, el número $A$ es el coeficiente de $z^j$ del siguiente polinomio,

$$g(z) = \left[(1-z)^{n_{k+1}}-1\right]^{e_{k+1}},$$

ya que, usando el Teorema del Binomio de Newton, tenemos:

$$g(z) = \sum_{i=0}^{e_{k+1}} \sum_{p=0}^{n_{k+1}(e_{k+1}-i)} \binom{n_{k+1}(e_{k+1}-i)}{p}\binom{e_{k+1}}{i}(-1)^{i+p}z^p.$$

Además, el coeficiente del monomio $z^j$ en $g(z)$ también es:

$$A = \sum_{i_1+\ldots+i_{e_{k+1}}=j} \binom{n_{k+1}}{i_1}\cdot\ldots\cdot\binom{n_{k+1}}{i_{e_{k+1}}} \neq 0.$$

□

A continuación vamos a dar un resultado que relaciona, como ya hemos dicho, la multiplicidad de intersección de la serie $f$ con sus respectivas derivadas.

**Corolario 4.3.** Sea $f \in \mathbb{C}\{x,y\}$ una serie de potencias convergente e irreducible. Consideramos la rama $B$ que define la ecuación $(f=0)$. Supongamos que $I_O(f,x)=n$ e $I_O(f,y)=m$. Sea $c$ el conductor del semigrupo $S(B)$. Entonces,

$$I_O(f,f_y)=c+n-1, \quad \text{y} \quad I_O(f,f_x)=c+m-1.$$

*Demostración.* Por el teorema 4.2, si tomamos $j=1$ y $k=g-1$ entonces,

$$I_O(f,f_y)=(n-e_1)\beta_1+\ldots+(e_{g-2}-e_{g-1})\beta_{g-1}+(e_{g-1}-1)\beta_g.$$

Por la Proposición 4.2 tenemos que dicha multiplicidad de intersección es igual a $c+n-1$.
Consideramos $(x(t),y(t))$ una parametrización de $f$. Usando la regla de la cadena,

$$f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)=0,$$

luego,

$$\begin{aligned} I_O(f,f_x) &= \mathrm{ord}_t(f_x(x(t),y(t))) = \\ &= \mathrm{ord}_t(f_y(x(t),y(t))y'(t)) - \mathrm{ord}_t(x'(t)) = \\ &= (c+n-1)+(m-1)-(n-1) = \\ &= c+m-1. \end{aligned}$$

□

A continuación vamos a introducir la notación necesaria que vamos a utilizar sobre *resolución de singularidades* (esta parte se puede encontrar en [14]).
La idea de explosión es la siguiente. Consideramos una curva $B$ en $S=\mathbb{C}^2$ pasando por el origen $O$. Vamos a construir una nueva superficie, $S_1$, y una aplicación

$$T : S_1 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

de manera que:

1. $T^{-1}(O)=E$ es una curva, llamada *curva excepcional de la explosión* $T$.
2. $T$ es un isomorfismo entre $S_1\setminus E$ y $S\setminus\{O\}$.

La aplicación $T$ se llama explosión de $S$ en $O$. La curva $E$ se llama *divisor excepcional* de la explosión. Consideramos $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ la recta proyectiva compleja, con coordenadas homogéneas $[\iota : \theta]$. Definimos la superficie $S_1$ como el subespacio de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

$$S_1 := \{((x,y),[\iota : \theta]) : x\theta = y\iota\}.$$

Como aplicación $T$ consideramos la proyección $T((x,y),[\iota : \theta])) = (x,y)$. Cada $(x,y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{O\}$ determina unas únicas coordenadas homogéneas $[\iota : \theta]$, por lo tanto $T^{-1}((x,y))$ es un único punto. Pero si consideramos $(x,y) = O$, está claro que:

$$T^{-1}(O) = \{O\} \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}),$$

luego $E = T^{-1}(O)$ es un espacio isomorfo a la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Así, el divisor excepcional es isomorfo a $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.
Sabemos, además, que $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ se puede descomponer en dos cartas,

$$\mathcal{U}_0 = \{[\iota : \theta] : \iota \neq 0\}$$
$$\mathcal{U}_1 = \{[\iota : \theta] : \theta \neq 0\}$$

En $\mathcal{U}_0$ podemos tomar como coordenada $\frac{\theta}{\iota}$ y en $\mathcal{U}_1$ tomamos $\frac{\iota}{\theta}$. Así, en la parte de $S_1 = S \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ que estén las coordenadas homogéneas en $\mathcal{U}_0$ consideramos una nueva variable $y_1 = \frac{\theta}{\iota}$, por lo tanto $x\theta = y\iota$ se puede escribir como $y = y_1 x$. Dicha parte de $S_1$ se puede identificar con $\mathbb{C}^2$ en las coordeandas $(x, y_1)$. De manera análoga, si en $S_1$ nos encontramos en la parte donde las coordenadas homogéneas están en $\mathcal{U}_1$ consideramos la variable $x_1 = \frac{\iota}{\theta}$, por lo tanto $x\theta = y\iota$ se escribe como $x = x_1 y$. Esta zona de $S_1$ se puede identificar con $\mathbb{C}^2$ tomando las coordenadas $(x_1, y)$.

De manera general, podemos realizar las explosiones en superficies $S$ que no sean $\mathbb{C}^2$, trabajando con coordenadas locale, haciendo los cálculos en $\mathbb{C}^2$ y después regresando a $S$. Por eso, supongamos que $T : S_1 \longrightarrow S$ es una explosión de la superficie $S$ en el punto $O_0 \in S$. Entonces la curva excepcional es $E = T^{-1}(O_0)$. Supongamos que $C$ es una curva que en $S$ que no pasa por $O_0$. Entonces $T^{-1}(C)$ es otra curva en la superficie $S_1$ que no contiene a la curva excepcional de la explosión, $E$. Pero si $C$ es una curva que pasa por el punto $O_0$, entonces $E \subset T^{-1}(C)$. La curva $T^{-1}(C)$ se llama *transformado total de la explosión*. Si tomamos la clausura en $S_1$ de $T^{-1}(C) \setminus E$, esto es $\overline{T^{-1}(C) \setminus E}$, esto se llama *transformado estrico de la explosión*.

Este proceso se puede repetir, es decir, podemos explotar la superficie $S_1$ en un punto $O_1$, obteniendo otra superficie $S_2$, etcétera...
Supongamos que tenemos una curva $B = (f = 0)$ definida en $S = \mathbb{C}^2$ y que pasa por el origen $O_0$. Entonces podemos explotar como hemos descrito anteriormente y obtenemos la superficie $S_1$ y la aplicación:

$$T_0 : S_1 \longrightarrow S$$

Denotamos por $E_0$ a la curva excepcional de la explosión $T_0$. Entonces $E_0$ y el transformado estricto de $T_0$, $C^{(1)}$, se intersecan en un único punto (al tomar la clausura), $O_1$. Seguidamente explotamos $S_1$ en $O_1$.
De manera inductiva, supongamos que hemos construido la superficie $S_i$, la cual contiene a todas las curvas excepcionales $E_k$, con $0 \leq k \leq i-1$ y el transformado estricto $C^{(i)}$ interseca a $E^{i-1}$ en $O_i$. Si explotamos $S_i$ en $O_i$, obtenemos una nueva superficie $S_{i+1}$ y una aplicación:

$$T_i : S_{i+1} \longrightarrow S_i$$

Así, obtenemos $E_i = T_i^{-1}(O_i)$ la curva excepcional de la explosión $T_i$ y $C^{(i+1)}$ el transformado estricto de la curva $C^{(i)}$. Como hemos dicho anteriormente, al tomar la clausura para definir a $C^{(i+1)}$, éste interseca a $E_i$ en un único punto de $S_{i+1}$, $O_{i+1}$.
Se puede ver en [14] (teorema 3.3.1.) que si contínuamos el proceso, encontramos un $N \in \mathbb{N}$ de manera que $C^{(N)}$ es una curva suave, sin singularidades en $O_N$.

A continuación vamos a resolver la singularidad de una curva para comprender mejor cómo funciona el proceso de explosión de una curva en un punto.

**Ejemplo 4.1.** Sea $B$ una curva de $S = \mathbb{C}^2$ definida por $y^8 - x^{11} = 0$. Es una curva que claramente posee una singularidad en el origen, $O$. Como $y = 0$ es la recta tangente a $B$, consideramos las coordenadas $(x, y) = (x_1, x_1 y_1)$. Por lo tanto, sustituyendo las nuevas coordenadas en la ecuación obtenemos:

$$x_1^8 \cdot (y_1^8 - x_1^3) = 0 \tag{4.3}$$

Tenemos que, al considerar la primera carta $\mathcal{U}_0$, la curva excepcional $E_0$ está definida por $x_1 = 0$, mientras que $C^{(1)}$ es la curva $y_1^8 - x_1^3 = 0$. La curva (4.3) corresponde al transformado total de la curva. Si continuamos con el proceso, como en $C^{(1)}$ la recta tangente es $(x_1 = 0)$, el transformado estará en la segunda carta, con lo que consideramos el cambio de coordenadas $(x_1, y_1) = (x_2 y_2, y_2)$, por lo tanto la curva en las nuevas coordenadas será:

$$y_2^3 \cdot (y_2^5 - x_2^3) = 0$$

Por lo tanto $E_1 = (y_2 = 0)$ y $C^{(2)} = (y_2^5 - x_2^3 = 0)$. Si continuamos con el proceso obtenemos que:

$$\begin{aligned} E_2 &= (y_3 = 0) \\ C^{(3)} &= (y_3^2 - x_3^3 = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= (x_4 = 0) \\ C^{(4)} &= (y_4^2 - x_4 = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= (y_5 = 0) \\ C^{(5)} &= (y_5 - x_5 = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_5 &= (x_6 = 0) \\ C^{(6)} &= (y_6 - 1 = 0) \end{aligned}$$

Está claro que la curva $C^{(6)}$ es lisa y ya no posee singularidades.

Antes de demostrar el teorema principal que afirma que el conductor del semigrupo de una rama coincide con su número de Milnor vamos a demostrar un resultado que vamos a usar.

**Proposición 4.4.** Sea $B$ un germen de curva plana en $(\mathbb{C}^2, O)$ definida por una serie de potencias convergente e irreducible y regular en $y$, $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ con $n = m_O(f)$. Consideremos la explosión en el origen $O$ y sea $O_1$ el punto del divisor excepcional por el que pasa el transformado estricto de la curva $B$, entonces

$$\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)}, (f^{(1)})_{y_1}) = \mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)} + x_1 (f^{(1)})_{x_1}, (f^{(1)})_{y_1}).$$

*Demostración.* Supongamos que $(f^{(1)})_{y_1} = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, donde cada $p_i$ es una serie de potencias irreducible y $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Así,

$$\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)}, (f^{(1)})_{y_1}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)}, p_i),$$

y,

$$\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)} + x_1 (f^{(1)})_{x_1}, (f^{(1)})_{y_1}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)} + x_1 (f^{(1)})_{x_1}, p_i).$$

Por lo tanto, para probar nuestro resultado es suficiente con ver que, para $B$ cualquier rama de $((f^{(1)})_{y_1})$, se obtiene que:

$$\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)}, B) = \mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)} + x_1 (f^{(1)})_{x_1}, B). \tag{4.4}$$

Supongamos que $B$ está parametrizada por $(\eta(t), \varphi(t))$. Como $B$ es una rama de $(f^{(1)})_{y_1}$ está claro que $(f^{(1)})_{y_1}(\eta(t), \varphi(t)) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\eta^n(t)\cdot f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))) &= n\eta^{n-1}(t)f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))\frac{d}{dt}(\eta(t))+\\
&+\eta^n(t)\cdot\left[(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t))\frac{d\eta(t)}{dt}+(f^{(1)})_{y_1}(\eta(t),\varphi(t))\frac{d\varphi(t)}{dt}\right]=\\
&= n\eta^{n-1}(t)f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))\frac{d}{dt}(\eta(t))+\eta^n(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t))\frac{d\eta(t)}{dt}=\\
&= \eta^{n-1}(t)\left[nf^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))+\eta(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t))\right]\frac{d\eta(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Sabemos que,

$$\operatorname{ord}_t\left(\frac{d}{dt}(\eta^n(t)\cdot f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t)))\right) = n\cdot\operatorname{ord}_t(\eta(t))+\operatorname{ord}_t(f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t)))-1, \tag{4.6}$$

y que,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ord}_t\left((\eta^{n-1}(t)\left[nf^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))+\eta(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t))\right]\frac{d\eta(t)}{dt})\right)=\\
&=(n-1)\cdot\operatorname{ord}_t(\eta(t))+\operatorname{ord}_t(nf^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))+\eta(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t)))+\operatorname{ord}_t(\eta(t))-1\\
&=n\cdot\operatorname{ord}_t(\eta(t))+\operatorname{ord}_t(nf^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))+\eta(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t)))-1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4.6) y por (4.7) obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},B)&=\operatorname{ord}_t(f^{(1)}(\eta(t),\varphi(t)))=\operatorname{ord}_t(nf^{(1)}(\eta(t),\varphi(t))+\eta(t)(f^{(1)})_{x_1}(\eta(t),\varphi(t)))=\\
&=\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1},B)
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.5.** Sean $B = (f = 0)$ y $B' = (g = 0)$ dos gérmenes de curvas planas en $(\mathbb{C}^2, O)$ con $B$ irreducible. Consideremos la explosión del origen $O$ y sea $O_1$ el punto del divisor excepcional por el que pasa el transformado estricto de la curva $B$, entonces

$$\mathrm{I}_O(f,g) = m_O(f)\cdot m_O(g) + \mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

*Demostración.* Sean $n$ y $n'$ las multiplicidades en el origen de $f$ y $g$, respectivamente. Sea $(t^n, \varphi(t))$ una parametrización de Puiseux de $(f = 0)$. Entonces $(t^n, \frac{\varphi(t)}{t^n})$ es una parametrización del transformado estricto, $f^{(1)}$, de $f$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},g^{(1)})&=\operatorname{ord}_t\left(\frac{1}{(t^n)^{n'}}g\left(t^n,t^n\frac{\varphi(t)}{t^n}\right)\right)=\\
&=-n\cdot n'+\mathrm{I}_O(f,g)=-m_O(f)\cdot m_O(g)+\mathrm{I}_O(f,g).
\end{aligned}$$

□

Llegamos así al resultado más importante de la sección.

