



Facultad
de
Ciencias

METODO DE DESARROLLO EN SERIE MEDIANTE MONTECARLO: COMPARACION CON APROXIMACIONES MARKOVIANAS EFECTIVAS

**Series expansion method through MonteCarlo:
comparision with effective markovian
aproximation**

Trabajo de fin de grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Eduardo Varela Neila

Director: Horacio Sergio Wio Beitelmajer

19/05/2016

Resumen	4
1. Introducción	5
2. Polinomios ortogonales	6
2.1. Polinomios de Jacobi	6
2.1.1. Polinomios de Gegenbauer	7
2.1.2. Polinomios de Chebyshev	8
2.1.3. Polinomios de Legendre	9
2.2. Polinomios de Laguerre	9
2.3. Polinomios de Hermite	10
3. Procesos estocásticos	12
3.1. Procesos estacionarios	12
3.2. Procesos Gaussianos	13
3.3. Filtraciones	13
3.4. Procesos markovianos	13
4. Movimiento browniano	15
5. Ruido	17
5.1. Ruido blanco	17
5.2. Ruido de color	18
6. Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck	20
7. Método	22
7.1. Montecarlo	22
7.2. Functional expansion tally	23
7.3. Procedimiento Utilizado	24
8. Resultados	25
9. Conclusiones	35

Bibliografía.....35

Apéndices

A.1. Código Matlab 1.....36

A.2. Código Matlab 2.....37

A.3. Código Matlab 3.....39

Resumen

Se ha implementado un esquema de Montecarlo apto para la determinación de los coeficientes del desarrollo de funciones de distribución de probabilidad (pdf) con respecto a un conjunto base de funciones ortogonales para procesos de simulación de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Langevin. Para su simulación se ha utilizado Matlab y diferentes casos a estudiar, entre ellos una comparación entre el comportamiento bajo ruido blanco y ruido correlacionado. Las comparaciones realizadas muestran un gran acuerdo entre la simulación realizada por Montecarlo y mediante expansión en serie y da pie al uso de este método en estudios.

Palabras clave: Simulación, Langevin, Montecarlo, Expansión en serie, Matlab, Funciones Ortogonales, Ruido blanco, Ruido correlacionado.

Abstract

It has been implemented a Montecarlo's procedure suitable to shape the coefficients from expansion probability density function in a set of orthogonal functions for simulation process of stochastic differential equation of Langevin like. For simulation it has been use Matlab and different studied cases, among them a comparision between the behavior under white noise and brown noise. The comparision show a great similarity between the Montecarlo simulation and the functional expansion tallies simulation and could be useful in future problems.

Key Words: Simulation, Langevin, Montecarlo, Function expansión tallies, Matlab, Orthogonal functions, White noise, Brown noise.

1. Introducción

El objetivo fundamental de este proyecto es implementar un método de Monte Carlo que permita obtener un desarrollo en polinomios ortogonales. Para la implementación de dicho método se ha desarrollado un código con Matlab. Se ha realizado la comparación de modelos markovianos efectivos con este método y el método tradicional de Monte Carlo.

La realización de este proyecto viene motivada por la utilidad de la expansión en serie, con el interés de adaptarla a distintas áreas de las ya estudiadas. De vital importancia e interés han sido, *A. Noel and H. S. Wio, A new series-expansion approach in Monte Carlo: Application to neutron shielding* y *D. P. Griesheimer, W. R. Martin and J. P. Holloway, Convergence properties of Monte Carlo functional expansion tallies*. En ellos se puede leer tanto una aplicación de este método como un estudio detallado de su convergencia y su tratamiento de errores.

En este caso se ha realizado un estudio de las ecuaciones de tipo Langevin motivado por su término estocástico que en hemos estudiado tanto sin correlación, ruido blanco, como con esta, ruido marrón.

Este método tiene interés en trabajos futuros, para el estudio de problemas más complejos. En este caso será interesante también realizar un estudio detallado de la eficiencia del código y de los errores.

