



***Facultad
de
Ciencias***

**INFLACIÓN CÓSMICA: MODELOS
INFLACIONARIOS CON DÉFICIT DE
POTENCIA A GRAN ESCALA Y
COMPARACIÓN CON
OBSERVACIONES**

**(Cosmic inflation: inflationary models with
power suppression at large scales and
comparison with observations)**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN FÍSICA

Autor: Guillermo Martínez Somonte

Director: Enrique Martínez González

Co-Director: Airam Eduardo Marcos Caballero

Octubre - 2016

Índice

1. Glosario	3
1.1. Siglas	3
1.2. Notación	4
2. Introducción	6
2.1. Motivación	6
2.2. Objetivo	6
2.3. Estructura del trabajo	6
3. Base teórica 1: Modelo Cosmológico Estándar Clásico	7
3.1. Historia térmica del universo	7
3.2. Evolución del universo	8
3.2.1. Principio Cosmológico	8
3.2.2. Expansión del universo	8
3.2.3. Estructura causal del universo	9
3.3. Relatividad General	11
3.4. Perturbaciones cosmológicas	13
3.4.1. Perturbaciones de primer orden	13
3.4.2. Descomposición Escalar-Vectorial-Tensorial EVT	13
3.4.3. Perturbaciones de la métrica $g_{\mu\nu}$	13
3.4.4. Perturbaciones del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$	14
3.4.5. Perturbación de curvatura comóvil \mathcal{R}	14
3.4.6. Tratamiento estadístico de las perturbaciones escalares	14
3.5. Aplicación del Modelo Cosmológico Estándar Clásico	15
3.5.1. Fondo cósmico de microondas (FCM)	16
3.5.2. Otras aplicaciones de éxito	18
3.6. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico	18
4. Base teórica 2: modelo inflacionario	20
4.1. Respuesta a problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico	20
4.1.1. Problema del horizonte	20
4.1.2. Problema de la planitud	20
4.1.3. Problema de los monopolos	21
4.2. Evolución del universo en la etapa inflacionaria	21
4.3. Física de la inflación	23
4.3.1. Dinámica del campo escalar ϕ	23
4.3.2. Recalentamiento	25
4.3.3. Inflación <i>slow-roll</i>	25
4.3.4. Modelos de Inflación	26
5. Fluctuaciones durante inflación	28
5.1. Tamaño de las fluctuaciones	28
5.2. Fluctuaciones cuánticas en inflación	28
5.2.1. Ecuación de Mukhanov-Sasaki	28
5.2.2. Condiciones iniciales de la ecuación de Mukhanov-Sasaki	29

5.2.3.	Obtención del espectro de potencias $P_{\mathcal{R}(k)}$	30
6.	Funcionamiento del código en 'Mathematica'	30
6.1.	<i>Inputs</i> y elección de condiciones iniciales	31
6.1.1.	Condiciones iniciales para el <i>background</i>	31
6.1.2.	Condiciones iniciales para la ecuación de Mukhanov-Sasaki	31
6.2.	Resolución del <i>background</i>	31
6.2.1.	Funciones del <i>background</i>	31
6.2.2.	Derivadas de las funciones del <i>background</i>	32
6.2.3.	Otras magnitudes del <i>background</i>	32
6.3.	Resolución ecuación de Mukhanov-Sasaki	33
6.4.	Obtención del espectro de potencias $\Delta_s^2(k)$	33
7.	Resultados obtenidos	33
7.1.	$V(\phi) = cte$ con <i>slow-roll</i> : universo De Sitter	33
7.2.	$V(\phi) = cte$ con <i>fast-roll</i>	34
7.3.	Potencial cumbre: $V(\phi) = \frac{g}{4}(\phi^2 - \frac{1}{g})^2$	40
8.	Discusión	41
8.1.	Discusión de los resultados	41
8.1.1.	De Sitter <i>slow-roll</i>	41
8.1.2.	$V(\phi) = fast-roll$	42
8.1.3.	Potencial cumbre	43
8.2.	Sobre el escenario inflacionario	44
8.2.1.	Éxitos del modelo inflacionario	44
8.2.2.	Problemas del modelo inflacionario	46
8.2.3.	Alternativas a la inflación	46
8.2.4.	Futuras líneas de investigación	47
9.	Conclusiones	47
10.	Anexos	48
10.1.	Anexo A: Cuantización del oscilador armónico	48
10.1.1.	Ecuación de movimiento	48
10.1.2.	Cuantización canónica	48
10.1.3.	Funciones modales $v(t)$	49
10.2.	Anexo B: Código	50
11.	Bibliografía	50

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a Airam Marcos y a Enrique Martínez, directores de este trabajo, por su infinita paciencia conmigo y su fácil accesibilidad.

Mi agradecimiento a mi primo David Diego por ayudarme a tener las ideas claras, y a todos los profesores que me han ayudado a llegar hasta aquí.

Resumen

Se resuelven las ecuaciones de la dinámica inflacionaria para dos tipos de potenciales variando sus condiciones iniciales, y, a partir de la evolución de tales universos inflacionarios, se computa numéricamente el espectro de potencias de sus fluctuaciones de densidad primordiales, resaltando el déficit de potencia a escalas grandes.

Abstract

The background inflationary equations are solved for two concrete potentials, varying their initial conditions, and, from the background evolution of those inflationary universes, the power spectrum of their primordial density fluctuations is numerically computed, focusing on the power suppression at large scales.

Palabras clave

Inflación, cosmología, Modelo Cósmico Estándar, Big Bang, inflatón, expansión cósmica, universo, fondo cósmico de microondas, fluctuaciones escalares primordiales, slow-roll, déficit de potencia.

1. Glosario

1.1. Siglas

- MCEC: Modelo Cosmológico Estándar Clásico
- FCM: Fondo Cósmico de Microondas
- EGE: Estructura a Gran Escala
- TGU: Teoría de la Gran Unificación
- RG: Relatividad General
- FLRW: Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
- 1EF: 1^a Ecuación de Friedmann
- 2EF: 2^a Ecuación de Friedmann
- EVT: Escalar-Vectorial-Tensorial
- NP: Nucleosíntesis Primordial
- LHC: *Large Hadron Collider*
- SUSY: Supersimetría
- ESA: *European Space Agency*

1.2. Notación

Se usa la letra t para denotar el tiempo físico, mientras que τ denota el tiempo conforme. La derivada temporal de una función $f(t)$ con respecto al tiempo t se denota como $\dot{f}(t)$; la derivada con respecto a τ se denota como $f'(\tau)$.

Para la métrica se usa $g_{\mu\nu}$, donde μ y ν hacen referencia a coordenadas espacio-temporales (toman valores $\{0, 1, 2, 3\}$, siendo 0 la coordenada temporal). Los índices i, j indican coordenadas espaciales (valores $\{1, 2, 3\}$). La signatura utilizada es $(- + + +)$. La delta de Kronecker se denota por δ_{ij} para los índices i y j , y la delta de Dirac como $\delta(\mathbf{i} + \mathbf{j})$. Para el logaritmo en base 10 se usará $\log x$, y para el logaritmo neperiano $\ln x$. Un subíndice k en variable indica que está calculada en el espacio de Fourier.

Para el factor de escala se usa a , ya que R denota el escalar de Ricci. \mathcal{R} denota la perturbación comóvil de la curvatura. Para el parámetro de Hubble se usa H , y en el contexto de tiempo conforme, h . En relación a estos parámetros cosmológicos, los valores con el subíndice '0' hacen referencia a su valor en la actualidad.

Durante todo el texto se trabaja con unidades naturales, es decir, $\hbar = 1$, y $c = 1$, aunque en excepcionales casos se pueden recuperar por conveniencia. Además, se toma $8\pi G = 1$, por lo que se asigna la masa de Planck $M_{pl} \equiv (8\pi G)^{-1/2} = 1$.

Para los extranjerismos, como *slow-roll* o *gauge*, se usará fuente en cursiva; para hacer referencia a secciones o subsecciones se utiliza la tipografía `Lorem Ipsum`.

2. Introducción

2.1. Motivación

La cosmología física pretende explicar la estructura y dinámica del universo a gran escala. En la actualidad, esta cimenta sus bases en explicar la expansión del universo, el fondo cósmico de microondas (FCM) y las abundancias de elementos ligeros en el universo.

La teoría cosmológica que históricamente ha descrito mejor el universo se denomina Modelo Cosmológico Estándar Clásico (MCEC). No obstante, este modelo no está exento de problemas, que o bien parecen insalvables dentro de sus teorías, o se justifican con una explicación poco satisfactoria, como un extremadamente preciso ajuste fino. Por ello, este MCEC se ha ampliado en las últimas décadas, en el Modelo Cosmológico Estándar.

Una de estas extensiones del modelo clásico es el escenario inflacionario, ya que propone una solución a algunos de los principales problemas del MCEC, relacionados sobre todo con el *Big Bang*. Los modelos inflacionarios proponen una etapa de expansión extraordinariamente rápida del universo poco después del *Big Bang*, que es capaz de dejar huella en el Fondo Cósmico de Microondas.

2.2. Objetivo

El objetivo de este trabajo es la resolución numérica de las ecuaciones dinámicas del universo para un potencial de inflación $V(\phi) = cte$ y un $V(\phi)$ tipo cumbre. A partir de la solución de tal *background*, se implementa un método para computar el espectro de potencias $\Delta_s^2(k)$ de sus fluctuaciones cuánticas primordiales.

2.3. Estructura del trabajo

El trabajo comienza con una revisión de los aspectos fundamentales en cosmología y Relatividad General (RG) necesarios para la comprensión del mismo. En la sección ‘Base Teórica 1: Modelo Cosmológico Estándar Clásico’ se establecen los fundamentos del MCEC, y en la sección ‘Base Teórica 2: escenario inflacionario’ se introduce el modelo inflacionario.

En ‘Fluctuaciones durante inflación’ se especifica el ámbito en el que se desarrolla el trabajo, y se deduce la ecuación básica para el cómputo de $\Delta_s^2(k)$.

En ‘Funcionamiento del código en *Mathematica*’ se detalla como se ha realizado el trabajo.

En la sección ‘Discusión’ se analizan y valoran los resultados obtenidos en la sección ‘Resultados’, además de repasar los éxitos e inconvenientes del escenario inflacionario, revisando las posibles alternativas a este y sugiriendo futuras líneas de investigación.

Finalmente, en la sección ‘Conclusiones’ se repasa el trabajo globalmente, extrayendo lo esencial plasmado en el presente trabajo.

En ‘Anexos’ se incluye información de interés en algunos aspectos específicos del trabajo.

3. Base teórica 1: Modelo Cosmológico Estándar Clásico

El Modelo Cosmológico Estándar Clásico representa el modelo con el que mejor se comprende nuestro universo. Se basa en las siguientes hipótesis:

- Validez¹ de la Relatividad General (RG).
- Principio Cosmológico: el universo es homogéneo e isótropo² a gran escala.

3.1. Historia térmica del universo

El MCEC concilia las ideas de la expansión cosmológica, el FCM y las abundancias de elementos ligeros suponiendo que el espacio-tiempo comenzó en un determinado instante de tiempo ($t = 0$) en el pasado, en una gran explosión comúnmente conocida como *Big Bang*. Desde el *Big Bang* hasta la actualidad, en el universo se han sucedido distintas etapas, cuya evolución se suele tener en cuenta en términos de la termodinámica y la física de partículas, de ahí la denominación de historia térmica del universo.

Dos principios caracterizan esta evolución:

1. Se produce un desacople de partículas a medida que el universo se expande, desacoplándose las más energéticas primero.
2. El enfriamiento progresivo del universo, ocasionado por su expansión, ocasiona la rotura de simetrías en leyes físicas.

Desde el *Big Bang* hasta los primeros 10^{-10} s, cuando la densidad de energía del universo era superior a 1 TeV, el conocimiento sobre las leyes físicas es especulativo, en comparación con el conocimiento de leyes comprobadas experimentalmente y bien comprendidas, basadas en física nuclear, atómica, electromagnética y la gravitación.

En esta primera fase, se comienza a hablar de leyes físicas a partir tiempo de Planck $t_{pl} \sim 10^{-43}$ s, ya que en tiempos anteriores se tendría un universo totalmente gobernado por las mal comprendidas leyes de Gravitación Cuántica. Se supone también que en tiempos anteriores a 10^{-36} s las interacciones nucleares fuertes estaban unificadas con las electrodébiles, en los modelos de Teoría de la Gran Unificación (TGU).

A partir de los 10^{-10} s (escalas energéticas inferiores a 1 TeV) se produce la ruptura de la unificación electrodébil y tiene lugar la Nucleosíntesis Primordial (NP); ya a escalas energéticas inferiores al eV se produce la recombinación (de la que emana la luz del FCM, con $t \sim 10^{13}$ s) y, posteriormente, se forman las estructuras como las galaxias que observamos o el Sistema Solar ($t \sim 10^{16-17}$ s $\sim 10^{9-10}$ años).

Durante estas fases, el universo ha estado dominado por distintas componentes a lo largo de su evolución. En primer lugar, la radiación era la principal contribución a la densidad de energía del cosmos, pero a medida que este se fue expandiendo, la materia ocupó su lugar. Finalmente, tras la rápida expansión acelerada de los últimos millones de años, la energía oscura es la que domina el universo en la actualidad.

¹Cabe puntualizar que esta validez es para escalas cosmológicas, ignorando así efectos de gravitación cuántica dentro de agujeros negros o en tiempos anteriores al t_{pl} .

²Haciendo referencia a homogeneidad e isotropía espacial, no espacio-temporal.

3.2. Evolución del universo

3.2.1. Principio Cosmológico

Una de las características del universo es su alto grado de homogeneidad e isotropía espacial a escalas cosmológicas: bajo traslaciones y rotaciones a grandes escalas, cualquier observador vería un universo muy parecido. La hipótesis de que estas características se cumplen exactamente en todo el universo se conoce como Principio Cosmológico.

3.2.2. Expansión del universo

Otra característica fundamental del universo es su propio dinamismo (no el de sus estructuras, como cúmulos o galaxias). El universo no es estático, y en la actualidad se está expandiendo, además de forma acelerada. Este hecho sólo³ se puede achacar actualmente a la evolución de la métrica $g_{\mu\nu}$ con el tiempo.

La métrica como concepto matemático, es una función que permite, en un espacio en el que está definida una función distancia, conocer la distancia D entre 2 puntos de tal espacio. Como dictan las ecuaciones de campo de Einstein, la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo viene dada por la distribución de masa en el espacio (véase ‘Sección Relatividad General’).

Si se supone una masa en caída libre con la expansión del universo, conociendo la forma de la métrica $g_{\mu\nu}$, se puede calcular la distancia física D que nos separa de tal masa situada en una coordenada comóvil⁴. La evolución de la métrica se cuantifica con la evolución temporal de un factor de escala a . Este factor de escala se define como:

$$D(t) = a(t)r \quad (1)$$

Es decir, una especie de ‘regla’ de medir distancias D_{ij} entre pares de observadores fijos/comóviles $\{r_i, r_j\}$, que con el tiempo se va estirando⁵. La RG permite encontrar un modelo satisfactorio para la dependencia $a(t)$, que se deducirá a continuación con las ecuaciones de Friedmann (véase el siguiente apartado ‘Relatividad General’).

Es útil definir el parámetro de Hubble $H(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2)$$

³Hay que aclarar que la expansión del universo no es directamente un eco de la explosión del *Big Bang*, ya que la expansión es independiente de la masa de los objetos que se alejan de nosotros y la linealidad encontrada del corrimiento al rojo con la distancia es incompatible con esta explicación; esto implicaría la existencia de un sistema de referencia (SR) absoluto en el supuesto centro de la explosión, lo que va en contra del Principio de Relatividad. Otras explicaciones, como las teorías de luz cansada o el corrimiento al rojo gravitatorio tampoco son capaces de dar cuenta de las características de tal expansión, siendo la evolución de la métrica la única alternativa satisfactoria [3].

⁴Término que se introduce a continuación.

⁵No se consideran aquí movimientos peculiares de tales masas ocasionadas por efectos puntuales de atracción gravitatoria o similar. A escalas cosmológicas tales movimientos son despreciables a todos los efectos

También es de utilidad hacer uso del sistema de coordenadas comóviles. En concreto, el tiempo conforme, τ , definido como:

$$\tau = \int \frac{1}{a(t)} dt, \quad (3)$$

que se puede interpretar como un reloj que se va frenando acorde a la expansión del universo.