**Teorema 4.6.** Sea $B = (f = 0)$ una curva plana irreducible. Si $\mu(f)$ es el número de Milnor de la curva y $c$ el conductor del semigrupo $S(B)$, entonces:

$$\mu(f) = c.$$

*Demostración.* Supongamos que $f$ es una serie de potencias irreducible y regular en $y$ con $\mathrm{m}_O(f) = n$ (el caso que $f$ sea regular en $x$ es análogo al que vamos a realizar).
Por la definición que hemos dado de transformado estricto sabemos que,

$$x_1^n f^{(1)}(x_1, y_1) = f(x_1, x_1 y_1). \tag{4.7}$$

Si derivamos la expresión (4.7), obtenemos

$$x_1^n (f^{(1)})_{y_1}(x_1, y_1) = x_1 f(x_1, x_1 y_1),$$

por lo tanto,

$$(f^{(1)})_{y_1}(x_1,y_1)=\frac{1}{x_1^{n-1}}f_{y_1}(x_1,x_1y_1)=(f_y)^{(1)}. \tag{4.8}$$

Si ahora derivamos la ecuación (4.7) respecto de $x_1$, tenemos

$$nx_1^{n-1}f^{(1)}(x_1,y_1)+x_1^n(f^{(1)})_{x_1}=f_x(x_1,x_1y_1)+y_1f_y(x_1,x_1y_1), \tag{4.9}$$

utilizando la definición de transformado estricto y el hecho de que $f_x(x_1,x_1y_1)=x_1^{n-1}(f_x)^{(1)}$ y que $f_y=x_1^{n-1}(f_y)^{(1)}$, obtenemos la siguiente igualdad,

$$nx_1^{n-1}f^{(1)}+x_1^n(f^{(1)})_{x_1}=x_1^{n-1}(f_x)^{(1)}+x_1^{n-1}y_1(f_y)^{(1)},$$

luego,

$$nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1}=(f_x)^{(1)}+y_1(f_y)^{(1)}. \tag{4.10}$$

Usando la expresión (4.10) y las propiedades de la multiplicidad de intersección, obtenemos

$$\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1},(f_y)^{(1)})=\mathrm{I}_{O_1}((f_x)^{(1)},(f_y)^{(1)}). \tag{4.11}$$

Por (4.8),

$$\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1},(f_y)^{(1)})=\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1},(f^{(1)})_{y_1}).$$

Haciendo uso de la Proposición 4.4

$$\mathrm{I}_{O_1}(nf^{(1)}+x_1(f^{(1)})_{x_1},(f_y)^{(1)})=\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},(f^{(1)})_{y_1})=\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},(f_y)^{(1)}).$$

Luego, por lo dicho en (4.11)

$$\mathrm{I}_{O_1}((f_x)^{(1)},(f_y)^{(1)})=\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},(f_y)^{(1)}). \tag{4.12}$$

Ahora, usando la Proposición 4.5 y el corolario 4.3 obtenemos:

$$\mathrm{I}_{O_1}(f^{(1)},(f_y)^{(1)})=-n\cdot(n-1)+\mathrm{I}_O(f,f_y)=-n\cdot(n-1)+c+n-1, \tag{4.13}$$

además,

$$\mathrm{I}_{O_1}((f_x)^{(1)},(f_y)^{(1)})=-(n-1)^2+\mathrm{I}_O(f_x,f_y). \tag{4.14}$$

Por las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) y teniendo en cuenta que $\mu(f)=\mathrm{I}_O(f_x,f_y)$ obtenemos que:

$$-(n-1)^2+\mathrm{I}_O(f_x,f_y)=-n(n-1)+c+n-1,$$

con lo que,

$$\mu(f)=\mathrm{I}_O(f_x,f_y)=-n^2+2n-1+(n-1)^2+c=c.$$

□

Como ya dijimos en la Introducción es un resultado conocido:

**Teorema 4.7.** Dos ramas $C$ y $D$ son topológicamente equivalentes si, y sólo si, $C$ y $D$ son equisingulares.

La prueba de dicho teorema excede los contenidos del presente trabajo, pero nos permite afirmar que el número de Milnor se trata de un *invariante topológico*. Esto es, dadas dos curvas $B=(f=0)$ y $B'=(f'=0)$ tales que $B\equiv B'$, entonces $\mu(f)=\mu(f')$.
También consecuencia del teorema 4.6 es que el número $\mu(f)$ está bien definido, es decir, si tomamos $g\in\mathbb{C}\{x,y\}$ otro representante de la curva $B=(f=0)$, entonces $\mu(g)=\mu(f)$, por lo tanto podemos denotar por $\mu(B)$ al número de Milnor de una curva $B=(f=0)$.

# 5. Clasificación Analítica de Curvas Planas.

**5.1. Número de Tjurina y Diferenciales de Kähler.** En esta sección vamos a seguir fundamentalmente [2], [3], [14] y [15].

A parte del *número de Milnor* vamos a definir otro invariante (en este caso analítico) de las curvas conocido como *número de Tjurina*, que denotaremos por $\tau(B)$. A partir de esto definiremos, para cada curva $B = (f = 0)$, el invariante $r(B)$ consistente en la diferencia entre el número de Milnor y el Tjurina, es decir $r(B) = \mu(B) - \tau(B)$. El propósito del presente trabajo es clasificar analíticamente las curvas con $r(B)$ igual a 0 y 1.
Definimos el número de Tjurina de la manera siguiente. Dada una rama $B = (f = 0)$, tenemos que:

$$\tau(f) := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f, f_x, f_y)},$$

donde $f_x$ denota la derivada respecto de $x$ y $f_y$ respecto de $y$. Al igual que hemos dicho del número de Milnor, si tomamos distintos representantes de una misma curva, el número de Tjurina coincide, es decir, si tomamos $g(x,y) = u(x,y) \cdot f(x,y)$ otro representante de $B$, con $u \in \mathbb{C}\{x,y\}$ una unidad, entonces $\tau(f) = \tau(g)$. Para ello, vamos a demostrar la siguiente igualdad entre ideales de $\mathbb{C}\{x,y\}$:

$$(f, f_x, f_y) = (g, g_x, g_y) = (u \cdot f, f_x \cdot u + f \cdot u_x, f_y \cdot u + f \cdot u_y)$$

Denotamos por $T$ al ideal $(g, g_x, g_y)$. Está claro que:

$$T \subset (f, f_x, f_y).$$

Veamos la otra implicación. Como $u(x,y)$ es una unidad, entonces posee un inverso $u^{-1}$ en $\mathbb{C}\{x,y\}$. Por lo tanto:

$$f = u^{-1} \cdot (u \cdot f) \in T$$

Así, $f \cdot u_x \in T$. Entonces:

$$f_x \cdot u = (f_x \cdot u + f \cdot u_x) - f \cdot u_x \in T.$$

Luego:

$$f_x \in T.$$

Análogamente se puede probar que:

$$f_y \in T.$$

Hemos demostrado así que $(f, f_x, f_y) = T$. Así $\tau(f) = \tau(g)$ y el número de Tjurina está bien definido y podemos denotarlo como $\tau(B)$, pues no depende del representante escogido para la curva $B$.
Se puede probar que $\tau(B)$ es un invariante analítico (ver [10], Proposición 2.2., páginas 18-20). En dicha referencia se hace para tres dimensiones, aunque la demostración es análoga para nuestro caso en dos dimensiones.
Además, vamos a dar un ejemplo para demostrar que $\tau(B)$ no es un invariante topológico (ver [10]).
Sean las curvas:

$$B = (y^3 - x^7 = 0) \text{ y } B' = (y^3 - x^7 + yx^5).$$

Tanto $B$ como $B'$ poseen los mismos exponentes característicos $\beta_0 = 3$ y $\beta_1 = 7$, por lo dicho en la introducción tenemos que $B$ y $B'$ son curvas topológicamente equivalentes, ya que son curvas equisingulares, pues tienen los mismos exponentes característicos. Pero, si calculamos $\tau(B)$ y $\tau(B')$ observamos que:

$$\tau(B) = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(y^3 - x^7, -7x^6, 3y^2)} \right) = 12$$

$$\tau(B') = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathbb{C}\{t\}}{(y^3 - x^7 + yx^5, -7x^6 + 5yx^4, 3y^2 + x^5)} \right) = 11.$$

Por lo tanto, el número de Tjurina no es un invariante topológico.

Con este propósito en mente vamos a fijar notación e introducir algunas herramientas extras que serán de gran importancia en lo que sigue, como es el *módulo de las diferenciales de Kähler*.

Sea $f(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ una serie de potencias convergente e irreducible y sea $B$ una rama definida por $(f=0)$. Consideramos el ya introducido *anillo local de la rama* $B$,

$$\mathcal{O}_B = \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(f)},$$

donde $(f)$ denota el ideal en $\mathbb{C}\{x,y\}$ generado por $f$.
Consideramos el $\mathcal{O}_B$-módulo, generado por $dx$ y $dy$, de las 1-formas:

$$\Omega := \{A(x,y)dx + B(x,y)dy : \ A, B \in \mathcal{O}_B\}.$$

Definimos el $\mathcal{O}_B$-módulo cociente:

$$\Omega_B := \frac{\Omega}{(f_x dx + f_y dy)}, \tag{5.1}$$

donde $(f_x dx + f_y dy)$ denota el submódulo generado por la 1-forma $f_x dx + f_y dy$, es decir, el conjunto:

$$(f_x dx + f_y dy) = \{f_x(x,y) \cdot h(x,y)dx + f_y(x,y) \cdot h(x,y)dy : \ h \in \mathcal{O}_B\}.$$

Decimos que $\Omega_B$ es *el módulo de las diferenciales de Kähler.*
Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} d\colon & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \Omega_B \\ & h & \longmapsto & h_x dx + h_y dy \end{array}$$

Dado una diferencial $\omega \in \Omega_B$, se dice que es una *diferencial exacta* si existe $h \in \mathcal{O}_B$:

$$d(h) = \omega.$$

El conjunto de diferenciales exactas forman un submódulo en $\Omega_B$, que denotamos por $d(\mathcal{O}_B)$.
Una diferencial $\omega \in \Omega_B$ se dice que es una *diferencial de torsión* si existe un elemento, $h \in \mathcal{O}_B$, distinto de 0, de manera que:

$$h \cdot \omega = 0,$$

donde $\cdot : \mathcal{O}_B \times \Omega_B \longrightarrow \Omega_B$ es la operación del $\mathcal{O}_B$-módulo $\Omega_B$, definida como sigue:

$$h \cdot \omega = (A(x,y)h(x,y)dx + B(x,y)h(x,y)dy),$$

para todo $h \in \mathcal{O}_B$ y para todo $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, con $A, B \in \mathcal{O}_B$. Denotamos por $\mathcal{T}$ al conjunto de todos los diferenciales de torsión del módulo $\Omega_B$.
A continuación vamos a introducir el concepto de *clausura íntegra* del anillo $\mathcal{O}_B$, pero antes hagamos una serie de consideraciones sobre la estructura de $\mathcal{O}_B$. Supongamos que $f(x,y)$ es una ecuación de la rama $B$ y que tiene parametrización de Puiseux:

$$x(t) = t^n; \ y(t) = \varphi(t),$$

donde $n = m_O(B)$. Por la proposición 3.2, $\{t^r : \ r \notin S(B)\}$ forman una base del anillo $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\gamma^*(\mathcal{O}_B)}$, donde $\gamma^*$ es la homomorfismo inyectivo de anillos:

$$\begin{array}{rccl} \gamma^*\colon & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\} \\ & h(x,y) & \longmapsto & h(t^n, \varphi(t)) \end{array}$$

Por lo tanto,

$$t^s \in \gamma^*(\mathcal{O}_B), \text{ para todo } s \in S(B),$$

luego existe $g_s(x,y) \in \mathcal{O}_B$, de manera que:

$$t^s = \gamma^*(g_s(x,y)) = g_s(t^n, \varphi(t)).$$

Consideramos el *cuerpo de fracciones,* $F(\gamma^*(\mathcal{O}_B))$, de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$. Como $\gamma^*(\mathcal{O}_B) \subset \mathbb{C}\{t\}$, tenemos que:

$$F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)) \subset \mathbb{C}((t)),$$

donde $\mathbb{C}((t))$ denota el *cuerpo de series de Laurent.* Vamos a demostrar que $F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)) = \mathbb{C}((t))$. Está clara la contención

$$F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)) \subset \mathbb{C}((t)).$$

Vamos a probar la otra. Consideramos $c$ el conductor del semigrupo $S(B)$. Por lo dicho anteriormente existen $g_1(x,y), g_2(x,y) \in \mathcal{O}_B$, tales que:

$$t^c = g_1(t^n, \varphi(t))$$
$$t^{c+1} = g_2(t^n, \varphi(t)).$$

Luego,

$$t^{-1} = \frac{g_1(t^n, \varphi(t))}{g_2(t^n, \varphi(t))} \in F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)),$$
$$t = \frac{g_2(t^n, \varphi(t))}{g_1(t^n, \varphi(t))} \in F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)).$$

Tenemos así que:

$$\mathbb{C}((t)) = (t, t^{-1}) \subset F(\gamma^*(\mathcal{O}_B)).$$

Por lo tanto, el cuerpo de fracciones del anillo $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ coincide con el cuerpo de series de Laurent, $\mathbb{C}((t))$.
Ahora, vamos a definir lo que se conoce como la *clausura íntegra*.

**Definición 5.1.** Sea $S$ un subanillo de un anillo $R$. Un elemento $h \in R$ se dice que es *entero sobre S* si existe $k \in \mathbb{N}$:

$$h^k + \sum_{i=1}^{k} a_i h^{k-i} = 0,$$

con $a_i \in S$, para todo $i = 1, \ldots, k$. El conjunto de todos los elementos de $R$ enteros sobre $S$ se llama *clausura íntegra de S en R.*

Ahora, demostraremos dos propiedades relativas a esta definición, (que corresponden con los lemas 11.4.1. y 11.4.2. de [14]).

**Lema 5.2.** Con las notaciones anteriores:

1. Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generado sobre $S$ y sea $r \in R$, de manera que $r \cdot M \subset M$. Entonces $r$ es entero sobre $S$.
2. Un elemento $r \in R$ es entero sobre $S$ si, y sólo si, el subanillo de $R$ generado por $S$ y $r$ está finitamente generado como $S$-módulo.
3. La clausura íntegra de $S$ en $R$ es un subanillo de $R$.

