



***Facultad
de
Ciencias***

EL TEOREMA GAMMA DE SMALE **(Smale's Gamma Theorem)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Sara Gómez Gómez

Director: Carlos Beltrán Álvarez

Octubre – 2016

RESUMEN

En este trabajo hacemos un repaso general sobre los métodos numéricos para resolver ecuaciones de una variable y sistemas de ecuaciones no lineales. Centramos la atención en el método de Newton y mostramos los resultados de la Teoría Alfa y Gamma de Smale sobre su convergencia. Todo ello, usando teoremas con sus demostraciones, ejemplos concretos y problemas de aplicación para que faciliten su comprensión y su posible utilidad en la práctica. Finalizamos comentando la importancia del Teorema que da título al trabajo, así como las reflexiones personales llevadas a cabo a lo largo de su desarrollo.

ABSTRACT

In this dissertation, we review the numerical methods to solve one variable equations and nonlinear systems of equations. We focus our attention on Newton's method and we show the results of Smale's Alfa and Gamma Theory. In order to do so, we use theorems with its demonstrations, examples and application problems to facilitate its understanding and its applications. Finally, we comment about the importance of the Smale's Gamma Theorem and the conclusions of this study.

PALABRAS CLAVE

Teorema Alfa de Smale, Teorema Gamma de Smale, Newton, bisección, punto fijo, método numérico, algoritmo, convergencia, ecuación, sistemas de ecuaciones.

Índice general

Lista de figuras	5
Introducción	7
1. Soluciones de ecuaciones de una variable	9
1.1. El método de bisección	9
1.2. Método de punto fijo	10
1.3. Método de Newton	12
1.4. Método de la secante	14
1.5. Ejemplos método de newton	15
2. Soluciones numéricas de los sistemas de ecuaciones no lineales	19
2.1. Puntos fijos para funciones de varias variables	19
2.2. Método de Newton para sistemas no lineales	21
2.3. Ejemplo de aplicación 1	23
2.4. Ejemplo de aplicación 2	25
2.5. Ejemplo de aplicación 3	27
3. La Teoría Alfa de Smale	29
3.1. El Teorema Gamma de Smale	29
3.2. Comprobación gráfica del teorema	33
3.3. El Teorema Alfa de Smale	35
4. Conclusiones	39
Bibliografía	40

Índice de figuras

1.1.	Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$	15
1.2.	Bases de atracción del Método de Newton para $f = (x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)$	16
1.3.	Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$. 16	
1.4.	Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = \sin(x)$	16
1.5.	Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x - 1)(x - i)(x - 3i)$	16
1.6.	Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x - 1)(x - i)(x - 3)$	17
1.7.	Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 9)$. 17	
1.8.	Bases de atracción del método de Newton para $f(x) = x^3 - 5x$	17
1.9.	Algoritmo de Newton para $f(x) = x^3 - 5x$, mostrado un ciclo.	18
2.1.	Brazos robóticos en una empresa automovilística.	23
2.2.	Representación del brazo robótico con longitudes de ejes: l_1, l_2 y l_3 , llegando al punto de actuación (a, b) con una ángulo $\theta = 30^\circ$	24
2.3.	Posición del robot obtenida como solución del problema mediante el algoritmo de Newton con valores: $l_1 = 1.75, l_2 = 1.5, l_3 = 1, (a, b) = (2, 1.5), \theta = 30$ y punto inicial $x_0 = [1, 2, -3, -4]$	25
2.4.	Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton, ejecutándolo en dos partes. Primero tomando como punto inicial $(-1, -2, -3, -4)$ y en la segunda $(1, 2, -3, -4)$. 26	
2.5.	Trayectoria del robot obtenida mediante algoritmo de Newton, ejecutándolo en dos partes. Primero tomando como punto inicial $(1, -2, -3, -4)$ y en la segunda $(1, 2, -3, -4)$. 26	
2.6.	Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(1, 2, -3, -4)$	26
2.7.	Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(1, 2, -3, -4)$	26
2.8.	Dibujo de tres fases del movimiento del robot obtenido resolviendo los sistemas mediante el algoritmo de Newton con los valores $p_1 = -1.9, p_{20} = 0$ y $p_{40} = -2$. Se representan en distintos colores, las trayectorias de los dos codos a lo largo del desarrollo y de la parábola que define su movimiento.	27
2.9.	Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(2, 3, -5, 4)$	28
2.10.	Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(-4, 5, 6, 8)$	28
2.11.	Dibujo de tres fases del movimiento del robot obtenido resolviendo los sistemas mediante el algoritmo de Newton. Se representan en distintos colores las trayectorias de los dos codos a lo largo del desarrollo y las parábolas que definen su movimiento.	28
3.1.	$f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$	34
3.2.	$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)$	34
3.3.	$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$	34
3.4.	$f(x) = \sin(x)$	34
3.5.	$f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 9)$	34
3.6.	$f(x) = x(x^2 - 5)$	34

Introducción

Uno de los problemas más básicos del análisis numérico consiste en encontrar los valores x que satisfacen una determinada ecuación $f(x) = 0$, para una función dada. Este problema, conocido como el problema de búsqueda de raíces, no es un problema trivial. La dificultad no reside en encontrar métodos para obtener soluciones, sino encontrar métodos que permitan encontrar las soluciones en un tiempo razonable.

Es un problema que aparece con frecuencia en el trabajo científico. Por ejemplo, en la teoría de la difracción de la luz necesitamos determinar las raíces de la ecuación

$$x - \tan(x) = 0.$$

O en el cálculo de órbitas planetarias, necesitamos las raíces de la *ecuación de Kepler*,

$$x - a \sin(x) = b$$

para ciertos valores de a y b .

El problema general, planteado en el caso más sencillo de una función continua definida en los números reales y cuya imagen está en los números reales, es la siguiente: dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Este tipo de problemas lo abordaremos en el Capítulo 1 de este trabajo.

Como veremos, todos los métodos comienzan con una aproximación inicial, para posteriormente generar una sucesión que converge a una raíz si el método es exitoso. En el primer Capítulo, introduciremos el *método de bisección*, el *método del punto fijo*, el *método de Newton* y el *método de la secante*. Todos ellos vendrán acompañados de resultados teóricos obtenidos en las referencias y de ejemplos que demostrarán su comportamiento.

Además, en el Capítulo 1 centraremos la atención en la convergencia del método de Newton. Representaremos las denominadas *bases de atracción* con *Matlab*, con las que obtendremos complejos patrones que llamaremos *fractales*. Y son precisamente esos ejemplos los que emplearemos en el último capítulo, para hacer una comprobación gráfica del *Teorema Gamma de Smale*.

Añadiendo más variables y más funciones, nos encontraremos con el problema de resolver sistemas de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

donde podemos considerar a toda función f_i como una función que va del espacio n -dimensional $\mathbb{R}^n$ en la recta real $\mathbb{R}$.

A lo largo del Capítulo 2, veremos dos técnicas de resolución de este tipo de problemas, que son:

El método de punto fijo y el método de Newton para sistemas no lineales. Varios de los resultados teóricos de ese capítulo, se omitirán por la complejidad que requiere su desarrollo, pero resultan imprescindibles para estudiar los métodos y sus ejemplos.

Además mostraremos tres ejemplos de aplicación, que se resolverán mediante el método de Newton y cuya dificultad de resolución irá en aumento. Emplearemos con ello el denominado *método de homotopía* y obtendremos distintas soluciones a un mismo problema.

Utilizando el método de Newton, surge la necesidad de estudiar su convergencia. Tema que trataremos en el tercer capítulo de este trabajo titulado: *la Teoría Alfa de Smale*. En él, centraremos la atención en dos grandes teoremas como son *El Teorema Gamma de Smale* y *El Teorema Alfa de Smale*. Para sus demostraciones, recurriremos a importantes resultados previamente demostrados. Y emplearemos, de nuevo, ejemplos numéricos y gráficos que sirvan para entender y verificar la teoría.

Antes de comenzar propiamente con el trabajo, considero importante destacar que en muchas ocasiones no se especificará el algoritmo que se ha programado en *Matlab* para la resolución de los ejemplos. Pero lo cierto es que ha supuesto gran parte del tiempo invertido en la realización del trabajo, y ha sido esencial para conseguir los resultados numéricos y gráficos obtenidos.

Capítulo 1

Soluciones de ecuaciones de una variable

En este capítulo, veremos algunos métodos numéricos clásicos para la obtención de raíces en funciones de una variable. En otras palabras, dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua trataremos de resolver el problema de encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$. Mostraremos algunos resultados importantes así como ejemplos explicativos en cada uno de ellos.

Todo este material puede encontrarse en [1].

1.1. El método de bisección

El método de bisección consiste en obtener una raíz de una función a través de las divisiones de un intervalo dado. Para poder aplicarlo, se han de cumplir las siguientes hipótesis:

- La función f es continua .
- La función f está definida en $[a, b]$.
- $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos.

Por el Teorema de los Valores Intermedios se tiene que, con dichas hipótesis, existe al menos un $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

La técnica del método de bisección consiste en dividir a la mitad el intervalo $[a, b]$ y repetir el proceso en la mitad que contenga a la raíz p . Así, en la primera iteración tenemos $a_1 = a, b_1 = b$ y p_1 el punto medio de dicho intervalo,

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Una vez calculado p_1 podemos tener uno de estos tres casos:

- $f(p_1) = 0 \Rightarrow p_1$ es un cero de f .
- $f(a_1)f(p_1) < 0 \Rightarrow$ Existe un cero de f en (a_1, p_1) . Y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$.
- $f(a_1)f(p_1) > 0 \Rightarrow$ Existe un cero de f en (p_1, b_1) . Y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$.

Posteriormente y de manera análoga se repite el mismo proceso en el intervalo $[a_2, b_2]$ y sucesivos.

Teorema 1.1. *Supongamos que $f \in C[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de bisección genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima a un cero de p de f , tal que*

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Demostración. Para cada $n \geq 1$, tenemos

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) \text{ y } p \in (a_n, b_n)$$

Y como $p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ para toda $n \geq 1$, se deduce que

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^n}$$

□

Ejemplo 1.

A continuación, veremos el desarrollo del Método de Bisección para la ecuación $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$. Este mismo ejemplo será el que emplearemos en los métodos posteriores. De esta forma veremos el comportamiento de los algoritmos para obtener las raíces de una misma ecuación.

Dicha ecuación tiene una raíz en $[-2, 0]$, puesto que $f(-2)f(0) < 0$. Mediante el algoritmo de bisección obtenemos los siguientes valores:

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	-2	0	-1	-1
2	-2	-1	-1.5	6.3125
3	-1.5	-1	-1.25	1.878906250
4	-1.25	-1	-1.125	0.273616406
5	-1.125	-1	-1.0625	-0.401351928
6	-1.125	-1.0625	-1.09375	-0.073775291
7	-1.125	-1.09375	-1.109375	0.097417891
8	-1.109375	-1.09375	-1.1015625	0.011193815
9	-1.1015625	-1.09375	-1.09765625	-0.031446821
10	-1.1015625	-1.09765625	-1.099609375	-0.010165622
11	-1.1015625	-1.099609375	-1.1005859375	0.000504304
12	-1.1005859375	-1.099609375	-1.10009765625	-0.004833105
13	-1.1005859375	-1.10009765625	-1.100341796875	-0.002165012
20	-1.1005401611	-1.1005363464	-1.100538253784	-0.000017142

La solución real de la ecuación $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$ en el intervalo $[-2, 0]$ es 1.1005..., como podemos comprobar, al cabo de veinte iteraciones conseguimos una buena aproximación.

Es importante resaltar que el método de bisección ofrece inconvenientes, como el de converger lentamente o la posibilidad de desechar una buena aproximación inmediata. Sin embargo, tiene la importante propiedad de que siempre converge en una solución y, por lo tanto, a menudo sirve para iniciar otros métodos más eficientes.

Supongamos ahora que se quiere determinar la cantidad de iteraciones necesarias para resolver la ecuación $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$ con una exactitud de 10^{-4} comenzando con los valores $a_1 = -2$ y $b_1 = 0$. Para ello y teniendo en cuenta el Teorema 1.1 se tiene que encontrar un entero N que satisfaga

$$|p_N - p| \leq 2^{-N}(b - a) = 2 \cdot 2^{-N} < 10^{-4}$$

Para ello, se pueden utilizar logaritmos de base 10. Así:

$$2 \cdot 2^{-N} < 10^{-4} \Rightarrow \log_{10} 2^{1-N} < \log_{10} 10^{-4} = -4$$

de esta forma se tiene,

$$(1 - N) \log_{10} 2 < -4 \text{ y así, } N > \frac{4}{\log_{10} 2} + 1 \approx 14,2877.$$

Por lo tanto, podemos concluir que con quince iteraciones se conseguirá una exactitud de 10^{-4} .