3.2.3. Estructura causal del universo

El elemento de línea ds^2 se define, en general, como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (4)$$

Para el espacio-tiempo de Minkowski con la signatura $(-+++)$ se tiene (aunque de ahora en adelante se hace $c = 1$) en coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2) \xrightarrow{c=1} ds^2 = -dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5)$$

Para un universo en expansión, si se asume el Principio Cosmológico, la métrica $g_{\mu\nu}$ solo puede tomar una forma exacta⁶, que se puede deducir a partir de argumentos puramente geométricos [2], conocida como métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuyo elemento de línea en coordenadas esféricas $\{r, \theta, \Phi\}$ es:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2) \right] \quad (6)$$

Donde κ es el parámetro de curvatura del universo, con $\kappa = 0$ para un universo plano, $\kappa = 1$ para un universo con curvatura positiva, y $\kappa = -1$ para un universo con curvatura negativa.

Cambiando a coordenadas comóviles $\{\tau, \chi\}$ y considerando la propagación radial de la luz (es decir, con $d\theta = 0$ y $d\varphi = 0$), la métrica FLRW adquiere la forma:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + d\chi^2] \quad (7)$$

Donde la variable χ , entendida como distancia comóvil, se relaciona con la distancia física (radial) r según κ :

$$r^2 = \begin{cases} a^2 \sinh^2(\chi) & \text{si } \kappa = -1 \\ a^2 \chi^2 & \text{si } \kappa = 0 \\ a^2 \sin^2(\chi) & \text{si } \kappa = 1 \end{cases} \quad (8)$$

⁶Se puede comprobar que tal métrica FLRW satisface las ecuaciones de campo de Einstein, véase la subsección ‘Relatividad General’.

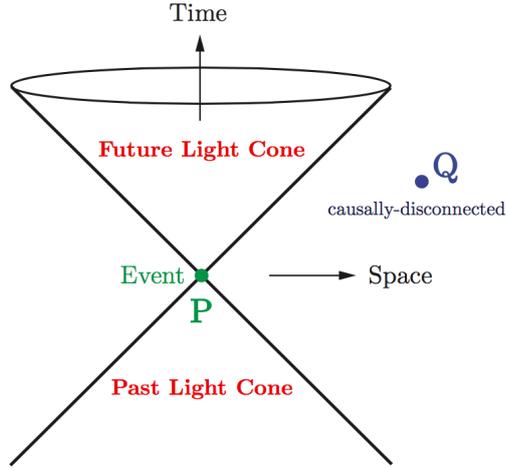


Figura 1: Conos de luz futuro y pasado (avanzando en la dirección temporal y en contra respectivamente) de un suceso P en el espacio-tiempo conforme. En la figura se han omitido 2 dimensiones espaciales, ya que los conos son hipersuperficies (4-dimensionales). En esta representación, las líneas rectas que delimitan los conos son rectas con pendiente unidad, como aparece en la ecuación (9). Todos los sucesos situados dentro de estos conos de luz pueden tener relación causal con el suceso P; el suceso Q, situado fuera del cono de luz futuro del suceso P, no puede tener una relación de causalidad con el evento P. [1].

Para la propagación de la luz, que sigue geodésicas nulas ($ds^2 = 0$) según la RG, se tiene una relación entre su recorrido y tiempo comóviles:

$$\chi(\tau) = \pm\tau + \text{cte} \quad (9)$$

Es decir, una estructura de dos conos de luz (inclinados 45°) en coordenadas espacio-temporales conformes, como el mostrado en la figura 1.

Ya que la causalidad del universo está determinada por el límite de velocidad, c , los conos de luz pueden interpretarse como estructuras de causalidad entre sucesos del universo: al ocurrir un suceso P, se proyecta un cono de luz futuro (según el sentido temporal) y un cono de luz pasado (en contra del avance del tiempo) con las coordenadas del suceso P en sus vértices coincidentes. Solo aquellos sucesos cuyas coordenadas $\{r, \chi\}$ estén dentro del cono de luz futuro (pasado) podrán estar (pudieron estar) causalmente relacionados con P. Así, según la superficie delimitadora de los conos de luz, se determinan regiones causalmente conectadas o desconectadas en el universo⁷.

La máxima distancia comóvil que puede recorrer la luz entre t_0 y t_f es:

$$\chi_p(\tau) = (\tau_f - \tau_0) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{a(t)} dt \quad (10)$$

χ_p es el horizonte comóvil de partículas, cuyo tamaño físico es el horizonte de partículas d_p ,

⁷La relación causal en el caso de sucesos entre partículas masivas, que siempre viajan con velocidades menores que c , viene dada por conos con inclinación $< 45^\circ$.

es decir, la distancia máxima que la luz puede haber viajado en el $\Delta t = t_f - t_0$:

$$d_p(t) = a(t)\chi_p \quad (11)$$

Si se toma el tiempo inicial como el *Big Bang* ($t_0 = 0$), y se considera el t_f como una determinada edad del universo t^* , se puede interpretar $d_p(t)$ como la distancia máxima entre dos puntos que puedan haber tenido una relación causal, ya sea en el presente y/o en el pasado. Para toda distancia $D > d_p(t^*)$ se puede asegurar que, en toda la historia del universo hasta el tiempo t^* , las regiones separadas esa distancia D han sido y son acausales.

Se puede reescribir la ecuación (10) en función del parámetro de Hubble H :

$$\chi_p = \int_0^{t^*} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^{a^*} \frac{1}{a(t)} \frac{da}{Ha(t)} = \int_0^{a^*} \left(\frac{1}{aH(t)} \right) d \ln(a) \equiv \int_0^{a^*} R_H(t) d \ln(a) \quad (12)$$

Donde $\frac{1}{aH(t)}$ se ha renombrado como $R_H(t)$, el radio de Hubble comóvil. $R_H(t)$ da la distancia máxima con la que dos sucesos pueden tener relación de causalidad en el tiempo t^* ; es decir, para distancias $D > R_H(t)$, dos sucesos no pueden ser causales en tiempo t^* , pero lo podrían haber sido en el pasado.

3.3. Relatividad General

La teoría física fundamental que describe la dinámica del universo es la Relatividad General (RG). En ella, se trabaja con el espacio y el tiempo del universo ligados, en el llamado tejido espacio-temporal o simplemente espacio-tiempo.

La evolución del factor de escala $a(t)$ está determinada por la ecuación tensorial de Einstein (se recuerdan las unidades $8\pi G = 1$ y $c = 1$):

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \xrightarrow[c=1]{8\pi G=1} G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (13)$$

$G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, G es la constante de gravitación universal y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. Esta ecuación tensorial se puede descomponer en un conjunto de ecuaciones, que se denominan ecuaciones de campo de Einstein.

El tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ da cuenta de la curvatura espacio-temporal, y se define a partir del tensor y del escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ y R respectivamente:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (14)$$

Ambos $R_{\mu\nu}$ y R se obtienen de forma habitual a partir de los símbolos de Christoffel, contruidos con derivadas de la métrica $g_{\mu\nu}$ respecto al espacio-tiempo.

Como establece la ecuación (13), la curvatura espacio-temporal ($G_{\mu\nu}$) es proporcional al tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, tensor que describe la densidad de energía (ρ) y el flujo momento (p) de una distribución continua de materia y/o energía.

Si en un universo plano ($\kappa = 0$) se toma un sistema de referencia inercial local, es decir, un sistema en movimiento con la materia/energía en expansión (caída libre), y considerando un fluido perfecto (sin fuerzas internas, conducción de calor o viscosidad), $T_{\mu\nu}$ adopta la forma:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (15)$$

Usando la métrica FLRW y la forma anterior de $T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ y R se pueden escribir como funciones del factor de escala a , sus derivadas temporales \dot{a} y \ddot{a} , y la curvatura κ [3]. Con la componente 00 de la ecuación (13) se llega a:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (16)$$

y partir de la traza de la ecuación (13) se obtiene:

$$\dot{H} + H^2 \equiv \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{(\rho + 3p)}{6} + \frac{\Lambda}{3} \quad (17)$$

Es decir, las ecuaciones de Einstein toman la forma de dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, conocidas como ecuaciones de Friedmann.

Combinando ambas ecuaciones de Friedmann se puede comprobar que se cumple la ecuación de continuidad, lo que asegura la conservación de la energía:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (18)$$

Si se define la ecuación de estado:

$$w = \frac{p}{\rho} \quad (19)$$

Se puede resolver la ecuación (18), para tener:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (20)$$

Usando la primera ecuación de Friedmann (1EF) se obtiene la evolución temporal del factor de escala $a(t)$ para distintos valores de w :

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w)}} & \text{si } w \neq -1, \quad \text{dominio materia } (w = 0) \text{ o radiación } (w = 1/3) \\ e^{Ht} & \text{si } w = -1, \quad \text{caso de Sitter: dominio de constante cosmológica} \end{cases} \quad (21)$$

3.4. Perturbaciones cosmológicas

3.4.1. Perturbaciones de primer orden

Una herramienta fundamental del MCEC es la teoría de perturbaciones cosmológicas. La forma más común de trabajar con las perturbaciones $\delta X(t, \mathbf{x})$ de cierta cantidad $X(t, \mathbf{x})$ es usar la desviación respecto al fondo $\bar{X}(t)$ (que se supone espacialmente homogéneo):

$$\delta X(t, \mathbf{x}) = X(t, \mathbf{x}) - \bar{X}(t) \quad (22)$$

En el caso de que $\delta X(t, \mathbf{x}) \ll \bar{X}(t)$, se puede tomar la aproximación a perturbaciones de primer orden. En este régimen, la ecuación de Einstein para las perturbaciones se puede formular como:

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} \quad (23)$$

Es importante aclarar que la separación entre el fondo y las perturbaciones de la ecuación (22) no es única, si no que depende del *gauge*⁸ usado. Perturbaciones reales pueden ser eliminadas con determinado gauge, y perturbaciones ficticias pueden ser introducidas del mismo modo. Por ello, se hará énfasis en el uso de cantidades invariantes *gauge*.

3.4.2. Descomposición Escalar-Vectorial-Tensorial EVT

En un universo plano ($\kappa = 0$), homogéneo e isótropo, la alta simetría permite descomponer las perturbaciones de la métrica (que conforman $\delta G_{\mu\nu}$) y las perturbaciones $\delta T_{\mu\nu}$ en perturbaciones escalares (subíndice ‘s’), vectoriales y tensoriales (subíndice ‘t’), en la llamada descomposición EVT. Esta separación será crucial para el tratamiento por separado de perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales, aunque sólo se tratarán las primeras en el presente trabajo⁹.

Las perturbaciones escalares hacen referencia a las perturbaciones en la densidad de materia/energía en el universo.

3.4.3. Perturbaciones de la métrica $g_{\mu\nu}$

Si se definen las perturbaciones de la métrica FLRW $\delta g_{\mu\nu}$ (y, en el escenario inflacionario, del inflatón $\delta\phi$) como en la ecuación (22), el elemento de línea ds^2 se puede desarrollar como [1]:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2a(t)B_i dx^i dt + a^2(t)[(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{ij}]dx^i dx^j \quad (24)$$

Φ es un escalar llamado *potencial de Bardeen*, B_i es un vector conocido como *shift*, Ψ es un escalar conocido como perturbación de curvatura espacial, y E_{ij} es un tensor conocido como *shear*.

⁸O elección de coordenadas, aunque esta traducción no se considera satisfactoria y por tanto se usa *gauge*.

⁹Las perturbaciones vectoriales se ven atenuadas con la expansión del factor de escala $a(t)$.

3.4.4. Perturbaciones del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$

Las perturbaciones $\delta T_{\mu\nu}$ también repercuten en $\delta g_{\mu\nu}$, según la ecuación (23) para perturbaciones de primer orden.

Las distintas componentes de $T_{\mu\nu}$ transforman de forma simple bajo una transformación *gauge*. En el caso de una transformación con un corrimiento temporal $t \rightarrow t + \beta$, las componentes del tensor $T_{\mu\nu}$ para un fluido perfecto transforman como:

$$\delta\rho \rightarrow \delta\rho - \beta\dot{\bar{\rho}} \quad (25)$$

$$\delta p \rightarrow \delta p - \beta\dot{\bar{p}} \quad (26)$$

3.4.5. Perturbación de curvatura comóvil \mathcal{R}

Se define la perturbación de curvatura comóvil \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} \equiv \Psi - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta q \quad (27)$$

Donde δq es la parte irrotacional de la componente T_{i0} de $T_{\mu\nu}$ (en el caso de tener un fluido no-perfecto y/o un sistema de referencia que no esté en caída libre). La cantidad \mathcal{R} es invariante *gauge*, por lo que resultará de gran utilidad en el tratamiento de perturbaciones cosmológicas.

Geoméricamente, \mathcal{R} describe la curvatura espacial de hipersuperficies comóviles.

Las ecuaciones de Einstein describen la evolución $\dot{\mathcal{R}}$ [1], según la expresión:

$$\dot{\mathcal{R}}_k = -\frac{H}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta p_{en} + \left(\frac{k}{aH}\right)^2 (\dots) \quad (28)$$

Las perturbaciones adiabáticas cumplen $\delta p_{en} = 0$. Para fluctuaciones de tamaño k^{-1} (véase la sección ‘Fluctuaciones durante inflación’) más grandes que el radio de Hubble comóvil aH^{-1} , $\left(\frac{k}{aH}\right)^2 \ll 1$, y la aproximación $\dot{\mathcal{R}} \approx 0 \Rightarrow \mathcal{R} \approx \text{cte}$ adquiere validez. Se puede afirmar que las perturbaciones \mathcal{R} se quedan “congeladas” fuera del horizonte de Hubble (véase figura 2).

3.4.6. Tratamiento estadístico de las perturbaciones escalares

El espectro de potencias $P_{\mathcal{R}}(k)$ de \mathcal{R}_k (en el espacio de Fourier) contiene información estadística sobre las fluctuaciones escalares primordiales:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k) \quad (29)$$

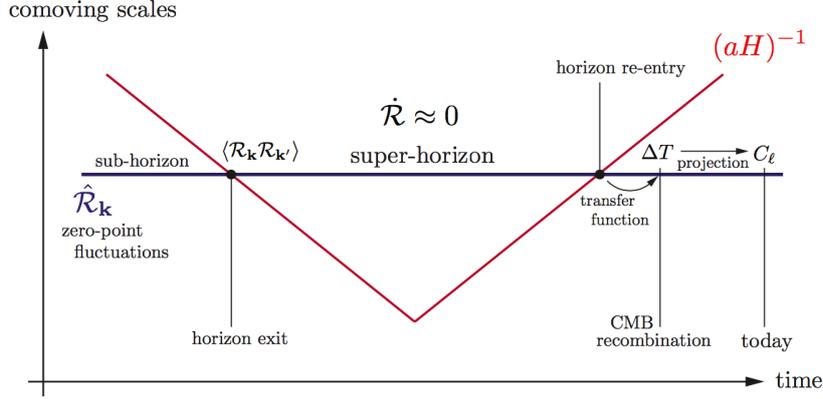


Figura 2: En el eje vertical, tamaño de una escala comóvil k^{-1} ; en el eje horizontal, evolución temporal. El tamaño k^{-1} de la escala se mantiene fijo en coordenadas comóviles (azul), mientras que R_H decrece (rojo), hasta tal punto que deja la escala fuera de sí. Posteriormente, cuando el R_H vuelve a crecer, la escala k^{-1} vuelve a entrar en el horizonte. Durante su estancia fuera de R_H , \mathcal{R} permanece constante [1].

Donde $\langle \dots \rangle$ denota el valor esperado¹⁰ de las fluctuaciones. Se define el espectro de potencias adimensional, $\Delta_{\mathcal{R}}^2$ como:

$$\Delta_s^2 \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \quad (30)$$

Donde el subíndice 's' hace referencia a las fluctuaciones escalares. Desarrollando en serie de Taylor $\ln \Delta_{\mathcal{R}}^2$ se tiene:

$$\Delta_s^2 \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2 = A_s(k_*) \left(\frac{k}{k_*} \right)^{[n_s(k_*)-1] + \frac{1}{2}\alpha_s(k_*) \ln\left(\frac{k}{k_*}\right)} \quad (31)$$

Con k_* como un k pivote (de referencia) y A_s es la amplitud de las perturbaciones escalares. El índice espectral n_s se define como la derivada de $\ln \Delta_s^2$ respecto a k :

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} \quad (32)$$

La dependencia de n_s con k viene dada por el índice α_s :

$$\alpha_s \equiv \frac{dn_s}{d \ln k} \quad (33)$$

3.5. Aplicación del Modelo Cosmológico Estándar Clásico

En resumen, la evolución del universo según el MCEC viene dada por las ecuaciones de Friedmann ecuación (16) y ecuación (17), las cuales dependen del contenido del universo.