*Demostración.* Sea $\{m_i\}_{i=1}^k$ un conjunto finito de elementos de $M$ que generan $M$ como $S$-módulo. Así, como $r \cdot M \subset M$, tenemos que $r \cdot m_i \in M$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, existen $a_{i,j} \in S$ tales que:

$$r \cdot m_i = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \cdot m_j,$$

para todo $i = 1, \ldots, k$. Consideramos la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^k$ y escribimos $\Delta$ para denotar el determinante de la matriz $r \cdot \mathrm{Id}_k - A$, donde $\mathrm{Id}_k$ es la matriz identidad de dimensión $k$ (con coeficientes en $S$). Está claro, que $r$ es un valor propio de la matriz $A$ asociado al vector propio $(m_1, \ldots, m_k)^T$. Por lo tanto:

$$\Delta = \det(r \cdot \mathrm{Id}_k - A) = 0.$$

Desarrollando el determinante obtenemos una fórmula para el elemento $r$, luego $r$ es un elemento entero sobre $S$ (ya que todos los coeficientes de las matrices son elementos de $S$).
Para la segunda afirmación, está claro que si el subanillo generado por $S$ y $r$ está finitamente generado como $S$-módulo, como $rS \subset S$, aplicando lo que acabamos de demostrar $r$ es integral sobre $S$ (entendiendo a los subanillos de $R$ como $R$-módulos).
Si $r \in R$ es entero sobre $S$, entonces existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$r^k + \sum_{i=1}^{k} a_i r^{k-i} = 0,$$

con $a_i \in S$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, el subanillo de $R$ generado por $S$ y $r$ está generado como $S$-módulo por los elementos $1, r, r^2, \ldots, r^{k-1}$, luego está finitamente generado.
Por último, sean $r, t \in R$ dos elementos enteros sobre $S$. Por lo tanto, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, de manera que:

$$\begin{aligned} r^{k_1} + \sum_{i=1}^{k_1} a_i r^{k_1-i} &= 0 \\ t^{k_2} + \sum_{j=1}^{k_2} b_j t^{k_2-j} &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

con $a_i \in S$, para todo $i = 1, \ldots, k_1$ y $b_j \in S$, para todo $j = 1, \ldots, k_2$.
Si consideramos a $R$ como $S$-módulo, tomamos $M$ el $S$-submódulo de $R$ generado por:

$$\{r^i t^j : \ 0 \leq i \leq k_1, 0 \leq j \leq k_2\},$$

tenemos que $M$ es un subanillo de $S$. Para todo $m \in M$, está claro que $m \cdot M \subset M$, ya que sabemos que $r$ y $t$ cumplen las ecuaciones (5.2). Aplicando el apartado 1. de este lema, tenemos que $m$ es entero sobre $S$, para todo $m \in M$. Sabemos que $r + t \in M$, luego $r + t$ es un elemento entero sobre $S$. Como $r - t \in M$ tenemos que $r - t$ entero sobre $S$. Como $rt \in M$, entonces $rt$ es entero sobre $S$. Por lo tanto, la clausura íntegra es cerrada por las operaciones de resta, suma y multiplicación, luego es un subanillo del anillo $R$. □

A continuación vamos a demostrar que la clausura íntegra del anillo local de una curva es isomorfa al anillo de series de potencias convergentes en una variable, $\mathbb{C}\{t\}$ (ver [14]).

**Teorema 5.3.** Con las notaciones anteriores, la clausura íntegra de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ sobre su cuerpo de fracciones, $\mathbb{C}((t))$, es el anillo $\mathbb{C}\{t\}$.

*Demostración.* Por la proposición 3.2, sabemos que $\frac{\mathbb{C}\{t\}}{\gamma^*(\mathcal{O}_B)}$ está generado por las pontencias $t^r$, con $r \notin S(B)$, por lo tanto está finitamente generado. Así, sabemos que $\mathbb{C}\{t\}$ está finitamente generado como $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$-módulo.
El $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$-módulo generado por $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ y $t^r$ está finitamente generado, pues está contenido en $\mathbb{C}\{t\}$, para todo $r \notin S(B)$. Por el lema 5.2, sabemos que $t^r$ es un elemento entero sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ para todo $r \notin S(B)$. Así, $\mathbb{C}\{t\}$ está contenido en la clausura íntegra de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ sobre $\mathbb{C}((t))$.
Ahora supongamos que $h(t) \in \mathbb{C}((t))$ está contenido en la clausura íntegra de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ sobre $\mathbb{C}((t))$ y supongamos que:

$$h(t) = \sum_{i=-n_0}^{\infty} a_i t^i,$$

con $n_0 > 0$ y $a_{-n_0} \neq 0$. Por el lema 5.2, la clausura íntegral de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ es un subanillo de $\mathbb{C}((t))$, luego la serie:

$$t^{n_0-1} h(t) = a_{-n_0} t^{-1} + a_{-n_0+1} + \ldots + a_0 t^{n_0-1} + a_1 t^{n_0} + \ldots$$

es un elemento entero sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$. Si llamamos $h_1(t)$ a la serie:

$$h_1(t) = a_{-n_0+1} + \ldots + a_0 t^{n_0-1} + a_1 t^{n_0} + \ldots,$$

por lo probado antes, es un elemento entero sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$. Luego, la diferencia:

$$a_{-n_0} t^{-1} = h(t) - h_1(t)$$

también es un elemento entero sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$, y por lo tanto, lo es el elemento $t^{-1}$. Pero esto no es posible, porque si lo fuera, existiría un $k \in \mathbb{N}$ de manera que:

$$t^{-k} + \sum_{i=1}^{k} a_i t^{i-k} = 0,$$

con $a_i \in \gamma^*(\mathcal{O}_B)$, luego, como $\gamma^*(\mathcal{O}_B) \subset \mathbb{C}\{t\}$, multiplicando por $t^{k-1}$ obtendríamos que $t^{-1} \in \mathbb{C}\{t\}$.
Por lo tanto, la clausura íntegra de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ sobre $\mathbb{C}((t))$ es $\mathbb{C}\{t\}$. □

Como ya sabemos, existe un isomorfismo de anillos entre $\mathcal{O}_B$ y $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$, por lo que la clausura íntegra de $\mathcal{O}_B$ es isomorfa a la clausura íntegra de $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$, es decir, $\mathbb{C}\{t\}$. A partir de ahora denotaremos por $\overline{\mathcal{O}_B}$ la clausura íntegra de $\mathcal{O}_B$ sobre $F(\mathcal{O}_B)$. Por lo tanto,

$$\overline{\mathcal{O}_B} \simeq \mathbb{C}\{t\}.$$

A continuación vamos a dar la definición de *longitud de un módulo*, que utilizaremos en lo que sigue. Lo daremos de manera general, pero siempre que trabajemos con ella nos referiremos a $\mathcal{O}_B$-módulos.

**Definición 5.4.** Sea $R$ un anillo y $M$ un $R$-módulo distinto de cero. Decimos que $M$ es un módulo *simple* si los únicos submódulos que posee son $\{0\}$ y $M$.

Con las notaciones de la anterior definición, una *cadena de submódulos de* $M$ es una sucesión $\{M_i\}_{0\leq i\leq n}$ de submódulos de $M$ de manera que:

$$M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M.$$

Una *cadena de composición de* $M$ se define como una cadena de submódulos de $M$ que es maximal, esto es, que no existe ningún submódulo que se pueda introducir. Esto es equivalente a decir que el módulo $M_{i-1}/M_i$ es simple para todo $1 \leq i \leq n$, lo que quiere decir que no posee más submódulos que $\{0\}$ y él mismo (ver [2]).
La siguiente proposición se puede encontrar en [2] (Proposición 6.7., página 77).

**Proposición 5.5.** Con las notaciones anteriores, suponemos que $M$ tiene una cadena de composición de longitud $n$. Entonces toda cadena de composición de $M$ tiene longitud $n$ y cualquier cadena de submódulos de $M$ se puede extender a una cadena de composición.

Gracias a este resultado la siguiente noción de longitud de un módulo está bien definida.

**Definición 5.6.** Se llama *longitud de un $R$-módulo $M$* a la longitud de una cadena de composición y se denota por $l(M)$. Si $M$ no posee cadenas de composición escribimos $l(M) = \infty$.

Una propiedad que verifica la longitud es que si tenemos una sucesión exacta de $R$-módulos $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$, entonces $l(M) = l(M_1) + l(M_2)$ (ver [2]). Esta propiedad es conocida como la aditividad de la longitud.

En nuestro caso, con la notación que venimos utilizando en el capítulo, vamos a considerar las longitudes de $\mathcal{O}_B$-módulos.
Podemos considerar el número de Tjurina como:

$$\tau(B) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_B}{(f_x, f_y)},$$

donde $f_x$ y $f_y$ son series de potencias convergentes en las variables $\overline{x}$ e $\overline{y}$, que son las imágenes de $x$ e $y$ en el anillo $\mathcal{O}_B$. Denotamos por $J$ al ideal jacobiano, $(f_x, f_y)$.
Podemos considerar a $\frac{\mathcal{O}_B}{J}$ como un $\mathbb{C}$-módulo, es decir, como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y tiene sentido considerar su dimensión como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se puede probar que:

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{J}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_B}{J},$$

entendiendo a $\frac{\mathcal{O}_B}{J}$ como un $\mathcal{O}_B$-módulo cuando hablamos de longitudes, (ver [13]).
Por lo tanto,

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{J}\right) = \tau(B).$$

En lo que sigue, cuando se pueda, consideraremos las longitudes de los $\mathcal{O}_B$-módulos como dimensiones de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Esto se debe a que los módulos son generalizaciones algebraicas de los espacios vectoriales y las longitudes de estos son la generalización de la dimensión de espacio vectorial.

**5.2. Clasificación analítica cuando la diferencia entre el número de Milnor y el número de Tjurina es 0 o 1.** Dada una rama $B$, definimos el invariante analítico $r(B) = \mu(B) - \tau(B)$. En esta subsección nos centraremos en la clasificación analítica de curvas planas cuando $r(B) = 0$ y $r(B) = 1$. Vamos a seguir fundamentalmente [3] y [15].

Vamos a probar el primer resultado de esta sección, que relaciona la longitud del submódulo de torsión de $\Omega_B$ con el número de Tjurina (ver [15], Teorema 1.).

**Teorema 5.7.** Sea $B = (f = 0)$ una rama y consideramos $\Omega_B$ su módulo de las diferenciales de Kähler. Si $\tau(B)$ es el número de Tjurina de $B$ y $\mathcal{T}$ es el submódulo de torsión de $\Omega_B$, tenemos que:

$$l(\mathcal{T}) = \tau(B)$$

*Demostración.* Consideramos el conjunto $\mathcal{U} = \{g \in \mathcal{O}_B : \frac{gf_x}{f_y} \in \mathcal{O}_B\}$. Está claro que $\mathcal{U}$ es un ideal de $\mathcal{O}_B$. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \lambda\colon & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{O}_B \\ & g & \longmapsto & \lambda(g) = \frac{gf_x}{f_y}, \end{array}$$

y el $\mathcal{O}_B$-homomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} \Delta\colon & \mathcal{U} & \longrightarrow & \Omega_B \\ & g & \longmapsto & \Delta(g) = \lambda(g)dx + gdy \end{array}$$

Nuestra idea es probar que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathcal{T}$ y aplicar el primer teorema de isomorfía. Veamos que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathcal{T}$. Teniendo en cuenta que $f_y\lambda(g) = f_x g$, tenemos que:

$$f_x\Delta(g) = f_x\lambda(g)dx + f_x gdy = \lambda(g)\cdot(f_x dx + f_y dy) = 0$$
$$f_y\Delta(g) = f_y\lambda(g)dx + f_y gdy = g\cdot(f_x dx + f_y dy) = 0$$

Por lo tanto, $\Delta(g) \in \mathcal{T}$, para todo $g \in \mathcal{U}$. Así, $\mathrm{Im}(\Delta) \subseteq \mathcal{T}$.
Recíprocamente, tomamos una diferencial de torsión, $\omega = gdx + hdy \in \mathcal{T}$, con $g, h \in \mathcal{O}_B$. Por lo tanto, existe $z \in \mathcal{O}_B$ de manera que $z\cdot\omega = zgdx + zhdy = 0$. Por como hemos definido el módulo $\Omega_B$, tiene que existir un $p \in \mathcal{O}_B$ de manera que:

$$zg = pf_x$$
$$zh = pf_y,$$

por lo tanto,

$$g = \frac{hf_x}{f_y}$$

Luego $h \in \mathcal{U}$ y $\omega = \Delta(h)$. Entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Im}(\Delta)$. Luego hemos probado que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathcal{T}$.
Si $\Delta(g) = 0$, tenemos que existe $z \in \mathcal{O}_B$ de tal manera:

$$\lambda(g) = zf_x$$
$$g = zf_y,$$

por lo tanto $g \in (f_y)$. Recíprocamente, si $g \in (f_y)$ está claro que existe $z \in \mathcal{O}_B$ cumpliendo que $g = zf_y$. Así,

$$\Delta(g) = \frac{zf_y f_x}{f_y}dx + zf_x dy = z\cdot(f_x dx + f_y dy) = 0.$$

Por lo tanto, $\Delta(g) = 0$ si, y sólo si, $g \in (f_y)$. Luego $\mathrm{Ker}(\Delta) = (f_y)$. Por el primer teorema de isomorfía, tenemos que:

$$l(\mathcal{T}) = l\left(\frac{\mathcal{U}}{(f_y)}\right) \tag{5.3}$$

Construimos ahora el siguiente $\mathcal{O}_B$-homomorfismo:

$$\Psi : \mathcal{O}_B \longrightarrow \frac{J}{(f_y)},$$

definido por la composición de

$$\Psi : \mathcal{O}_B \longrightarrow (f_x) \longrightarrow \frac{(f_x)}{(f_x)\cap(f_y)} \longrightarrow \frac{J}{(f_y)},$$

donde el primer $\mathcal{O}_B$ homomorfismo está definido por:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_B & \longrightarrow & (f_x) \\ g & \longmapsto & g \cdot f_x \end{array}$$

y el segundo homomorfismo es la proyección en el cociente. Además tenemos que $\frac{(f_x)}{(f_x)\cap(f_y)}$ y $\frac{J}{(f_y)}$ son anillos isomorfos. Está claro además que

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{Ker}(\Psi) &\Longleftrightarrow g \cdot f_x \in (f_y) \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow g \cdot f_x = h \cdot f_y, \text{ con } h \in \mathcal{O}_B \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \frac{g \cdot f_x}{f_y} \in \mathcal{O}_B \Longleftrightarrow g \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathcal{U}$. Además, por cómo lo hemos definido, $\Psi$ es un homomorfismo sobreyectivo. Así, por el primer teorema de isomorfía tenemos

$$\frac{\mathcal{O}_B}{\mathcal{U}} \simeq \frac{J}{(f_y)} \tag{5.4}$$

Luego,

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{\mathcal{U}}\right) = l\left(\frac{J}{(f_y)}\right).$$

Como $(f_y) \subset J \subset \mathcal{O}_B$, entonces tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \frac{J}{(f_y)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_B}{(f_y)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_B}{J} \longrightarrow 0,$$

y, por lo tanto:

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{(f_y)}\right) = l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{J}\right) + l\left(\frac{J}{(f_y)}\right). \tag{5.5}$$