1.2. Método de punto fijo

En este caso, para buscar una raíz p de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiremos una función g previamente. Esta tendrá un punto fijo en p ($g(p) = p$) de manera que la función definida como $f(x) = x - g(x)$ tendrá a su vez un cero en p . Por ello, tiene sentido escribir $g(x)$ como $g(x) = x - \phi(x)f(x)$ donde $\phi(x)$ es una función arbitraria. Así, los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son clases equivalentes. Con este método estudiaremos el problema de encontrar las soluciones a los problemas de punto fijo para obtener como resultado un cero de la función f inicial.

Teorema 1.2. Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo en $[a, b]$. Y si además $g'(x)$ existe en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ con

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in (a, b),$$

entonces el punto fijo en $[a, b]$ es único.

Demostración. Si $g(a) = a$ o si $g(b) = b$, entonces g tendrá un punto fijo en un extremo. Supongamos que no es así; entonces deberá ser cierto que $g(a) > a$ y que $g(b) < b$. La función $h(x) = g(x) - x$ es continua en $[a, b]$ y tenemos

$$h(a) = g(a) - a > 0 \text{ y } h(b) = g(b) - b < 0$$

El Teorema de los Valores Intermedios establece que existe un $p \in (a, b)$ para el cual $h(p) = 0$. Ese número p es un punto fijo de g :

$$0 = h(p) = g(p) - p \text{ implica que } g(p) = p.$$

Suponemos además que $|g'(x)| \leq k < 1$ y que p y q son puntos fijos en $[a, b]$ tal que $p \neq q$. Según el Teorema del Valor Medio, existe un número ξ entre p y q y, por tanto, en $[a, b]$ tal que

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\xi).$$

Por tanto,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|,$$

lo cual es una contradicción. Esta contradicción se debe solamente a la suposición $p \neq q$. Por tanto, $p = q$ y el punto fijo en $[a, b]$ es único. $\square$

Teorema 1.3. (Teorema del punto fijo)

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Además supongamos que existe g' en (a, b) y una constante positiva $0 < k < 1$ tales que

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Entonces para cualquier punto p_0 en $[a, b]$, la sucesión definida por

$$p_n = g(p_n), n \geq 1$$

converge al único punto fijo p en $[a, b]$.

Demostración. El teorema anterior implica que existe un único punto fijo en $[a, b]$. Puesto que g transforma $[a, b]$ en sí mismo, la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ se define para todo $n \geq 0$ y $p_n \in [a, b]$. Aplicando el hecho de que $|g'(x)| \leq k$ y el Teorema del Valor Medio, se tiene para cada n ,

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|,$$

donde $\xi_n \in (a, b)$. Al aplicar esta desigualdad inductivamente se obtiene

$$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq k^2|p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n|p_0 - p|$$

Puesto que $0 < k < 1$, se tiene $\lim_{x \rightarrow \infty} k^n = 0$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} p_0 - p = 0.$$

y $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p . □

Ejemplo 2.

Consideremos de nuevo la ecuación $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$, de la que queremos hallar una solución real. Existen distintas funciones de la forma $x = g(x)$ que convierten la ecuación original en problema de punto fijo. Algunos ejemplos son:

- $g_1(x) = 4 - x^4 - 3x^2$
- $g_2(x) = \left(\frac{4}{x^3 + 3x + 1} \right)$
- $g_3(x) = \sqrt{\frac{4 - x - x^4}{3}}$
- $g_4(x) = \sqrt{\frac{4 - x}{x^2 + 3}}$

En la siguiente tabla se exponen los resultados del método del punto fijo utilizando en cada caso la función g que se indica, comenzando con el punto medio del intervalo, $p_0 = -2.5$.

n	g_1	g_2	g_3	g_4
0	-2.5	-2.5	-2.5	-2.5
1	-53.812500	-0.180790960	$(-10,854389160)^{1/2}$	0.838273644
2	$-8,39 \times 10^6$	8.855084133		0.893384680
3	$-4,96 \times 10^{27}$	0.005540821		0.904395667
4	$-6,07 \times 10^{110}$	3.934596642		0.900448036
5		0.054262686		0.901863897
6		3.439535193		0.013561550
7		0.076908744		0.901538246
8		3.248912655		0.901472944
9		0.088809120		0.901496363
10		3.156745508		0.901487964

Las soluciones reales son -1.10005... y 0.90149.... Como podemos comprobar, los resultados obtenidos con la función g_4 y tras 10 iteraciones son próximos a la raíz real positiva. En cambio mediante la función g_1 , la solución diverge, es decir, se aproxima a infinito cada vez más. Con la función g_2 tampoco se llega a la solución, se ha probado con 300 iteraciones del método, llegando al valor 3.043522... que no es próximo a ninguna de sus raíces reales. Podría indicar que se produce un ciclo con valores entornos a 0 y 3. Y a través de la función g_3 llegamos a tener una raíz cuadrada de un número negativo en la primera iteración.

1.3. Método de Newton

Podemos introducir el método de Newton mediante los polinomios de Taylor (en la sección 2.2 veremos una manera alternativa de obtener este método). Para ello, supongamos que $f \in C^2[a, b]$. Sea $\bar{x} \in [a, b]$ una aproximación de p tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ y $|p - \bar{x}|$ es *pequeño*. Consideraremos el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de $\bar{x}$.

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x))$$

donde $\xi(x)$ está entre x y $\bar{x}$. Dado que $f(p) = 0$ se obtiene:

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

Teniendo en cuenta que, como se había dicho, $|p - \bar{x}|$ es *pequeño*, entonces $(p - \bar{x})^2$ es aún menor y por tanto podemos considerar,

$$0 \approx f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}).$$

Finalmente despejando p tenemos,

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Esta última expresión, es la que define el método de Newton. De manera que genera una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, que comienza con una aproximación inicial p_0 . Los términos de esta vienen dados por,

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \text{ para } n \geq 1.$$

Es importante destacar que el método de Newton es una técnica muy poderosa pues si se escoge una aproximación suficientemente exacta convergerá rápidamente a la raíz. Un inconveniente de este método consiste en la necesidad de conocer el valor de la derivada de f en cada aproximación.

Lema 1.1. Sea $f \in C[a, b]$ y $p \in (a, b)$. Supongamos que $f(p) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$ un valor dado. Existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in [p - \delta, p + \delta]$, donde dicho intervalo es un subconjunto de $[a, b]$.

Demostración. Puesto que f es continua en p y $f(p) = 0$, existe un $\delta > 0$ con,

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon, \text{ para } |x - p| < \delta \text{ y } a < x < b.$$

Restringimos δ de modo que $[p - \delta, p + \delta]$ sea un subconjunto de $[a, b]$. Así, para $x \in [p - \delta, p + \delta]$, tenemos

$$|f(x)| = |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

□

Teorema 1.4. Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $p \in (a, b)$ es tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a p para cualquier aproximación inicial $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

Demostración. La demostración se basa en analizar el método de Newton como un esquema de iteración funcional $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Sea k un número cualquiera en $(0, 1)$. Primero debemos encontrar un intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ donde la imagen de dicho intervalo por g pertenezca también a dicho intervalo; y además $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Como $f'(p) \neq 0$ y f' es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1] \subseteq [a, b]$. Por tanto, g está definida y es continua en $[p - \delta_1, p + \delta_1]$. También,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

para $x \in [p - \delta_1, p + \delta_1]$. Por suposición, $f(p) = 0$, así que

$$g'(p) = \frac{f(p)f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0.$$

Como g' es continua y como $0 < k < 1$, y por lo inmediatamente anterior existe un δ , con $0 < \delta < \delta_1$, y

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in [p - \delta, p + \delta]$$

Todavía falta demostrar que g manda $[p - \delta, p + \delta]$ en sí mismo. Si $x \in [p - \delta, p + \delta]$, el teorema del valor medio implica que, para algún número ξ entre x y p , $|g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p|$. Por tanto,

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| = |g'(\xi)||x - p| \leq k|x - p| < |x - p|.$$

Puesto que $x \in [p - \delta, p + \delta]$, se deduce que $|x - p| < \delta$ y que $|g(x) - p| < \delta$. Este resultado implica que g manda $[p - \delta, p + \delta]$ en sí mismo. Todas las hipótesis del teorema del punto fijo se satisfacen, de modo que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \text{ para } n \geq 1,$$

converge a p para cualquier $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. $\square$

Veamos a continuación un ejemplo donde aplicamos el método de Newton que acabamos de describir.

Ejemplo 3.

Supongamos de nuevo que queremos obtener la solución de $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$ en el intervalo $[-2, 0]$. Para ello se genera la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 + 3p_{n-1}^2 + p_{n-1} - 10}{4p_{n-1}^3 + 6p_{n-1} + 1}, \text{ para } n \geq 1$$

Comenzando la iteración con $p_0 = -2.5$ se obtiene:

n	p_n
0	-2.5
1	-1.829248366013072
2	-1.382171899212134
3	-1.158220991174252
4	-1.103489684056943
5	-1.100547967085392
6	-1.100539821507736
7	-1.100539821445438
8	-1.100539821445438

Resulta interesante destacar que tanto el método de Newton como el del Punto Fijo, pueden emplearse para obtener las soluciones complejas de una función. Mientras que con el método de Bisección esto resulta imposible. En la sección 1.5 incluimos una serie de ejemplos incluyendo este hecho. Pero antes, exponemos el método de la secante.

1.4. Método de la secante

A diferencia del método anterior, en este se evita calcular la derivada como tal derivando una variación de esta. Por definición de derivada tenemos,

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \rightarrow p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

Tomando $x = p_{n-2}$,

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

Aplicando esta aproximación de la derivada $f'(p_{n-1})$ en la fórmula de Newton y teniendo previamente las aproximaciones iniciales p_0 y p_1 , obtenemos la sucesión de términos $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que están definidos por,

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Ejemplo 4.

Para obtener la solución de $x^4 + 3x^2 + x - 4 = 0$ en el intervalo $[-2, 0]$. Para ello se genera la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^4 + 3p_{n-1}^2 + p_{n-1} - 4)(p_{n-1} - p_{n-2})}{(p_{n-1}^4 + 3p_{n-1}^2 + p_{n-1} - 4) - (p_{n-2}^4 + 3p_{n-2}^2 + p_{n-2} - 4)}, \text{ para } n \geq 1$$

En este caso, necesitamos dos aproximaciones iniciales para inicial el método. Si tomamos $p_0 = -2.5$ y $p_1 = -2$ obtenemos:

n	p_n
0	-2.5
1	-2
2	-1.624733475479744
3	-1.351827017793515
4	-1.188352317573282
5	-1.118152658999460
6	-1.101917215285519
7	-1.100562380298055
8	-1.100539850599022
9	-1.100539821446055
10	-1.100539821445438
11	-1.100539821445438

Como vemos, los valores de las iteraciones 10 y 11 están muy próximos entre sí, convergiendo a la raíz -1.10053... En pocas iteraciones y gracias a este método conseguimos una buena solución de la ecuación inicial.

1.5. Ejemplos método de newton

En esta sección se muestran ejemplos concretos donde veremos la convergencia del método de Newton. Lo estudiaremos a través de una representación donde cada color representa el conjunto de puntos que convergen a uno mismo, lo que se denomina *base de atracción*.

En la figura 2.8 se muestran puntos aleatorios (del plano complejo) que son precisamente los puntos iniciales (x_0) del método de Newton. Así, tras 10.000 iteraciones si dicho método obtiene un valor $x_{10,000}$ para el cual $|x - x_{10,000}| < 10^{-6}$ se colorea del color correspondiente a dicha raíz. En otras palabras, cada color corresponde a una base de atracción diferente. En este caso, el color verde representa la raíz $x = 3$, el rojo $x = i$ y el azul la conjugada de ésta ($x = -i$). En caso de no converger el punto se colorea en negro.