2. Polinomios ortogonales

Los polinomios clásicos ortogonales se suelen referir a los de Hermite, Laguerre y Jacobi e incluyendo casos especiales como los Polinomios de Legendre y Chebyshev. Esta enumeración es bastante escasa y cuando la ampliamos encontramos otros polinomios interesantes aunque no tantos como para no identificarlos todos.

Estos polinomios surgen como resultados en los problemas de Sturm-Liouville siendo parte de la teoría de ecuaciones diferenciales. Se definen tal que

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = -\lambda \omega(x)y \quad (2.1)$$

cuando estamos en un problemas de Sturm-Liouville regular, obtenemos una solución fundamental $y_n(x)$ que forma una base ortogonal.

Un conjunto de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^N$, $N < \infty$ es ortogonal si hay una medida positiva $d\alpha(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)d\alpha(x) = \begin{cases} 0, & m \neq n \leq N \\ h_n > 0, & m = n \leq N \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1 Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, el más común del conjunto de polinomios mencionados se puede definir de la siguiente forma:

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] \quad (2.3)$$

Este tipo de fórmula se conoce como fórmula de Rodrigues. Cuando $\alpha, \beta > -1$ es ortogonal en $[-1, 1]$ de acuerdo a

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x)P_m^{(\alpha, \beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0, \quad m \neq n \quad (2.4)$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} = h_n^{\alpha, \beta} \quad m = n \quad (2.5)$$

siendo la función peso

$$K(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \quad (2.6)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\beta - \alpha - (2 + \alpha + \beta)x] \frac{dy}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (2.7)$$

La relación de recurrencia para los polinomios de Jacobi es

$$2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = J_1 P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - J_2 P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (2.8)$$

siendo

$$J_1 = (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\} \quad (2.9)$$

$$J_2 = 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta) \quad (2.10)$$

Dentro de los polinomios de Jacobi tenemos diferentes casos especiales según los valores de α y β .

2.1.1 Polinomios de Gegenbauer

Son un caso generalizado de los polinomios de Chebyshev y de Legendre con $\alpha = \beta$ y siendo ortogonales en $[-1,1]$ de acuerdo a

$$\int_{-1}^1 C_n^{(\alpha)}(x) C_m^{(\alpha)}(x) (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2} \delta_{nm} \quad (2.11)$$

siendo la función peso

$$K(x) = (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Se definen por la Formula de Rodrigues

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-2)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2n+2\alpha)} (1 - x^2)^{-\alpha + \frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1 - x^2)^{n+\alpha - \frac{1}{2}} \right] \quad (2.13)$$

o mediante su relación de recurrencia

$$C_0^\alpha(x) = 1$$

$$C_1^\alpha(x) = 2\alpha x$$

$$C_n^\alpha(x) = \frac{1}{n} [2x(n + \alpha - 1)C_{n-1}^\alpha(x) - (n + 2\alpha - 2)C_{n-2}^\alpha(x)] \quad (2.14)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2\alpha + 1)x \frac{dy}{dx} + n(n + 2\alpha)y = 0 \quad (2.15)$$

2.1.2 Polinomios de Chebyshev

Son un caso particular de los polinomios de Jacobi con $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{2}$ obteniendo dos polinomios distintos con diferente función peso, T_n y U_n , los dos ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ respecto de su función peso

Los polinomios de primer tipo tienen una relación de ortogonalidad tal que

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

siendo la función peso

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (2.17)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \quad (2.18)$$

Los polinomios de segundo tipo tienen una relación de ortogonalidad tal que

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x) \sqrt{(1-x^2)}dx = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} \quad (2.19)$$

siendo la función peso

$$K(x) = \sqrt{(1-x^2)} \quad (2.20)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + n(n+2)y = 0 \quad (2.21)$$

Los polinomios de primer tipo se definen por la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

mientras que los polinomios de segundo tipo se definen

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.1.3 Polinomios de Legendre

Son un caso particular de los polinomios de Jacobi con $\alpha = \beta = 0$, tienen una función peso de 1 y son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ de acuerdo a

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (2.24)$$

Se definen por la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.25)$$

o por su relación de recurrencia

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_n(x) &= (2n+1)xP_{n-1}(x) - nP_{n-2}(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0 \quad (2.27)$$