De forma similar, como $(f_y) \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{O}_B$, tenemos que:

$$l\left(\frac{\mathcal{U}}{(f_y)}\right) = l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{(f_y)}\right) - l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{\mathcal{U}}\right) \tag{5.6}$$

Finalmente, utilizando las fórmulas obtenidas en (5.3), (5.4), (5.5) y (5.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} l(\mathcal{T}) = l\left(\frac{\mathcal{U}}{(f_y)}\right) &= l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{(f_y)}\right) - l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{\mathcal{U}}\right) = \\ &= l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{J}\right) + l\left(\frac{J}{(f_y)}\right) - l\left(\frac{J}{(f_y)}\right) = \\ &= l\left(\frac{\mathcal{O}_B}{J}\right) = \tau(B). \end{aligned}$$

□

Consideramos ahora $c$ el conductor del semigrupo $S(B)$. Como ya vimos en el teorema 4.6, tenemos que:

$$c = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f_x, f_y)} = \mu(B),$$

por lo tanto, es evidente que:

$$l(\mathcal{T}) = \tau(B) \leq c. \tag{5.7}$$

Como $\overline{\mathcal{O}_B} \simeq \mathbb{C}\{t\}$, el módulo de las diferenciales de Kähler, $\overline{\Omega_B}$, de $\overline{\mathcal{O}_B}$ está dado por:

$$\overline{\Omega_B} = \{g(t)dt : \ g(t) \in \mathbb{C}\{t\}\}.$$

Para mayor simplicidad, vamos a identificar los dos conjuntos anteriores, por lo que a partir de ahora consideraremos:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}_B} &= \mathbb{C}\{t\} \\ \overline{\Omega_B} &= \{g(t)\ dt : \ g \in \mathbb{C}\{t\}\} = \mathbb{C}\{t\}dt. \end{aligned}$$

De manera análoga a lo dicho anteriormente en la definición de $\Omega_B$ (ver (5.1)) definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} D\colon & \mathbb{C}\{t\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\}dt \\ & g(t) & \longmapsto & g'(t)\ dt \end{array}$$

También podemos considerar dicha aplicación sobre el anillo local $\mathcal{O}_B$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} D\colon & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\}dt \\ & g(x,y) & \longmapsto & \frac{d}{dt}g(t^n,\varphi(t))\ dt \end{array}$$

Es claro que $D(g(x,y)) = g_x(t^n,\varphi(t))D(x) + g_y(t^n,\varphi(t))D(y)$, para todo $g(x,y) \in \mathcal{O}_B$. Es decir, es lo mismo primero sustituir $x = x(t)$ e $y = y(t)$ y derivar en la variable $t$ que primero derivar en cada variable $x$ e $y$ utilizando la aplicación $d$ y luego sustituir $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Esto es debido a la regla de la cadena, ya que dado un elemento $g(x,y) \in \mathcal{O}_B$ entonces:

$$\begin{aligned} D(g(x,y)) &= \frac{d}{dt}g(t^n,\varphi(t))dt = \\ &= (g_x(t^n,\varphi(t))nt^{n-1} + g_y(t^n,\varphi(t))\varphi'(t))dt = \\ &= g_x(t^n,\varphi(t))D(x) + g_y(t^n,\varphi(t))D(y). \end{aligned}$$

Denotamos por $D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ al submódulo generado (sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$) por los diferenciales $D(g(x,y))$, con $g(x,y) \in \mathcal{O}_B$.
Vamos a probar que $D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ es el módulo $\gamma^*(\Omega_B)$, donde:

$$\begin{array}{rccc} \gamma^*\colon & \Omega_B & \longrightarrow & \mathbb{C}\{t\}dt \\ & \omega = gdx + hdy & \longmapsto & \gamma^*\omega = g(x(t),y(t))\frac{d}{dt}x(t) + h(x(t),y(t))\frac{d}{dt}y(t). \end{array}$$

Por lo dicho antes, es claro que:

$$\gamma^*\omega = \gamma^*(g)D(x) + \gamma^*(h)D(y),$$

para toda diferencial $\omega = gdx + hdy \in \Omega_B$.
Se prueba fácilmente que $\gamma^*(\Omega_B) \subset D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$, ya que todo elemento de $\gamma^*(\Omega_B)$ se puede escribir como un elemento generado por $D(x)$ y $D(y)$ sobre $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$.
Además, es claro que dado un $g \in \mathcal{O}_B$, por lo dicho anteriormente:

$$D(g) = \gamma^*(d(g)),$$

luego $D(g) \in \gamma^*(\Omega_B)$, para todo $g \in \mathcal{O}_B$. Como $D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ es el $\gamma^*(\mathcal{O}_B)$-módulo generado por todos estos elementos está claro que $D\gamma^*(\mathcal{O}_B) \subset \gamma^*(\Omega_B)$. Por lo tanto $\gamma^*(\Omega_B) = D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$.

Con todo lo dicho, se puede encontrar la siguiente fórmula en [4]:

$$l(\mathcal{T}) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}dt}{\gamma^*(\Omega_B)}\right) + \frac{c}{2}. \tag{5.8}$$

Consideramos la valoración definida en $\overline{\mathcal{O}_B} = \mathbb{C}\{t\}$:

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \mathbb{C}\{t\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & g(t) & \longmapsto & \mathrm{ord}_t(g(t)). \end{array}$$

Dicha valoración se puede extender a $\overline{\Omega_B} = \mathbb{C}\{t\}dt$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \mathbb{C}\{t\}dt & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & g(t)\ dt & \longmapsto & \mathrm{ord}_t(g(t)). \end{array}$$

Escribimos $\nu(\mathcal{M})$ para denotar el conjunto:

$$\nu(\mathcal{M}) = \{\nu(g(t^n,\varphi(t))) :\ g \in \mathcal{M}\} \subset \mathbb{N},$$

donde recordemos que $\mathcal{M} = (x,y)$ es el ideal maximal del anillo $\mathcal{O}_B$. Por lo tanto, $\nu(\mathcal{M})$ es un conjunto de números naturales positivos, luego $S(B) = \nu(\mathcal{M}) \cup \{0\}$.
Es evidente que si tomamos $v \in \nu(\mathcal{M})$, existirá un $g \in \mathcal{M}$ de manera que $v = \nu(g)$, entonces $v - 1 =$

$\nu(D(g(t^n, \varphi(t)))$. Luego, $v-1 \in \nu(\gamma^*(\Omega_B))$.
Por la Proposición 3.2 y la definición de conductor,sabemos que:

$$\delta(B) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\gamma^*(\mathcal{O}_B)} = \frac{c}{2}$$

Por lo tanto, existirán $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{\frac{c}{2}}$ tales que:

$$\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{\frac{c}{2}}\} = \mathbb{Z}_{>0} \setminus \nu(\mathcal{M}).$$

El conjunto $\{\epsilon_1 - 1, \ldots, \epsilon_{\frac{c}{2}} - 1\}$ contiene a todos los enteros positivos que no están en $\nu(D\gamma^*(\mathcal{O}_B)) = \nu(\gamma^*(\Omega_B))$, esto es:

$$\nu(\mathbb{C}\{t\}dt) \setminus \nu(\gamma^*(\Omega_B)) \subset \{\epsilon_1 - 1, \ldots, \epsilon_{\frac{c}{2}} - 1\}$$

Así, en términos de longitudes de $\mathcal{O}_B$-módulos:

$$l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}dt}{\gamma^*(\Omega_B)}\right) \leq \frac{c}{2}.$$

En la anterior desigualdad tenemos igualdad si, y sólo si, todo entero de $\nu(\gamma^*(\Omega_B))$ es de la forma $v-1$, con $v \in \nu(\mathcal{M})$, esto es, si, y sólo si, para toda diferencial $\omega \in \gamma^*(\Omega_B)$, existe $g \in \mathcal{M}$ de manera que $\nu(\omega) = \nu(D(g))$.
Dada una diferencial de $\gamma^*(\Omega_B)$ decimos que es exacta si es de la forma $D(g)$, para algún $g(x,y) \in \mathcal{O}_B$.
El siguiente resultado se puede encontrar en [15], Corolario 3.

**Teorema 5.8.** Con las notaciones anteriores, $l(\mathcal{T}) = c$ si, y sólo si, toda diferencial de $\gamma^*(\Omega_B)$ es exacta.

*Demostración.* Por lo dicho anteriormente sabemos que $l(\mathcal{T}) = c$ si, y sólo si, dado $\omega \in \gamma^*(\Omega_B)$, existe $g \in \mathcal{M}$ de manera que $\nu(\omega) = \nu(D(g))$.

Vamos a probar que dado $\omega \in \gamma^*(\Omega_B)$, existe $g \in \mathcal{M}$ de manera que $\nu(\omega) = \nu(D(g))$ es equivalente a que dado $\omega \in \gamma^*(\Omega_B)$, existe un $g^* \in \mathcal{O}_B$ tal que $\omega = D(g^*)$.
Es evidente que si existe $g^* \in \mathcal{O}_B$ tal que $\omega = D(g^*(x,y))$, entonces $\nu(\omega) = \nu(D(g^*(x,y)))$.
Recíprocamente, tomamos una diferencial $\omega \in \gamma^*(\Omega_B)$. Sabemos que existe $g \in \mathcal{M}$ de manera que $\nu(\omega) = \nu(D(g(x,y)))$.
Si suponemos que $\omega = A(t)\ dt$, está claro que:

$$\mathrm{ord}_t(A(t)) = \mathrm{ord}_t(g(t^n, \varphi(t)))$$

Tomando una constante apropiada, $c \in \mathbb{C}$, podemos suponer que:

$$\nu(\omega - D(cg)) > \nu(\omega)$$

Tomamos $g_0(x,y) = c \cdot g(x,y)$ y $\omega_1 = \omega - D(g_0)$. Haciendo lo mismo, existe un $g_1 \in \mathcal{M}$ de manera que $\nu(\omega_1 - D(g_1)) > \nu(\omega_1)$. Así, tomamos $\omega_2 = \omega_1 - D(g_1) = \omega - D(g_0 + g_1)$, usando que la linealidad de las derivadas. De la misma manera, existirá una sucesión $\{g_i\}_i$ de elementos de $\mathcal{M}$ de manera que, si escribimos $\omega_i = \omega - D(g_0 + \ldots + g_{i-1})$, entonces:

$$\nu(\omega) < \nu(\omega_1) < \ldots < \nu(\omega_i) < \ldots$$

y

$$\nu(g_i) = 1 + \nu(\omega_i) \to \infty, \text{cuando } i \to \infty.$$

Por lo tanto, si tomamos $g^* = \sum_{i=0}^{\infty} g_i$, tenemos que $g^*$ es un serie de potencias convergente en la topología $m$-ádica, ya que $\nu(g_i) < \nu(g_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $g^* \in \mathcal{O}_B$. Además,

$$\omega = D(g^*),$$

puesto que:

$$\omega_i = \omega - D(g_0 + \ldots + g_{i-1})$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\nu(\omega) < \nu(\omega_1) < \ldots < \nu(\omega_i) < \ldots$, luego pasando el límite tenemos el resultado. $\square$

**Observación 5.1.** Si actuamos de la misma forma, veremos que $c - l(\mathcal{T})$ es el número máximo de diferenciales linealmente independientes de $\gamma^*(\Omega_B)$ que no son exactas.
Supongamos que:

$$l\left(\frac{\mathbb{C}\{t\}dt}{\gamma^*(\Omega_B)}\right) = \frac{c}{2} - r,$$

con $r \geq 1$. Entonces existen $\omega_1, \ldots, \omega_r$ en $\gamma^*(\Omega_B)$ y $\{\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_r}\}$ números naturales que no están en $S(B)$ de manera que:

$$\begin{aligned} \nu(\omega_1) &= \mu_{i_1} - 1 \\ &\vdots \\ \nu(\omega_r) &= \mu_{i_r} - 1. \end{aligned}$$

Está claro que $\omega_1, \ldots, \omega_r$ son linealmente independientes (sobre $\mathbb{C}$), ya que todo $\mu_{i_j}$ es diferente al resto. Vamos a ver que no pueden existir más diferenciales no exactas que sean linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.
Supongamos que existiera una diferencial no exacta $\overline{\omega} \in \gamma^*(\Omega_B)$ que fuera linealmente independiente a $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que:

$$\nu(\overline{\omega}) = \nu(\omega_1) = \mu_{i_1} - 1.$$

Por lo tanto,

$$s = \nu(\overline{\omega} - \omega_1) > \nu(\omega_1) = \mu_{i_1} - 1.$$

Pueden darse dos casos,

1. $s + 1 \in S(B)$, luego existe $g(x, y) \in \mathcal{O}_B$:

   $$\nu(g) = s + 1,$$

   así,

   $$\nu(D(g)) = s = \nu(\overline{\omega} - \omega_1)$$

   Por lo dicho en la demostración del teorema 5.8, existe $g^* \in \mathcal{O}_B$ tal que:

   $$\overline{\omega} - \omega_1 = D(g^*).$$

   Entonces $\overline{\omega}$ y $\omega_1$ son linealmente dependientes (sobre $\mathbb{C}$) en $\frac{\gamma^*(\Omega_B)}{D(\mathcal{O}_B)}$.
2. $s + 1 \notin S(B)$. Por lo tanto existe $j_1 \in \{1, \ldots r\}$ de manera que $s + 1 = \mu_{i_{j_1}}$ y:

   $$\nu(\overline{\omega} - \omega_1) = \nu(\omega_{j_1})$$

   Haciendo lo mismo que anteriormente,

   $$\nu(\overline{\omega} - \omega_1 - \omega_{j_1}) > \nu(\omega_{j_1})$$

   Si realizamos esto repetidas ocasiones, obtenemos $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, r\}$, con $k \leq r$ y verificando que:

   $$s = \nu(\overline{\omega} - \omega_1 - \omega_{j_1} - \ldots - \omega_{j_k}) > c - 2,$$

   ya que $c-1$ es el natural más grande que no está en el semigrupo $S(B)$. Por lo tanto, $s+1 \in S(B)$ y estamos en el caso 1.