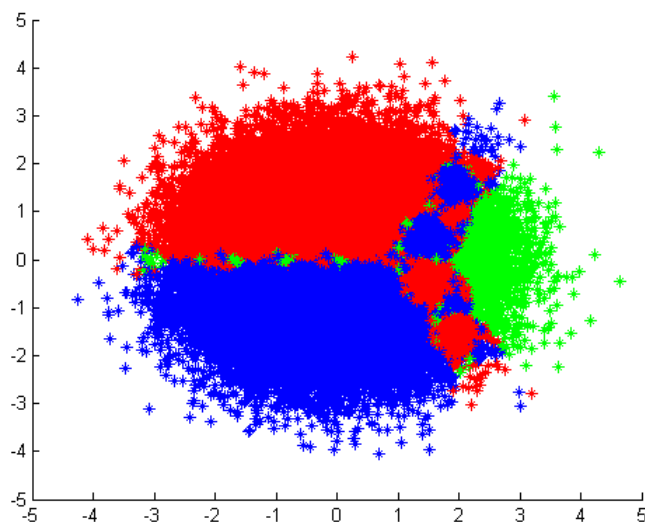


Figura 1.1: Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$

Observamos que los distintos conjuntos que obtenemos en función del color parecen seguir patrones muy complejos, dando lugar a conjuntos que podríamos denominar *fractales*. Un estudio de este tipo de representaciones puede encontrarse en [3].

A continuación se muestran más ejemplos donde se puede ver el comportamiento del método de Newton bajo distintas funciones, ilustrando el comportamiento extremadamente complejo de la convergencia del mismo en función del punto inicial elegido. Continuamos reservando el color negro para aquellos puntos donde el método no converge y el resto de colores para las distintas raíces.

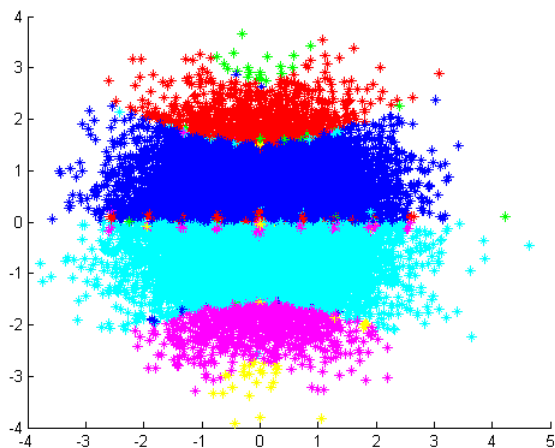


Figura 1.2: Bases de atracción del Método de Newton para $f = (x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)$.

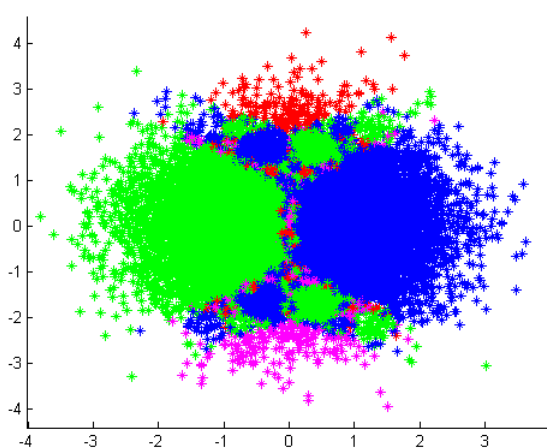


Figura 1.3: Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$.

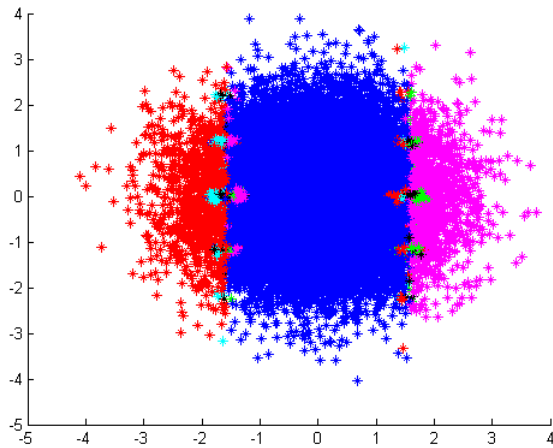


Figura 1.4: Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = \sin(x)$.

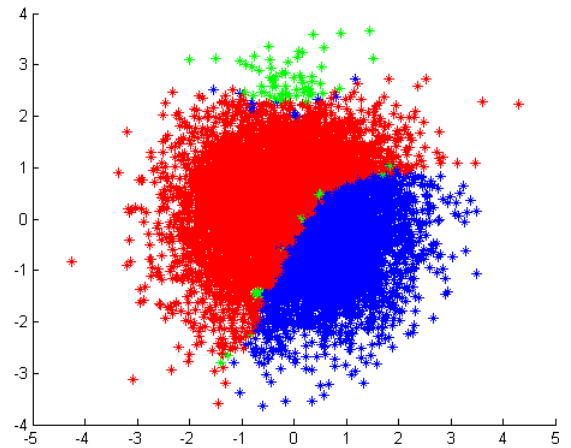


Figura 1.5: Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x-1)(x-i)(x-3i)$.

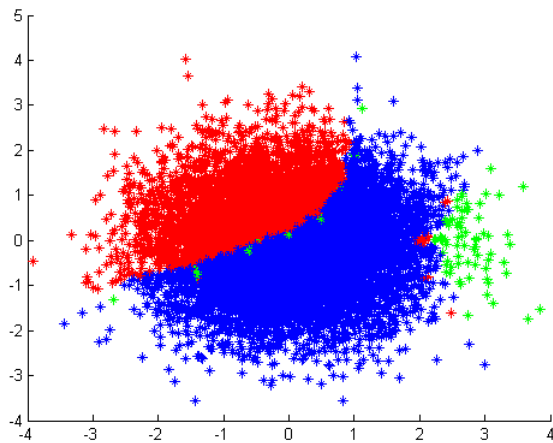


Figura 1.6: Bases de atracción del Método de Newton para $f(x) = (x-1)(x-i)(x-3)$.

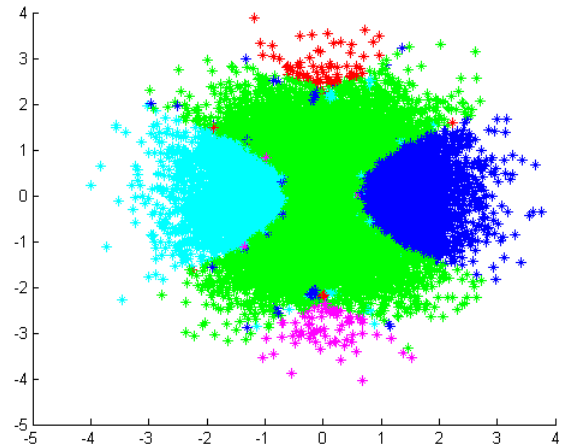


Figura 1.7: Bases de atracción obtenidas mediante el Método de Newton para $f(x) = x(x^2-1)(x^2+9)$.

Como ha quedado patente en las distintas ilustraciones, el método de Newton converge en muchas ocasiones, pero no siempre es así. Es decir, podemos encontrarnos con distintas situaciones para las cuales el método no obtiene una raíz de la función a partir de un punto inicial dado.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 - 5x$ converge a un ciclo, luego el método no consigue avanzar y por tanto no converge. Tenemos que,

$$N_f(x) = x - \frac{x^3 - 5x}{3x^2 - 5} = \frac{2x^3}{3x^2 - 5}.$$

Si tomamos como punto inicial de la iteración $x_0 = 1$ tenemos,

$$N_f(1) = -1 \text{ y en la siguiente iteración } N_f(-1) = 1.$$

Podemos verlo gráficamente,

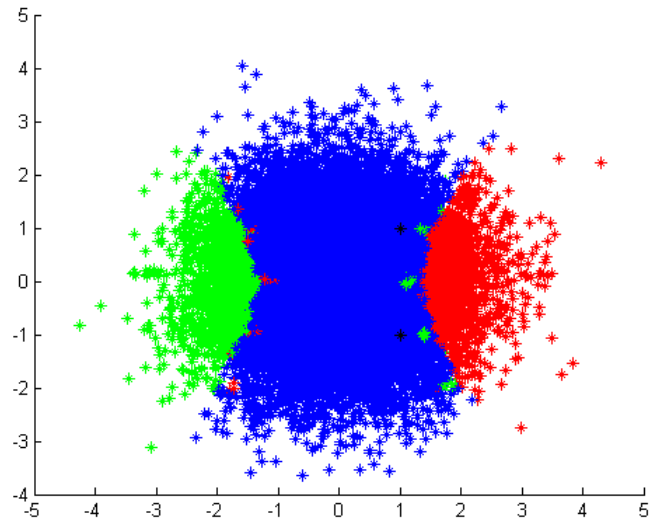


Figura 1.8: Bases de atracción del método de Newton para $f(x) = x^3 - 5x$.

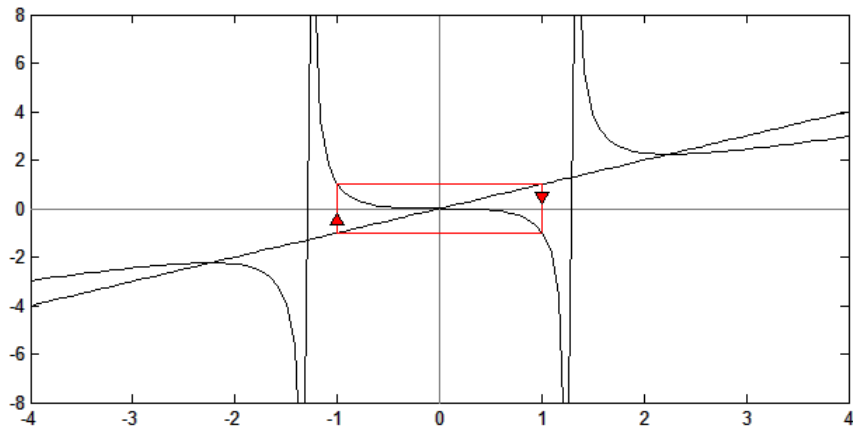


Figura 1.9: Algoritmo de Newton para $f(x) = x^3 - 5x$, mostrado un ciclo.

Capítulo 2

Soluciones numéricas de los sistemas de ecuaciones no lineales

En el capítulo anterior estudiamos el problema de aproximar soluciones de una sola ecuación no lineal de la forma $f(x) = 0$. En esta sección estudiaremos las generalizaciones de las técnicas que nos permiten aproximar las soluciones de los sistemas de ecuaciones no lineales.

Una introducción elemental a los distintos métodos de resolución de este tipo de sistemas se puede ver en [1].

2.1. Puntos fijos para funciones de varias variables

Un sistema de ecuaciones no lineales tiene la forma:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\end{aligned}$$

donde podemos considerar a toda función f_i como una función que va del espacio n -dimensional $\mathbb{R}^n$ en la recta real $\mathbb{R}$.

Este sistema de n ecuaciones no lineales con n incógnitas puede representarse también mediante la definición de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por medio de

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t.$$

Si se emplea una notación vectorial para representar las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ el sistema adopta la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Veamos algunos resultados referentes a la continuidad y diferenciabilidad de las funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1. Sea $\xi \in \mathbb{C}^n$. Se dice que ξ es un **cerro exacto** de F , si $F(\xi) = 0$.

Definición 2.2. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que la función f tiene el **límite** L en x_0 , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\mathbf{x}) = L$$

si, dado un número cualquiera $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ con la propiedad de que

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$$

siempre que $\mathbf{x} \in D$ y

$$0 < \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \delta$$

Definición 2.3. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es **continua** en $\mathbf{x}_0 \in D$ siempre que exista $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ y que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

Y se dice que f es **continua en un conjunto** D si f es continua en todos los puntos de D . Este concepto se expresa también escribiendo $f \in C(D)$.

Definición 2.4. Sea $\mathbf{F}$ una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^t,$$

donde $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para toda i . Definimos

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)^t$$

si y sólo si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = L_i$ para toda i .

La función $\mathbf{F}$ es **continua** en $\mathbf{x}_0 \in D$ siempre y cuando $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ exista y $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$. Además, $\mathbf{F}$ es continua en el conjunto D si lo es cada $\mathbf{x}$ de D . Este concepto también se expresa escribiendo $\mathbf{F} \in C(D)$.

El siguiente teorema, obtenido en [1], relaciona la continuidad de una función de n variables en un punto con las derivadas de la función en ese punto.

Teorema 2.1. Sea f una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{x}_0 \in D$. Si existen las constantes $\delta > 0$ y $K > 0$ con

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq K, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n,$$

siempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in D$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Definición 2.5. Una función $\mathbf{G}$ de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tiene un **fijo** en $\mathbf{p} \in D$ si $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$.

Veamos ahora un resultado que generaliza el teorema del punto fijo (Teorema 1.3) para el caso de varias variables. Su demostración se puede encontrar en [10] (p.153).