2.2 Polinomios de Laguerre

Son polinomios ortogonales que se definen por la fórmula de Rodrigues, con un $\alpha > -1$, de la siguiente forma

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \quad (2.28)$$

o por su relación de recurrencia

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)} &= 1 \\ L_1^{(\alpha)} &= 1 + \alpha - x \\ L_{n+1}^{(\alpha)} &= \frac{(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n+1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

siendo los polinomios simples aquellos con $\alpha = 0$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad (2.30)$$

Tienen una relación de ortogonalidad en el intervalo $[0, \infty)$ con respecto a su función peso tal que

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm} \quad (2.31)$$

siendo la función peso

$$K(x) = x^{\alpha} e^{-x} \quad (2.32)$$

2.3 Polinomios de Hermite

Son polinomios ortogonales que se pueden definir de dos formas diferentes mediante la fórmula de Rodrigues.

Polinomios de Hermite probabilísticos tal que

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.33)$$

o por su relación de recurrencia

$$He_0 = 1$$

$$He_1 = x$$

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x) \quad (2.34)$$

Tienen una relación de ortogonalidad en el intervalo $(-\infty, \infty)$ de acuerdo a

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_n(x) He_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi n!} \delta_{nm} \quad (2.35)$$

siendo la función peso

$$K(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.36)$$

Polinomios de Hermite físicos tal que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (2.37)$$

o por su relación de recurrencia

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = 2x$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (2.38)$$

Tienen una relación de ortogonalidad en el intervalo $(-\infty, \infty)$ de acuerdo a

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm} \quad (2.39)$$

siendo la función peso

$$K(x) = e^{-x^2} \quad (2.40)$$

Estos polinomios son soluciones de una ecuación diferencial de la forma (2.1) tal que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \quad (2.41)$$

3. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un proceso aleatorio que varía con el tiempo, es decir una serie temporal representando la evolución de un sistema que cambia según una variable aleatoria.

Definimos la cantidad tal que

$$X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

siendo Ω el espacio de probabilidad .

Si definimos $X(t, \omega)$ como el valor que tiene el proceso a un tiempo t para el resultado $\omega \in \Omega$. Cuando no es necesario referirse de forma explícita a la dependencia de $X(t, \omega)$ con ω describimos el procesos como $X(t)$.

Podemos pensar en procesos estocásticos de dos formas diferentes, fijando $\omega \in \Omega$ obtenemos una función del tiempo denominada como función muestra del proceso.

$$X^\omega: t \rightarrow X(t, \omega)$$

El proceso es una colección de funciones temporales y la probabilidad medida es una medida en el espacio de funciones.

Si fijamos $t \in [0, \infty)$ obtenemos una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad Ω

$$X_t: \omega \rightarrow X(t, \omega)$$

En este caso tenemos una colección de variables aleatorias en el intervalo temporal t . La probabilidad medida describe la distribución conjunta de dichas variables aleatorias.

3.1 Procesos Estacionarios

Procesos estacionarios son procesos estocásticos cuya distribución de probabilidad conjunta no varía en función del tiempo.

X_t con un t definido tal que, $-\infty < t < \infty$, es estacionario si X_{t+c} tiene la misma distribución para todo $-\infty < c < \infty$, esto conlleva a que todas sus distribuciones finitas dependan solo de las diferencias de tiempo.

3.2 Procesos Gaussianos

Un proceso estocástico es Gaussiano si todos sus conjuntos de distribuciones finitas son distribuciones Gaussianas multivariantes. Un proceso Gaussiano separable viene determinado por las matrices de la media y la covarianza de sus distribuciones de dimensiones finitas.

Un proceso es gaussiano si para cada conjunto finito de índices $t_1, \dots, t_k$ del conjunto T $X_{t_1 \dots t_k} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ es un vector evaluado en una variable aleatoria gaussiana.

3.3 Filtraciones

Suponemos $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un proceso estocástico en un espacio probabilístico Ω con σ -álgebra $\mathcal{F}$. Para cada $0 \leq t < \infty$ definimos σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ tal que

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t) \quad (3.1)$$

Si $0 \leq s < t$ entonces $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, esta familia de campos- σ $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ se conoce como filtración de $\mathcal{F}$.