¹⁰O momento de orden dos.

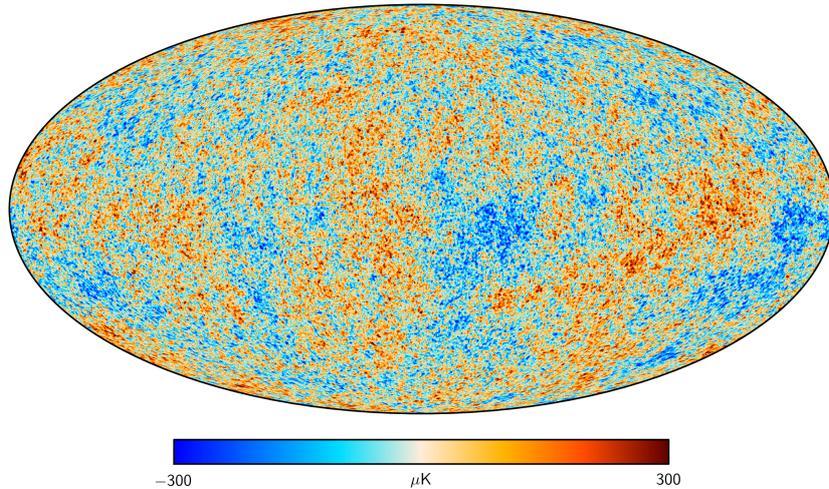


Figura 3: Fondo Cósmico de Microondas (FCM) medido por el satélite espacial Planck [10]. En distintos colores se representan las pequeñas fluctuaciones de temperatura (azul más frío, rojo más caliente) respecto a la $T_f = 2.725$ K, asociadas con regiones con densidades ligeramente diferentes, las cuales representan las ‘semillas’ para la futura formación de galaxias y estrellas hoy observadas. Estas anisotropías térmicas son del orden de unos cientos de μK en los casos más extremos.

Las componentes del universo y su evolución vienen determinadas por los valores de una serie de parámetros cosmológicos, como las densidades relativas de energía $\Omega_{i0} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{crit}}$, con $\rho_{crit} \equiv 3H_0^2$ (en la actualidad), la profundidad óptica, y más parámetros, cuyos valores se están tratando de obtener con la mejor precisión posible en la actualidad.

Se pone como ejemplo uno de los logros más notables del MCEC: conseguir explicar, cualitativa y cuantitativamente, el FCM.

3.5.1. Fondo cósmico de microondas (FCM)

Aproximadamente 3.8×10^5 años después del *Big Bang*, el universo se expandió lo suficiente como para que los fotones se desacoplaran de la materia que conformaba el universo, y pudieran viajar por este de forma libre.

La luz de estos fotones desacoplados, que se propagó por todo el espacio, es vista por un observador en la actualidad como una superficie esférica que cubre todo el cielo, y que está muy corrida al rojo ($z \approx 1100$), tanto que su frecuencia de máxima emisión se encuentra en el rango de las microondas, concretamente a 160.2 GHz ($\lambda_\nu = 1.9$ mm). Por tanto, su temperatura de cuerpo negro es de $T_f = 2.725$ K.

Esta superficie luminosa presenta un alto grado de homogeneidad térmica. No obstante, para una determinada dirección \hat{n} en el cielo, se pueden medir las desviaciones $\Delta T(\hat{n}) = T(\hat{n}) - T_f$ respecto la temperatura de fondo (véase figura 3) como:

$$\theta(\hat{n}) \equiv \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_f} \quad (34)$$

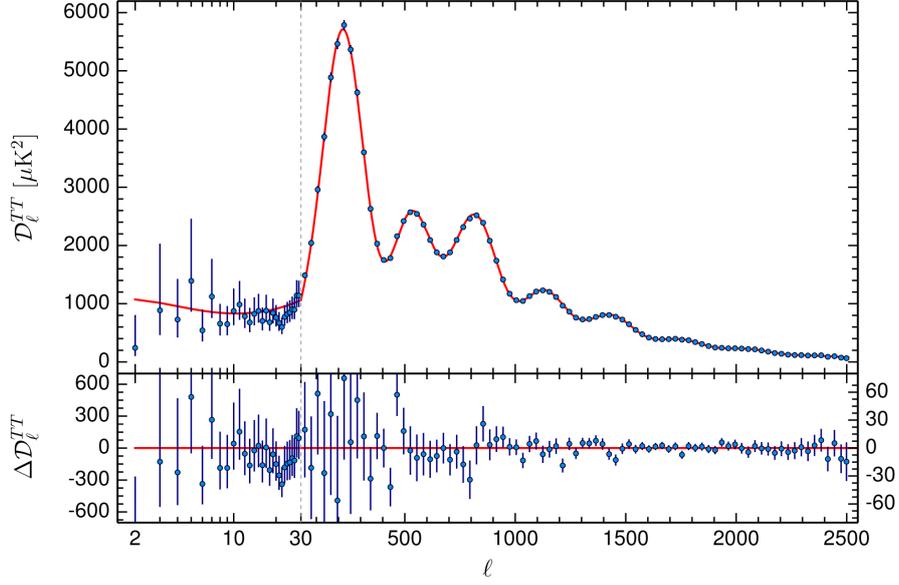


Figura 4: Espectro de potencias angular para la temperatura del FCM. En el eje vertical, los coeficientes C_l^{TT} ; en el eje horizontal, los coeficientes multipolares l [11].

$\theta(\hat{n})$ se puede desarrollar en función de armónicos esféricos $Y_{lm}(\hat{n})$ según:

$$\theta(\hat{n}) = \sum_{lm} \alpha_{lm} Y_{lm}(\hat{n}) , \quad (35)$$

con coeficientes α_{lm} calculados según el análisis de Fourier:

$$\alpha_{lm} = \int Y_{lm}^*(\hat{n}) \theta(\hat{n}) d\Omega \quad (36)$$

Con $d\Omega$ como el diferencial de ángulo sólido. Estos l , que se conocen como coeficientes multipolares, y sus índices toman valores de $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y $m \in \{-l, -(l-1), \dots, l-1, l\}$. Los coeficientes α_{lm} se pueden combinar en un espectro de potencias angular con invarianza traslacional (sin dependencia con el número m):

$$C_l^{TT} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \alpha_{lm}^* \alpha_{lm} \quad (37)$$

Los valores de C_l^{TT} para distintos l conforman tal espectro de potencias¹¹, que es una herramienta de análisis estadístico fundamental del FCM, ya que contiene gran cantidad de información sobre el universo en la etapa de la recombinación. En la figura 4 se representa este espectro obtenido por el satélite espacial Planck.

¹¹Aunque en muchas ocasiones se toma $D_l \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$ u otras cantidades similares en lugar de C_l .

3.5.2. Otras aplicaciones de éxito

Además del FCM, el MCEC permite explicar de forma satisfactoria la estructura a gran escala, las abundancias de elementos ligeros en el universo a partir de la nucleosíntesis primordial (NP) o las luminosidades de supernovas Ia a grandes distancias a partir de la energía oscura.

No obstante, el modelo del Big Bang dentro del marco de la MCEC presenta importantes problemas, tanto en el ámbito cualitativo como en el ámbito cuantitativo, que se resumen a continuación.

3.6. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico

Problema del horizonte/causalidad/homogeneidad El radio comóvil de Hubble $R_H \equiv (aH)^{-1}$, sigue la evolución, según la ecuación (21):

$$R_H(t) \equiv (aH)^{-1} = (H_0)^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (38)$$

Si el exponente $(1 + 3w) > 0$, R_H será creciente con t (acompaña la evolución $a(t)$), y si $(1 + 3w) < 0$, R_H será decreciente. Con esta dependencia $R_H(t)$, a partir de la ecuación (12) se obtiene $\chi_p(t)$:

$$\chi_p \propto a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (39)$$

Es decir, que para las ecuaciones de estado de un universo dominado por materia ($w = 1$) y por radiación ($w = \frac{1}{3}$), χ_p aumenta estrictamente con el tiempo. Esto implica que, en la época de la recombinación, el horizonte de partículas χ_p era mucho menor que en la actualidad, y aquellas estructuras que entran en el horizonte de partículas actualmente estaban mucho más lejos de tal horizonte entonces.

En la época de la recombinación ($t \approx 3.8 \times 10^5$ años), cuando fue emitida la luz del FCM, el universo sólo tuvo tiempo para que regiones que subtienden un ángulo sólido de 10^{-4} sr en tal fondo fueran causales.

En todo el FCM se encuentra experimentalmente una alta isotropía, con desviaciones respecto a la temperatura de fondo $T_f = 2.725$ K del orden de 10^{-5} , es decir $\frac{\delta T}{T_f} \sim 10^{-5}$. Toda la fotosfera del FCM (4π sr) ha precisado de un contacto causal para tener tal grado de homogeneidad térmica (sin contacto causal sería prácticamente inexplicable).

Según el Modelo Cosmológico Estándar Clásico, el FCM estaría compuesto de 10^5 regiones acausales, pero todo indica que estuvieron en contacto térmico (y por tanto causal) en el pasado de algún modo. ¿Cómo se conectaron causalmente estas regiones?

Problema de la planitud Un modelo con curvatura nula del universo ($\kappa = 0$), en un universo con un R_H monótonamente creciente, no es un atractor. Manipulando la 1EF, se obtiene:

$$1 - \Omega(a) = \frac{-\kappa}{(aH)^2} \equiv -\kappa R_H^2 \quad (40)$$

Con $\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{crit}(a)} = \frac{\rho(a)}{3H^2(a)}$. En un universo con una κ ligeramente distinta de 0, al aumentar R_H con el tiempo $|1 - \Omega|$ tendería a alejarse de la planitud. Tras haber aumentado R_H varios órdenes de magnitud, ¿cómo puede seguir siendo la curvatura del universo tan próxima a 0, es decir, cómo $|1 - \Omega_0| \approx 0$?

Una posible solución de este problema de la planitud es la suposición de valores extremadamente pequeños de la curvatura en épocas tempranas del universo. Por ejemplo, para observar actualmente $|1 - \Omega_0| = 1.000 \pm 0.005$ [8], se debería haber tenido:

- $|1 - \Omega_{NP}| \leq \mathcal{O}(10^{-16})$.
- $|1 - \Omega_{TGU}| \leq \mathcal{O}(10^{-55})$.
- $|1 - \Omega_{planck}| \leq \mathcal{O}(10^{-61})$.

Este ajuste fino tan drástico no acaba de resultar satisfactorio en el MCEC; encontrar una teoría que pueda explicar la prácticamente nula curvatura con condiciones iniciales más genéricas sería una alternativa más convincente.

Formación de estructuras El mecanismo para producir las semillas que posteriormente formarán la estructura a gran escala que se observa en el universo solo se puede conseguir con unas condiciones iniciales del universo extremadamente precisas.

Cualquier minúscula variación de estas condiciones iniciales ocasionaría una EGE totalmente diferente de la observada. Por ello, el problema de ajuste fino presente en el problema de la planitud también se encuentra en este problema.

Problema de los monopolos magnéticos La Teoría de la Gran Unificación (TGU) predice una densidad de monopolos magnéticos ρ_{m0} mucho mayor de lo encontrado experimentalmente (de hecho, experimentalmente no se ha encontrado ninguno en todo nuestro horizonte de partículas).

La etapa de la TGU finaliza con la ruptura de simetría entre la fuerza fuerte y la electrodébil mediante una transición de fase de primer orden [3]. Esta transición crea defectos topológicos en forma de monopolos. Su longitud de correlación es menor que el horizonte de partículas en dicha época, y se espera encontrar un monopolo por cada 10 intersecciones entre tales horizontes, lo que se traduce en una alta densidad de monopolos ρ_m .

Cada monopolo posee una masa m_M , con una energía similar al calor latente de la transición de fase, del orden de 10^{15} GeV en el momento de su formación [3]. Con la evolución del universo hasta la actualidad, la densidad de monopolos esperada es $\rho_{m0} \approx 4.5 \text{ GeV m}^{-3}$ [3], un valor absurdamente alto (de hecho serían predominantes en el Universo).

Si los modelos de unificación son correctos, ¿qué podría haber ocasionado la ausencia o drástica disminución en ρ_{m0} ?

Otros problemas Otros problemas del MCEC relevantes en la actualidad son el desconocimiento de la naturaleza de la materia y energía oscura y la determinación precisa de la edad del universo.

4. Base teórica 2: modelo inflacionario

4.1. Respuesta a problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico

El modelo inflacionario es capaz de proporcionar explicaciones a los 4 problemas mencionados en la subsección ‘Problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico’.

Las 3 soluciones se basan en una extremadamente rápida y brusca expansión del universo, conocida como inflación. Desde el comienzo de la inflación hasta el final, el universo llegó a tener como mínimo $\sim 10^{26}$ veces su tamaño inicial (~ 60 *e-folds*), una condición necesaria para la resolución de los problemas antes presentados.

4.1.1. Problema del horizonte

La rápida expansión del universo ocasionada por la inflación, que se puede cuantizar con un fuerte crecimiento de $a(t)$, ocasiona que el $R_H \equiv aH^{-1}$ decazca bruscamente. Siguiendo el Principio Cosmológico, al ser el universo isótropo, este R_H define una esfera de Hubble con volumen $V_H \propto R_H^3$, que durante la era inflacionaria se comprime violentamente, consiguiendo un efecto de *zoom* causal en una pequeña zona del universo en aquel momento (véase figura 5.).

Recordando la ecuación (12):

$$\chi_p = \int_0^{a^*} R_H(t) d \ln(a) \quad (41)$$

La inflación hace posible que $\chi_P \gg R_H$ en el momento de la recombinación ($t = t_{rec}$), con lo que, aunque las regiones no parecieran causales en ese t_{rec} , lo habrían sido en algún tiempo anterior.

Esto sólo es posible si R_H fue mucho mayor en el pasado, con lo que χ_p tendría su principal contribución de esta etapa anterior, según aparece en la ecuación (41). Como más adelante se verá, la inflación es capaz de ocasionar que $H \approx \text{cte}$ y $a(t) \approx e^{Ht}$, con lo que efectivamente $R_H(t) \equiv \frac{1}{a(t)H}$ decrecería fuertemente durante esta expansión (si decrece extraordinariamente lo hace a costa de haber sido con anterioridad mucho más grande).

Por tanto, χ_p sería mucho mayor de lo esperado con el MCEC, y las regiones aparentemente acausales del FCM tuvieron relación de causalidad en el pasado, antes de la etapa inflacionaria, que aparentemente borró su relación causal al finalizar.

4.1.2. Problema de la planitud

Según la ecuación (40), para un universo con curvatura positiva o negativa ($\kappa = 1$ o $\kappa = -1$) se tiene:

$$|1 - \Omega(a)| = \frac{1}{(aH)^2} \equiv R_H^2 \quad (42)$$

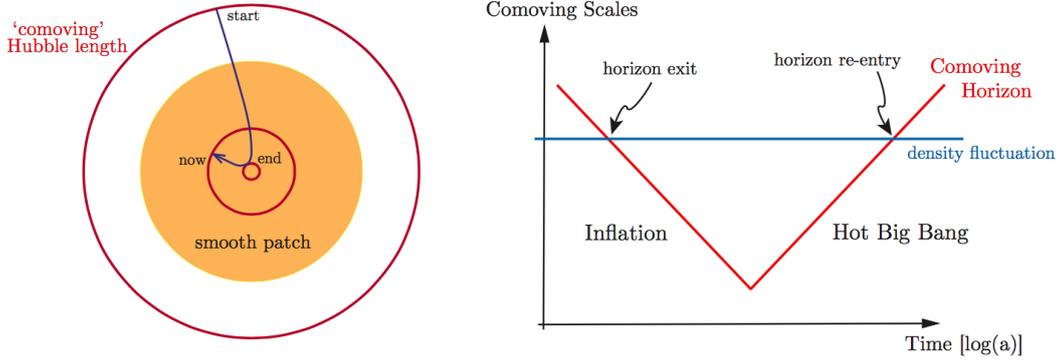


Figura 5: El radio de Hubble comóvil R_H sufre una fuerte contracción durante la etapa inflacionaria, lo que se asemeja a un *zoom* sobre una pequeña región del universo (izquierda). Una vez finalizada la inflación, el R_H vuelve a crecer, hasta que las escalas (azul) que salieron del horizonte (rojo) vuelven a entrar en él (derecha) [1].