Teorema 2.2. Sea $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^t / a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ para algún conjunto de constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$. Supongamos que $\mathbf{G}$ es una función continua de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ siempre que $\mathbf{x} \in D$. Entonces $\mathbf{G}$ tiene un punto fijo en D . Y supongamos, además, que $\mathbf{G}$ tiene derivadas parciales continuas y que existe una constante $K < 1$ con

$$\left| \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}, \text{ siempre que } \mathbf{x} \in D,$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$ y toda función componente g_i . Entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por una $\mathbf{x}^{(0)}$ seleccionada en D arbitrariamente y generada por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \text{ para cada } k \geq 1,$$

converge al punto fijo único $\mathbf{p} \in D$ y

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1 - K} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_{\infty}.$$

No incluimos ejemplos de aplicación de este teorema aunque el Método de Newton estudiado en la siguiente sección y en el Capítulo 3, es un método de punto fijo con un teorema de convergencia más fuerte y de él incluiremos numerosos ejemplos.

2.2. Método de Newton para sistemas no lineales

En el caso unidimensional, introducimos el método de Newton mediante polinomios de Taylor (Sección 1.3). Pero podíamos haberlo hecho obteniendo una función $\phi(x)$ con la propiedad de que

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

da una convergencia cuadrática en el punto fijo p de la función g . Y a partir de esa condición, el método de Newton evoluciona al seleccionar $\phi(x) = 1/f'(x)$, suponiendo que $f'(x) \neq 0$.

En el caso n -dimensional utilizamos un procedimiento semejante, para el cual necesitamos definir la matriz:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & a_{12}(\mathbf{x}) & \dots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ a_{21}(\mathbf{x}) & a_{22}(\mathbf{x}) & \dots & a_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\mathbf{x}) & a_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & a_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

donde todos los elementos $a_{ij}(\mathbf{x})$ son una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Esto requiere obtener $A(x)$ de modo que

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

de la convergencia cuadrática a la solución de $F(x) = 0$, suponiendo que $A(x)$ es no singular en el punto fijo $\mathbf{p}$ de $\mathbf{G}$.

El siguiente teorema, nos permitirá deducir que $A^{-1}(x)$ es la inversa de la matriz Jacobiana asociada al sistema. Su demostración requiere la capacidad de expresar $\mathbf{G}$ en términos de su serie de Taylor en n variables alrededor de $\mathbf{p}$, (véase [1]).

Teorema 2.3. *Supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución de $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para alguna función $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t$ que va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Si existe un número $\delta > 0$ con la propiedad de que:*

1. $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ sea continua en $N_\delta = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y todo $j = 1, 2, 3, \dots, n$;
2. $\frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}$ sea continua y $\left| \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq M$ para alguna constante M siempre que $\mathbf{x} \in N_\delta$ para todo $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ y para todo $k = 1, 2, \dots, n$
3. $\frac{\partial g_i(\mathbf{p})}{\partial x_k} = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y para todo $k = 1, 2, \dots, n$

entonces existe un $\hat{\delta} \leq \delta$ tal que la sucesión generada por $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ converge cuadráticamente a $\mathbf{p}$ para cualquier elección de $\mathbf{x}^{(0)}$ a condición de que $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{p}\| < \hat{\delta}$. Más aún,

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{p}\|_\infty^2, \text{ para todo } k \geq 1.$$

Para utilizar este teorema, supongamos que $A(\mathbf{x})$ es una matriz $n \times n$ de funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Supongamos además que $A(\mathbf{x})$ es no singular cerca de una solución $\mathbf{p}$ de $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, y denotemos con $b_{ij}(\mathbf{x})$ el elemento de $A(\mathbf{x})^{-1}$ situado en la i -ésima fila y la j -ésima columna.

Dado que $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$, tenemos $g_i(\mathbf{x}) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})$ y

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right), & \text{si } i = k, \\ - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) \right), & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

El Teorema 2.3 implica que necesitamos $\frac{g_i(\mathbf{p})}{\partial x_k} = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y todo $k = 1, 2, \dots, n$. Esto significa que, para todo $i = k$,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

así que,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = 1.$$

Cuando $k \neq i$,

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p})$$

así que

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{p}) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) = 0$$

Al definir la matriz $J(\mathbf{x})$ por medio de, $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

Las condiciones anteriores requieren

$$A(\mathbf{p})^{-1}J(\mathbf{p}) = I \text{ (matriz identidad)}$$

de lo que se deduce,

$$A(\mathbf{p}) = J(\mathbf{p})$$

En consecuencia, una elección apropiada de $A(x)$ es $A(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$ dado que entonces se cumple la tercera condición del Teorema 2.3.

La función $\mathbf{G}$ está definida por

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - J(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

y el procedimiento de la iteración funcional pasa de seleccionar $x^{(0)}$ a generar, para $k \geq 1$,

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}) = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

De este método, se espera que generalmente de convergencia cuadrática siempre y cuando se conozca un valor inicial lo suficientemente 'cercano' al valor de la solución y que $J(\mathbf{p})^{-1}$ exista.

Una debilidad clara del proceso del método de Newton surge de la necesidad de invertir la matriz $J(\mathbf{x})$ en cada paso. En la práctica, el método se realiza generalmente en forma de dos pasos. Primero, se encuentra un vector $\mathbf{y}$ que satisfaga

$$J(\mathbf{x}^{(k-1)})\mathbf{y} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

Después de que se ha logrado esto, la nueva aproximación $\mathbf{x}^{(k)}$ se puede obtener sumando $\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}^{(k-1)}$; es decir,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{y}$$

El siguiente algoritmo usa este procedimiento de dos pasos.

Algoritmo

Para aproximar una solución del sistema no lineal $F(x) = 0$, dada una aproximación inicial x :

Entrada: número n de ecuaciones e incógnitas; aproximación inicial $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 ;

Salida: solución aproximada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ o mensaje de que el número de iteraciones fue excedido.

- Paso 1: tomar $k=1$;
- Paso 2: mientras que $k \leq N_0$ seguir pasos 3-7;
 - Paso 3: calcular $F(x)$ y $J(x)$, donde $(J(x))_{ij} = (\partial f_i(x)/\partial x_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$;
 - Paso 4: resolver el sistema lineal de $J(x)y = -F(x)$;
 - Paso 5: tomar $x = x + y$;
 - Paso 6: si $\|y\| < TOL$ entonces SALIDA ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$); (procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;
 - Paso 7: tomar $k = k + 1$;
- Paso 8: SALIDA ('Número máximo de iteraciones excedido')
PARAR

Teniendo en cuenta los ejemplos de [1], referentes a este algoritmo, se puede afirmar que convergencia del método de Newton se hace muy rápida una vez que estamos cerca de la solución p . Lo ilustra la convergencia cuadrática del método cerca de la solución.

A continuación podemos ver un ejemplo de aplicación, donde programamos el algoritmo previo para resolverlo.

2.3. Ejemplo de aplicación 1

Supongamos que nos encontramos en una fábrica industrial en la cual se utilizan brazos robóticos. Aunque este tipo de robots en la realidad se mueven en el espacio tridimensional, para este ejemplo consideraremos que dichos mecanismos están limitados, sólo se mueven en el plano bidimensional y presentan ciertas características de fabricación a tener en cuenta. Nuestro objetivo es encontrar la posición en la que tiene que colocarse cada brazo robótico para llegar a un punto concreto de actuación.

Este ejemplo, ha sido durante años un acicate para el estudio de la resolución de $F(\mathbf{x}) = 0$, véase [8].



Figura 2.1: Brazos robóticos en una empresa automovilística.

Así, sabemos que cada brazo está formado por tres ejes de longitudes l_1 , l_2 y l_3 , el problema consiste en encontrar los pares de coordenadas (x, y) , (z, t) donde tienen que situarse los codos (uniones entre los ejes) para llegar al punto de actuación (a, b) con un ángulo θ . En la siguiente imagen se representa el problema a resolver:

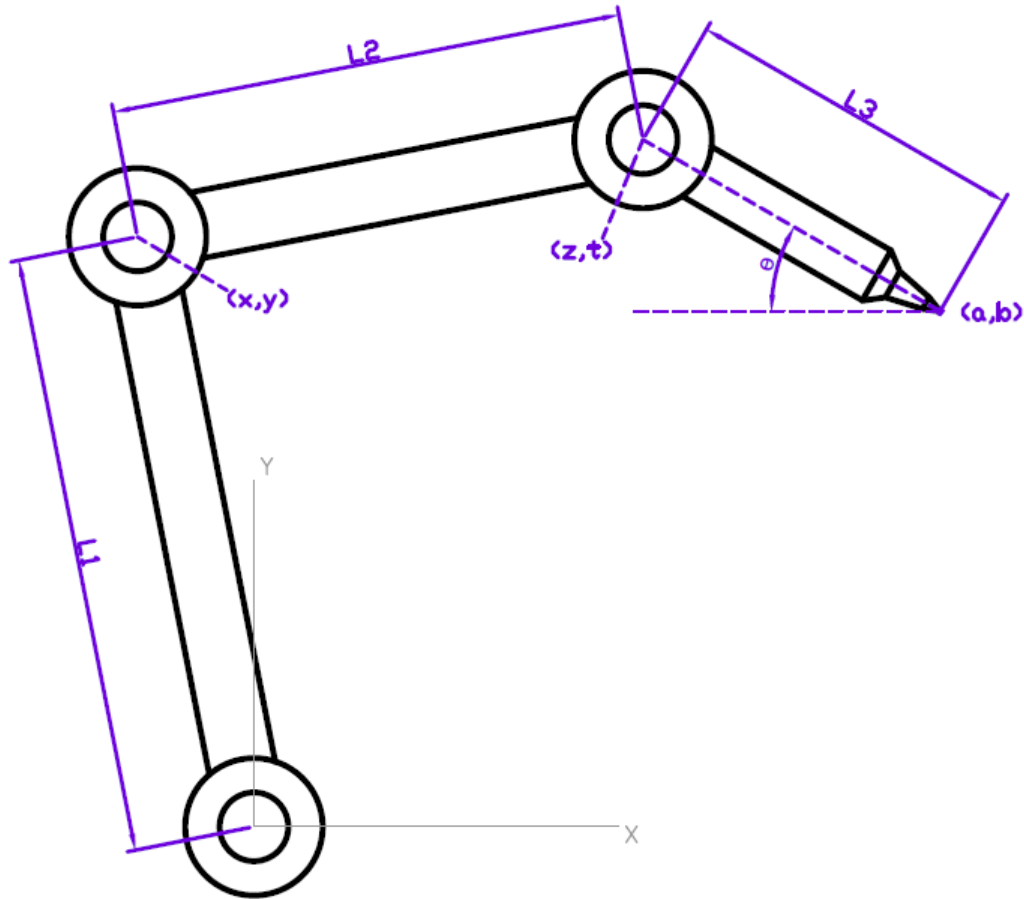


Figura 2.2: Representación del brazo robótico con longitudes de ejes: l_1, l_2 y l_3 , llegando al punto de actuación (a, b) con un ángulo $\theta = 30^\circ$.

Por tanto el sistema de ecuaciones no lineales para esta situación es:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l_1^2 \\ (a - z)^2 + (b - t)^2 = l_3^2 \\ (x - z)^2 + (y - t)^2 = l_2^2 \\ \tan(\pi - \theta) = \frac{b - t}{a - z} \end{cases}$$

Magnitudes conocidas: $l_1, l_2, l_3, a, b, \theta \in \mathbb{R}$

Variables desconocidas: x, y, z, t

Veamos unos ejemplos concretos donde aplicamos el método de Newton (sistemas no lineales) para resolver el sistema. Para ello, consideremos los siguientes valores:

- $l_1 = 1.75, l_2 = 1.5, l_3 = 1$
- $(a, b) = (2, 1.5)$
- $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Los valores obtenidos con dicho método utilizando como punto inicial de la iteración $x_0 = [1, 2, -3, -4]$ con una tolerancia de 10^{-5} son: $(x, y) \approx (-0.3391, 1.7168)$ y $(z, t) \approx (1.1340, 2.0000)$.