Si X es una variable aleatoria entonces $E[X|\mathcal{F}_t]$ es la mejor estimación de X basada en las observaciones del proceso a un tiempo t .

3.4 Proceso Markoviano

Un proceso markoviano es aquel proceso estocástico que para cada $0 \leq s < t$ y cada función medible de Borel $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(X_t)$ tiene un valor esperado finito, tal que

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|X_s] \quad (3.2)$$

estando $\mathcal{F}_s$ definida por (3.1), esta propiedad implica que el proceso estocástico no tiene memoria y que solo importa su estado presente.

Podemos además definirlo en términos de una distribución de dimensiones finitas, para cualquier tiempo

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots < t_n \quad (3.3)$$

la densidad de probabilidad condicionada que $X_{t_i} = x_i$ para $m+1 \leq i \leq n$ dado que $X_{t_i} = x_i$ para $1 \leq i \leq m$ viene dada por

$$p(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) = \frac{p(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{p(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)} \quad (3.4)$$

Será un proceso de Markov si las densidades condicionadas dependen solo del condicionamiento del tiempo más reciente, tal que

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n; \dots; x_2, t_2; x_1, t_1) = p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n) \quad (3.5)$$

Para un proceso de Markov tenemos

$$p(x_n, t_n; \dots; x_2, t_2; | x_1, t_1) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (3.6)$$

Podemos determinar todas las distribuciones conjuntas de probabilidad en dimensión finita de un proceso continuo de Markov X_t en términos de la densidad de transición $p(x, t | y, s)$ y la densidad de probabilidad $p_0(x)$ de su valor inicial X_0 . La densidad puntual de X_t es

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t | y, 0) p_0(y) dy \quad (3.7)$$

La probabilidad de transición de un proceso de Markov no es arbitrario y satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov. En el caso de un proceso de Markov continuo se define tal que

$$p(x, t | y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t | z, r) p(z, r | y, s) dz \quad \text{para cualquier } s < r < t \quad (3.8)$$

lo cual quiere decir que de un y a un tiempo s a un x a tiempo t , el proceso debe pasar por un punto z a un tiempo intermedio r .

Un proceso de Markov continuo es homogéneo en el tiempo si

$$p(x, t | y, s) = p(x, t - s | y, 0) \quad (3.9)$$

con lo cual sus propiedades estocásticas son invariantes bajo translaciones temporales. En este caso podemos escribir una ecuación diferencial estocástica cuyos coeficientes no dependen explícitamente definiendo un proceso continuo de Markov homogéneo en el tiempo, teniendo $p(x, t | y, s) = p(x, t - s | y)$ y de esta forma tenemos

$$p(x, t | y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t - s | z) p(z, s | y) dz \quad \text{para cualquier } 0 < s < t \quad (3.10)$$

4. Movimiento Browniano

En 1827 Robert Brown observó cómo pequeñas partículas de polen en un fluido se movían de forma errática, aunque inicialmente consideró que era signo de vida posteriormente repetido el experimento con materiales inorgánicos se llegó a la conclusión que era debido al fluido y no a las partículas como tal. Se describió este fenómeno y los sistemas estocásticos en general por Einstein en 1905, Smoluchovski en 1906 y Langevin en 1908.

Si una partícula se mueve en un fluido se ralentiza debido a las colisiones sufridas en la dirección que se mueve. Asumiendo que la partícula es esférica y en un nivel macroscópico podemos definir la fuerza como una fricción mediante la ley de Stoke tal que

$$F = -6\pi\eta Rv \quad (4.1)$$

siendo η la viscosidad del fluido y R el radio de la esfera.

No tenemos información sobre la fuerza que sufre la partícula en un tiempo dado, ni su dirección, llamándola $\xi(t)$.