Si R_H sufre un fuerte decrecimiento, $|1 - \Omega(a)| \rightarrow 0$, incluso para valores de $\Omega(a)$ muy alejados de 1 (universo con mucha curvatura); es decir, la solución $\Omega(a) = 1$ es un atractor durante la etapa inflacionaria.

Con distintos valores iniciales de la curvatura, la fuerte expansión del universo ocasiona que este acaba siendo prácticamente plano, algo análogo a estar sobre una pequeña esfera (dónde se aprecie su curvatura), y que esta se hincha a un tamaño extraordinariamente grande, con lo que la esfera sería percibida como plana, perdiendo vestigio de cualquier señal de curvatura previa a la expansión (a fin de cuentas, sabemos que la Tierra es curva, pero para nuestro entorno cercano es aparentemente plana).

El hacer mucho más genéricas las condiciones iniciales elimina la posibilidad de considerar un ‘ajuste fino’ para las condiciones iniciales de curvatura del universo.

4.1.3. Problema de los monopolos

Si se compara el factor de escala antes t_a y después t_d de la inflación, $\frac{a(t_d)}{a(t_a)} \geq 10^{26}$; por tanto, $\left(\frac{\rho(t_d)}{\rho(t_a)}\right) \propto \left(\frac{a(t_d)}{a(t_a)}\right)^{-3} \leq 10^{-78}$, ya que $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$ para los monopolos (como con la materia).

Ya que la inflación cósmica aumenta enormemente el χ_p , y la longitud de correlación de la transición de fase es del orden del tamaño χ_p , la inflación será capaz de reducir la densidad de energía de los defectos topológicos existentes antes de la inflación, incluyendo la de los monopolos ρ_m , hasta un valor extremadamente bajo, en el que no habría ningún monopolo en nuestro universo observable en la actualidad $\rho_m \rightarrow 0$.

4.2. Evolución del universo en la etapa inflacionaria

La rápida contracción del R_H , es decir, $\dot{R}_H < 0$, trae consecuencias a la expansión del universo y a la dinámica de sus parámetros. A partir de las ecuaciones de Friedmann se pueden comprobar las consecuencias de esta fuerte expansión.

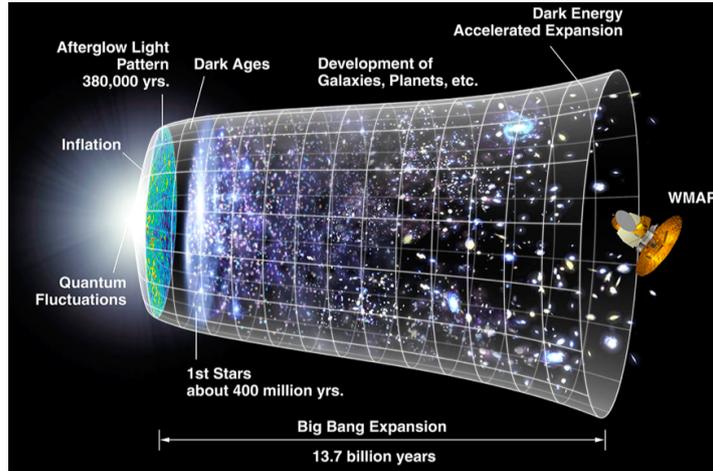


Figura 6: Historia térmica del universo [9].

Era inflacionaria Que se desencenara la inflación se suele achacar a una transición de fase, a partir de la cual la época TGU finalizaría. Esto ocurre para $t \sim 10^{-36} \text{ s} \sim 10^7 t_{Pl}$.

El final de la era inflacionaria no está claramente determinado, ya que depende crucialmente de las características del recalentamiento. En varios modelos, esta época inflacionaria finaliza hacia $t \sim 10^{-33} \text{ s}$ o $t \sim 10^{-32} \text{ s}$.

Cuantificación de la expansión Para cuantificar lo que se ha expandido el universo, es útil introducir el número de *e-folds* N que ha sufrido $a(t)$ tras la etapa inflacionaria, es decir:

$$N = \ln \left(\frac{a_{final}}{a_{inicial}} \right) \equiv \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} H dt \equiv \int_{t_{inicial}}^{t_{final}} d \ln[a(t)] \quad (43)$$

Como ya se comentó en la subsección ‘Respuesta a problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico’, es necesario que $N > 60$, lo que equivale a un $\left(\frac{a_{final}}{a_{inicial}} \right) \geq 10^{26}$.

Expansión acelerada Derivando respecto al tiempo los parámetros cosmológicos a y H , se encuentra, a partir de la definición de $R_H = (aH)^{-1}$ la relación:

$$\dot{R}_H = -\ddot{a} R_H^2 \quad (44)$$

Ya que $\dot{R}_H < 0$ durante la inflación, se tiene que $\ddot{a} > 0$ necesariamente, por lo que la expansión del universo en la etapa inflacionaria es acelerada.

Ecuación de estado A partir de la 2EF (ecuación (17)), con $\ddot{a} > 0$, se tiene que:

$$p < -\frac{1}{3}\rho \quad (45)$$

Es decir, una ecuación de estado en la que la presión es negativa. En el límite $p \rightarrow \rho$, a partir de la ecuación (18) se encuentra $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = cte$, es decir, una densidad de energía constante.

Evolución comóvil Trabajando en coordenadas comóviles, la singularidad inicial del *Big Bang* ($t = 0$) se considera cuando $\tau \rightarrow -\infty$, y el futuro más lejano ($t \rightarrow \infty$) se da cuando $\tau = 0$.

En otras palabras, la inflación provee al universo de una gran cantidad de τ en el pasado, al proyectar la singularidad del *Big Bang* hacia $\tau \rightarrow -\infty$. Así, regiones que aparentemente no tuvieron tiempo de ser causales dispusieron del τ suficiente para serlo en el pasado (véase la figura 7).

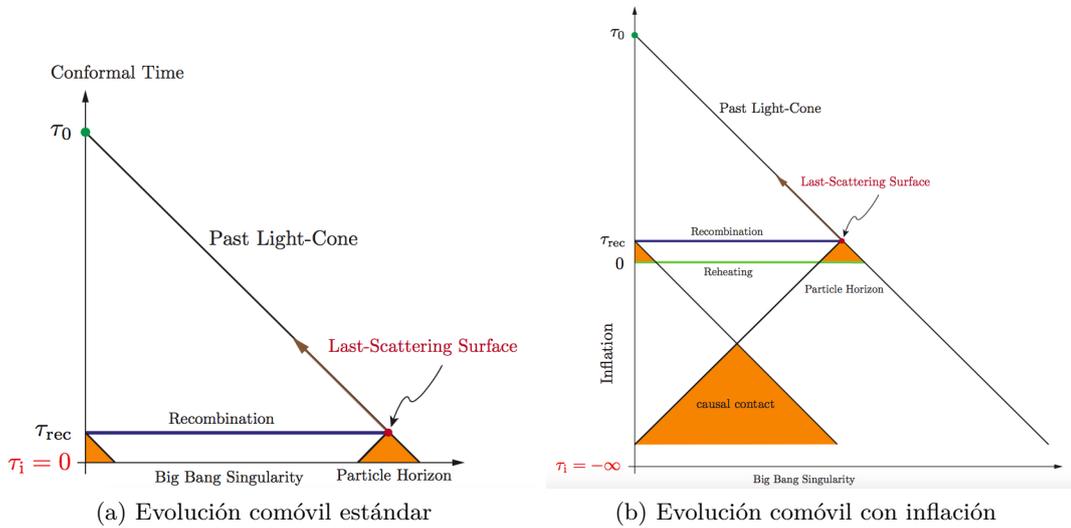


Figura 7: (a) Modelo sin inflación. Al proyectar un cono de luz pasado en un suceso durante el FCM (naranja), este no intersecta otros conos de luz pasados de otros sucesos del FCM (el *Big Bang* limita la cantidad de tiempo pasado en el que se extienden los conos). (b) Modelo inflacionario. El mecanismo inflacionario proporciona una gran cantidad de tiempo τ entre el *Big Bang* y la recombinación, lo que permite proyectar los conos de luz pasados mucho más, y que estos lleguen a intersectarse (y por tanto hacer causales tales sucesos), como se observa en el gran cono naranja en la parte inferior de la figura [1].

4.3. Física de la inflación

El escenario inflacionario resuelve algunos problemas del MCEC, pero como fenómeno físico es algo desconocido. En un breve instante de tiempo, el universo se expandió extraordinariamente. Las condiciones físicas con las que esto pudo suceder requieren de una explicación, que en los modelos más simples, se basa en un campo escalar con *spin* 0 denominado inflatón ϕ .

4.3.1. Dinámica del campo escalar ϕ

La dinámica de un campo escalar acoplado de forma mínima a la gravedad está determinada por la acción S que resulta de la suma de la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} y la acción del

campo escalar S_ϕ .¹²

$$S = S_{EH} + S_\phi = \int [\rho_{\mathcal{L}}(g_{\mu\nu}, \phi)] d^4x = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\mu} \right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \right) - V(\phi) \right] d^4x \quad (46)$$

Donde $\rho_{\mathcal{L}}$ es la densidad lagrangiana, g es el determinante de la métrica y por d^4x se representa un elemento de volumen espacio-temporal. $V(\phi)$ es un potencial del campo escalar ϕ que describe las interacciones de ϕ consigo mismo.

A partir de S se puede obtener el tensor energía momento para el campo ϕ , $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$. Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos, aplicadas a S_ϕ , se deduce la ecuación de campo:

$$\frac{\partial S_\phi}{\partial\phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial\mu} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial\phi}{\partial\mu} \right) + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (47)$$

Con la métrica FLRW y suponiendo que el inflatón es homogéneo, es decir, $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t)$, la obtención de $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ para el caso de la ecuación (15), se lleva a cabo la transformación $T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu}^\phi$, expresando sus componentes como:

$$\rho \rightarrow \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (48)$$

$$p \rightarrow p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (49)$$

Por tanto, se tiene un parámetro de estado ω :

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (50)$$

A partir de la ecuación (47) y la 1EF se obtienen las ecuaciones dinámicas del inflatón ϕ para la geometría FLRW:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (51)$$

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho_\phi = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (52)$$

¹²Con un término cinético estándar.

4.3.2. Recalentamiento

Cuando la inflación termina, el inflatón ϕ comienza a oscilar entorno al mínimo del potencial $V(\phi)$, disipando su energía por el término de rozamiento $3H\dot{\phi}$ de la ecuación (88). La partícula del inflatón se comporta entonces como materia sin presión ($p_\phi = 0$).

El acoplamiento de ϕ con otras partículas ocasiona que la energía inflacionaria se transforme en energía asociada a los campos de estas nuevas partículas. Esto queda patente en la ecuación de continuidad [1], que ahora pasa a ser:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -\Gamma\rho_\phi, \quad (53)$$

donde la energía inflacionaria se disipa cuantitativamente por medio del parámetro de acoplamiento Γ . De este modo la densidad de energía inflacionaria ρ_ϕ se transforma en grados de libertad de nuevos tipos de partículas (algunas del Modelo Estándar de partículas u otras desconocidas) en lo que se suele denominar *Big Bang* caliente. La etapa inflacionaria asume en parte el papel que el *Big Bang* ocupaba anteriormente, en el sentido de creación de partículas.

4.3.3. Inflación *slow-roll*

Para conseguir una expansión acelerada ($w_\phi < -1/3$) es necesario que $V(\phi)$ domine sobre el término cinético $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, como se puede apreciar en la ecuación (50).

Como se aprecia en la ecuación (50), para obtener una ecuación de estado $w < -\frac{1}{3}$, y por tanto tener una etapa inflacionaria, es necesario que, al menos durante el tiempo suficiente, se cumpla la condición:

$$|V(\phi)| \gg \frac{1}{2}|\dot{\phi}^2| \quad (54)$$

Para este fin, se deberá tener la condición en la aceleración del inflatón $\ddot{\phi}$:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, \left| \frac{dV}{d\phi} \right| \quad (55)$$

Para cuantificar esta expansión acelerada, es útil recurrir a los parámetros de *slow-roll* ϵ y η definidos como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon) \quad (56)$$

$$\eta = \epsilon - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN} \quad (57)$$

La expansión acelerada ocurre cuando $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$, y sucede más rápido cuanto más cerca de 0 estén estos parámetros.

Se puede relacionar el parámetro ϵ con H según:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN} \quad (58)$$

En el caso de una expansión *slow-roll* fuertemente acelerada ($\omega \rightarrow -1$), el espacio-tiempo se comporta aproximadamente como en el caso de Sitter (similar a un Universo dominado por constante cosmológica Λ):

$$a(t) \approx e^{Ht} \quad (59)$$

Con lo que se puede comprobar, según la ecuación (58), que $\epsilon \rightarrow -\left(\frac{H^2 e^{2Ht}}{H^2 e^{2Ht}} - 1\right) = 0$. Sustituyendo la ecuación (58) en la ecuación (57), se obtiene que $\eta \rightarrow 0$ en esta expansión tipo ‘de Sitter’.

Los parámetros de *slow-roll* también se pueden expresar en función de la forma de $V(\phi)$:

$$\epsilon_v(\phi) \equiv \frac{1}{2V} \left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2 \quad (60)$$

$$\eta_v(\phi) \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right) \quad (61)$$

Donde la condición para una inflación *slow-roll* sigue siendo $\epsilon_v, |\eta_v| \ll 1$. Por tanto, es de esperar que durante la rápida expansión inflacionaria estos parámetros tuvieran valores cercanos a 0, condición que dejaría de cumplirse al terminar la expansión acelerada o fuera de los modelos *slow-roll*.

4.3.4. Modelos de Inflación

La inflación sucedió en una etapa muy temprana del universo ($t \sim 10^{-36}$ s), cuando la densidad de energía de este era muy elevada (pudiendo llegar a ser de $\sim 10^{12}$ TeV), algo que está 11 órdenes de magnitud por encima de la escala energética del mayor acelerador de partículas en la actualidad (LHC). Por ello, se requiere de una importante extrapolación de las leyes de la física para explicar la etapa inflacionaria.

No obstante, se están obteniendo restricciones a la forma del potencial $V(\phi)$, de la cuál depende el escenario inflacionario. Alguno de los modelos típicos se mencionan a continuación.

Small-field Se trata de aquellos campos en los que el inflatón ϕ se mueve¹³, desde el comienzo hasta el final de la inflación, una distancia sub-plackiana¹⁴, es decir, $\Delta\phi < M_{pl}$. Potenciales de este estilo aparecen en mecanismos de ruptura espontánea de simetría, y predicen una amplitud muy pequeña de ondas gravitatorias causadas por la inflación (perturbaciones tensoriales).

¹³Abusando de la analogía cinemática. Entiéndase por este movimiento el cambio en la amplitud del campo escalar con el tiempo.

¹⁴Ya que ϕ tiene unidades de masa, como cualquier otro campo escalar.

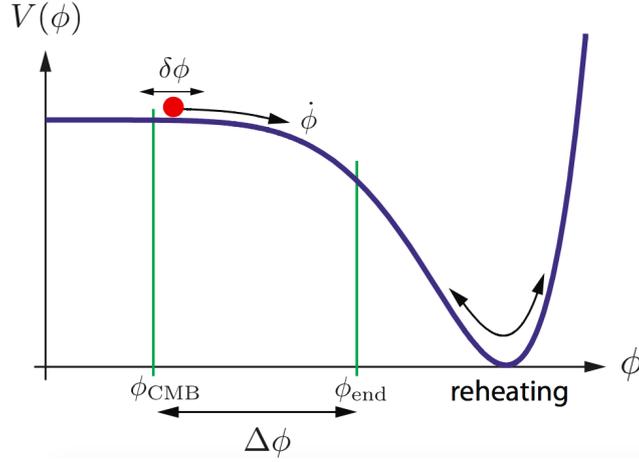


Figura 8: Ejemplo de un potencial típico con *small-field*, en el que el inflatón ϕ experimenta fluctuaciones $\delta\phi$ en la etapa inflacionaria (que dejan su marca en el FCM). Al final de la inflación, este adquiere velocidad $\dot{\phi}$, decayendo en otras partículas en la etapa del recalentamiento. El recorrido ϕ determina un *small-field* o un *large-field* [1].

- Potenciales cumbre: $V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{\mu} \right)^p \right] + \dots$
- Potenciales ruptura SUSY: $V(\phi) = V_0 \left[1 + \alpha \ln \left(\frac{\phi}{\mu} \right) \right]$
- Potenciales Inflación R^2 : $V(\phi) = \alpha \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\phi/M_{pl}} \right)^2$, con modificación de la S_{EH} .