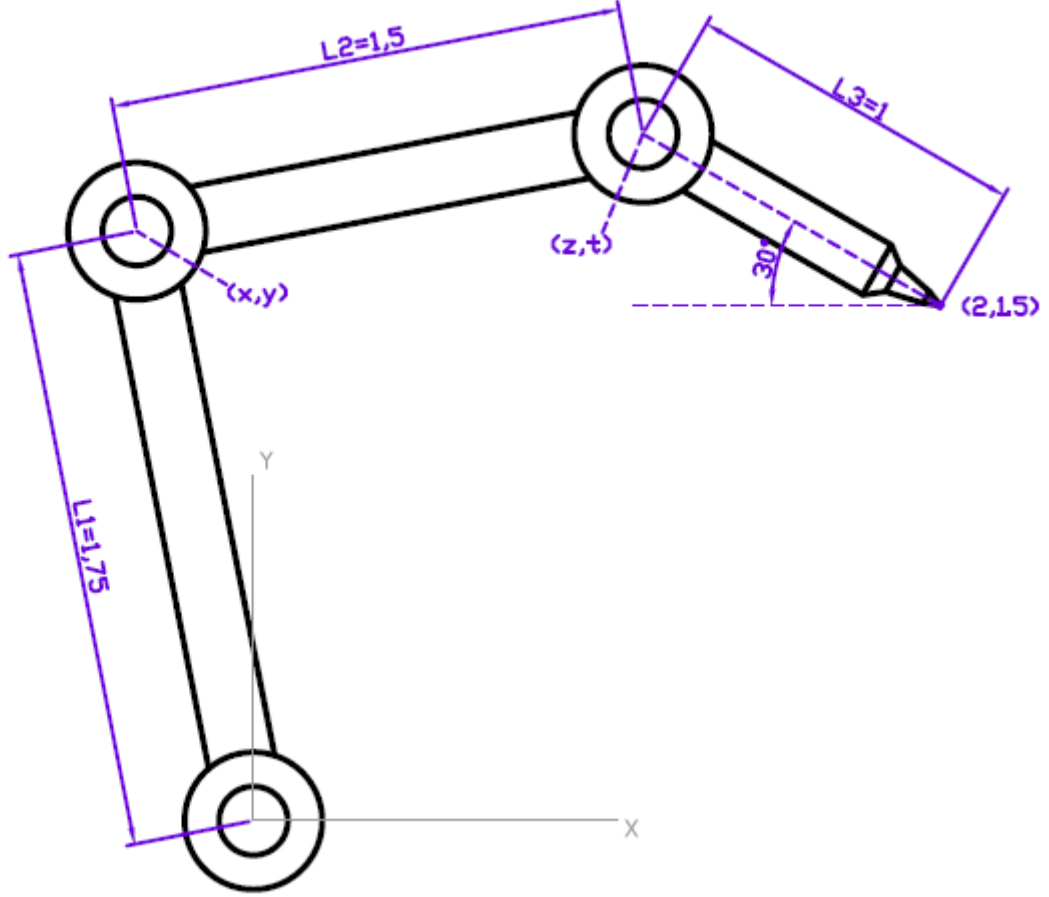


Figura 2.3: Posición del robot obtenida como solución del problema mediante el algoritmo de Newton con valores: $l_1 = 1.75, l_2 = 1.5, l_3 = 1, (a, b) = (2, 1.5), \theta = 30$ y punto inicial $x_0 = [1, 2, -3, -4]$

2.4. Ejemplo de aplicación 2

Imaginemos ahora que queremos que dicho robot ($l_1 = 1.75, l_2 = 1.5, l_3 = 1$) se mueva definiendo una trayectoria parabólica. Es decir, que el punto de incidencia del brazo robótico actúe en los puntos de una parábola. Y además, que lo haga con un ángulo perpendicular a dicha curva. Suponemos para ello que la base del robot está situada en el origen de coordenadas, y que la parábola en cuestión se trata de $x = -y^2$. Resolveremos el sistema correspondiente en diferentes posiciones y posteriormente, mediante una secuencia de imágenes, creamos un vídeo representando la trayectoria del brazo y su movimiento.

En primer lugar, parametrizamos la parábola y la movemos horizontalmente para que el vértice sea el punto más lejano al que puede llegar el robot, con las medidas establecidas previamente, manteniendo el primer brazo vertical. Por lo tanto, obtenemos la parametrización $(-p^2, p) + (l_2 + l_3, l_1)$.

Para los valores de p , consideraremos el vector posición $p = (p_1, p_2, \dots, p_{39}, p_{40})$ con valores comprendidos entre -2 y 1.9 , distanciados 0.1 unidades entre ellos. Así, $(a, b) = (-p_i^2 + l_2 + l_3, p_i + l_1)$ para cada $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_{39}, p_{40}\}$.

El valor de θ , lo calculamos a partir de la tangente, que es $(-2p_i, 1)$ y el vector perpendicular a ésta resulta ser $(1, 2p_i)$ cuyo ángulo es perpendicular a la parábola y, por tanto, el que buscamos; así $\theta = \arctan(2p_i)$.

Para cada valor de p_i tenemos un sistema, con lo cual el problema consiste en resolver 40 sistemas distintos. De esta forma, tenemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l_1^2 \\ (a_i - z)^2 + (b_i - t)^2 = l_3^2 \\ (x - z)^2 + (y - t)^2 = l_2^2 \\ \tan(\pi - \theta_i) = \frac{b_i - t}{a_i - z} \end{cases}$$

Magnitudes conocidas:

- $l_1, l_2, l_3, \theta_i = \arctan(2p_i)$
- $(a_i, b_i) = (-p_i^2 + l_2 + l_3, p_i + l_1)$

Variables desconocidas: x, y, z, t

Utilizamos para ello, el algoritmo de Newton. Para la primera iteración, comenzamos con un punto inicial (x_0, y_0, z_0, t_0) . Para las siguientes, ejecutamos el método con la solución inmediatamente anterior y empleando un número máximo de 100 iteraciones por cada posición. Este método de ir deformando el sistema para obtener sucesivas soluciones se conoce como *método de homotopía*, véanse las referencias [5], [6], [7] y [8].

Una vez resueltos estos sistemas, obtendremos distintas soluciones en función del punto inicial y del vector p elegido.

Veamos algunas de ellas representadas en *Matlab*, donde cada robot viene dado por tres segmentos de color negro unidos por puntos de distintos colores, y que llegan a la parábola dibujada en color azul. Las flechas negras indican la dirección en la que se movería el robot a lo largo del desarrollo.

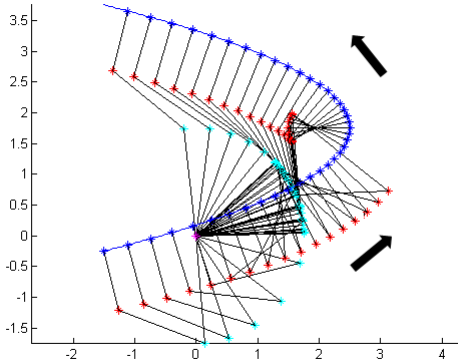


Figura 2.4: Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton, ejecutándolo en dos partes. Primero tomando como punto inicial $(-1, -2, -3, -4)$ y en la segunda $(1, 2, -3, -4)$.

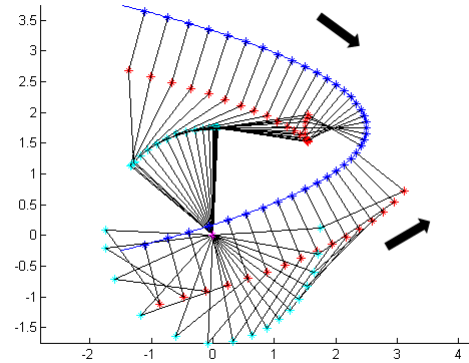


Figura 2.5: Trayectoria del robot obtenida mediante algoritmo de Newton, ejecutándolo en dos partes. Primero tomando como punto inicial $(1, -2, -3, -4)$ y en la segunda $(1, 2, -3, -4)$.

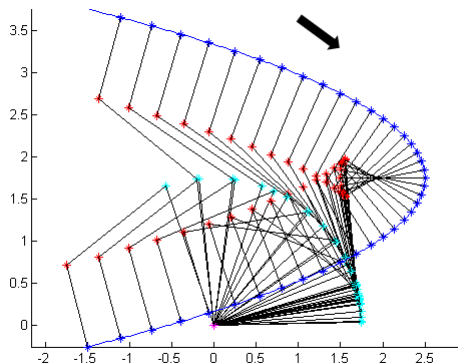


Figura 2.6: Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(1, 2, -3, -4)$.

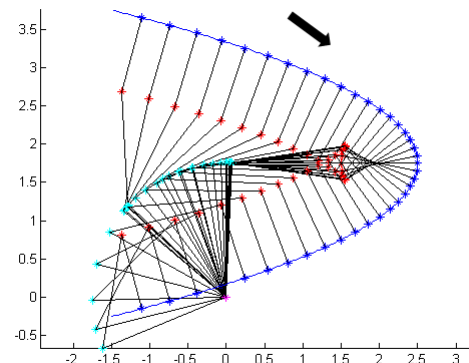


Figura 2.7: Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(1, 2, -3, -4)$.

Seleccionamos la solución proporcionada por la Figura 2.7 y dibujamos el robot en cada posición

para posteriormente crear el vídeo. A continuación se añaden tres secuencias de la reproducción:

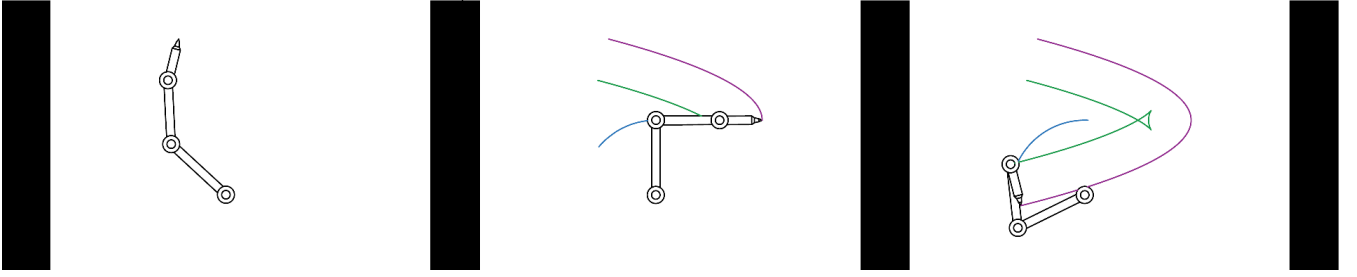


Figura 2.8: Dibujo de tres fases del movimiento del robot obtenido resolviendo los sistemas mediante el algoritmo de Newton con los valores $p_1 = -1.9$, $p_{20} = 0$ y $p_{40} = -2$. Se representan en distintos colores, las trayectorias de los dos codos a lo largo del desarrollo y de la parábola que define su movimiento.

2.5. Ejemplo de aplicación 3

Cambiamos de robot y de trayectoria. Supongamos ahora que tenemos el brazo robótico cuyas longitudes características son $l_1 = 5$, $l_2 = 3$ y $l_3 = 2$. Y esta vez, se moverá a través de dos parábolas, en primer lugar $y = 0.1x^2 + 2.4$ para los valores de $x \in [-4, 4)$ y en segundo lugar, consideraremos $y^2 = -10x + 56$ con $x \in [4, 0.1]$. Además, el tercer brazo (aquel que incide en las parábolas) debe de llegar de forma perpendicular a dichas curvas en cada punto. Se procede de forma similar al ejemplo anterior.

Para la primera parábola, definimos un vector de posición $(p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k)$, con $p_i \in [-4, 4)$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1, k\}$. Se parametriza dicha parábola obteniendo $(a, b) = (p_i, 0.1p_i^2 + 2.4)$ y el valor del ángulo será $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{0.2p_i}\right)$ para cada $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k\}$.

Para la siguiente parábola, de nuevo definimos un vector de posición que será $(p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{n-1}, p_n)$, con $p_j \in [4, 0.1]$, $\forall j \in \{k+1, k+2, \dots, n-1, n\}$. La parametrización esta vez será $(a, b) = (p_j^2, -10p_j + 56)$ y llegará con un ángulo $\theta = \arctan\left(\frac{p_j}{5}\right)$ para cada $p_j \in \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{n-1}, p_n\}$.

Por lo tanto, para cada valor de p_i tenemos un sistema, con lo cual el problema planteado consiste en resolver n sistemas distintos. Que son de la forma:

Magnitudes conocidas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l_1^2 \\ (a_i - z)^2 + (b_i - t)^2 = l_3^2 \\ (x - z)^2 + (y - t)^2 = l_2^2 \\ \tan(\pi - \theta_i) = \frac{b_i - t}{a_i - z} \end{cases} \quad \begin{aligned} & \blacksquare l_1 = 5, l_2 = 3, l_3 = 2 \\ & \blacksquare \theta_i = \arctan\left(\frac{-1}{0.2p_i}\right) \text{ si } i < k+1 \\ & \blacksquare \theta_i = \arctan\left(\frac{p_i}{5}\right) \text{ si } i > k \\ & \blacksquare (a_i, b_i) = (p_i, 0.1p_i^2 + 2.4) \text{ si } i < k+1 \\ & \blacksquare (a_i, b_i) = (p_i^2, -10p_i + 56) \text{ si } i > k \end{aligned}$$

Variables desconocidas: x, y, z, t

Para resolverlo utilizamos el algoritmo de Newton inicializado en un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) . Y de nuevo, como en el ejemplo previo, para las siguientes iteraciones empleamos la solución inmediatamente

anterior como punto inicial del algoritmo. Cada sistema se resuelve con un número máximo de 100 iteraciones.