La segunda ley de Newton aplicada a dicha partícula será

$$F = ma = -6\pi\eta Rv + \xi(t). \quad \rightarrow \quad a = \dot{v} = -\frac{6\pi\eta Rv}{m} + \frac{1}{m}\xi(t) \quad (4.2)$$

Reescribiendo la ecuación tal que

$$\dot{v} = -\alpha v + \xi(t) \quad (4.3)$$

Ecuaciones con esta forma son denominadas ecuaciones de Langevin, además son ecuaciones inhomogeneas y tienen solución posible dividiéndose en solución general, homogénea, y solución particular, inhomogénea.

La solución general de la ecuación homogénea sería

$$\dot{v} = -\alpha v \quad \rightarrow \quad v(t) = ce^{-\alpha t} \quad (4.4)$$

Para encontrar la solución particular utilizamos el método de constante variable.

$$v_p(t) = c(t)e^{-\alpha t} \quad \rightarrow \quad \dot{v}_p(t) = \dot{c}(t)e^{-\alpha t} - \alpha c(t)e^{-\alpha t} \quad (4.5)$$

que si lo sustituimos en la ecuación (4.3) tenemos

$$\dot{v}_p(t) = \dot{c}(t)e^{-\alpha t} - \alpha c(t)e^{-\alpha t} = -\alpha c(t)e^{-\alpha t} + \xi(t) \quad (4.6)$$

$$\dot{c}(t) = \xi(t)e^{\alpha t} \quad \rightarrow \quad c(t) = \int_{-\infty}^t \xi(t')e^{\alpha t'} dt' \quad (4.7)$$

de esta forma la solución de la ecuación inhomogenea viene dada por

$$v_p(t) = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t \xi(t') e^{\alpha t'} dt' \quad (4.8)$$

La solución general entonces con (4.8) y (4.4) sería

$$v(t) = ce^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t \xi(t') e^{\alpha t'} dt' \quad (4.9)$$

A tiempos largos la ec(4.9) ve la solución homogénea desaparecer de forma que

$$v(t) = e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^t \xi(t') e^{\alpha t'} dt' \quad (4.10)$$

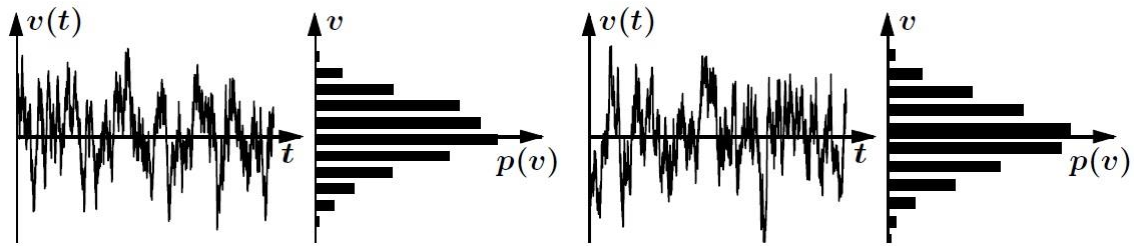


Figura 4.1. Representación de os simulaciones calculadas según (4.10) se muestra la velocidad frente al tiempo y sus respectivas distribuciones.

Se puede observar como los histogramas que representan las distribuciones gaussianas son similares, mientras que las representaciones frente al tiempo son diferentes.

5. Ruidos

5.1 Ruido Blanco

El termino ruido blanco, proviene de la teoría espectral de procesos estacionarios aleatorios. Sus valores de señal a dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística. Debido a ello es una señal aleatoria con densidad espectral de potencia (SPD, Spectral Power Distribution) constante, es decir que está uniformemente distribuida por todas las frecuencias.

Es de gran utilidad para la modelización de fenómenos en los que el tiempo de correlación del ruido es mucho menor que otros escalas temporales de interés, por ejemplo en el movimiento Browniano siendo el tiempo de correlación del ruido debido al impacto de las moléculas es del orden del tiempo de colision de las moléculas del fluido entre ellas, este es muy pequeño en comparación con las escalas temporales utilizadas en las SDE para modelizar el movimiento de las partículas.