Luego $c - l(\mathcal{T})$ es el número máximo de diferenciales linealmente independientes (sobre $\mathbb{C}$) en $\gamma^*(\Omega_B)$ módulo las diferenciales exactas.
Por lo dicho anteriormente, podemos identificar el módulo de las diferenciales, $\Omega_B$, con el módulo $\gamma^*(\Omega_B)$. Por los teoremas 4.6 y 5.3, tenemos que $r(B) = c - l(\mathcal{T})$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} r(B) = c - l(\mathcal{T}) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\frac{\gamma^*(\Omega_B)}{D(\mathcal{O}_B)}\right) = \\ = \sharp(\nu(\gamma^*(\Omega_B)) \setminus \nu(D(\mathcal{O}_B))). \end{aligned}$$

A continuación vamos a introducir el concepto de *parametrización corta de una curva $B$*. Sea $B = (f=0)$ una rama. Como ya hemos dicho, podemos suponer que tiene una parametrización:

$$x(t) = t^n,\ y(t) = \varphi(t) = \sum_{i\geq m} a_i t^i,$$

con $m > n$ y $a_m \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar $a_m = 1$. Por lo tanto, $B$ tiene una parametrización:

$$x(t) = t^n,\ y(t) = \varphi(t) = t^m + \ldots \tag{5.9}$$

Sean $n_1 > n_2 > \ldots > n_i > \ldots$ los naturales del semigrupo $S(B)$ y que son mayores que $m$. Por cómo hemos defindo a $S(B)$ sabemos que, para cada $i$ existe $g_i(x,y) \in \mathcal{O}_B$ de manera que:

$$\begin{gathered} \nu(g_i) = n_i \\ \nu(\gamma^*(g_i) - t^{n_i}) > n_i \end{gathered} \tag{5.10}$$

Vamos a definir por inducción una sucesión $\{z_i(x,y)\}_i$ en $\mathcal{O}_B$. Definimos:

$$z_1(x,y) = y - a_{n_1} g_1(x,y)$$

Si sustituimos $x(t) = t^n$ e $y(t) = \varphi(t)$, tenemos que:

$$z_1(x(t), y(t)) = t^m + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m+j}^{(1)} t^{m+j},$$

con $a_{n_1}^{(1)} = 0$, por las condiciones (5.10) que hemos impuesto a los $g_i$. Definimos $z_2$ como:

$$z_2(x,y) = z_1(x,y) - a_{n_2}^{(1)} g_2(x,y)$$

Si hacemos la misma sustitución de antes,

$$z_2(x(t), y(t)) = t^m + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m+j}^{(2)} t^{m+j},$$

con $a_{n_1}^{(2)} = a_{n_2}^{(2)} = 0$. Si suponemos que están definidos $z_1(x,y), \ldots, z_i(x,y)$, con:

$$z_i(x(t), y(t)) = t^m + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m+j}^{(i)} t^{m+j},$$

y $a_{n_1}^{(i)} = \ldots = a_{n_i}^{(i)} = 0$, entonces definimos:

$$z_{i+1}(x,y) = z_i(x,y) - a_{n_{i+1}}^{(i)} g_{i+1}(x,y).$$

Pasamos al límite, obteniendo así $z^*(x,y) = \lim_{i\to\infty} z_i(x,y)$ un elemento de $\mathcal{M}$ por la manera de definirlo. Si hacemos un cambio de variable $y = z^*$, es fácil ver que si sustituimos la parametrización en $z^*(x,y)$ obtenemos que no posee ningún monomio en $t$ con potencia un elemento del semigrupo, salvo $m$. Esto es:

$$z^*(x(t), y(t)) = t^m + \sum_{i=1}^{\frac{c}{2}} \overline{a}_i t^{\mu_i}, \tag{5.11}$$

donde $\mathbb{N} \setminus S(B) = \{\mu_1, \ldots, \mu_{\frac{c}{2}}\}$.
Por lo tanto, dada una curva $B = (f=0)$, podemos suponer que tiene una parametrización del tipo:

$$x(t) = t^n,\ y(t) = t^m + \sum_{i=1}^{\frac{c}{2}} b_i t^{\mu_i}, \tag{5.12}$$

con $\mu_i \notin S(B)$, para todo $i \in \{1, \ldots, \frac{c}{2}\}$. Una parametrización como la anterior se llama *parametrización corta de la curva $B$*.

**Observación 5.2.** Dada una curva $B = (f = 0)$ con una parametrización como (5.12) y por cómo hemos definido este tipo de parametrizaciones, está claro que $b_i = 0$, para todo $i$ que verifique que $\mu_i < m$, ya que hemos llegado hasta este tipo de parametrizaciones eliminando los monomios en $t$ con exponentes pertenecientes a $S(B)$ y estrictamente mayores que $m$.

Con esta observación, dada un curva $B = (f = 0)$ y una parametrización corta como en (5.12), definimos $\lambda$ como el mínimo $\mu_i$ tal que $b_i \neq 0$. Dicho número se conoce como *invariante $\lambda$ de Zariski.* En las páginas siguientes demostraremos que, efectivamente, se trata de un invariante analítico de las curvas. Además jugará un papel importante a la hora de clasificar las curvas analíticamente.

El siguiente resultado se puede encontrar en [15], Lema 5.

**Lema 5.9.** Sea $B = (f = 0)$ una curva plana irreducible que posee una parametrización como (5.12). Supongamos que $\lambda$ es el invariante de Zariski y sea $v \in S(B)$ un elemento del semigrupo que no es de la forma $an + bm$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces $v \geq mn_1 + \lambda - m$, donde $n_1 = \frac{n}{GCD(n,m)}$.

*Demostración.* Tomamos un $v \in S(B)$ tal que no sea de la forma $an+bm$, con $a, b \geq 0$. Entonces existe $g(x, y) \in \mathcal{M}$ de manera que $v = \nu(g)$. Suponemos que $g(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$.
Como $v = \nu(g)$ y $v$ no es combinación lineal en $\mathbb{N}$ de $n$ y $m$, tenemos que:

$$\nu(g) \neq \nu(x^i y^j),$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{i,j} \neq 0$. Además, $g(x, y)$ debe ser suma de un conjunto finito de monomios con la misma valoración, $\{a_{i_1,j_1} x^{i_1} y^{j_1}, \ldots, a_{i_k,j_k} x^{i_k} y^{j_k}\}$ con $k \geq 2$ y $a_{i_1,j_1} \neq 0, \ldots a_{i_k,j_k} \neq 0$, ya que, si todos los monomios fueran de diferente valoración, está claro que existiría $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(g) = \nu(x^{i_0} y^{j_0})$ y esto ya hemos dicho que no puede ocurrir.
Consideramos la suma de todos estos monomios:

$$p(x, y) = a_{i_1,j_1} x^{i_1} y^{j_1} + \ldots + a_{i_k,j_k} x^{i_k} y^{j_k}.$$

Por lo dicho, están claras las siguientes desigualdades entre valoraciones:

$$\nu(g) \geq \nu(p) > \nu(x^{i_r} y^{j_r}),$$

para todo $r = 1, 2, \ldots, k$.
Como los monomios que hemos considerado tienen la misma valoración, si escribimos $m_1 = \frac{m}{GCD(n,m)}$, tenemos:

$$\nu(x^{i_1} y^{j_1}) = \nu(x^{i_2} y^{j_2}) = \ldots = \nu(x^{i_k} y^{j_k}).$$

Luego,

$$ni_1 + mj_1 = ni_2 + mj_2 = \ldots = ni_k + mj_k$$

Sacando factor común $GCD(n, m)$ obtenemos la siguiente expresión:

$$n_1 i_1 + m_1 j_1 = n_1 i_2 + m_1 j_2 = \ldots = n_1 i_k + m_1 j_k$$

Si ordenamos los $\{x^{i_1} y^{j_1}, \ldots, x^{i_k} y^{j_k}\}$ de manera que:

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k,$$

tenemos que:

$$j_1 > j_2 > \ldots > j_k.$$

Por lo tanto,

$$p(x, y) = x^{i_1} y^{j_k} \cdot (a_{i_1,j_1} y^{j_1 - j_k} + a_{i_2,j_2} x^{i_2 - i_1} y^{j_2 - j_k} + \ldots + a_{i_k,j_k} x^{i_k - i_1}) = x^{i_1} y^{j_k} \pi(x, y).$$

Tomando $r_1, r_2 \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tal que $r_1 < r_2$. Tenemos, como ya hemos dicho:

$$i_{r_1} n_1 + j_{r_1} m_1 = i_{r_2} n_1 + j_{r_2} m_1,$$

por lo tanto,

$$j_{r_1} - j_{r_2} = \frac{(i_{r_2} - i_{r_1}) n_1}{m_1} \in \mathbb{N}.$$

Como $GCD(n_1, m_1) = 1$, tenemos que $i_{r_2} - i_{r_1}$ es múltiplo de $m_1$. Como $n_1 > 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} i_2 - i_1 &> m_1 \\ i_3 - i_1 &> 2m_1 \\ &\vdots \\ i_k - i_1 &> (k-1)m_1 \end{aligned}$$

Lo mismo se puede decir para los $j_r$ con $n_1$.
Por lo tanto, para todo $r$ tenemos que $i_r - i_1 = i_{1,r}m_1$ y $j_r - j_k = j_{r,k}n_1$, con $i_{1,r}, j_{r,k} \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\pi(x, y)$ se puede considerar un polinomio en las variables $x^{m_1}$ e $y^{n_1}$. Lo denotamos por $\overline{\pi}(x^{m_1}, y^{n_1})$. Así:

$$p(x, y) = x^{i_1} y^{j_k} \overline{\pi}(x^{m_1}, y^{n_1}).$$

De hecho, podemos decir que:

$$\nu(x^{i_r - i_1} y^{j_r - j_k}) = \nu(y^{j_1 - j_k}) = m(j_1 - j_k) > kmn_1 = k\nu(x^{m_1}) = k\nu(y^{n_1}). \tag{5.13}$$

La primera igualdad se tiene porque

$$\begin{aligned} \nu(x^{i_r - i_1} y^{j_r - j_k}) &= n(i_r - i_1) + m(j_r - j_k) = \\ &= ni_r + mj_r - ni_1 - mj_k = \\ &= ni_1 + mj_1 - ni_1 - mj_k = \\ &= m(j_1 - j_k) = \nu(y^{j_1 - j_k}). \end{aligned}$$

Veamos a continuación que todo monomio de $\pi(x, y)$ tiene la misma valoración. Sean $r_1, r_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$, veamos que $\nu(x^{i_{r_1} - i_1} y^{j_{r_1} - j_k}) = \nu(x^{i_{r_2} - i_1} y^{j_{r_2} - j_k})$. Para ello tenemos que ver que:

$$n(i_{r_1} - i_1) + m(j_{r_1} - j_k) = n(i_{r_2} - i_1) + m(j_{r_2} - j_k)$$

Esto es equivalente a que ocurra

$$ni_{r_1} + mj_{r_1} = ni_{r_2} + mj_{r_2},$$

que ya habíamos visto que era cierto.
Hemos supuesto que $\nu(p(x, y)) > \nu(x^{i_r} y^{j_r})$, para todo $r$. Esto implica que $\nu(\pi) > \nu(x^{i_r - i_1} y^{j_r - j_k})$, ya que si existiera un $r_0$ tal que $\nu(\pi) = \nu(x^{i_{r_0} - i_1} y^{j_{r_0} - j_k}) = n(i_{r_0} - i_1) + m(j_{r_0} - j_k)$, entonces:

$$\nu(p) = ni_1 + mj_k + n(i_{r_0} - i_1) + m(j_{r_0} - j_k) = \nu(x^{i_{r_0}} y^{j_{r_0}}),$$

lo que sería absurdo. Por lo tanto, por la desigualdad (5.13) y todo lo dicho anteriormente:

$$\nu(\overline{\pi}(x^{m_1}, y^{n_1})) > \nu(y^{j_1 - j_k}) > k\nu(x^{m_1}) = k\nu(y^{n_1}).$$

Por lo tanto:

$$\nu(\overline{\pi}(x, y)) > k\nu(x) > \nu(x) = \nu(y - x).$$

Por lo tanto $\nu(\overline{\pi}(x, y))$ es divisible por $y - x$, ya que si $g, h \in \mathcal{O}_B$ y $\nu(g) > \nu(h)$, entonces existe $z \in \mathcal{O}_B$ tal que $g = h \cdot z$.
Luego $\overline{\pi}(x^{m_1}, y^{n_1})$ es divisible por $y^{n_1} - x^{m_1}$, así $\nu(\overline{\pi}) \geq \nu(y^{n_1} - x^{m_1})$.
Utilizando (5.12), es fácil ver que:

$$\nu(y^{n_1} - x^{m_1}) = m(n_1 - 1) + \lambda = mn_1 + \lambda - m.$$

Por lo tanto,

$$\nu(p) \geq \nu(\overline{\pi}) \geq mn_1 + \lambda - m$$

Luego $\nu(g) \geq mn_1 + \lambda - m$, ya que $\nu(g) \geq \nu(p)$. □

Probemos un último lema antes de demostrar uno de los dos teoremas fundamentales del presente trabajo, que es clasificar analíticamente todas las curvas que cumplan que $\mu(B) = \tau(B)$, es decir $r(B) = 0$.

**Lema 5.10.** Con las notaciones anteriores, si $\lambda + n = an + bm$, con $a, b \in \mathbb{N}$, entonces $B = (f = 0)$ tiene una parametrización corta dada por:

$$x'(l) = l^n,\ y'(l) = l^m + b'l^{\lambda'} + \dots,$$

con $b' \neq 0$ y $\lambda' > \lambda$, $l$ una nueva variable, así como $x'$ e $y'$.

*Demostración.* Supongamos que $\lambda + n = an + bm$, luego $\lambda = (a-1)n + bm \notin S(B)$, por lo tanto $a = 0$. Suponemos entonces que:

$$\lambda = (j+1)m - n,$$

con $j \geq 1$, ya que $\lambda > m$. Además, suponemos que $B = (f = 0)$ tiene una parametrización como en (5.12).
Escribimos

$$x(t) + ay(t)^j = l^n,$$

donde $l$ es la nueva variable y $a \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, si sustituimos las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ dadas en (5.12), obtenemos:

$$\begin{aligned} l^n &= x(t) + ay(t)^j = t^n + a(t^m + \ldots)^j = \\ &= t^n + at^{jm} + \ldots \end{aligned}$$

Luego,

$$l^n = t^n + at^{jm} + \ldots \tag{5.14}$$

Se puede comprobar que:

$$l = t + \frac{a}{n} t^{jm-n+1} + \ldots$$

puesto que, si elevamos a $n$ tenemos que:

$$\begin{aligned} l^n &= (t + \frac{a}{n} t^{jm-n+1} + \ldots)^n = \\ &= t^n + n\frac{a}{n} t^{n-1+jm-n+1} + \ldots = \\ &= t^n + at^{jm} + \ldots . \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hacemos la sustitución en $y(t)$ y usando (5.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} y(l) &= \left(l - \frac{a}{n} t^{jm-n+1} + \ldots\right)^m + b\left(l - \frac{a}{n} t^{jm-n+1} + \ldots\right)^\lambda + \ldots = \\ &= l^m - ml^{m-1}\frac{a}{n} t^{jm-n+1} + \ldots + bl^\lambda + \ldots = \\ &= l^m - \frac{am}{n} l^{j(m+1)-n} + bl^\lambda + \ldots = \\ &= l^m + \left(b - \frac{am}{n}\right) l^\lambda + \ldots \end{aligned}$$

Si fijamos $a = \frac{bn}{m}$, entonces:

$$y(l) = l^m + \text{monomios de orden} > \lambda$$

Procediendo de la misma manera que hicimos en (5.11), podemos obtener una parametrización corta $y^*(t)$ tal que su $\lambda'$ sea mayor que $\lambda$ y sea parametrización de $B$. Esto completa la prueba. $\square$

Con todos estos resultados estamos en condiciones de enunciar y demostrar el primer teorema de clasificación analítica de curvas (ver [15], Teorema 4).