A continuación se representan con *Matlab* dos soluciones obtenidas, donde cada robot viene dado por tres segmentos de color negro unidos por puntos (que son los codos) de distintos colores (magenta, cian y rojo), llegando a dibujar la trayectoria final de color azul marino. El vector de posición elegido para la primera parábola es $(-4, -3.85, \dots, 3.8, 3.95)$ y para la segunda $(4, 3.85, \dots, 0.25, 0.10)$.

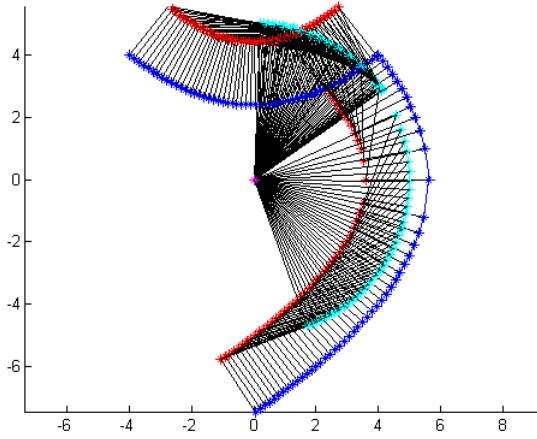


Figura 2.9: Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(2, 3, -5, 4)$.

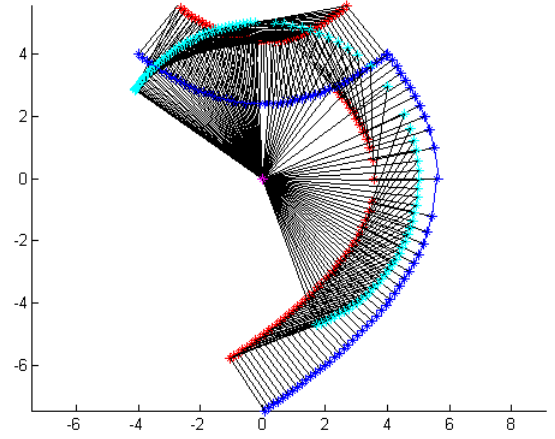


Figura 2.10: Trayectoria del robot obtenida mediante el algoritmo de Newton tomando como punto inicial $(-4, 5, 6, 8)$.

Como se puede comprobar, las trayectorias que dibujan los codos del robot es distinta inicialmente, pero terminan coincidiendo al final del desarrollo.

Por tanto, seleccionamos la solución proporcionada por la Figura 2.10 y dibujamos el robot en varias posiciones para posteriormente crear el vídeo y ver el movimiento final correspondiente a la solución obtenida. A continuación se añaden tres secuencias de la reproducción:

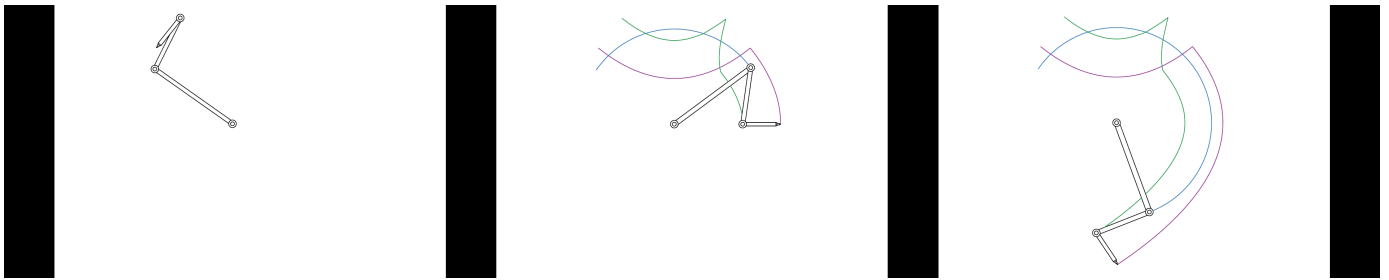


Figura 2.11: Dibujo de tres fases del movimiento del robot obtenido resolviendo los sistemas mediante el algoritmo de Newton. Se representan en distintos colores las trayectorias de los dos codos a lo largo del desarrollo y las parábolas que definen su movimiento.

Como se puede comprobar, se produce un salto al cambiar de una parábola a otra. Se ha tratado de evitar, pero haciendo un estudio, llegamos a la conclusión de que el método de Newton en ese punto produce un salto.

Capítulo 3

La Teoría Alfa de Smale

Tras haber hecho varios casos de estudio, en este capítulo abordaremos ahora la Teoría Alfa de Smale que proporciona un marco teórico en la convergencia del método de Newton. Para ello, expon-dremos y demostraremos el *Teorema Gamma de Smale* y el *Teorema Alfa de Smale*. El artículo original de Smale es [9], aunque nosotros seguiremos el desarrollo hecho en [4].

3.1. El Teorema Gamma de Smale

De ahora en adelante, U será un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{F}$ una función analítica en U , es decir, coincide con su serie de potencias en un entorno abierto de cada uno de sus puntos. Puesto que f es analítica, el desarrollo en serie de Taylor en x es:

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k f(x)}{k!} (y - x)^k$$

cuyo radio de convergencia $R(f, x) > 0$ está dado por,

$$R(f, x)^{-1} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}}.$$

Supondremos que, para todo $x \in U$,

$$B\left(x, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R(f, x)\right) \subset U.$$

Esta hipótesis se satisface siempre que $U = \mathbb{R}^n$ o bien, más generalmente, cuando U es el dominio de analiticidad de la función f .

Veamos unos resultados previos antes de enunciar el Teorema Gamma de Smale.

Lema 3.1. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador lineal y continuo. Si

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < 1$$

entonces $id_{\mathbb{R}^n} - L$ es invertible. Y su inversa está dada por la suma de la serie absolutamente convergente:

$$(id_{\mathbb{R}^n} - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k.$$

Además,

$$\|(id_{\mathbb{R}^n} - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$$

Demostración. Dado que $\|L\| < 1$ La serie $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$ es absolutamente convergente. Además, como el espacio de endomorfismos continuos de $\mathbb{R}^n$ es completo, la serie converge a un endomorfismo continuo M de $\mathbb{R}$. Se tiene,

$$(id_{\mathbb{R}^n} - L) \sum_{k=0}^p L^k = id_{\mathbb{R}^n} - L^{p+1}$$

Cuando $p \rightarrow \infty$ se tiene que $L^{p+1} \rightarrow 0$ puesto que la serie converge y por otra parte,

$$(id_{\mathbb{R}^n} - L) \sum_{k=0}^p L^k \rightarrow (id_{\mathbb{R}^n} - L)M.$$

Por lo tanto, tendiendo al límite obtenemos

$$(id_{\mathbb{R}^n} - L)M = (id_{\mathbb{R}^n} - L) \sum_{k=0}^{\infty} L^k = id_{\mathbb{R}^n}.$$

Y así,

$$(id_{\mathbb{R}^n} - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k.$$

Como $\|L\| < 1$,

$$\|(id_{\mathbb{R}^n} - L)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} L^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|L\|^k = \frac{1}{1 - \|L\|}$$

□

Definición 3.1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos $D^k f(x) : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^k$ que es k -lineal como,

$$D^k f(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Definición 3.2. Para todo $x \in U$ tal que $Df(x)$ es un isomorfismo suponemos

$$\gamma(f, x) = \sup_{k \geq 2} \|Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!}\|^{\frac{1}{k-1}}$$

y $\gamma(f, x) = \infty$ en otro caso.

Proposición 3.1. $R(f, x)^{-1} \leq \gamma(f, x)$

Demostración. Se tiene,

$$\begin{aligned} R(f, x)^{-1} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|Df(x)\|^{\frac{1}{k}} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \\ &\leq \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} = \gamma(f, x). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1. (Teorema Gamma de Smale). Sea $\zeta \in U$ tal que $f(\zeta) = 0$ y que $Df(\zeta)$ sea inversible. Sea $x_0 \in U$ tal que,

$$\|x_0 - \zeta\| \gamma(f, \zeta) \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = 0,17712 \dots$$

Entonces el conjunto de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ está definido y converge a ζ . Además,

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|x_0 - \zeta\|$$

Antes de hacer la demostración de este teorema, veamos un ejemplo en el que tengamos que aplicarlo.

Ejemplo 5.

Supongamos que queremos hallar la solución $\xi = 3$ de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, empleando el algoritmo de Newton inicializado en el punto $x_0 = 3,29$. Empleando el Teorema 3.1, sabremos si la secuencia de Newton está definida y estimaremos la distancia a la solución en cada iteración.

Para ello, en primer lugar calculamos $\gamma(f, \xi)$ con $\xi = 3$,

k	$\left\ Df(\xi)^{-1} \frac{D^k f(\xi)}{k!} \right\ ^{\frac{1}{k-1}}$
2	3/5
3	$\sqrt{10}/10$
≥ 4	0

Luego tenemos que $\gamma(f, \xi) = \frac{3}{5}$, y se verifica:

$$|x_0 - \xi| \gamma(f, \xi) = 0,174 < \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

Entonces, el conjunto de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ está definido y converge a ξ . Además, por el Teorema 3.1, la distancia de cada iteración a la solución queda acotada por:

- $\|x_1 - \xi\| \leq 0,14500$
- $\|x_2 - \xi\| \leq 0,03625$
- $\|x_3 - \xi\| \leq 0,00226$
- $\|x_4 - \xi\| \leq 8,85 \times 10^{-6}$

Con lo que podemos concluir x_4 es una buena solución, muy próxima a la real.

La demostración del Teorema 3.1 se basa en los tres siguientes lemas:

Lema 3.2. *La función*

$$\psi(u) = 1 - 4u + 2u^2$$

decrece de 1 a 0 en el intervalo $0 \leq u \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,29289 \dots$

Demostración. La demostración es elemental. Basta tener en cuenta que $\psi'(u) = -4 + 4u$ es no positiva en el intervalo $\left[0, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ y las valores: $\psi(0) = 1$ y $\psi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. □

Lema 3.3. *Sean $x, x_1 \in U$ con*

$$u = \|x_1 - x\| \gamma(f, x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces $Df(x)^{-1} Df(x_1)$ es invertible y

$$\|Df(x_1)^{-1}Df(x)\| \leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)}.$$

Demostración. Observemos que la hipótesis $\|x_1 - x\|\gamma(f, x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ hace que $Df(x)$ sea un isomorfismo (porque cuando $Df(x)$ no es un isomorfismo, $\gamma(f, x)$ es igual a ∞ por definición) y resulta que $x_1 \in U$ por la Proposición 3.1 y la hipótesis $B\left(x, \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)R(f, x)\right) \subset U$. Este lema es una consecuencia del Lema 3.1. El desarrollo de Taylor de $Df(x_1)$ en x está dado por,

$$Df(x_1) = Df(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{k+1}f(x)}{k!}(x_1 - x)^k$$

$$Df(x)^{-1}Df(x_1) = id_{\mathbb{R}} + \sum_{k=1}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^{k+1}f(x)}{k!}(x_1 - x)^k$$

Tomando normas, obtenemos

$$\|Df(x)^{-1}Df(x_1) - id_{\mathbb{R}}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \|Df(x)^{-1} \frac{D^{k+1}f(x)}{(k+1)!}\| \|x_1 - x\|^k$$

Y teniendo en cuenta las definiciones de $\gamma(f, x)$ y u ,

$$\|Df(x)^{-1}Df(x_1) - id_{\mathbb{R}}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)u^k = \frac{1}{(1-u)^2} - 1$$

Esta cantidad, es menor que 1 dado que $u < 1 - \sqrt{2}/2$; aplicando así el Lema 3.1, se tiene que $Df(x)^{-1}Df(x_1)$ es un isomorfismo y se puede acotar la norma de esta manera,

$$\|Df(x)^{-1}Df(x_1)\| \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{(1-u)^2} - 1\right)} = \frac{(1-u^2)}{\psi(u)}$$

□

Lema 3.4. Sea $\zeta \in U$ tal que $f(\zeta) = 0$ y que $Df(\zeta)$ sea invertible. Sea $x \in U$ tal que

$$u = \|x - \zeta\|\gamma(f, \zeta) < \frac{5 - \sqrt{17}}{4} = 0,21922\dots$$

Entonces para todo $k \geq 0$,

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \left(\frac{u}{\psi(u)}\right)^{2^k-1} \|x - \zeta\|$$