Son sistemas cuya autocorrelación se define como

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t') \quad (5.1)$$

siendo D la intensidad de ruido, viendo que su correlación es cero excepto para $t = t'$

La autocorrelación viene dada por

$$\begin{aligned} \langle G(\tau) \rangle &= \langle \lim_{T \rightarrow \infty} N \int_{-T}^T \xi(t)\xi(t - \tau) dt \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle N \rangle \int_{-T}^T 2D\delta\{t - (t - \tau)\} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle N \rangle 2D\delta(\tau) \int_{-T}^T dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle N \rangle 4TD\delta(\tau) \end{aligned} \quad (5.2)$$

La normalización de N vendría dada por

$$\langle N \rangle^{-1} = \int_{-T}^T \langle \xi^2(t) \rangle dt = \int_{-T}^T 2D\delta(0) dt = 4TD\delta(0) \quad (5.3)$$

De forma que obtenemos una correlación tal que

$$\langle G(\tau) \rangle = \frac{4TD\delta(\tau)}{4TD\delta(0)} = \frac{\delta(\tau)}{\delta(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Esto implica que las series temporales solo están correlacionadas en el punto trivial $\tau = 0$ y la correlación desaparece para cualquier cambio finito de forma que la longitud de correlación es cero.

Teniendo en cuenta el teorema Wiener-Khinchin que relaciona la función de autocorrelación $G(\tau)$ con el espectro $S(\omega)$, siendo esta última una transformada de Fourier de la autocorrelación de forma que

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(\tau)\} = 1 = cte \quad (5.5)$$

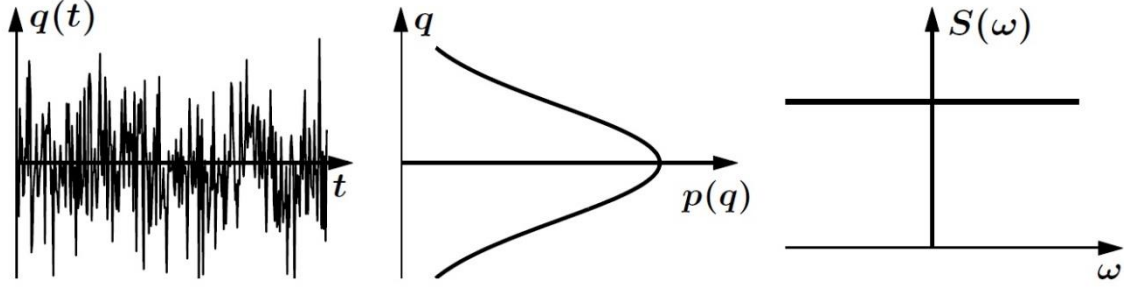


Figura 5.1. Representación de la serie temporal, probabilidad de distribución y espectro de ruido blanco.

5.2 Ruido de Color

El ruido blanco es una idealización de lo que se observa en el mundo físico, hay que tener en cuenta que el ruido y el sistema físico operan juntos. Podemos definir su correlación tal que

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} \quad (5.6)$$

En este caso la función correlación varía de forma exponencial con la variación del tiempo.

$$\langle G(t) \rangle = e^{-\alpha|t|} \quad (5.7)$$

donde $\alpha = \frac{1}{\tau}$, siendo τ el tiempo de correlación que representa el tiempo para el que las correlaciones han descendido en un factor e^{-1} . Conociendo $\langle G(t) \rangle$ podemos calcular el espectro.

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-\alpha t - i\omega t}}{-\alpha - i\omega} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{\alpha t - i\omega t}}{\alpha - i\omega} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{-\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esta es una función Lorentziana. Dicha función decae a la mitad del máximo cuando $\omega = \alpha$ de forma que se puede determinar el valor de α de manera sencilla trazando una línea horizontal y observando donde interseca con la curva como vemos en la figura 5.2.

Además a tiempos largos decae con la forma ω^{-2} , esto se conoce como ruido marrón. Una propiedad interesante del ruido marrón es que es la integral del ruido blanco, también se puede ver como el ruido blanco la derivada del marrón.