Large-field En estos modelos, $\Delta\phi > M_{pl}$, y la amplitud de las ondas gravitatorias producidas por la inflación es mucho mayor¹⁵ que en los modelos de *small-field*.

- Inflación caótica: $V(\phi) = \lambda_p \phi^p$
- Inflación natural: $V_0 \left[\cos \left(\frac{\phi}{f} \right) + 1 \right]$, con f lo suficientemente grande para que $\Delta\phi > M_{pl}$

Modelos alternativos Un gran número de escenarios inflacionarios ha sido propuesto. Hay modelos que consideran dinámicamente relevante más de un campo, aparte del ϕ , o consideran campos vectoriales o tensoriales.

Otros modelos modifican a su vez la acción S dada en la ecuación (46), como:

- Acoplamiento no mínimo de ϕ con la gravedad: aparecen nuevos términos de acoplamiento entre $g_{\mu\nu}$ y ϕ . Un modelo típico de este tipo de inflación es la inflación tipo Higgs. En este modelo de tipo *small-field*, se asocia el campo ϕ con el campo de Higgs, asociación posible gracias al acoplamiento no mínimo con la gravedad.
- Gravedad modificada: se modifica la acción de Einstein-Hilbert S_{EH} , como en el caso de las teorías $f(R)$.
- Término cinético no estándar: A la hora de construir la densidad lagrangiana $\rho_{\mathcal{L}}$, se incorporan modificaciones en su término cinético a partir de ϕ y sus derivadas temporales.

¹⁵En algunos modelos de *small-field*, las ondas gravitatorias también pueden llegar a ser detectables.

5. Fluctuaciones durante inflación

5.1. Tamaño de las fluctuaciones

Las escalas aparentemente acausales con el MCEC estuvieron en contacto causal en el pasado según el modelo inflacionario. Es decir, dentro de una misma esfera (comóvil) de Hubble. Estas escalas salieron del horizonte $R_H \equiv (aH)^{-1}$ (o equivalentemente, el horizonte se redujo drásticamente sobre ellas) y por tanto quedaron en aparente desconexión causal.

Durante su contacto causal previo (antes de la era inflacionaria) el universo estaba regido por leyes cuánticas (tenía un tamaño minúsculo); por ello, las fluctuaciones en los campos eran de naturaleza cuántica. Estas fluctuaciones aparecen en todas las escalas del universo, y se pueden cuantificar. Se pueden estudiar las fluctuaciones cuánticas en una escala de tamaño k^{-1} , donde k se puede interpretar como su número de onda.

Así, para determinar si una fluctuación (k^{-1}) está dentro o no de la esfera de Hubble en el tiempo τ^* , se compara el tamaño de la escala con el $R_H \equiv (aH)^{-1}$:

$$\text{En el tiempo } \tau^* \begin{cases} k(\tau^*) \geq aH(\tau^*) & \iff \text{fluctuación dentro del horizonte} \\ k(\tau^*) < aH(\tau^*) & \iff \text{fluctuación fuera del horizonte} \end{cases} \quad (62)$$

5.2. Fluctuaciones cuánticas en inflación

Al combinar inflación con mecánica cuántica se obtiene un mecanismo elegante para generar las semillas de toda estructura del universo. La rápida expansión acelerada homogeneiza el universo, pero hasta cierto límite impuesto por los efectos cuánticos, lo que ocasiona pequeñas inhomogeneidades en la densidad del universo, que evolucionarán hasta la estructura a gran escala conocida hoy en día.

Las inhomogeneidades se pueden estudiar como fluctuaciones respecto al fondo homogéneo, ya sean en ϕ o en $g_{\mu\nu}$.

A continuación se presenta el cómputo de las fluctuaciones mecánico-cuánticas generadas durante la inflación, y la relación que estas guardan con las perturbaciones cosmológicas descritas en la subsección previa ‘Perturbaciones cosmológicas’.

5.2.1. Ecuación de Mukhanov-Sasaki

Tomando un cierto *gauge* para $g_{\mu\nu}$ y ϕ [1], la acción de la ecuación (46) puede ser desarrollada, hasta segundo orden, en función del parámetro \mathcal{R} :

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int \left[(v')^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right] d^3x d\tau \quad (63)$$

Donde el campo $v \equiv z\mathcal{R}$, siendo z la variable de Mukhanov (invariante *gauge*), definida como:

$$z = \frac{a^2 \phi'}{a'} \quad (64)$$

Si se toma el desarrollo de Fourier de v :

$$v(\mathbf{x}, \tau) = \int v_k(\tau) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} d^3k, \quad (65)$$

el campo v en el espacio de Fourier, v_k , debe cumplir la conocida como ecuación de Mukhanov-Sasaki:

$$v_k'' + \left[k^2 - \frac{z''}{z}\right]v_k = 0, \quad (66)$$

ecuación análoga a la obtenida con el oscilador armónico con una $\omega(t)$ (véase ecuación (99) en el ‘Apéndice B’). Al reintroducir \mathcal{R} en la ecuación (66), esta adquiere la forma:

$$\mathcal{R}'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}' + k^2\mathcal{R} = 0 \quad (67)$$

La solución de la ecuación de Mukhanov-Sasaki permite obtener una forma precisa para los modos v_k con lo que se puede obtener el espectro de potencias $P_{\mathcal{R}}$ para un determinado escenario inflacionario una vez que los modos k^{-1} estén ‘congelados’ fuera del horizonte R_H . No obstante, su resolución no es sencilla, ya que z depende de la dinámica del *background* inflacionario, por lo que se suele llevar a cabo de forma numérica.

En el caso de la aproximación de Sitter, la ecuación de Mukhanov-Sasaki se puede reescribir:

$$v_k'' + \left[k^2 - \frac{z''}{z}\right]v_k = 0 \approx v_k'' + \left[k^2 - \frac{a''}{a}\right]v_k = 0, \quad (68)$$

ya que $z \approx a$ para este régimen. Una solución analítica para los modos v_k es:

$$v_k(\tau) = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + \beta \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \quad (69)$$

Donde α y β son coeficientes que expresan la no-unicidad de los v_k .

5.2.2. Condiciones iniciales de la ecuación de Mukhanov-Sasaki

Al ser la ecuación de Mukhanov-Sasaki de segundo orden, será necesario tener 2 condiciones sobre los modos v_k . Una de ellas se obtiene suponiendo $k^2 \gg \frac{z''}{z}$, que, en analogía con la cuantización del oscilador armónico (véase ‘Anexo A: Cuantización del oscilador armónico’) lleva a:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (70)$$

Esta condición se conoce como el vacío de Bunch-Davies, ya que se obtiene eligiendo un estado de vacío Minkowski cuando las fluctuaciones estaban profundamente dentro del R_H .

La segunda condición se obtiene manteniendo la relación canónica de conmutación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ (véase ecuación (101)) para todos los modos k . Esto sólo se consigue preservando la normalización wronskiana:

$$\frac{i}{\hbar}(v_k^* v_k' - v_k'^* v_k) = 1 \quad (71)$$

En la aproximación de Sitter, esto es equivalente a fijar $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ en la ecuación (69); por tanto, los v_k en este régimen serían:

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) \quad (72)$$

5.2.3. Obtención del espectro de potencias $P_{\mathcal{R}(k)}$

Con la resolución de la ecuación de Mukhanov-Sasaki se obtienen los modos $v_k(\tau)$. El espectro de potencias $P_{\mathcal{R}(k)}$ se puede calcular como:

$$P_{\mathcal{R}(k)} = \frac{|v_k|^2}{z^2}(t_\star) \quad (73)$$

El objetivo del trabajo es computar $P_{\mathcal{R}(k)}$ en el tiempo t_\star en el que la escala k^{-1} tiene el mismo tamaño que el horizonte $R_H(t_\star)$.¹⁶

En el caso de un universo puramente de Sitter ($a = e^{Ht}$ con $H = cte$), ya que se conocen los v_k de forma analítica, se puede obtener Δ_s^2 exacta, llegando a la expresión:

$$\Delta_s^2(k) = \frac{H^2}{(2\pi)^2} = cte \quad (74)$$

6. Funcionamiento del código en ‘*Mathematica*’

Se pretende resolver la ecuación de Mukhanov-Sasaki (ecuación (66)) para cierto escenario inflacionario. Para ello, se crea un código (dado en el ‘**Apéndice B**’) con el que se podrá obtener el espectro de potencias $\Delta_s^2(k)$ para un cierto rango de k .

Este $\Delta_s^2(k)$ se obtiene a partir de la resolución de las ecuaciones dinámicas del campo inflacionario, llevada a cabo en tiempo físico t . La resolución de la ecuación de Mukhanov-Sasaki se lleva a cabo en el tiempo físico t también.

¹⁶No confundir el subíndice \star , que denota el momento de salida/entrada de una escala en el horizonte, con el superíndice \star , que indica un instante τ o t .

6.1. Inputs y elección de condiciones iniciales

6.1.1. Condiciones iniciales para el *background*

Se pretende resolver la evolución del *background*, entendiendo como este la evolución del factor de escala $a(t)$ y del inflatón $\phi(t)$.

Se fija una forma para el potencial $V(\phi)$ del inflatón. Dada esta forma, se dan unas condiciones iniciales para $a(t=0)$, $\phi(t=0)$ y $\dot{\phi}(t=0)$, donde $t=0$ se considera como el comienzo de la etapa inflacionaria, lo que se corresponde con $\tau \rightarrow -\infty$.

El *background* se evoluciona en un rango $t \in \{0, t_{final}\}$.

6.1.2. Condiciones iniciales para la ecuación de Mukhanov-Sasaki

Para la resolución de la ecuación de Mukhanov-Sasaki, se modulan los v_k en las amplitudes complejas A_k :

$$v_k = A_k \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \quad (75)$$

En el caso de Sitter, se espera encontrar, según la ecuación (72):

$$A_k = 1 - \frac{i}{k\tau} \quad (76)$$

Se dan las condiciones iniciales $A_k(0) = 1+0i$ y $\dot{A}_k(0) = 0+0i$, que surgen de la normalización wronskiana (ecuación (71)) considerando la condición de vacío de Bunch-Davies (ecuación (70)).

6.2. Resolución del *background*

6.2.1. Funciones del *background*

Las 2 ecuaciones a resolver para hallar como evoluciona el *background* serán la ecuación (88) y la 2EF (ecuación (17)) ignorando la constante cosmológica Λ :

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (77)$$

$$\dot{a} = \frac{a}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]^{1/2} \quad (78)$$

Como puede apreciarse en este sistema de ecuaciones diferenciales, la evolución de las magnitudes a y ϕ es dependiente la una de la otra: se trata de un sistema acoplado. Combinando ambas ecuaciones (sustituyendo \dot{a} en la ecuación dinámica) y reduciéndolas a ecuaciones de

primer orden por medio de un cambio de variable de la forma $F(t) = \dot{\phi}$, estas ecuaciones se desacoplan como:

$$\dot{\phi} = F \quad (79)$$

$$\dot{F} + 3 \frac{F}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} F^2 + V(\phi) \right)^{1/2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (80)$$

$$\dot{a} - \frac{a}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} F^2 + V(\phi) \right]^{1/2} = 0 \quad (81)$$

Lo no linealidad de las ecuaciones causa problemas de rigidez en su resolución, por lo que se resuelve el sistema con un método Runge-Kutta que incorpora un corrector de rigidez¹⁷.

6.2.2. Derivadas de las funciones del *background*

Tras obtener $a(t)$ y $\phi(t)$, se obtienen las derivadas primeras, segundas y terceras de estas magnitudes de forma analítica, a partir de las ecuaciones introducidas en el *background*. Para ello, será necesario derivar la forma explícita del potencial.

$\dot{\phi}$ fue obtenida en la resolución del sistema de EDO's. Para obtener \dot{a} directamente se usa la 2EF (ecuación (78)).

Conocida \dot{a} , se obtiene $\ddot{\phi}$ a partir de la ecuación de la dinámica del inflatón (ecuación (77)). A partir de estas derivadas se obtienen \ddot{a} , $\ddot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ mediante derivación de sus expresiones analíticas a partir de las ecuaciones previas, para evitar pérdidas de precisión introducidas por el calculo numérico.

6.2.3. Otras magnitudes del *background*

Otras magnitudes a usar, que se pueden definir a partir de $a(t)$, $\phi(t)$ y sus respectivas derivadas son:

- El parámetro de Hubble $H(t) = \frac{a'}{a^2}$
- El número de *e-folds* N , cuya expresión es:

$$N = \ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right] \quad (82)$$

- El Radio de Hubble $R_H(t) = [a(t)H(t)]^{-1}$
- La variable de Mukhanov $z(t) = \frac{a^2 \phi'}{a'}$

¹⁷Método implementado en '*Mathematica*' como 'StiffnessSwitching Runge Kutta method'.

6.3. Resolución ecuación de Mukhanov-Sasaki

La ecuación de Mukhanov-Sasaki escrita en tiempo conforme (ecuación (66)) se re-escribe en tiempo físico t como:

$$\ddot{A}_k + \left(\frac{\dot{a} - 2ik}{a} \right) \dot{A}_k - \left(\frac{\ddot{z}z + \dot{z}^2}{za} \right) A_k = 0 \quad (83)$$

De nuevo, esta ecuación se resuelve con un Runge Kutta que incorpora un corrector de rigidez, junto con las condiciones iniciales previamente indicadas en la subsección ‘**Condiciones iniciales para la ecuación de Mukhanov-Sasaki**’.

6.4. Obtención del espectro de potencias $\Delta_s^2(k)$

Según el factor de amplitud introducido en la ecuación (75), $|v_k|^2(\tau)$ es:

$$|v_k|^2(t) = \frac{|A_k|^2(t)}{2k} \quad (84)$$

Cuando se tiene $\frac{k_\star}{aH(t_\star)} \ll 1$, es decir, cuando las escalas k_\star están bien fuera del horizonte, su \mathcal{R} está congelado (véase subsección ‘**Perturbaciones de la curvatura comóvil**’), y por tanto, su espectro de potencias $P_{\mathcal{R}}(k_\star)$ se puede tomar como:

$$P_{\mathcal{R}}(k_\star) \approx \frac{|v_{k_\star}|^2}{z_\star^2} \quad (85)$$

En el código, para asegurar que las perturbaciones están ‘congeladas’ fuera del horizonte a la hora de obtener $\Delta_s^2(k)$, se calcula este para el t_{final} en la evolución del *background*, cuando el R_H es mucho menor que cualquier escala con la que se trabaja.

Para obtener $\Delta_s^2(k)$, se hace:

$$\Delta_s^2(k_\star) = \frac{k_\star^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k_\star) \quad (86)$$

7. Resultados obtenidos

7.1. $V(\phi) = cte$ con *slow-roll*: universo De Sitter

Se fijan las condiciones¹⁸:

- Potencial: $V(\phi) = 3$

¹⁸Los valores iniciales ϕ_0 y a_0 se toman de forma arbitraria. Se les podría haber asignado cualquier otro valor (distinto de 0 para evitar singularidades), ya que este no afecta a la forma del espectro $\Delta_s^2(k)$ (se espera que sea auto-similar en este caso).

- Condiciones iniciales: $\phi_0 = 3$; $\phi'_0 = 0$; $a_0 = 10^{-6}$
- Rango temporal: $t \in [0, 63]$
- *e-folds*: $N = 63$

La evolución del *background* es el esperado por el modelo analítico *slow-roll*: $\phi(t) = cte$, $\dot{\phi} = 0$, y el factor de escala a cumple $a(t) = a_0 e^{Ht}$.

Para este caso *slow-roll*, se escribe la ecuación de Mukhanov-Sasaki¹⁹ como:

$$\frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a} \Rightarrow v_k'' + [k^2 - \frac{a''}{a}]v_k = 0 \quad (87)$$

Fijando las condiciones iniciales mencionadas en la subsección ‘Inputs y elección de condiciones iniciales’ en $t = 0$, se obtienen numéricamente los modos v_k . Los espectros de potencias $P_\psi(k)$ y $\Delta_s^2(k)$ se calculan para un rango de $k \in \{10^{-5}, 10^{-2}\}$, y se ilustran en la figura 9.