Demostración. Esta demostración consiste en escribir el desarrollo de Taylor de $f(x)$ y de $Df(x)$ en el punto ζ y aplicar propiedades y lemas anteriores,

$$Df(x)(x - \zeta) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (x - \zeta)^k$$

Por el lema anterior, se deduce que $Df(\zeta)^{-1}Df(x)$ es un isomorfismo. Se deduce,

$$\begin{aligned} N_f(x) - \zeta &= Df(x)^{-1}Df(\zeta)Df(\zeta)^{-1}(Df(x)(x - \zeta) - f(x)) \\ &= Df(x)^{-1}Df(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} (x - \zeta)^k. \end{aligned}$$

Aplicando la norma a ambos lados y teniendo en cuenta el Lema 3.3 y la definición de $\gamma(f, \zeta)$:

$$\begin{aligned}
\|N_f(x) - \zeta\| &\leq \|Df(x)^{-1}Df(\zeta)\| \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \left\| Df(\zeta)^{-1} \frac{D^k f(\zeta)}{k!} \right\| \|x - \zeta\|^k \\
&\leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) u^{k-1} \|x - \zeta\| \\
&= \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \left(\frac{1}{(1-u^2)} - \frac{1}{1-u} \right) \|x - \zeta\| \\
&= \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\|.
\end{aligned}$$

La demostración se termina por inducción sobre k con el fin de probar que:

$$\|N_f(x) - \zeta\| \gamma(f, \zeta) \leq \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\| \gamma(f, \zeta) < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

Veamos el procedimiento por inducción:

$$\|N_f(x) - \zeta\| \leq \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\| = \frac{\|x - \zeta\|^2 \gamma(f, \zeta)}{\psi(\|x - \zeta\| \gamma(f, \zeta))} \leq \frac{\gamma(f, \zeta)}{\psi(u)} \|x - \zeta\|^2$$

Luego si $a_k = \|N_f^k(x) - \zeta\|$, se cumple que $a_k \leq \frac{\gamma(f, \zeta)}{\psi(u N_f^{k-1}(x))} \|N_f^{k-1}(x) - \zeta\|^2 \leq \frac{\gamma(f, \zeta)}{\psi(u)} a_{k-1}^2$.

$$\text{Veamos que } a_k \leq \left[\frac{u}{\psi(u)} \right]^{2^k - 1} a_0 = \left[\frac{u}{\psi(u)} \right]^{2^k - 1} \|x - \zeta\|$$

- Ciertamente para $k = 1$
- Suponemos que es cierto para k , comprobemos que también se cumple para $k + 1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq a_k^2 \frac{\gamma(f, \zeta)}{\psi(u)} \leq \left[\left[\frac{u}{\psi(u)} \right]^{2^k - 1} \|x - \zeta\| \right]^2 \frac{\gamma(f, \zeta)}{\psi(u)} = \frac{u^{2^{k+1} - 2}}{\psi(u)^{2^{k+1} - 2}} \frac{\|x - \zeta\|^2 \gamma(f, \zeta)}{\psi(u)} = \\
&\quad \frac{u^{2^{k+1} - 1}}{\psi(u)^{2^{k+1} - 1}} \|x - \zeta\| = \left[\frac{u}{\psi(u)} \right]^{2^{k+1} - 1} \|x - \zeta\|
\end{aligned}$$

De la desigualdad $u < \frac{5 - \sqrt{17}}{4} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ se deduce que $\frac{u}{\psi(u)} < 1$. Se tiene que,

$$\|N_f(x) - \zeta\| \gamma(f, \zeta) \leq \frac{u}{\psi(u)} \|x - \zeta\| \gamma(f, \zeta) < u < \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

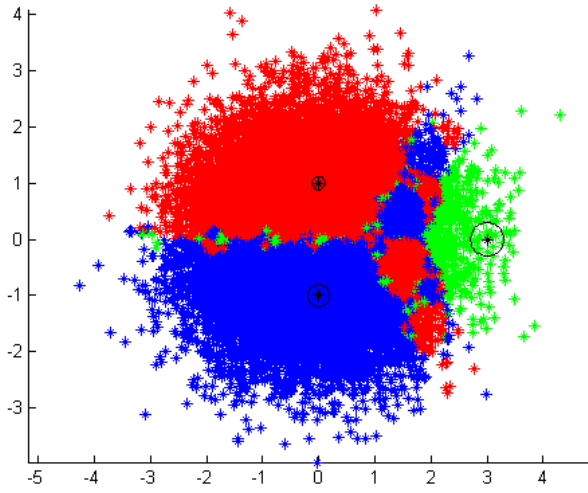
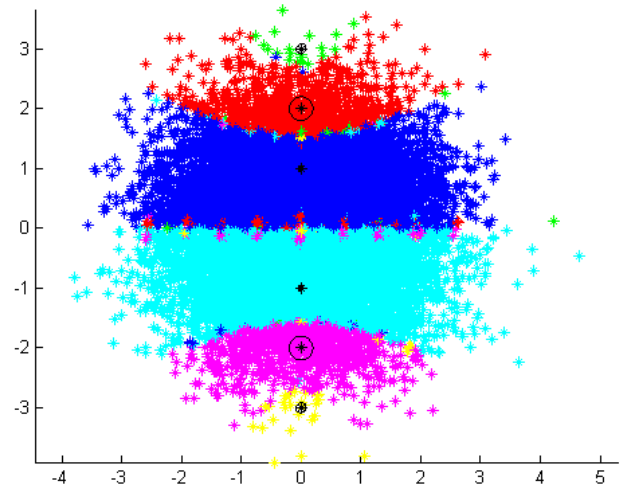
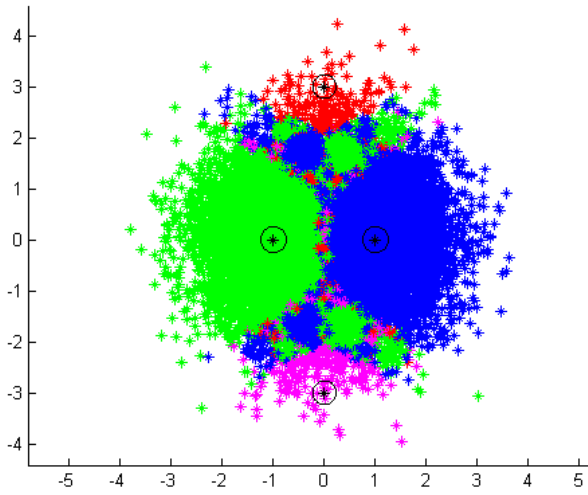
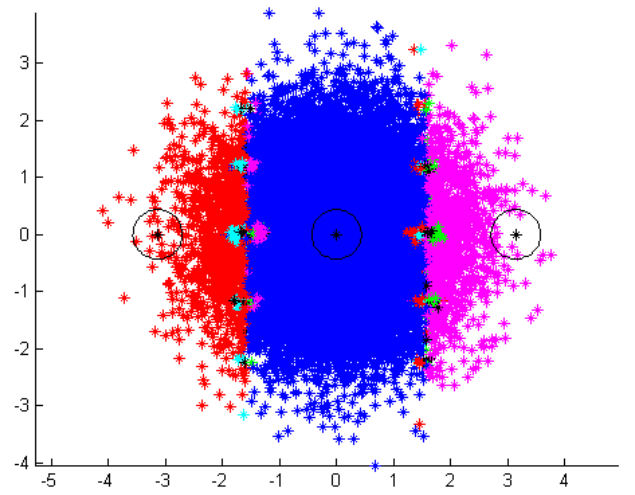
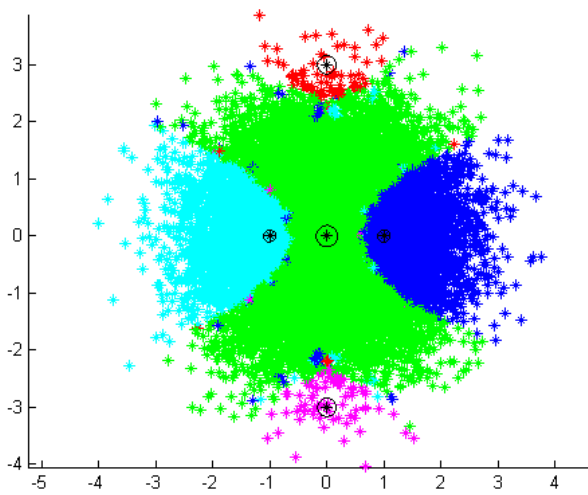
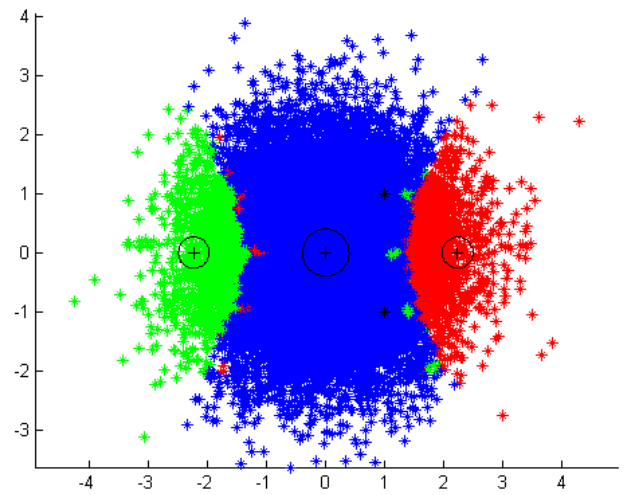
donde termina la demostración. □

De esta forma y teniendo en cuenta los lemas previos,

Demostración del Teorema 3.1. Es consecuencia inmediata del Lema 3.4 y la desigualdad $\frac{u}{\psi(u)} \leq \frac{1}{2}$ cuando $u \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$.

3.2. Comprobación gráfica del teorema

Veamos ahora que, efectivamente, se cumple el *Teorema Gamma*. Para ello, tomamos los ejemplos de funciones anteriormente representadas. Según dicho teorema, cada cero ζ (representado en color negro) es el centro de una circunferencia de radio $\frac{3 - \sqrt{7}}{2\gamma(f, \zeta)}$ tal que para cada punto x_0 de su interior, la sucesión de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ está definida y converge a ζ . Obtenemos lo siguiente:

Figura 3.1: $f(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$ Figura 3.2: $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)$ Figura 3.3: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 9)$ Figura 3.4: $f(x) = \sin(x)$ Figura 3.5: $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 9)$ Figura 3.6: $f(x) = x(x^2 - 5)$

3.3. El Teorema Alfa de Smale

El Teorema Gamma de Smale requiere conocer $\gamma(f, \zeta)$, pero en muchos casos solo tenemos $\gamma(f, x_0)$. Por ello, Smale introdujo otro de sus famosos teoremas, el Teorema Alfa de Smale. Pero antes de enunciarlo, veamos la definición de $\beta(f, x)$ y $\alpha(f, x)$.

Definición 3.3. $\beta(f, x)$ y $\alpha(f, x)$ se definen como:

- $\beta(f, x) = \|Df(x)^{-1}f(x)\|$
- $\alpha(f, x) = \beta(f, x)\gamma(f, x) = \|Df(x)^{-1}f(x)\| \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}$

Teorema 3.2. (Teorema Alfa de Smale). Existe una constante $\alpha_0 > 0$ que cumple la siguiente propiedad. Para todo $x \in U$ que verifique $\alpha(f, x) < \alpha_0$ existe un cero ζ de f tal que

$$\|\zeta - x\| \leq 1,63281... \beta(f, x)$$

y

$$1,63281... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k-1}}$$

Además el conjunto de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ con $x_0 = x$ está definido y verifica

$$\|x_k - \zeta\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|x_0 - \zeta\|$$

para todo $k \geq 0$.

Lema 3.5. Sean $x, x_1 \in U$ con $u = \|x - x_1\|\gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$. Entonces, para todo $k \geq 2$,

- $\left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| \leq \frac{1}{\psi(u)} \left(\frac{\gamma(f, x)}{1-u} \right)^{k-1}$
- $\|Df(x)^{-1}f(x_1)\| \leq \beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u}$.