**Teorema 5.11.** *Sea $B = (f = 0)$ una curva plana irreducible. Entonces $r(B) = 0$ si, y sólo si, $B$ es analíticamente equivalente a la curva $(y^n - x^m = 0)$ (con $GCD(n, m) = 1$ ya que $f$ es irreducible y $n < m$).*

*Demostración.* En primer lugar, suponemos que $B$ en cierta base $\{x, y\}$ de $\mathcal{M}$ tiene una parametrización como en (5.12), esto es:

$$x(t) = t^n, \; y(t) = \varphi(t) = t^m + \sum_{j=1}^{\frac{c}{2}} b_j t^{\mu_j},$$

con $\{\mu_1, \ldots, \mu_{\frac{c}{2}}\} = \mathbb{N} \setminus S(B)$, donde $S(B)$ es el semigrupo de la curva $B$.
Suponemos que $B$ está dada en la base $\{x, y\}$ como $y^n - x^m = 0$. Por lo tanto una parametrización de dicha curva será:

$$x(t) = t^n, \; y(t) = t^m,$$

con $GCD(n,m) = 1$ y $n < m$. Observamos que, si hacemos la sustitución $x(t) = t^n$ e $y(t) = t^m$, tenemos:

$$x^i y^j D(x) = n \cdot t^{n(i+1)+mj-1} dt \tag{5.15}$$

Mientras que:

$$\frac{n}{n(i+1)+jm} D(x^{i+1}y^j) = \frac{n}{n(i+1)+jm} \cdot [n(i+1)+jm] \cdot t^{n(i+1)+jm-1} dt = \\ = n \cdot t^{n(i+1)+jm-1} dt.$$

Por lo tanto,

$$x^i y^j D(x) = \frac{n}{n(i+1)+jm} D(x^{i+1}y^j),$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. De manera análoga tenemos que:

$$x^i y^j D(y) = \frac{n}{ni+m(j+1)} D(x^i y^{j+1}).$$

Por lo tanto, lo que hemos demostrado es que, por la linealidad de las aplicaciones $D$ y $d$, toda diferencial de $\gamma^*(\Omega_B) = D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ es exacta. Por el teorema 5.8 $c = l(\mathcal{T})$. Utilizando el teorema 5.7 esto es equivalente a que $\mu(B) = \tau(B)$, con lo que hemos demostrado la primera implicación del teorema.

Demostremos la otra implicación. Supongamos que $\mu(B) = \tau(B)$. Por los teoremas 5.7 y 4.6, tenemos que $c = l(\mathcal{T})$, por lo tanto, por el teorema 5.8 tenemos que todas las diferenciales de $\gamma^*(\Omega_B) = D\gamma^*(\mathcal{O}_B)$ son exactas.
Vamos a proceder por contrarrecíproco. Demostraremos que existe una diferencial de $\Omega_B$ que no es exacta, con lo que habremos llegado a un absurdo.
Supongamos que $\{x, y\}$ es una base del ideal maximal $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_B$ tal que $B$ tiene una parametrización:

$$x(t) = t^n, \; y(t) \neq t^m$$

es decir, estamos suponiendo que $B$ tiene una parametrización de la forma de (5.12) de manera que no todos los $b_i$ son 0. Por lo tanto, escribimos

$$x(t) = t^n, \; y(t) = t^m + bt^\lambda + \dots,$$

con $\lambda > m$ el invariante de Zariski, $\lambda \notin S(B)$ y $b \neq 0$. Podemos suponer, por el lema 5.10, que $\lambda + n$ no es de la forma $an + bm$, con $a, b \in \mathbb{N}$, ya que de lo contrario podríamos encontrar otra parametrización corta de $B$ tal que su primer exponente mayor que $m$ y con coeficiente no nulo es mayor que $\lambda$.
Como $n < m(n_1 - 1)$, ya que $n < m$ y $n_1 > 1$, tenemos que $\lambda + n < mn_1 + \lambda - m$. Utilizando el lema 5.9, como $\lambda + n$ no es de la forma $an + bm$, con $a, b \in \mathbb{N}$, necesariamente debe ocurrir que $\lambda + n \notin S(B)$.
Definimos la siguiente diferencial, que jugará un papel importante en lo que sigue,

$$\omega = mydx - nxdy$$

Su valoración es:

$$\nu(\omega) = \mathrm{ord}_t(m(t^m + bt^\lambda + \dots)nt^{n-1} - nt^n(mt^{m-1} + \lambda bt^{\lambda-1} + \dots)) = \\ = \mathrm{ord}_t(mnt^{m+n-1} - mnt^{m+n-1} + bnmt^{\lambda+n-1} - bn\lambda t^{\lambda+n-1} + \dots) = \\ = \mathrm{ord}_t(bn(m-\lambda)t^{\lambda+n-1} + \dots) = \lambda + n - 1,$$

ya que $\lambda - m > 0$. La diferencial $\omega$ se puede ver en $\gamma^*(\Omega_B)$ como $my(t)D(x) - nx(t)D(y)$.
Si $\omega$ fuera una diferencial exacta de $\gamma^*(\Omega_B)$, entonces existiría $g(x, y) \in \mathcal{O}_B$ de manera que:

$$\nu(g) = \lambda + n \notin S(B),$$

lo que no es posible, como hemos visto. Con lo que la rama $B$ tiene que ser analíticamente equivalente a la curva $y^n - x^m = 0$, y se termina la prueba. $\square$

Por último, para concluir la parte de clasificación analítica de curvas cuando $r(B) = 0$ vamos a aclarar una cuestión sobre el número $\lambda$. Vamos a ver que, efectivamente, se trata de un invariante analítico.

Esto lo haremos de la manera siguiente. Fijamos una parametrización corta de una rama $B = (f = 0)$. Vamos a demostrar que el número $\lambda + n - 1$ verifica que:

$$\lambda + n - 1 = \text{mín}(\nu(\gamma^*(\Omega_B)) \setminus D(\mathcal{O}_B))$$

Por la identificación que hemos hecho antes de $\gamma^*(\Omega_B)$ con el módulo $\Omega_B$, y utilizando la valoración definida para $\Omega_B$ tenemos que, la anterior fórmula es equivalente a:

$$\lambda + n - 1 = \text{mín}(\nu(\Omega_B) \setminus d(\mathcal{O}_B)) \tag{5.16}$$

Sea $\omega$ la diferencial antes definida y $\omega' = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ otra diferencial, con $A(x,y), B(x,y) \in \mathcal{O}_B$, de manera que $\nu(\omega') \neq \nu(g) - 1$, para todo $g \in \mathcal{O}_B$. Queremos ver que $\lambda + n - 1$ es el mínimo de las valoraciones de las diferenciales de $\Omega_B$ que no son exactas. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} nx\omega' &= nxAdx + nxBdy = \\ &= (nxA + mBy)dx - mBydx + nxBdy = \\ &= (nxA + myB)dx - B(mydx - nxdy) = \\ &= (nxA + myB)dx - B\omega. \end{aligned}$$

Está claro que $\nu(x\omega') \neq \nu((nxA + myB)dx)$, porque si lo fuera, entonces:

$$\nu(\omega') + n = \nu(nxA + myB) + n - 1,$$

luego $\nu(\omega') = \nu(nxA + myB) - 1$, con $nxA + myB \in \mathcal{O}_B$ lo que es absurdo, pues $\nu(\omega') \neq \nu(g) - 1$ para todo $g \in \mathcal{O}_B$. Por lo tanto,

$$\nu(x\omega') \geq \nu(B\omega).$$

Si demostramos que $B \in \mathcal{M}$ ya habríamos acabado, ya que entonces $\nu(B) \geq \nu(x)$ y, como $\nu(x\omega') \geq \nu(B\omega)$, tenemos que $\nu(\omega') \geq \nu(\omega)$. Veamos por lo tanto que $B$ no puede ser una unidad. Como:

$$\nu(x\omega') > \nu((nxA + myB)dx),$$

tenemos que:

$$\nu(\omega') > \nu(nxA + myB) - 1,$$

por lo tanto, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \nu(\omega') &\geq \nu(nxA) = \nu(A) + n > \nu(Adx) = \nu(A) + n - 1 \\ \nu(\omega') &\geq \nu(nyB) = \nu(B) + m > \nu(Bdy) = \nu(B) + m - 1. \end{aligned}$$

Como $\omega' = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, tenemos que necesariamente las valoraciones de $Adx$ y $Bdy$ deben coincidir, luego:

$$\nu(Adx) = \nu(A) + n - 1 = \nu(B) + m - 1 = \nu(Bdy),$$

luego $\nu(A) + n = \nu(B) + m$. Si suponemos que $B$ es una unidad, entonces $\nu(A) = m - n \in S(B)$. Como $\nu(A) < m$ debe ser múltiplo de $n$, así $\nu(A) = zn$, con $z \in \mathbb{N}$. De esta forma, tenemos:

$$\nu(A) + n = (z+1)n = m,$$

pero esto no es posible porque $GCD(n,m) = 1$. Por lo tanto $B$ no puede ser una unidad, $B \in \mathcal{M}$ y, por ende,

$$\lambda + n - 1 = \text{mín}(\nu(\Omega_B) \setminus \nu(d(\mathcal{O}_B)))$$

Como dadas dos curvas analíticamente equivalentes, $B$ y $B'$, entonces $\mathcal{O}_B \simeq \mathcal{O}'_B$, por lo tanto $\Omega_B \simeq \Omega_{B'}$ y $\lambda$ es un invariante analítico de la curva $B$, por la propiedad que acabamos de probar.

A continuación vamos a intentar clasificar analíticamente todas la curvas con $r(B) = 1$ (este caso se puede seguir en [7]). Ya hemos visto que si $r(B) = 0$, la rama $B$ es analíticamente equivalente a la rama definida por:

$$y^n - x^m = 0,$$

con $n < m$ y $GCD(n,m) = 1$. Dichas curvas se llaman *curvas de Zariski*, ya que fue el propio *O.Zariski* quien hizo por primera vez una clasificación de este tipo, en [15].

Por lo dicho en secciones precendentes, si consideramos $S(B)$ el semigrupo de la rama $B$ y $c$ el conductor entonces podemos expresar a este último, por la fórmula (4.1), como

$$c = (n_1 - 1)\overline{\beta}_1 + \ldots + (n_g - 1)\overline{\beta}_g - \overline{\beta}_0 + 1, \tag{5.17}$$

con $n_0 = 1$ y $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ con $i = 1, 2, \ldots, g$.
A partir de aquí vamos a suponer que $r(B) > 0$. Por lo tanto $B$ tiene una parametrización del tipo (5.12):

$$x(t) = t^n,\ y(t) = t^m + \sum_{j=1}^{\frac{c}{2}} b_j t^{\mu_j},$$

donde hay algún $b_j$ que no es nulo. Por lo tanto existe el invariante $\lambda$ de Zariski. Hemos visto en la clasificación anterior que dicho número verifica la siguiente propiedad:

$$\lambda = \text{mín}(\nu(\Omega_B) \setminus \nu(d(\mathcal{O}_B))) - n + 1.$$

Hemos visto que $\lambda \notin S(B)$ y $\lambda + n \notin S(B)$. Además,

$$m = \overline{\beta_1} < \lambda \leq \beta_2 = \overline{\beta}_2 - (n_1 - 1)\overline{\beta}_1 \tag{5.18}$$

La desigualdad $\lambda \leq \beta_2$ es clara a partir de la definición de $\lambda$ y que $\beta_2 \notin S(B)$, ya que $\overline{\beta}_2 = (n_1 - 1)\beta_1 + \beta_2 > \beta_2$, por lo tanto $\beta_2$ necesariamente tiene que ser un *gap* del semigrupo $S(B)$.
Si consideramos la diferencial $\omega = mydx - nxdy$, sabemos que tiene valoración mínima entre las diferenciales no exactas de $\Omega_B$.

A continuación vamos a dar un resultado que nos servirá para expresar a $\lambda$ en función de los $\{\overline{\beta}_i\}_i$ (ver [1], Lema $I$.2.4.).

**Lema 5.12.** Dado un entero $n$, tenemos una única solución para la congruencia

$$n \equiv \sum_{i=1}^{g} s_i \overline{\beta}_i \bmod \overline{\beta}_0,$$

con $0 \leq s_i < n_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, g$.

*Demostración.* Antes de comenzar con la prueba vamos a fijar la notación. Escribimos:

$$m_i = \frac{\overline{\beta}_i}{e_i}$$
$$\overline{\beta}'_i = \frac{\overline{\beta}_i}{n_g},$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, g$, donde $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, g$.