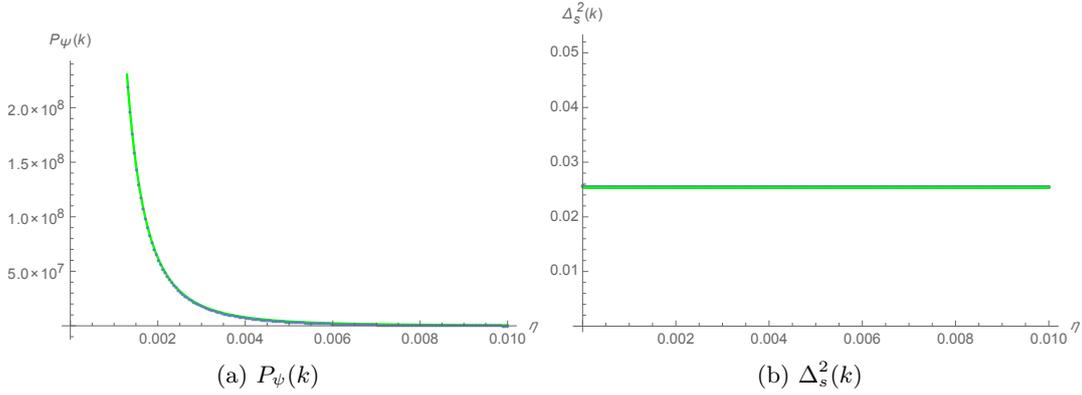


Figura 9: Puntos en azul, espectros obtenidos de forma numérica; la línea verde continua es el espectro esperado teóricamente, en la ecuación (74). (a) Espectro $P_\psi(k)$. (b) Espectro adimensional $\Delta_s^2(k)$.

Numéricamente se obtiene que $\Delta_s^2(k) = \frac{H^2}{(2\pi)^2} = cte$, como se espera en el caso de Sitter (ecuación (74)).

7.2. $V(\phi) = cte$ con *fast-roll*

Modificando $\dot{\phi}_0$: Se dan las condiciones:

- Potencial: $V(\phi_0) = 3$
- Condiciones iniciales: $\phi_0 = 3$; $\phi'_0 = \{12, 28, 1\}$; $a_0 = 1$
- Rango temporal: $t \in [0, 63]$
- *e-folds* $N = \{63, 63, 63\}$

¹⁹Al ser $\phi'(t) = 0$, $z = 0$, lo que implica que el cociente $\frac{z''}{z}$ está mal definido; la aproximación usada $z \approx a$ salva esta dificultad.

La evolución de a , ϕ y $\dot{\phi}$ se ilustran en la figura 10, la figura 11 y la figura 12.

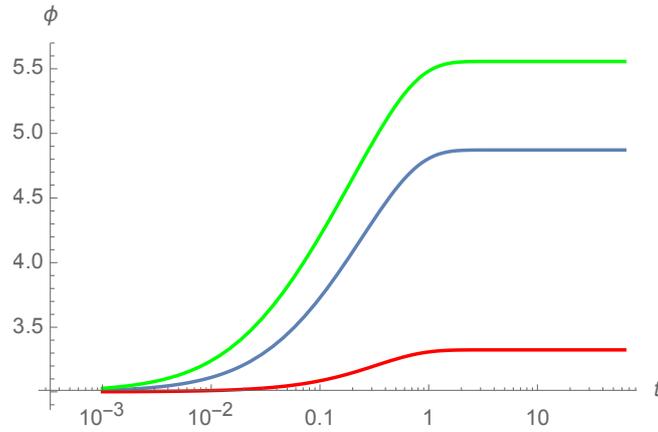


Figura 10: Evolución $\phi(t)$ para los valores de $\dot{\phi} = \{12, 28, 1\}$, en azul, verde y rojo respectivamente.

Donde se observa que $\phi(t)$, al tener una cierta velocidad inicial distinta de cero, se desplaza una cantidad $\Delta\phi$. Debido al término de fricción $3H\dot{\phi}$ en la ecuación (88), el inflatón se va frenando, hasta llegar a tener velocidad nula y permanecer en reposo, como se observa en la figura 11, con valores ϕ máximos para $\phi \approx 1$ para los 3 casos estudiados.

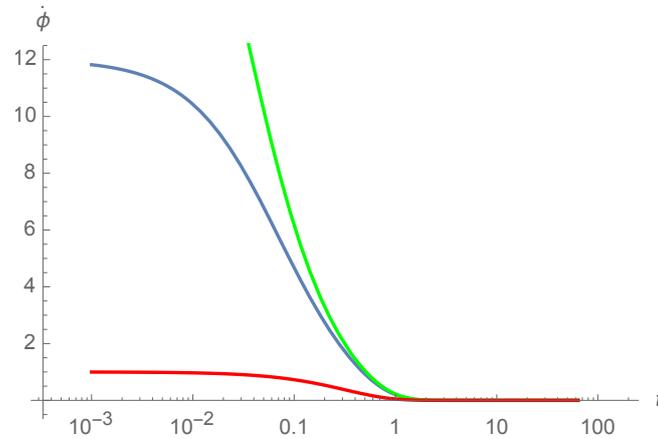


Figura 11: Evolución $\dot{\phi}(t)$ para los valores de $\dot{\phi} = \{12, 28, 1\}$, en azul, verde y rojo respectivamente.

En la figura 11 se observa como la velocidad se atenúa rápidamente, llegando a un valor prácticamente nulo cuando $t \sim 1$. El tiempo que tarda ϕ en frenarse, por ejemplo, un factor $\frac{1}{10}$, es independiente de $\dot{\phi}_0$, ya que el término de fricción que lo va frenando es proporcional a $\dot{\phi}_0$.

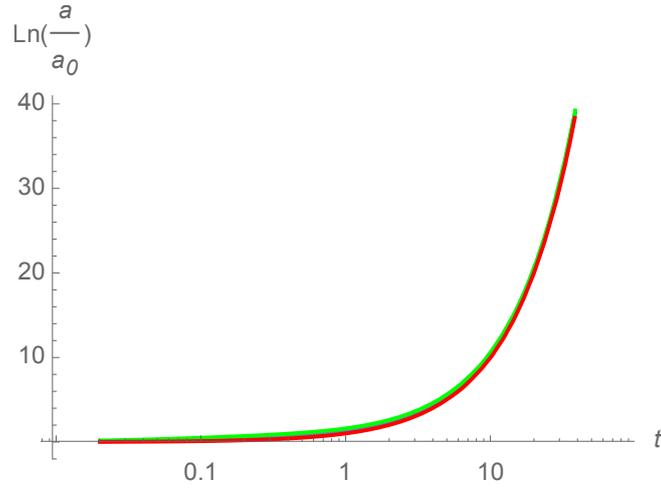


Figura 12: Evolución de $\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)$ para los 3 casos considerados: $\phi'_0 = 1$, $\phi'_0 = 12$ y $\phi'_0 = 28$ (en rojo, verde y azul respectivamente). El color azul no se aprecia al estar detrás de las otras dos trazas.

El factor de escala $a(t)$ crece de forma exponencial, y el *fast-roll* introducido no modifica sensiblemente los 63 *e-folds*.

Se resuelve la ecuación de Mukhanov-Sasaki para 200 escalas k^{-1} , con $k \in \{1, 15\}$. En la figura 13 se representa el R_H para estos 3 casos y el tamaño de las escalas k^{-1} usadas; en la figura 14 se representan los espectros $\Delta_s^2(k)$.

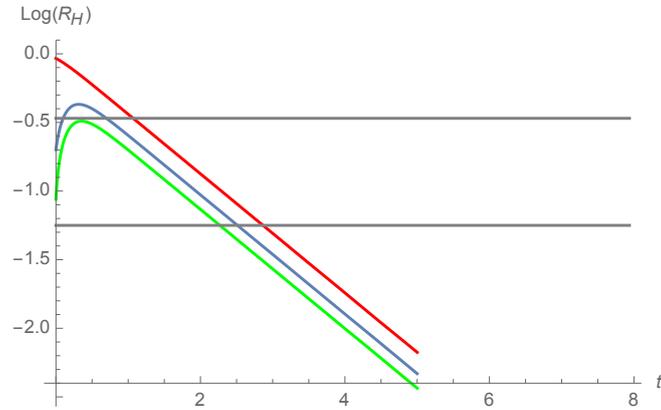


Figura 13: Evolución de los radios de Hubble R_H para los 3 casos $\dot{\phi} = \{12, 28, 1\}$ a estudiar, en azul, verde y rojo respectivamente. En gris, se representan las escalas k^{-1} que se usarán para el cálculo de $\Delta_s^2(k)$.

En esta figura 13 se aprecia como el R_H decrece (en la figura aparece en escala logarítmica) hasta que ambas escalas k^{-1} quedan fuera del horizonte, donde no evolucionan. Cuando estas escalas están ‘congeladas’, se calcula el $\Delta_s^2(k)$.

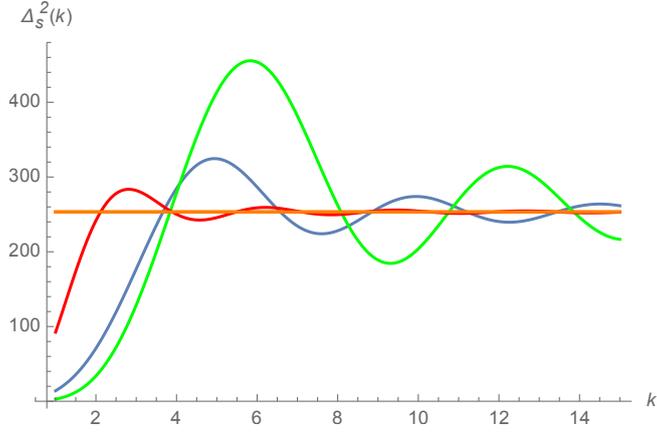


Figura 14: Espectros $\Delta_s^2(k)$ para los 3 casos a estudiar, $\dot{\phi} = \{12, 28, 1\}$, en azul, verde y rojo respectivamente. En naranja, se representa el $\Delta_s^2(k)$ constante del espectro de de Sitter.

Los espectros obtenidos muestran una pérdida de potencia para las escalas k^{-1} más grandes (k más pequeño). El efecto de aumentar $\dot{\phi}$ aumenta la pérdida relativa de potencia, respecto al $\Delta_s^2(k)$ esperado por el caso de Sitter.

También se observa una tendencia de las oscilaciones a comenzar a escalas k más bajas cuanto menos energía cinética $\dot{\phi}$ tenga el inflatón ϕ .

Modificando $V(\phi_0)$: Con las condiciones:

- Potencial: $V(\phi_0) = \{0.3, 30\}$
- Condiciones iniciales: $\phi_0 = 3$; $\phi'_0 = 12$; $a_0 = 1$
- Rangos temporales para cada $V(\phi_0)$: $t \in [0, 293]$; $t \in [0, 33]$,
- e -folds $N = \{93, 104.4\}$

Se resuelven las ecuaciones del *background*, representando sus funciones en la figura 15, la figura 16 y en la figura 17.

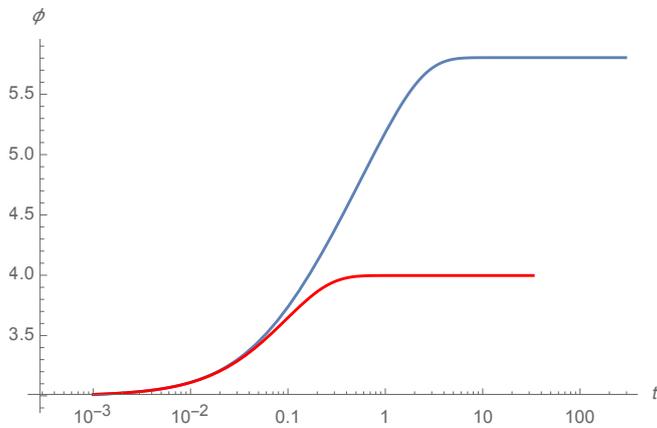


Figura 15: Evolución $\phi(t)$ para los valores de $V\phi_0 = \{0.3, 30\}$, en azul y rojo respectivamente.

El efecto de aumentar $V(\phi_0)$, que conlleva aumentar $H(t)$ (concretamente su valor mínimo) según la ecuación (88):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (88)$$

lo hace que el inflatón ϕ se frene más rápidamente.

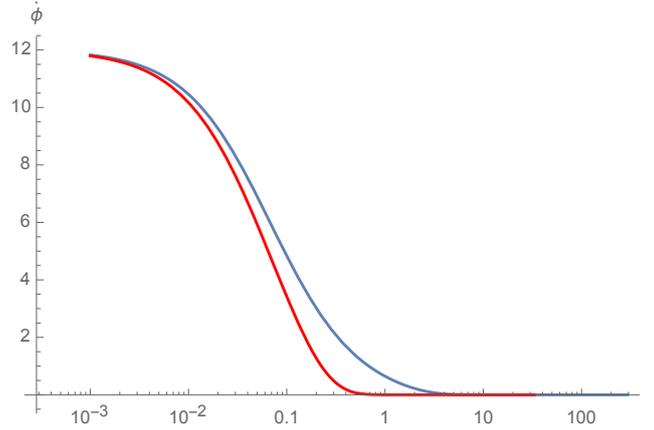


Figura 16: Evolución $\dot{\phi}(t)$ para los valores de $V\phi_0 = \{0.3, 30\}$, en azul y rojo respectivamente.

Se puede observar en la figura 16 que la velocidad $\dot{\phi}$ decae más rápido con un $V(\phi_0)$ mayor, lo que es consistente con lo comentado en la figura previa.

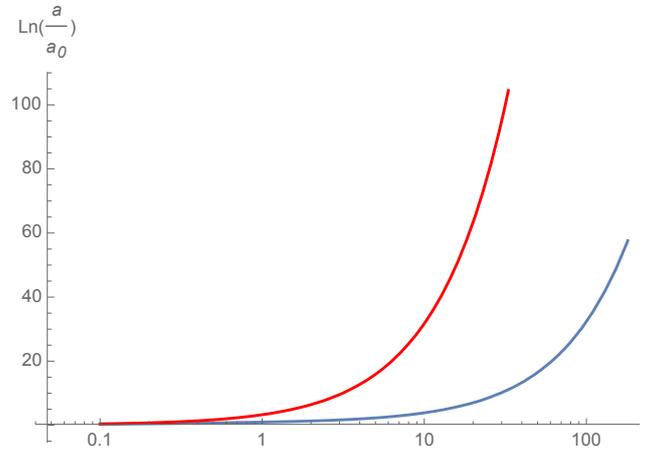


Figura 17: $V\phi_0 = \{0.3, 30\}$, en azul y rojo respectivamente.

Cabe comentar que la etapa *fast-roll* lograda variando $V(\phi_0)$ sí afecta visiblemente al número de *e-folds*. Como se aprecia en la figura 17, en el caso de $V(\phi) = 30$ el factor de escala $a(t)$ crece más rápido que para $V(\phi) = 0.3$, llegando a generar hasta $N \approx 1000$ *e-folds* si se le deja evolucionar tanto t como el caso de $V(\phi) = 0.3$.

Se resuelve de nuevo la ecuación de Mukhanov-Sasaki para escalas 200 escalas k^{-1} , con $k \in \{1, 15\}$, valores similares a los de los casos anteriores. En la figura 18 se representa el R_H

para estos 2 casos y el tamaño de las escalas k^{-1} usadas; en la figura 19 y en la figura 20 se representan los espectros $\Delta_s^2(k)$.

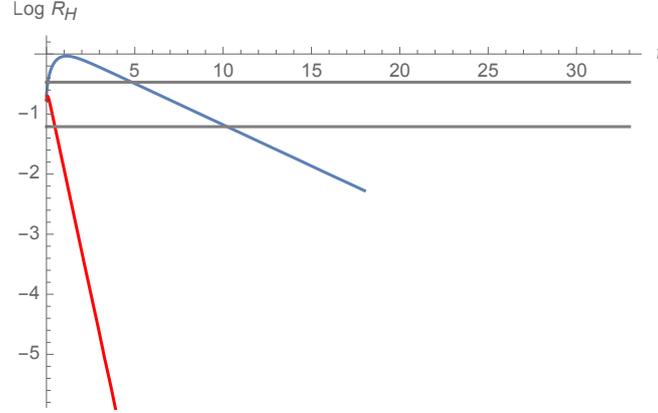


Figura 18: Evolución de los radios de Hubble R_H para los 2 casos $V\phi_0 = \{0.3, 30\}$ a estudiar, en azul y rojo respectivamente. En gris, se representan las escalas k^{-1} que se usarán para el cálculo de $\Delta_s^2(k)$.