Demostración. Para demostrar este lema, utilizaremos el desarrollo de Taylor en x para $D^k f(x_1)$.

$$Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} = Df(x_1)^{-1} Df(x) \sum_{l=0}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^{k+l} f(x)}{k!l!} (x_1 - x)^l.$$

Aplicando las normas a ambos lados obtenemos,

$$\left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| \leq \|Df(x_1)^{-1} Df(x)\| \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^{k+l} f(x)}{(k+l)!} \right\| \|x_1 - x\|^l$$

y con el Lema 3.3 obtenemos ,

$$\left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\| \leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!l!} \gamma(f, x)^{k+l-1} \|x_1 - x\|^l = \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \gamma(f, x)^{k-1} \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$$

con lo que queda probada la primera parte del lema. Para la segunda, utilizamos argumentos similares,

$$Df(x)^{-1}f(x_1) = Df(x)^{-1}f(x) + (x_1 - x) + \sum_{k=2}^{\infty} Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} (x_1 - x)^k,$$

y por tanto,

$$\|Df(x)^{-1}f(x_1)\| \leq \|Df(x)^{-1}f(x)\| + \|x_1 - x\| + \sum_{k=2}^{\infty} \left\| Df(x)^{-1} \frac{D^k f(x)}{k!} \right\| \|x_1 - x\|^k$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta(f, x) + \|x_1 - x\| + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma(f, x)^{k-1} \|x_1 - x\|^k \\
&= \beta(f, x) + \|x_1 - x\| \left(1 + \left(\frac{1}{1-u} - 1 \right) \right) \\
&= \beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.6. Sean $x, x_1 \in U$ con $u = \|x - x_1\| \gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$. Entonces, para todo $k \geq 2$,

- $\beta(f, x_1) \leq \frac{1-u}{\psi(u)} ((1-u)\beta(f, x) + \|x_1 - x\|),$
- $\gamma(f, x_1) \leq \frac{\gamma(f, x)}{(1-u)\psi(u)},$
- $\alpha(f, x_1) \leq \frac{(1-u)\alpha(f, x) + u}{\psi(u)^2}.$

Demostración. Para β usaremos los Lemas 3.3 y 3.5 y la siguiente estimación:

$$\beta(f, x_1) = \|Df(x_1)^{-1}f(x_1)\| \leq \|Df(x_1)^{-1}Df(x)\| \|Df(x)^{-1}f(x_1)\| \leq \frac{(1-u)^2}{\psi(u)} \left(\beta(f, x) + \frac{\|x_1 - x\|}{1-u} \right).$$

La siguiente estimación para γ es una consecuencia del Lema 3.5:

$$\gamma(f, x_1) = \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x_1)^{-1} \frac{D^k f(x_1)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \leq \sup_{k \geq 2} \left(\frac{1}{\psi(u)} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\gamma(f, x)}{1-u} = \frac{\gamma(f, x)}{(1-u)\psi(u)}.$$

En efecto, para $u < 1 - \sqrt{2}/2$ se tiene $\psi(u) < 1$ y el supremo se alcanza para $k = 2$.

La tercera desigualdad se obtiene de multiplicar las dos primeras entre sí. □

Lema 3.7. Para todo $x \in U, \|DN_f(x)\| \leq 2\alpha(f, x)$

Demostración. La derivada del operador de Newton está dada por:

$$DN_f(x) = D(x) - D(Df(x)^{-1})f(x) - Df(x)^{-1}Df(x) = id_{\mathbb{R}} + Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x) - id_{\mathbb{R}}$$

de donde

$$\|DN_f(x)\| = \|Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x)\| \leq \|Df(x)^{-1}D^2f(x)\| \|Df(x)^{-1}f(x)\| \leq 2\gamma\beta = 2\alpha. \quad \square$$

Teorema 3.3. Sean $r > 0, \alpha_0$ y $x \in U$ tales que verifiquen las condiciones siguientes:

- $u_0 = r\gamma(f, x) < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$
- $\alpha(f, x) \leq \alpha_0,$
- $\lambda = 2 \frac{(1-u_0)\alpha_0 + u_0}{\psi(u_0)^2} < 1,$
- $\alpha_0 + \lambda u_0 \leq u_0.$

Entonces N_f es una contracción de $\bar{B}(x, r)$ en ella misma, con constante de contracción λ . Existe un único cero ζ de f en esta bola y para todo $x_0 \in \bar{B}(x, r)$ la sucesión de Newton $x_{k+1} = N_f(x_k)$ iniciado en x_0 converge a ζ .

Demostración. Por una parte, para todo $x_1 \in \bar{B}(x, r)$, con $u = \|x - x_1\| \gamma(f, x) \leq r\gamma(f, x) < 1 - (\sqrt{2}/2)$, y por los Lemas 3.6 y 3.7

$$\|DN_f(x_1)\| \leq 2\alpha(f, x_1) \leq 2 \frac{(1-u)\alpha(f, x) + u}{\psi(u)^2} \leq 2 \frac{(1-u_0)\alpha_0 + u_0}{\psi(u_0)^2} = \lambda < 1$$

y entonces N_f es una contracción de constante λ . Tendremos $N_f(\bar{B}(x, r)) \subset \bar{B}(x, r)$ si $\lambda r + \|x - N_f(x)\| \leq r$, es decir si $\lambda u_0 + \|x - N_f(x)\|\gamma(f, x) \leq u_0$ dado por $\lambda u_0 + \alpha_0 \leq u_0$ que es nuestra hipótesis.

Nota

Con valores numéricos $u_0 = 0,06$ y $\alpha_0 = 0,04$ obtenemos el valor $\lambda = 0,033163 \dots < 1/2$. Además, para todo $x_0 \in \bar{B}(x, u_0/\gamma(f, x))$ y para el cero ζ de f contenido en esta bola, se tiene,

$$\|x_0 - \zeta\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - \zeta\| \leq \frac{2u_0}{\gamma(f, x)}.$$

De esta desigualdad y el Lema 3.6 se deduce lo siguiente:

$$\|x_0 - \zeta\|\gamma(f, \zeta) \leq \frac{2u_0\gamma(f, \zeta)}{\gamma(f, x)} \leq \frac{2u_0}{\psi(u_0)(1-u_0)} = 0,16639 \dots < \frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

Dicho de otra forma, la bola $\bar{B}(x, u_0/\gamma(f, x))$ está contenida en $\bar{B}(\zeta, (3-\sqrt{7}/2\gamma(f, \zeta)))$. En esta bola, el operador de Newton es una contracción de constante $\leq 1/2$, más aún, converge cuadráticamente, como vimos en el Teorema 3.1 (Teorema Gamma de Smale). $\square$

Teorema 3.4. (*Teorema alfa robusto*). *Existen dos constantes positivas u_0 y α_0 tales que: si $x \in U$ verifica $\alpha(f, x) \leq \alpha_0$ entonces, existe un único cero ζ de f satisfaciendo $\|\zeta - x\| \leq u_0/\gamma(f, x)$. Además,*

$$\bar{B}\left(x, \frac{u_0}{\gamma(f, x)}\right) \subset \bar{B}\left(\zeta, \frac{3-\sqrt{7}}{2\gamma(f, \zeta)}\right)$$

y N_f converge cuadráticamente.

Demostración. Se obtiene aplicando el Teorema 3.4 con la bola de centro x y los valores numéricos de la nota anterior. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

En este apartado, me gustaría hacer una breve explicación de los resultados obtenidos, centrándome principalmente en los ejemplos numéricos y gráficos. Expondré reflexiones personales así como las dificultades superadas surgidas en la elaboración del texto.

A lo largo del presente trabajo podemos encontrar varios ejemplos numéricos que son solo una muestra de todos los que se han trabajado. Para ello ha sido necesario hacer un esfuerzo de desarrollo lógico utilizando los teoremas convenientes, y se han programado en *Matlab* todos los métodos necesarios para alcanzar los resultados en todos los casos.

En la Sección 1.3, se representan las bases de atracción de una serie de ejemplos que no están elegidos al azar. Después de investigar y probar con distintas funciones, se decidió plasmar en el trabajo aquellos más destacables y distintos entre sí, para tener unos resultados generales y representativos. De esta forma, encontramos ejemplos de funciones de distintos grados, polinómicas y trigonométricas, que sólo poseen raíces complejas, sólo reales y ambas a la vez.

Además, en esa misma sección se expone un ejemplo en el que se produce un ciclo y por tanto el método de Newton no llega a converger. Pero hay muchos otros ejemplos que nos hemos encontrado a lo largo del trabajo, en los que no converge ya sea porque es un ciclo o no.

Un ejemplo concreto en el que el método de Newton no converge y no produce un ciclo vendría dado por la función $f(x) = 1/x$. En efecto, basta ver que

$$N_f(x) = x - \frac{1/x}{-1/x^2} = 2x.$$

La falta de convergencia no debería extrañarnos porque la función no tiene raíces.

En cuanto a los ejemplos de aplicación de las Secciones 2.3, 2.4 y 2.5, me gustaría indicar que para obtener los resultados, se ha llevado a cabo un proceso muy laborioso. Tanto la programación del método realizada en *Matlab* como la representación de los robots diseñados en *AutoCAD*, han supuesto un minucioso trabajo consecuencia de muchas pruebas, errores y resoluciones.

La elaboración de las simulaciones a través de los vídeos, tenían un claro objetivo: representar un movimiento continuo a lo largo de una trayectoria dada. Como se puede comprobar, en el primero de ellos se obtiene sin ningún problema, pero es en el segundo donde no ocurre lo mismo.

Si observamos los puntos rojos (que representan el movimiento del segundo codo) en la Figura 2.10, se produce un salto al cambiar de la parábola $y = 0,1x^2 + 2,4$ a la parábola $y^2 = -10x + 56$. Y por lo tanto también queda reflejado en la reproducción. Trabajamos sobre ello para que no ocurriera, pues resultaba ser precisamente lo que se quería evitar, pero tras dedicarlo un tiempo llegamos a una conclusión muy clara. Efectivamente, a veces el método de Newton produce saltos como ese.

Del último capítulo considero importante señalar que el proceso de asimilación, comprensión y aprendizaje ha sido largo. Si bien muchas de las demostraciones del primer capítulo eran sencillas, las de

este han supuesto un proceso de trabajo y dedicación continuo.

Y es precisamente en ese capítulo donde exponemos el Teorema Gamma de Smale, el cual proporciona un gran resultado sobre la convergencia del método de Newton.

Si un punto verifica las hipótesis de dicho teorema, la sucesión de Newton estará definida y convergerá a la solución indicada. Además, Smale logra acotar superiormente la distancia de cualquier iteración de esa sucesión a la solución.

Pero teniendo en cuenta esas hipótesis, el teorema requiere conocer la solución exacta a la que converge el método en caso de hacerlo. Como sabemos, en la mayoría de los casos eso no es posible.

Para resolver ese inconveniente, Smale añadió a su teoría el ahora llamado Teorema Alfa de Smale, en el que asegura la convergencia del método de Newton y obtiene una cota superior de la distancia desde cualquier iteración del método a la solución. Todo ello, sin necesidad de conocer la solución exacta. Una parte que me ha llevado un esfuerzo considerable ha sido el tratar de comprender las demostraciones de estos dos teoremas.

Bibliografía

- [1] BURDEN, RICHARD L. 2002. *Análisis numérico* 7ªed. México, D.F. : International Thomson Editores.
- [2] GASCA GONZÁLEZ, MARIANO. 1990. *Cálculo numérico / preparada por el profesor Mariano Gasca González*. 2ªed. Madrid : Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- [3] DEVANEY, ROBERT L. 1992. *A first course in chaotic dynamical systems : theory and experiment* 1ªed. Massachusetts : Addison-Wesley.
- [4] DEDIEU, JEAN-PIERRE. 2006. *Points fixes, zéros et la méthode de Newton* 1ªed. Berlin : Springer-Verlag.
- [5] BLUM,LENORE; CUCKER,FELIPE;SHUB,MICHAEL; SMALE,STEVE. 1998. *Complexity and real computation* 1ªed: Springer.
- [6] BURGISSER PETER; CUCKER, FELIPE. 2010. *Condition/The Geometry of Numerical Algorithms* 1ªed: Springer.
- [7] BELTRÁN, CARLOS; PARDO, LUIS MIGUEL. 2011. *Efficient Polynomial System Solving by Numerical Methods* In Randomization, Relaxation and Complexity, Contemporary Mathematics (2011). Editors: Leonid Gurvits, Philippe P. Pébay, J. Maurice Rojas, David C. Thompson. This is an updated version of the paper with the same name mentioned below, published in the JFPTA.
- [8] SOMMESE,ANDREW J; WAMPLER, CHARLES W. 2005. *The Numerical Solution of Systems of Polynomials* 1ªed: Word Scientific.
- [9] SMALE,STEVE. 2006. *Newton's Method Estimates from Data at One Point* 1986. In:*The merging of disciplines: new directions in pure, applied, and computation in mathematics*. 1ªed: Springer.
- [10] ORTEGA, J.M; W.G.POOLE,J. 1972. *Numerical analysis: a second course* 1ªed. New York : Academic Press.