Procedemos por inducción en $g$. Vamos a demostrar el caso $g = 1$. Tomamos $n_1 = \frac{e_0}{e_1}$ y $m_1 = \overline{\beta}_1$. Es claro que $GCD(n_1, m_1) = 1$, por lo tanto existen $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$1 = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \alpha_0 n_1.$$

Así, dado $n \in \mathbb{Z}$:

$$n = (n\alpha_1)\overline{\beta}_1 + (n\alpha_0)n_1$$

Si $n\alpha_1 < 0$ sumamos $n_1$ a $n\alpha_1$ y restamos $\overline{\beta}_1$ a $n\alpha_0$ hasta expresar $n$ de la forma:

$$n = s_1 \overline{\beta}_1 + \alpha n_1, \tag{5.19}$$

con $0 \leq s_1 < n_1$ (si $n\alpha_1 \geq n_1$ se procede de manera análoga y se consigue el mismo resultado). Está claro que la expresión (5.19) es única.
Además $n_1 = \overline{\beta}_0$. Por lo tanto, la congruencia:

$$n \equiv s_1 \overline{\beta}_1 \bmod \overline{\beta}_0,$$

con $0 \leq s_1 < n_1$ es única.
Suponemos cierto el resultado para $g-1$. Probémoslo para $g$. Tomamos $n_g = e_{g-1}$ y $m_g = \overline{\beta}_g$. Es claro que $GCD(n_g, m_g) = 1$. Entonces existe $\alpha_g, \gamma_g \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$1 = \alpha_g \overline{\beta}_g + \gamma_g n_g$$

Dado un $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$n = (n\alpha_g)\overline{\beta}_g + (n\gamma_g)n_g$$

Procediendo de la misma forma que antes, podemos encontrar una expresión única de $n$ de la forma:

$$n = s_g \overline{\beta}_g + \gamma n_g, \tag{5.20}$$

con $0 \leq s_g < n_g$. Por hipótesis de inducción, sabemos que la siguiente congruencia tiene solución única:

$$\gamma n_g = \sum_{i=1}^{g-1} s_i \overline{\beta}_i \bmod \overline{\beta}_0, \tag{5.21}$$

con $0 \leq s_i < n_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, g-1$. Por lo tanto:

$$\gamma \equiv \sum_{i=1}^{g-1} s_i \overline{\beta}'_i \bmod \overline{\beta}'_0.$$

Por lo tanto, existe un $z_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\gamma = s_1 \overline{\beta}'_1 + \ldots + s_{g-1}\overline{\beta}'_{g-1} + z_0 \overline{\beta}'_0.$$

Si utilizamos la ecuación (5.20), tenemos la siguiente expresión única:

$$\begin{aligned} n &= s_g \overline{\beta}_g + n_g(s_1 \overline{\beta}'_1 + \ldots + s_{g-1}\overline{\beta}'_{g-1} + z_0 \overline{\beta}'_0) = \\ &= s_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + s_g \overline{\beta}_g + z_0 \overline{\beta}_0, \end{aligned}$$

con $0 \leq s_i < n_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, g$, con lo que queda probar el resultado. □

Utilizando el Lema 5.12, podemos expresar el invariante de Zariski como:

$$\lambda = \lambda_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \lambda_g \overline{\beta}_g - \lambda_0 \overline{\beta}_0, \tag{5.22}$$

donde $0 \leq \lambda_i \leq n_i - 1$, con $i = 1, 2, \ldots, g$ y $\lambda_0 \geq 2$ ya que $\lambda \notin S(B)$ y $\lambda + n \notin S(B)$. Habitualmente este resultado se suele conocer como el *Lema de Angermüller*.
A continuación vamos a demostrar un resultado general que acota inferiormente los posibles valores de $r(B)$ (ver [3], Proposición 1).

**Proposición 5.13.** Con las notaciones anteriores y suponiendo que $r(B) > 0$, tenemos que:

$$r(B) \geq (\lambda_0 - 1) \cdot (n_1 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (n_g - \lambda_g).$$

*Demostración.* Consideramos una sucesión $\{h_i(x,y)\}_{i=2}^{g}$ de elementos de $\mathbb{C}\{x,y\}$, de manera que:

$$\nu(h_i) = \overline{\beta}_i,$$

para todo $i \in \{2, 3, \ldots, g\}$. Tomamos $g+1$ números naturales $a_0, \ldots, a_g \in \mathbb{N}$ y construimos la siguiente diferencial:

$$\overline{\omega}_a = x^{a_0} \cdot y^{a_1} \cdot h_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot h_g^{a_g} \cdot \omega,$$

donde $\omega = mydx - nxdy$. La diferencial $\overline{\omega}_a$ tendrá valoración:

$$\nu(\overline{\omega}_a) = a_0 \overline{\beta}_0 + a_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + a_g \overline{\beta}_g + \lambda + n - 1,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nu(\overline{\omega}_a) + 1 &= a_0 \overline{\beta}_0 + a_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + a_g \overline{\beta}_g + \lambda_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \lambda_g \overline{\beta}_g - \lambda_0 \overline{\beta}_0 + n = \\ &= (a_0 - \lambda_0 + 1)\overline{\beta}_0 + (a_1 + \lambda_1)\overline{\beta}_1 + \ldots + (a_g + \lambda_g)\overline{\beta}_g. \end{aligned}$$

Si tomamos los $a_i$ de tal manera que $a_0 < \lambda_0 - 1$ y $0 \leq a_i \leq n_i - \lambda_i - 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, g\}$, está claro que $1 + \nu(\overline{\omega}_a) \notin S(B)$, pues la expresión de dicho número respecto de los $\overline{\beta}_i$ es única. Luego $\overline{\omega}_a$ no puede ser una diferencial exacta en el $\mathcal{O}_B$-módulo $\Omega_B$, ya que si de lo contrario lo fuera, existiría $h(x,y) \in \mathbb{C}\{x,y\}$ de tal manera que $\nu(d(h)) = \nu(\overline{\omega}_a)$, por lo tanto $\nu(h) = \nu(\overline{\omega}_a) + 1 \notin S(B)$, lo que

sería absurdo.
En suma, si consideramos $0 \leq a_0 \leq \lambda_0 - 2$ y $0 \leq a_i \leq n_i + \lambda_i - 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, g$ tenemos que $\overline{\omega}_a$ es una diferencial no exacta. Variando los $a_i$ obtenemos diferenciales diferentes y linealmente independientes (módulo las diferenciales exactas) en $\Omega_B$. De esta forma, tenemos una cantidad de elecciones posibles igual a

$$(\lambda_0 - 1) \cdot (n_1 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (n_g - \lambda_g),$$

por lo tanto existen, como mínimo, ese número de diferenciales no exactas linealmente independientes (módulo las diferenciales exactas) en $\Omega_B$. Por lo tanto:

$$r(B) \geq (\lambda_0 - 1) \cdot (n_1 - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (n_g - \lambda_g).$$

□

El siguiente resultado (Proposición 5.15) da una noción de la estructura del $\mathcal{O}_B$-módulo $\Omega_B$ en función de la diferencial $\omega$ y las diferenciales exactas.
La prueba completa como tal no la hemos encontrado disponible en ningún sitio, con lo que la hemos tenido que elaborar nosotros. Antes de ello, vamos a probar un lema sobre series de potencias que nos hace falta para dicha prueba.

**Lema 5.14.** Sean $A(x, y), B(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ dos series de potencias convergentes y sean $r, s \in \mathbb{N}$. Entonces existen series $G(x, y), C(x, y) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ de manera que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) &= A(x, y) + ryC(x, y) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) &= B(x, y) - sxC(x, y). \end{aligned} \tag{5.23}$$

*Demostración.* Suponemos que $A(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} x^i y^j$ y $B(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} b_{i,j} x^i y^j$. La prueba consiste en determinar unos determinados coeficientes $\{g_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$ y $\{c_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$ de tal manera que $G(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} g_{i,j} x^i y^j$ y $C(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} c_{i,j} x^i y^j$ verifiquen las ecuaciones (5.23).
Si integramos respecto de $x$ la primera ecuación de (5.23), obtenemos que:

$$G(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{i,j}}{(i + 1)} x^{i+1} y^j + \sum_{i,j \geq 0} r \frac{c_{i,j}}{(i + 1)} x^{i+1} y^{j+1} + K(y), \tag{5.24}$$

donde $K(y) = \sum_{j \geq 0} k_j y^j \in \mathbb{C}\{y\}$.
De la misma manera, si integramos respecto de $y$ la segunda ecuación de (5.23), tenemos:

$$G(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} \frac{b_{i,j}}{(j + 1)} x^i y^{j+1} - \sum_{i,j \geq 0} s \frac{c_{i,j}}{(j + 1)} x^{i+1} y^{j+1} + P(x), \tag{5.25}$$

donde $P(x) = \sum_{i \geq 0} p_i x^i \in \mathbb{C}\{x\}$. Por lo tanto, si determinamos los coeficientes $\{c_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$, $\{k_j\}_{j \geq 0}$ y $\{p_i\}_{i \geq 0}$ directamente tenemos los coeficientes de la serie $G$, usando (5.24) o (5.25). Así, igualando ambas expresiones:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{i,j}}{(i + 1)} x^{i+1} y^j + \sum_{i,j \geq 0} r \frac{c_{i,j}}{(i + 1)} x^{i+1} y^{j+1} + \sum_{j \geq 0} k_i y^j = \\ &= \sum_{i,j \geq 0} \frac{b_{i,j}}{(j + 1)} x^i y^{j+1} - \sum_{i,j \geq 0} s \frac{c_{i,j}}{(j + 1)} x^{i+1} y^{j+1} + \sum_{i \geq 0} p_i x^i, \end{aligned}$$

luego, agrupando los monomios de igual orden tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \geq 0} \left( \frac{r}{(i + 1)} + \frac{s}{(j + 1)} \right) c_{i,j} x^{i+1} y^{j+1} = \sum_{i,j \geq 0} \frac{b_{i,j}}{(j + 1)} x^i y^{j+1} - \sum_{i,j \geq 0} \frac{a_{i,j}}{(i + 1)} x^{i+1} y^j + \\ + \sum_{i \geq 0} p_i x^i - \sum_{j \geq 0} k_j y^j \end{aligned} \tag{5.26}$$

Por lo tanto:

$$\left( \frac{r}{(i + 1)} + \frac{s}{(j + 1)} \right) c_{i,j} = \frac{b_{i+1,j}}{(j + 1)} - \frac{a_{i,j+1}}{(i + 1)},$$

luego los coeficientes $\{c_{i,j}\}_{i,j\geq 0}$ tendrán la siguiente expresión:

$$c_{i,j} = \frac{b_{i+1,j}(i+1) - a_{i,j+1}(j+1)}{r(j+1)+s(i+1)},$$

para todo $i,j \geq 0$.
Para completar la prueba sólo nos queda determinar los coeficientes $\{p_i\}_{i\geq 0}$ y $\{k_j\}_{j\geq 0}$. Si observamos la ecuación (5.26), las únicas series con monomios únicamente en $x$ son $\sum_{i,j\geq 0} \frac{a_{i,j}}{(i+1)} x^{i+1}y^j$ y $P(x)$, por lo tanto:

$$-\frac{a_{i,0}}{(i+1)}x^{i+1} + p_{i+1}x^{i+1} = 0,$$

luego,

$$p_{i+1} = \frac{a_{i,0}}{(i+1)},$$

para todo $i \geq 0$. De manera análoga podemos ver que:

$$k_{j+1} = \frac{b_{j,0}}{(j+1)},$$

para todo $j \geq 0$. Los términos independientes como no aparecen en ninguna serie de la expresión (5.26) podemos tomarles como 0, luego:

$$k_0 = p_0 = 0.$$

□

Este resultado se puede ver en [3], Proposición 2.

**Proposición 5.15.** Con las notaciones anteriores, tenemos la siguiente igualdad entre $\mathbb{C}$-espacios vectoriales:

$$\Omega_B = \mathcal{O}_B\omega + d(\mathcal{O}_B),$$

donde $\mathcal{O}_B\omega$ denota a todas las diferenciales múltiplos de $\omega$.

*Demostración.* Sea $\eta \in \Omega_B$ una diferencial, la cual tendrá una expresión $\eta = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, con $A(x,y), B(x,y) \in \mathcal{O}_B$. Siguiendo las notaciones del lema 5.14, tomamos $r = m$ y $s = n$. Suponemos que $G(x,y)$ y $C(x,y)$ son las series que nos da el lema verificando:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = A(x,y) + ryC(x,y)$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = B(x,y) - sxC(x,y)$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} d(G(x,y)) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)dy = \\ &= (A(x,y) + ryC(x,y))dx + (B(x,y) - sxC(x,y))dy = \\ &= A(x,y)dx + B(x,y)dy + (sxdy - rydx)C(x,y) = \\ &= A(x,y)dx + B(x,y)dy + (rydx - sxdy)C(x,y) = \\ &= \eta + \omega C(x,y), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\eta = -C(x,y)\omega + d(G(x,y)) \in \mathcal{O}_B\omega + d(\mathcal{O}_B).$$

□

Anteriormente vimos como, si teníamos una parametrización de la curva del tipo

$$x(t) = t^n, \; y(t) = t^m + \sum_{i>m} a_i t^i,$$

entonces había una curva analíticamente equivalente a la anterior y con una parametrización corta, es decir, que de nuetra parametrización podíamos eliminar los monomios cuyo exponente fuese un elemento del semigrupo de la curva. Procediendo de la misma manera podemos eliminar a todos aquellos exponentes, $s$, que cumplan que $s+n = bm$ para algún $b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ (ver [18], Lema 2.6. páginas $34-35$).

**Lema 5.16.** Sea $B$ una curva con una parametrización:

$$x(t) = t^n,\ y(t) = t^m + \sum_{i>m} a_i t^i$$

Supongamos que existe un $s > m$ tal que $s + n = bm$ para algún $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y con $a_s \neq 0$. Entonces existe una rama $B'$ analíticamente equivalente a $B$ y con parametrización:

$$x'(t) = t^n,\ y'(t) = t^m + \sum_{m<i<s} a_i t^i + \sum_{j>s} a'_j t^j.$$

*Demostración.* La demostración consiste en construir un automorfismo, $\Phi : \mathbb{C}\{t\} \longrightarrow \mathbb{C}\{t\}$ de tal manera que $y'(t) = \Phi^{-1}(y(t))$ sea de la forma pedida. Al tratarse de un automorfismo, es evidente que la curva que tenga la parametrización $(t^n, y'(t))$ será analíticamente equivalente a la curva original, $B$. Tomamos $x'(t) = t^n$ y definimos al automorfismo $\Phi$ de manera que verifique:

$$\Phi(x'(t)) = (\Phi(t))^n = x(t) + ay^{b-1}(t),$$

donde $a \in \mathbb{C}$ es un número complejo a determinar. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\Phi(t))^n &= t^n + a(t^m + \sum_{i>m} a_i t^i)^{b-1} = \\ &= t^n + at^{m(b-1)} + \dots .\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= t + \frac{a}{n} t^{m(b-1)-n+1} + \dots = \\ &= t + \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots ,\end{aligned}$$

ya que $s = mb - n$. Si hallamos el inverso del automorfismo $\Phi(t)$ tenemos la siguiente expresión:

$$\Phi^{-1}(t) = t - \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots ,$$

puesto que:

$$\begin{aligned}t = \Phi^{-1}(\Phi(t)) &= (t + \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots) - \frac{a}{n}(t + \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots)^{s-m+1} + \dots = \\ &= t + \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots - \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots\end{aligned}$$

Entonces, escribimos $y'(t) = \Phi^{-1}(y(t))$. Por lo tanto, utilizando que $\Phi^{-1}$ también es un automorfismo de anillos:

$$\begin{aligned}y'(t) &= \Phi^{-1}(t^m + \sum_{i>m} a_i t^i) = \\ &= \Phi^{-1}(t^m) + \sum_{i>m} a_i \Phi^{-1}(t^i) = \\ &= (\Phi^{-1}(t))^m + \sum_{i>m} a_i (\Phi^{-1}(t))^i.\end{aligned}$$

Si desarrollamos ambas expresiones tenemos que:

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1}(t))^m &= (t - \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots)^m = \\ &= t^m - \frac{ma}{n} t^{m-1+s-m+1} + \dots = \\ &= t^m - \frac{ma}{n} t^s + \text{monomios de orden mayor que } s,\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}(\Phi^{-1}(t))^i &= (t - \frac{a}{n} t^{s-m+1} + \dots)^i = \\ &= t^i - \frac{ia}{n} t^{s-m+1+i-1} + \dots = \\ &= t^i - \frac{ma}{n} t^{s+i-m} + \text{monomios de orden mayor que } s + i - m,\end{aligned}$$

Como suponemos $i > m$, está claro que $s + i - m > s$ y, por lo tanto, $y'(t)$ tendrá una expresión:

$$y'(t) = t^m + \sum_{m<i<s} a_i t^i + \left(a_s - \frac{ma}{n}\right) t^s + \text{monomios de orden mayor que } s.$$

Si tomamos $a = \frac{a_s n}{m}$ conseguimos hacer 0 el coeficiente del monomio de grado $s$, por lo tanto $(x'(t), y'(t))$ es una parametrización de la forma buscada. □

En lo que resta de trabajo intentaremos ver que si el invariante $r(B)$ es bajo (en nuestro caso 1) entonces el género está acotado.
Con las notaciones que venimos utilizando, supongamos $r(B) \geq 1$. Utilizando la expresión del invariante $\lambda$ como en (5.22), definimos el número:

$$j_\lambda := \text{máx}\{i : \lambda_i \neq 0\}.$$

Como $\lambda_0 \geq 0$ y $\lambda > 0$, entonces $j \geq 1$ y $\lambda_{j_\lambda} \geq 1$. Por lo tanto:

$$\lambda \geq \lambda_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \lambda_{j_\lambda - 1} \overline{\beta}_{j_\lambda - 1} + \overline{\beta}_{j_\lambda} - \lambda_0 \overline{\beta}_0 \geq \overline{\beta}_{j_\lambda} - \lambda_0 \overline{\beta}_0. \tag{5.27}$$

Por la Proposición 5.13, $r(B) \geq (\lambda_0 - 1)(n_1 - \lambda_1) \ldots (n_g - \lambda_g)$, entonces:

$$r(B) \geq (\lambda_0 - 1) n_{j_\lambda + 1} \ldots n_g. \tag{5.28}$$

Estamos en condiciones de probar una cota inferior de $r(B)$ que utilizaremos posteriormente (ver [3], Proposición 4).

**Proposición 5.17.** Con las notaciones anteriores, tenemos que:

$$r(B) \geq \frac{n}{n_{j_\lambda}}.$$

*Demostración.* Distinguiremos tres casos en esta prueba.

1. **Caso $j_\lambda = 1$.** Por la fórmula (5.28):

$$r(B) \geq (\lambda_0 - 1) n_2 \ldots n_g \geq n_2 \ldots n_g = \frac{n}{n_1}.$$

2. **Caso $j_\lambda = 2$.**

*a*) Supongamos que $\lambda_1 = 0$. Por la Proposición 5.13:

$$r(B) \geq n_1 (n_2 - \lambda_2) n_3 \ldots n_g \geq n_1 n_3 \ldots n_g = \frac{n}{n_2}.$$

*b*) Supongamos que $\lambda_1 \geq 1$. Entonces, por la Proposición 5.13, tenemos que:

$$r(B) \geq (n_1 - \lambda_1)(n_2 - \lambda_2) n_3 \ldots n_g.$$

Además, sabemos por (5.18) y (5.27) que:

$$\overline{\beta}_2 - (n_1 - 1)\overline{\beta}_1 = \beta_2 \geq \lambda \geq \overline{\beta}_2 + \overline{\beta}_1 - \lambda_0 \overline{\beta}_0.$$

Así, si escribimos $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$ con $GCD(m_1, n_1) = 1$. Por las desigualdades anteriores tenemos que:

$$\overline{\beta}_2 - (n_1 - 1)\overline{\beta}_1 \geq \overline{\beta_2} + \overline{\beta}_1 - \lambda_0 \overline{\beta}_0,$$

por lo tanto:

$$\lambda_0 \overline{\beta}_0 \geq n_1 \overline{\beta}_1 = m_1 \overline{\beta}_0,$$

luego $\lambda_0 \geq m_1 > n_1$. Tenemos así que $\lambda_0 - 1 \geq n_1$. Por lo tanto,

$$r(B) \geq (\lambda_0 - 1) n_3 \ldots n_g \geq n_1 n_3 \ldots n_g = \frac{n}{n_2}.$$

3. **Caso $j_\lambda \geq 3$.** Por las desigualdades (5.18) y (5.27):

$$\overline{\beta}_2 - (n_1 - 1)\overline{\beta}_1 = \beta_2 \geq \lambda \geq \overline{\beta}_{j_\lambda} - \lambda_0 \overline{\beta}_0, \tag{5.29}$$

así, teniendo en cuenta las desigualdades (2.4) y (5.29) tenemos que:

$$\begin{aligned}\lambda_0\overline{\beta}_0 &\geq \overline{\beta}_{j_\lambda} - \overline{\beta}_2 + (n_1-1)\overline{\beta}_1 > \\ &> n_{j_\lambda-1}\overline{\beta}_{j_\lambda-1} - \overline{\beta}_2 + \overline{\beta}_1 = \\ &= (n_{j_\lambda-1}-1)\overline{\beta}_{j_\lambda-1} - \overline{\beta}_2 + \overline{\beta}_{j_\lambda-1} + \overline{\beta}_1 > \\ &> \overline{\beta}_{j_\lambda-1} + \overline{\beta}_1 > n_{j_\lambda-2}\overline{\beta}_{j_\lambda-2} + \overline{\beta}_1 > \\ &> \ldots > \\ &> n_{j_\lambda-2}\cdot\ldots\cdot n_1\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_1 > \\ &> n_{j_\lambda-2}\cdot\ldots\cdot n_1\overline{\beta}_0 + \overline{\beta}_0.\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\lambda_0 - 1 \geq n_{j_\lambda-2}\ldots n_1$ y por la Proposicion 5.13 obtenemos:

$$\begin{aligned}r(B) &> n_{j_\lambda-2}\ldots n_1 n_{j_\lambda-1}(n_{j_\lambda}-\lambda_{j_\lambda})n_{j_\lambda+1}\ldots n_g \geq \\ &\geq n_1\ldots n_{j_\lambda-1}n_{j_\lambda+1}\ldots n_g = \frac{n}{n_{j_\lambda}}.\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, ya podemos demostrar el siguiente resultado que relaciona a $r(B)$ con el género de la curva $B$, $g$ (ver [3], Corolario 5).

**Corolario 5.18.** Con las notaciones anteriores, si $r(B) \geq 1$, entonces $r(B) \geq 2^{g-1}$.

*Demostración.* Por una parte $n = n_1\ldots n_g$ y $n_i \geq 2$ para todo $i = 1,\ldots,g$. Además, por la Proposición 5.17:

$$r(B) \geq \frac{n}{n_{j_\lambda}} = n_1\ldots n_{j_\lambda-1}n_{j_\lambda+1}\ldots n_g \geq 2^{g-1}.$$

□

El siguiente resultado se puede encontrar en [3], Corolario 6.

**Corolario 5.19.** Con las notaciones anteriores, si $r(B) = 1$, entonces $g = 1$.

*Demostración.* Por el Corolario 5.18 sabemos que:

$$r(B) = 1 \geq 2^{g-1},$$

por lo tanto $g = 1$. □

A continuación vamos a clasificar analíticamente a toda curva, $B = (f = 0)$, que cumpla $r(B) = 1$. Por el corolario 5.19 tenemos que $g = 1$, luego sólo existen dos exponentes característicos $\beta_0 = n$ y $\beta_1 = m$, con $GCD(m,n) = 1$. Además utilizando la Proposición 5.13, obtenemos la siguiente cota inferior, teniendo en cuenta que $n_1 = n$:

$$r(B) = 1 \geq (\lambda_0 - 1)(n - \lambda_1).$$

Por lo tanto, es claro que, como $\lambda_0 \geq 2$, entonces:

$$\lambda_0 = 2,\ \lambda_1 = n-1. \tag{5.30}$$

Llegamos así al segundo teorema principal del trabajo (ver [3], Teorema 7).

**Teorema 5.20.** Con las notaciones anteriores, $r(B) = 1$ si, y sólo si, $S(B)$ está generado por $n$ y $m$ y $\lambda = (n-1)m - 2n$.
En este caso, la rama $B$ es analíticamente equivalente a una curva con parametrización:

$$x(t) = t^n,\ y(t) = t^m + t^\lambda.$$

*Demostración.* Si suponemos que $r(B) = 1$ entonces por lo dicho anteriormente $S(B)$ está generado por $n$ y $m$ con $GCD(m,n) = 1$ y por (5.30), $\lambda = (n-1)m - 2n$.
Recíprocamente, si $S(B)$ está generado por $n$ y $m$ y $\lambda = (n-1)m - 2n$ entonces es claro que:

$$\lambda + n = (n-1)m - n = c - 1$$

por la ecuación (4.1). Si consideramos la diferencial $\omega = mydx - nxdy$, sabemos que tiene valoración $\lambda + n - 1$ y por lo dicho, tiene valoración máxima entre las diferenciales no exactas de $\Omega_B$. También sabemos, por (5.16), que la diferencial $\omega$ tiene valoración mínima entre las diferenciales no exactas módulo las diferenciales exactas de $\Omega_B$, por lo tanto $r(B) = 1$ de acuerdo con la fórmula (5.9).
Como hemos visto anteriormente, podemos hallar otra curva, analíticamente equivalente a la curva dada, $B$, cuya parametrización no contenga exponentes que pertenezcan a $S(B)$. Además como hemos visto en el Lema 5.16 también podemos eliminar aquellos exponentes, $s$, de la parametrización que verifiquen $s + n = bm$ para un cierto $b \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, que $r(B) = 1$ es equivalente a decir que la rama $B$ es analíticamente equivalente a una curva cuya parametrización sea de la forma:

$$x(t) = t^n, \ y(t) = t^m + at^{(n-1)m-2n},$$

donde $\lambda = (n-1)m - 2n$, $\lambda + n = c - 1$ y $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vamos a demostrar que podemos eliminar todos los exponentes entre $\lambda$ y $\lambda + n = c - 1$. Supongamos que $\mu \notin S(B)$ tal que $\lambda < \mu < \lambda + n$. Entonces, como $\lambda + n$ es el mayor *gap* del semigrupo, está claro que $\mu + n \in S(B)$, por lo tanto existirán $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mu + n = a_1 n + b_1 m$$

Tenemos que:

$$\mu = (a_1 - 1)n + b_1 m$$

Si $a_1 = 0$, entonces $\mu + n = b_1 m$ y por el Lema 5.16 podemos eliminar dicho exponente $\mu$. Si $a_1 \geq 1$, entonces $\mu \in S(B)$, lo que es absurdo. Por lo tanto podemos eliminar todos los exponentes entre $\lambda$ y $\lambda + n$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 1$ de la siguiente forma. Hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\iota = \xi t.$$

Tomamos $x'(t) = \iota^n = \xi^n x(t)$ e $y'(t) = \iota^m = \xi^m y(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y'(t) = \xi^m(t^m + at^\lambda = \\ &= (\xi t)^m + \frac{a}{\xi^{(n-2)m-2n}}(\xi t)^{(n-1)m-2n}, \end{aligned}$$

por lo tanto $a = \xi^{(n-2)m-2n}$. Luego, podemos tomar $a = 1$ y $B$ sería analíticamente equivalente a una curva con parametrización:

$$x(t) = t^n, \ y(t) = t^m + t^{(n-1)m-2n}.$$

□

Tenemos el siguiente Corolario (se puede ver en [12]):

**Corolario 5.21.** Sea $B$ una curva plana e irreducible. Entonces $r(B) = 1$ si, y sólo si, la rama $B$ es analíticamente equivalente a la siguiente curva:

$$y^n - x^m + x^{m-2}y^{n-2},$$

donde $n$ y $m$ son números naturales coprimos y mayores ó iguales a 2.

# Referencias


[1] ANGERMÜLLER, G., *Die Wertehalbgruppe einer ebenen irreduziblen algebroiden Kurve.*, Math. Z. 267-282 (1977).

[2] ATIYAH, M. F., MACDONALD, I. G., *Introduction to Conmutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[3] BAYER, V. and HEFEZ, A., *Algebroid plane curvas whose Milnor and Tjurina numbers differ by one or two.*, Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 32 (2001).

[4] BERGER, R., *Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe .*, Math. Z., Vol. 81 (1963).

[5] BRZOSTOWSKI, S., KRASINSKI, T., WALEWSKA, J., *A short Proof that equisingular plane curves singularities are topollogically equivalent.*, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Lodz (2017).

[6] CASAS-ALVERO, E., *Singularities of planes curves.*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 276, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[7] HEFEZ, A., *Irreducible plane curve singularities.* Real and complex singularities, 1-120. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.,232, Dekker, New York (2003).

[8] HEFEZ, A. and HERNANDES, M. E., *The analytic classification of plane branches.*, Bull London Math. Soc. 43 (2011).

[9] MOL, RÓGERIO S., *Curvas analíticas planas y el método de Newton-Puiseux.* Editorial Hozlo, SRL, Lima (2010).

[10] LÊ, D.T., ALONSO, C., CORRAL, N., *Límites de espacios tangentes en superficies.* Seminario Iberoamericano de Matemáticas. Instituto Universitario de Estudios de Iberoamérica y Portugal. U. Valladolid, España (2002).

[11] LUENGO, I. and PFISTER, G., *Normal forms and moduli spaces of curves singularities with semigroup* $\langle 2p, 2q, 2pq + d\rangle$, Compositio Math., Vol. 76 (1990).

[12] PERAIRE, R., *Moduli of plane curve singularities with a single characteristic exponent*, Proc. Am. Math. Soc., Vol 126 (1998).

[13] SHARP, R.Y., *Steps in Conmutative Algebra.* London Mathematical Society, Student Texts 19. Cambridge University Press (1990).

[14] WALL, C.T.C., *Singular points of plane curves.* Cambridge University Press, Cambridge (2004).

[15] ZARISKI, O., *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*, Proc. Nat. Acad. Sc., Vol. 56 (1966).

[16] ZARISKI, O., *Collected Papers, Vol. IV: Equisingularity on Algebraic Varieties* (ed. J.Lipman and B.Teissier), MIT Press (1979).

[17] ZARISKI, O., *Studies in Equisingularity I. Equivalent Singularities of Plane Algebroid Curves.* Amer. J. Math. 87 (1965).

[18] ZARISKI, O., *The Moduli Problem for Plane Branches.* University Lecture Series, AMS (2006).