Con $V(\phi_0) = 0.3$, en la figura 18 se aprecia que, durante la etapa *fast-roll*, el R_H crece (se tiene una $\omega > -\frac{1}{3}$), aunque sólo llegue hasta $t = 2$. Cuando el inflatón pierde la mayoría de su energía cinética, se tienen de nuevo condiciones *slow-roll*; la expansión acelerada contrae rápidamente R_H , dejando fuera las escalas representadas.

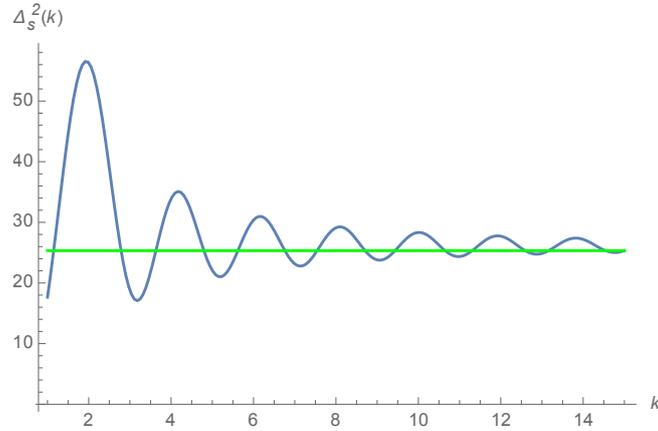


Figura 19: Espectro $\Delta_s^2(k)$ para un $V(\phi_0) = 0.3$. En verde, se representa el $\Delta_s^2(k)$ constante del espectro de de Sitter.

En este espectro se observa como las oscilaciones para k tan próximos al k más pequeño computado, que la supresión no se discierne de una oscilación inicial, ya que apenas está por debajo del valor esperado para el Δ_s^2 plano. En este espectro se observa como estas oscilaciones tienden, para k grandes, a un valor constante, donde estas escalas quedan ‘congeladas’ fuera del horizonte.

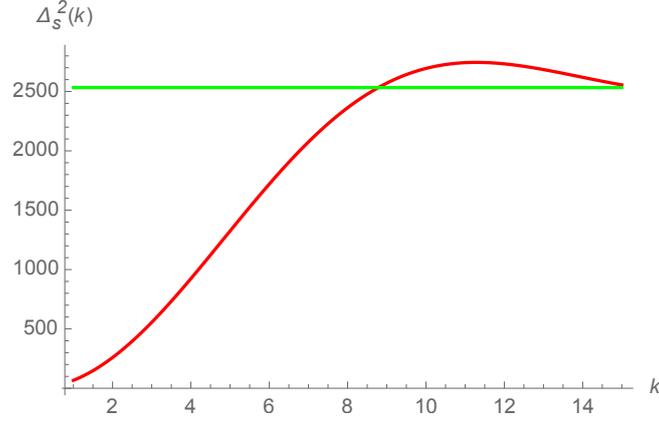


Figura 20: Espectro $\Delta_s^2(k)$ para un $V(\phi_0) = 30$. En verde, se representa el $\Delta_s^2(k)$ constante del espectro de de Sitter.

En la figura 20 ocurre todo lo contrario que en el espectro de la figura 19. La supresión es muy fuerte, y en el rango de k computado, apenas ocurre una única oscilación.

7.3. Potencial cumbre: $V(\phi) = \frac{g}{4}(\phi^2 - \frac{1}{g})^2$

- Potencial: $V(\phi_0) = \frac{g}{4}(\phi^2 - \frac{1}{g})^2$, con $g = 0.00265$
- Condiciones iniciales: $\phi_0 = 6$; $\dot{\phi}_0 = 3$; $a_0 = 10^{-6}$
- Rango temporal: $t \in [0, 30]$
- e -folds $N = 68.1$.

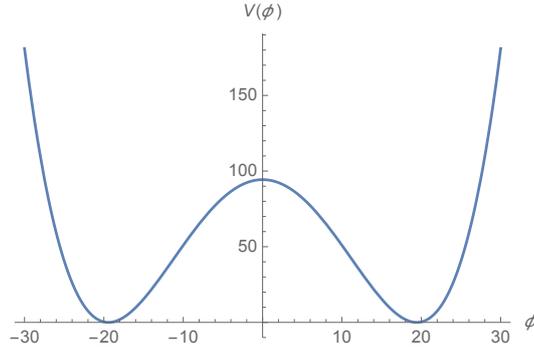


Figura 21: Potencial $V(\phi_0) = \frac{g}{4}(\phi^2 - \frac{1}{g})^2$ a estudiar, con $g = 0.00265$. Nótese el mínimo de potencial para $\phi \approx 19$, hacia el que se evoluciona ϕ .

En las siguientes figuras se ilustra el comportamiento de las magnitudes del *background* para este tipo de potencial.

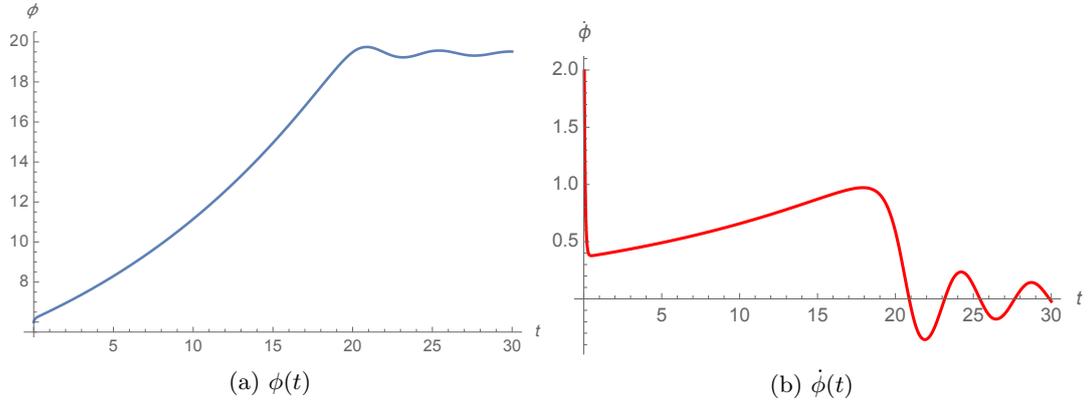


Figura 22: (a) Evolución del inflatón ϕ . (b) Velocidad del inflatón $\dot{\phi}$.

En la figura 22a se observa como el $\phi(t)$ evoluciona desde ϕ_0 de forma casi lineal con t , hasta llegar a $\phi \approx 19$. Entorno a este punto, ϕ comienza a oscilar, como se puede apreciar en la figura 22b al cambiar $\dot{\phi}$ de signo.

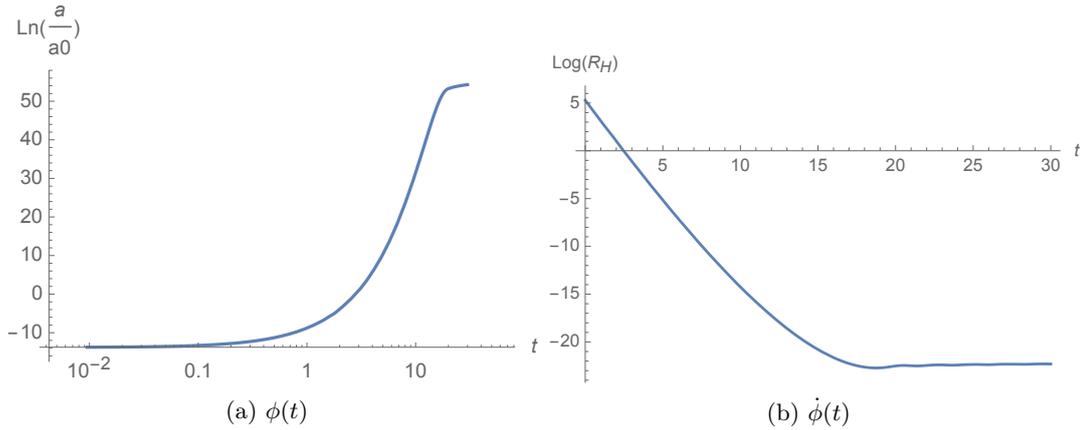


Figura 23: (a) Evolución del factor de escala a . (b) Evolución de R_H .

Al finalizar la etapa inflacionaria, el factor de escala sigue creciendo con t , pero de forma mucho más lenta, como se aprecia en la figura 23a para $t \approx 15$. El R_H se contrae hasta $R_H \sim 10^{-20}$, correspondiente a $t \approx 15$.

8. Discusión

8.1. Discusión de los resultados

8.1.1. De Sitter *slow-roll*

En primer lugar, como se está usando a en lugar de la variable de Mukhanov z , el espectro de potencias calculado no es exactamente $P_{\mathcal{R}}(k)$, si no $P_{\psi}(k)$. No obstante, durante le etapa

slow-roll se tiene:

$$P_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H}{\dot{\phi}} P_{\psi}(k) \rightarrow P_{\mathcal{R}}(k) \propto P_{\psi}(k), \quad (89)$$

y ya que en este régimen $\frac{H}{\dot{\phi}} = cte$, es indistinto trabajar con uno u otro espectro de potencias para obtener el espectro de perturbaciones escalares.

El cómputo numérico sigue la forma analítica $\Delta_s^2(k) = \frac{H^2}{(2\pi)^2}$ esperado en la inflación de Sitter, como se aprecia en la figura 9b, y como se adelantó en la ecuación (74).

El espectro obtenido $\Delta_s^2(k)$ contará con un $n_s = 1$ (también $\alpha_s = 1$), y por tanto con una $A_s = cte$ para el rango de k estudiados, según la ecuación (31).

8.1.2. $V(\phi) = \textit{fast-roll}$

La evolución del *background* en este régimen sigue 2 etapas bien diferenciadas. Durante la etapa *fast-roll* la velocidad y el inflatón ϕ evolucionan rápidamente hasta los valores típicos de *slow-roll*, es decir $\dot{\phi} \rightarrow 0$ y $\phi \rightarrow cte$. Una vez alcanzada esta etapa, la evolución del *background* es del tipo *slow-roll*.

Para ciertos modelos, en el que se incluye este, la etapa *slow-roll* es un atractor en el espacio de fases ϕ vs $\dot{\phi}$. Para cualquier configuración $\{\phi, \dot{\phi}\}$ con suficiente evolución temporal, se acaba teniendo $\{\phi, \dot{\phi}\} \rightarrow \{\phi_{sr}, \dot{\phi}_{sr}\}$, donde ‘sr’ hace referencia a los valores esperados en *slow-roll*.

El $\Delta_s^2(k)$ obtenido para esta etapa posee un $n_s \approx 1.0$, aunque en este caso no es *cte* como en el caso de Sitter. Antes de ‘congelarse’ al salir del R_H , las fluctuaciones en las escalas k experimentan una serie de oscilaciones entorno al espectro *slow-roll*. Para llegar a la primera oscilación, estas fluctuaciones comienzan desde valores más bajos en relación al espectro constante. Para determinadas configuraciones, se observa un déficit de potencia en estas escalas que rápidamente quedan fuera del horizonte.

Este déficit de potencias se puede trasladar a los espectros del FCM²⁰ representado en la figura 4, con las correspondientes funciones de transferencia (que tienen en cuenta la evolución del universo desde la época inflacionaria hasta la época de recombinación, y desde que la luz del FCM llega a nosotros). Así, características del FCM podrían ser explicadas a partir de modelos inflacionarios, como sería en este caso lo bajos coeficientes D_l que se observan en la figura 4 para $l < 30$ [12].

Para cuantificar cuanto domina el término cinético inicial $\frac{1}{2}\dot{\phi}_0$ sobre el potencial $V(\phi_0)$, se introduce el coeficiente γ :

$$\gamma = \frac{\dot{\phi}/2}{V(\phi_0)} \quad (90)$$

En la tabla 1 se estudia cuantitativamente la supresión de potencia, a partir de $\frac{\Delta_{s,fr}^2}{\Delta_{s,sr}^2}(k_{menor})$, donde ‘fr’ hace referencia a *fast-roll*, y por medio del tiempo de comienzo de las oscilaciones

²⁰Tanto para las correlaciones en la temperatura T como para los modos de polarización E y B .

t_{os} , que se toma como el t para el que se tiene el primer máximo de una oscilación, en el $\Delta_s^2(k)$. Se estudia para los modelos previamente ilustrados, con una variedad de γ .

$\dot{\phi}$	$V(\phi_0)$	γ	$\frac{\Delta_{s,sr}^2}{\Delta_{s,fr}^2}(k_{kmin})$	t_{os}
12	3	24	25.2	4.58
28	3	131	96.8	5.78
1	3	1/6	2.6	2.84
12	0.3	240	1.39	1.90
12	30	2.4	37.9	10.52

Tabla 1: Características de los distintos escenarios inflacionarios con los que se ha probado el código. Cuantitativamente se encuentra que tanto la supresión $\frac{\Delta_{s,fr}^2}{\Delta_{s,sr}^2}(k_{menor})$ como el tiempo en el que comienzan las oscilaciones t_{os} aumentan con el dominio cinético, cuantificado a través de γ .

8.1.3. Potencial cumbre

Las características del *background* para este $V(\phi)$ presentan una etapa adicional al régimen *fast-roll* con $V(\phi) = cte$. En este caso, cuando la inflación finaliza, ϕ comienza a oscilar entorno al mínimo del potencial $V(\phi)$. Tras esta etapa comenzaría la etapa de recalentamiento.

El cómputo de de $\Delta_s^2(k)$ para este potencial no se ha logrado satisfactoriamente. Esto se achaca a una mala elección de las condiciones iniciales en la ecuación de Mukhanov-Sasaki, ya que la modulación de los v_k a partir de los A_k pierde validez al alejarse de la aproximación de Sitter, llevada a cabo en la ecuación (68). Es probable que modos que no sean del estilo Bunch-Davies (ecuación (69)) no se anulen para estas condiciones iniciales, dificultando el cálculo de los v_k .

Por ello, los modos v_k obtenidos para este potencial cumbre no se han considerado físicamente fiables, y por tanto incapaces de mostrar características relevantes en el $\Delta_s^2(k)$.

En la aproximación *slow-roll* se tiene:

$$n_s(k^*) - 1 = 2\eta^* - 4\epsilon^* \quad (91)$$

Y además [1]:

$$\epsilon^* \approx \epsilon_v^* ; \eta^* \approx \eta_v^* - \epsilon_v^* \quad (92)$$

Por lo que n_s depende de la forma de $V(\phi)$ y sus derivadas, ya que estas formas determinan ϵ_v y η_v , según la ecuación (60) y la ecuación (61).

Es de esperar que, de haber computado adecuadamente el $\Delta_s^2(k)$ para este potencial cumbre, se hubiera obtenido un $n_s \neq 1$, al contrario que en el caso de Sitter, aunque las características en la supresión de potencia y las oscilaciones del $\Delta_s^2(k)$ se deberían haber encontrado también.

8.2. Sobre el escenario inflacionario

El escenario inflacionario permite dar solución a varios problemas del Modelo Cosmológico Estándar Clásico. Evidencias observacionales están de acuerdo con lo predicho por varios modelos de inflación, y características en la EGE y en el FCM se pueden justificar en este escenario.

No obstante, la teoría inflacionaria no está exenta de problemas, como los detallados a continuación. Ninguna alternativa ha conseguido relevarla, y hoy en día la mayoría de grandes teorías fundamentales trata de incorporar el fenómeno inflacionario a sus predicciones.

8.2.1. Éxitos del modelo inflacionario

Necesidad de una expansión brusca El problema del horizonte se puede solventar con otras soluciones exóticas (véase más adelante la subsección ‘**Alternativas a la inflación**’), pero ninguna es tan sencilla²¹ como la fuerte expansión primordial del universo que el modelo inflacionario proporciona. El escenario inflacionario es el modelo más plausible sobre esta etapa primigenia del universo.

Coherencia de fases y fluctuaciones más allá del horizonte Que todos los modos de Fourier de las perturbaciones generadas durante inflación tengan la misma fase cuando vuelven a entrar a la esfera de Hubble, requiere de un mecanismo que los conectara causalmente. Esta coherencia de fase se acaba traduciendo en la serie de crestas y valles observados en el espectro de . Sin esta coherencia, el espectro del FCM no sería más que ruido caótico.

Aunque se pueden proponer otros mecanismos capaces de hacer coherentes estas oscilaciones, la coherencia de fases se tiene entre escalas que, sin solventar el problema del horizonte, serían acausales. En el espectro T-E, presentado en la figura 24, estas escalas hacen referencia a los $l < 200$, para los que se observa una anti-correlación. La inflación vuelve a ser, una vez más, el mecanismo más plausible que conecta estas escalas y las congela hasta su re-entrada en la esfera de Hubble.