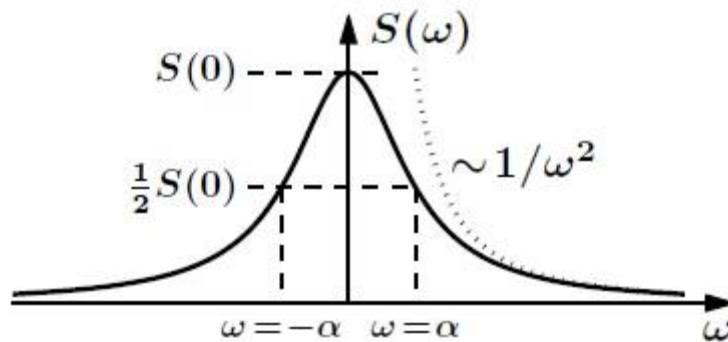


Figura 5.2. Propiedades y forma de la función Lorentziana.

No solo tenemos ruido blanco o marrón, hay distintos tipos de ruidos según como desciende el espectro, entre ellos el ruido rosa que varía tal que ω^{-1} .

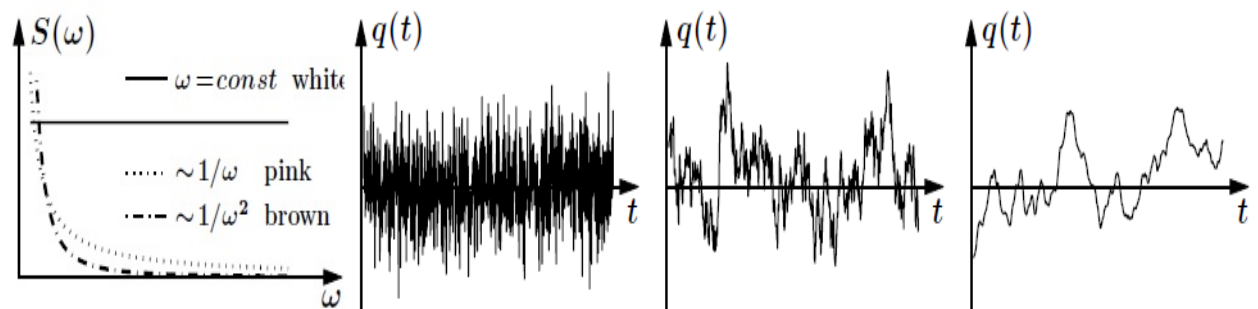


Figura 5.3. Espectro de los diferentes tipos de ruido y sus series temporales correspondientes, ruido blanco, marrón y rosa.

6. Ecuaciones de Langevin y Fokker-Planck

Un caso especial de la ecuación de Langevin es el movimiento Browniano que hemos introducido previamente. Podemos definir un caso más general de la ecuación de Langevin de la siguiente forma

$$\dot{q} = F(q) + \sqrt{Q}\xi(t) \quad (6.1)$$

donde $\xi(t)$ hace referencia a un ruido blanco con media cero y distribución Gaussiana, este término es estocástico mientras que $F(q)$ es un término determinista.

Si bien conocemos la distribución para el movimiento Browniano nos interesa encontrar una forma de determinar la distribución $p(q)$ de la ecuación de Langevin de la forma (6.1). Para ello tenemos la ecuación de Fokker-Planck que se define tal que

$$\partial_t p(q, t) = \frac{\partial}{\partial q} p(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q} \{F(q)p(q, t)\} + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} p(q, t) \quad (6.2)$$

El término $-\frac{\partial}{\partial q} \{F(q)p(q, t)\}$ se denomina término de deriva y hace referencia al término determinista de la ecuación de Langevin, mientras que $\frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} p(q, t)$ es el término de difusión y modeliza las contribuciones estocásticas. (6.2) es una ecuación diferencial parcial, es difícil trabajar con estas ecuaciones debido a que para obtener una solución única hay que especificar las condiciones iniciales y las condiciones de ligadura.