Soporte observacional r es el ratio tensorial-escalar, definido como:

$$r = \frac{\Delta_t^2}{\Delta_s^2} \quad (93)$$

La obtención de *cotas* sobre parámetros $\{n_s, \alpha_s, r\}$, a partir de satélites como Planck es compatible con las predicciones de varios modelos inflacionarios (aunque se estima que entorno al 60% de los modelos han quedado descartados por estas cotas).

Las cotas sobre los modelos inflacionarios están centradas en n_s ligeramente menor que 1, y un r típico para modelos de inflación *small-field*.

²¹La mayoría de las alternativas a la inflación para resolver el problema del horizonte presentan serios problemas en sus preceptos más fundamentales o en estar de acuerdo con las observaciones.

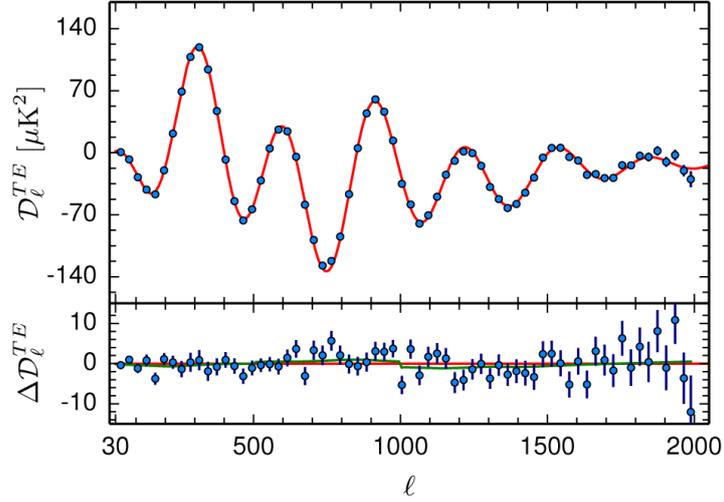


Figura 24: Espectro TE del FCM [13]. Para $l < 200$ se observa una anti-correlación entre escalas que, sin inflación, serían acausales. Sin un mecanismo de coherencia de fases, las oscilaciones aquí presentes serían ruido.

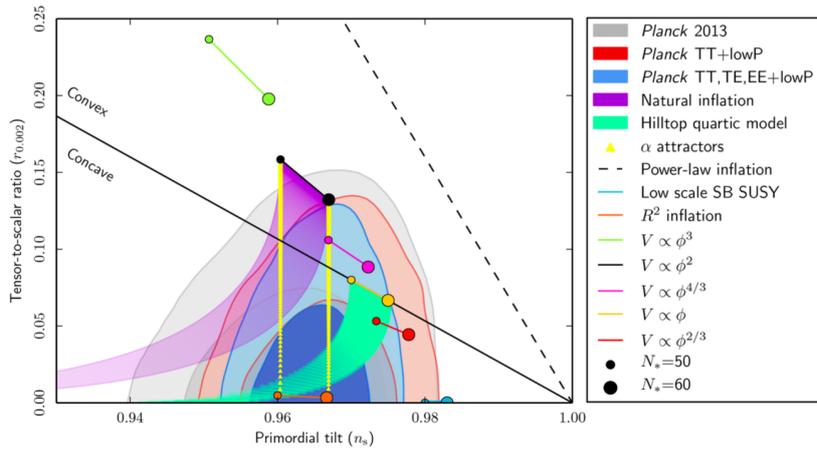


Figura 25: Cotas proporcionadas por la sonda Planck sobre el plano n_s - r [7]. A la derecha, en la leyenda, distintos modelos de inflación representados en tal plano. Nótese la cantidad de modelos inflacionarios cuyas predicciones de parámetros n_s - r quedan fuera de los observados. El modelo de inflación R^2 ofrece las predicciones más centradas de las cotas ofrecidas por Planck.

8.2.2. Problemas del modelo inflacionario

Un problema inevitable en la actualidad es la escala energética involucrada en el proceso de inflación. La densidad de energía del universo en la era inflacionaria es del orden de 10^{15} GeV, cantidades muy por encima de las energías conseguidas en aceleradores de partículas en la actualidad y en el futuro próximo (del orden de varios TeV), con lo que la búsqueda de una partícula candidata a inflatón ϕ está, en el mejor de los casos, relevada a un futuro no próximo.

Varias críticas sobre el modelo inflacionario se basan en tomarlo como un mecanismo *ad-hoc*, que, gobernado por una física desconocida, lejos de nuestro alcance energético, es capaz de solucionar los problemas del MCEC a la carta²².

Si el universo tuviera otras características totalmente diferentes, tanto a gran escala como en el FCM, en el escenario inflacionario se podrían encontrar modelos que, para justificar tales características y recurriendo a una ajuste fino de los parámetros de su potencial inflacionario, conseguiría reproducir dichas propiedades.

Algunos modelos de inflación implican consecuencias profundas en la naturaleza del universo, difíciles de asumir para algunos científicos. Tómese como ejemplo el modelo de inflación eterna propuesto por A. Guth en 1980 [14]. En tal modelo las fluctuaciones del vacío, al terminar la inflación en tiempos ligeramente diferentes en cada parte del universo, ocasionaría que este se llenara de burbujas inflacionarias, concretamente, de un número infinito de ellas. En tal escenario, nuestro universo sería una de estas burbujas en el extenso conjunto de ellas conocido como multiverso.

8.2.3. Alternativas a la inflación

Otros mecanismos tratan de solucionar los problemas del MCEC. Algunos de ellos se detallan a continuación.

Universo cíclico En estos modelos, el universo está eternamente en un ciclo de expansión y contracción. La expansión actual llegaría a un máximo, a partir del cual el universo colapsaría en un *Big Crunch* y sufriría una violenta expansión a causa de ello, similar a un *Big Bang*, con determinadas características iniciales. De este modo se podría solucionar el problema del horizonte y, dependiendo de la evolución del universo hacia el *Big Crunch* y desde el *Big Bang*, también de la planitud y de los monopolos magnéticos.

Universo ekpirótico La idea fundamental de este escenario consiste en achacar la contracción del $R_H = \frac{1}{aH}$ no a un fuerte aumento de a , si no a un fuerte aumento de H . Estos modelos tienen serias dificultades en relacionar tal aumento de H con la expansión actual del universo.

Modificación de c En otros escenarios se evita la expansión superluminal del universo suponiendo que la constante de la velocidad de la luz c pudo ser mayor en el pasado (y dejar de ser constante).

²²No obstante, es destacable que la inflación en la actualidad tiene capacidad de hacer predicciones sobre el FCM o la EFE, por lo que esta crítica a la inflación parece haber quedado obsoleta.

8.2.4. Futuras líneas de investigación

El refinamiento de *cotas* sobre los parámetros inflacionarios $\{n_s, \alpha_s, r\}$ que se está llevando a cabo podría descartar modelos inflacionarios.

Por ejemplo, una detección de modos tensoriales implicaría que la inflación ocurrió bajo un potencial *large-field*. Además, averiguar con más precisión el espectro de potencias de los modos tensoriales Δ_t^2 permitiría descartar si la inflación *slow-roll* es un modelo viable en este modelo, ya que para este tipo de inflación se requiere la relación de consistencia:

$$r = \frac{\Delta_t^2}{\Delta_s^2} = -8n_t \quad (94)$$

Otros aspectos importantes a profundizar en inflación son encontrar desviaciones en la gaussianidad de las fluctuaciones o señales de no adiabaticidad.

Desde un punto de vista más fundamental, será necesario desentrañar la naturaleza del inflatón ϕ o de las partículas inflacionarias especuladas por este modelo, para así vincular este campo de investigación con otras áreas de la física, como la física de partículas o la termodinámica del universo.

El espectro *BB* del FCM es una herramienta crucial para corroborar el escenario inflacionario. Detectar la huella de las perturbaciones tensoriales primordiales producidas por la inflación en los modos de polarización B del FCM permitiría descartar múltiples modelos inflacionarios y obtener información relevante sobre los detalles de la inflación, como su escala energética.

9. Conclusiones

El Modelo Cosmológico Estándar Clásico presenta problemas difícilmente resolubles sin recurrir a una acelerada expansión del universo primordial.

El escenario inflacionario en el que ocurre esta rápida expansión cuenta con multitud de modelos, cada uno con sus predicciones particulares. Las observaciones cosmológicas, principalmente en el FCM y la EGE ponen *cotas* sobre las características de la inflación. En el futuro se espera que estas *cotas* lleguen a ser mucho más restrictivas, sobre todo a partir de los modos B en el FCM, motivo por el que la inflación se encuentra en el corazón de la cosmología actual.

Variando las condiciones iniciales en un modelo inflacionario con $V(\phi) = cte$, se ha conseguido reproducir, al menos cualitativamente, el déficit de potencia en el espectro de potencias primordial, algo trasladable a los coeficientes multipolares l del FCM más bajos, en potenciales más realistas que en el que se ha trabajado.

Determinar la naturaleza de las partículas inflacionarias experimentalmente está lejos del alcance de los aceleradores de partículas actualmente. Fundamentalmente, varias teorías incorporan la inflación a sus características, e intentan explicar los campos involucrados en ella, como la Teoría de Cuerdas o de Branas.

10. Anexos

10.1. Anexo A: Cuantización del oscilador armónico

El tratamiento cuántico de las fluctuaciones se hace en analogía con el tratamiento cuántico del oscilador armónico llevado a cabo a continuación. Para este tratamiento, se recupera $\hbar = 1$ y se asigna la masa del oscilador armónico como la unidad.

Se usará la descripción mecánico-cuántica de Heisenberg, que considera los estados cuánticos como constantes en el tiempo, siendo los operadores los que se ven modificados al transcurrir t .

10.1.1. Ecuación de movimiento

La acción clásica de un oscilador armónico de frecuencia $\omega(t)$ y masa unidad es:

$$S \equiv \int L dt = \int \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \omega^2(t) x^2 \right) dt \quad (95)$$

Donde x es su elongación respecto al punto de equilibrio, que se toma en $x = 0$. Si se impone una acción que no varíe con x , es decir, con la derivada funcional $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, se obtiene su ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0 \quad (96)$$

10.1.2. Cuantización canónica

Las variables clásicas x y $p \equiv \dot{x}$ se promocionan a operadores que satisfagan:

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv [\hat{x}, \hat{\dot{x}}] = i\hbar \quad (97)$$

El operador \hat{x} se desarrolla en términos de los operadores de creación y aniquilación, \hat{a}^\dagger y \hat{a} respectivamente:

$$\hat{x} = v(t) \hat{a} + v^*(t) \hat{a}^\dagger \quad (98)$$

Donde la función $v(t)$ cumple la ecuación del movimiento:

$$\ddot{v} + \omega^2(t)v = 0 \quad (99)$$

Si se considera:

$$\langle v, v \rangle = \frac{i}{\hbar} \left(v^* \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) = 1 \quad (100)$$

Se llega a la relación estándar para los operadores de subida-bajada de un oscilador armónico:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (101)$$

Con lo que se tiene:

$$\hat{a} = \frac{i}{\hbar} \left(v^* \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} - \hat{x} \frac{\partial v^*}{\partial t} \right) \equiv \langle v, \hat{x} \rangle \quad (102)$$

$$\hat{a}^\dagger = -\frac{i}{\hbar} \left(v \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} - \hat{x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \equiv -\langle v^*, \hat{x} \rangle \quad (103)$$

Se puede definir el estado fundamental $|0\rangle$ imponiendo la condición de que al aplicarle el operador aniquilación \hat{a} , se obtenga el vacío:

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (104)$$

Los estados excitados $|n\rangle$ se pueden obtener aplicando n veces la siguiente fórmula recursiva al estado fundamental $|0\rangle$, a partir del operador de creación \hat{a}^\dagger :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (105)$$

10.1.3. Funciones modales $v(t)$

Cualquier cambio en la función modal $v(t)$ no afecta a $x(t)$. Esto se debe a que los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger definidos en la ecuación (102) y la ecuación (103) se ven modificados, lo que conlleva una modificación en la definición de vacío, y por tanto la interpretación de los estados $|n\rangle$ pierde sentido.

En general, no hay una descomposición de \hat{x} única en operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , como la realizada en la subsección anterior; es decir, la elección de las $v(t)$ no es única, y se pueden considerar varias funciones modales $v(t)$.

Una forma de fijar un $v(t)$ es considerando una frecuencia independiente del tiempo, $\omega(t) = \omega$, con lo que se pueden tomar los modos $v(t)$ con $|0\rangle$ siendo el estado fundamental del Hamiltoniano \hat{H} del oscilador armónico, que tiene la expresión:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \hat{x}^2 \quad (106)$$

Tomando $\hat{a} |0\rangle$ y la relación $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ ocasiona el resultado:

$$\hat{H} |0\rangle = \frac{1}{2} (\dot{v}^2 + \omega^2 v^2)^* \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger |0\rangle + \frac{1}{2} (|\dot{v}|^2 + \omega^2 |v|^2) |0\rangle \quad (107)$$

Si se impone que $|0\rangle$ sea un autoestado de \hat{H} , el primer término debe anularse, ya que al aplicar $\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger |0\rangle$ se obtiene un estado $|2\rangle$. Este término se anula si:

$$\dot{v} = \langle v, v \rangle = \mp \frac{2\omega}{\hbar} |v|^2 \quad (108)$$

Como en la ecuación (100) se tomó la condición $\langle v, v \rangle$ positiva, se debe escoger el signo $-$:

$$\dot{v} = -i\omega v \quad (109)$$

Al tener que $\langle v, v \rangle = 1$, la expresión para $v(t)$ es:

$$v(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} e^{-i\omega t} \quad (110)$$

Con el que se puede comprobar que el valor propio de aplicar \hat{H} a $|0\rangle$ es el esperado punto 0 energético del oscilador armónico:

$$\hat{H} |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle \quad (111)$$

10.2. Anexo B: Código

El código para resolver el *background* y para obtener el espectro Δ_s^2 se ha escrito en © ‘*Wolfram Mathematica*’. El código que se presenta a continuación puede encontrarse *on-line* en la siguiente dirección:

<https://goo.gl/I6h2UB>.

11. Bibliografía

Referencias

- [1] D. Baumann, ‘*TASI Lectures on Inflation*’ (2012) hep-th/0907.542v2
- [2] S. Weinberg, ‘*Cosmology*’ (2008) OUP Oxford. ISBN: 978-01-985-2682-7
- [3] J. Cepa ‘*Cosmología Física*’. Akal, 2007. ISBN: 978-84-460-2533-7
- [4] V. Mukhanov, ‘*Physical Foundations of Cosmology*’ (2005) Cambridge University Press. ISBN: 978-05-215-6398-7
- [5] S. Dodelson, ‘*Modern Cosmology*’ (2003) Amsterdam Academic Press. ISBN: 978-01-221-9141-1
- [6] C. Destri, H.J. de Vega, N.G. Sánchez, ‘*The pre-inflationary and inflationary fast-roll eras and their signatures in the low CMB multipoles*’ (2010) astro-ph/0912.2994v2

- [7] ‘*Planck 2015 Results. XX Constraints on inflation*’ (2015) astro-ph/1502.02114v1
- [8] ‘*Planck 2015 Results. XIII. Cosmological parameters*’ (2016) astro-ph/1502.01589v3
- [9] Imagen historia térmica del universo, galería de la NASA, satélite WMAP <http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html>.
- [10] Imagen FCM, galería de la ESA http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2013/03/Planck_CMB.
- [11] Imagen espectro TT , galería de la ESA http://www.cosmos.esa.int/documents/387566/425793/2015_TTSpectrum/d03dcc5f-a9a4-42df-be5b-fd0bdc5d956a?t=1423087098010.
- [12] C.R. Contaldi, M Peloso, L. Kofman y A. Linde, ‘*Suppressing the lower Multipoles in the CMB Anisotropies*’ (2003) astro-ph/0303636v2
- [13] Imagen espectro TE , galería de la ESA http://www.cosmos.esa.int/documents/387566/425793/2015_A15_TE/4b959c70-f0ca-43f2-8e3b-74cea1719b8f?t=1423137247545.
- [14] A.H. Guth, ‘*Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*’ (1981) Phys. Rev. **D23**, 347
- [15] P.J. Steinhardt, ‘*Is the theory at the heart of modern cosmology deeply flawed?*’ (2011) Scientific American <http://www.physics.princeton.edu/~steinh/0411036.pdf>.