Podemos determinar una solución analítica estacionaria para (6.2) en la que el tiempo va a infinito de forma que

$$\partial_t p(q, t) = -\frac{\partial}{\partial q} \left\{ F(q)p(q, t) + \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial q} p(q, t) \right\} = 0 \quad (6.3)$$

Como $p(q, t)$ es una distribución y por tanto es normalizable para $q \rightarrow \pm\infty$ debe desaparecer $p(q, t) = 0$. Esto no puede ocurrir con una pendiente finita de forma que $\frac{\partial}{\partial q} p(q, t) = 0$ para $q \rightarrow \pm\infty$. De esta forma desaparecen los dos términos y como constante no puede depender de q , este comportamiento se conoce como condiciones naturales de borde.

$$F(q)p_s(q) = \frac{Q}{2} \frac{d}{dq} p_s(q) \rightarrow \frac{2}{Q} F(q) dq = \frac{dp_s(q)}{p_s(q)} \rightarrow \frac{2}{Q} \int F(q) dq = \ln p_s(q) + c \quad (6.4)$$

De forma que la distribución estacionaria será

$$p(q) = Ne^{\frac{2}{Q} \int F(q) dq} = Ne^{-\frac{2}{Q} V(q)} \quad (6.5)$$

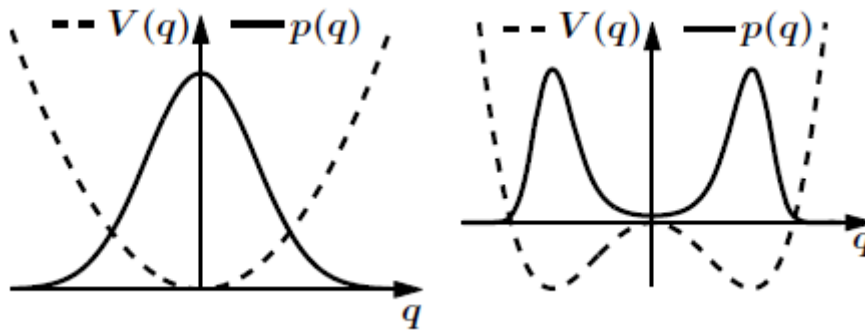


Figura 6.1. Representación gráfica de las distribuciones estacionarias (continua) y de su respectivo potencial (discontinua)

7. Método

7.1 Método de Monte-Carlo

En términos generales el método de Monte-Carlo se puede utilizar para describir cualquier técnica que utilizando muestreo estadístico dé soluciones numéricas a problemas analíticos. De forma más específica una simulación de Monte-Carlo es un método para propagar las incertidumbres del modelo de entrada al modelo de salida. Dicha simulación se basa en el proceso de representar dichas incertidumbres mediante su probabilidad de distribución.

Para integrales de la forma

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (7.1)$$

siendo Ω el dominio de integración, podemos expresar la esperanza de una variable aleatoria X con una función densidad $\rho(x)$ tal que

$$E(f(X)) = \int_{\Omega} f(x) \rho(x) dx \quad (7.2)$$

Podemos expresar (7.1) en términos de la esperanza, teniendo $\rho(x) > 0$ y $f(x) \neq 0$ tenemos

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx = I = \int_{\Omega} \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx = E\left(\frac{f(X)}{\rho(X)}\right) = E(g(X)) \quad (7.3)$$

La utilidad de esto reside en la ley de los grandes números, esta afirma que para una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$E(g(X)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \quad (7.4)$$

La ecuación (7.4) nos da una aproximación probabilística de (7.1).

Debido a la naturaleza de este método se ve limitado al uso de la estimación de las integrales. En muchas situaciones nos interesa obtener más información como puede ser la forma de la distribución. Para ello se divide el espacio de fase en barras y calculando el valor medio de estas y obteniendo un histograma aproximado a la distribución. En este caso, la probabilidad de que un suceso caiga en una de dichas barras es

$$E\left[\frac{N_b}{N}\right] = P(x_{b-1} \leq x < x_b) \quad (7.5)$$

siendo $P(x)$ la densidad de probabilidad, x_b y x_{b-1} son los límites de las barras.

Si lo repetimos para todas las barras obtenemos un histograma aproximado a la función densidad de probabilidad teniendo

$$P(x) = \sum_{b=1}^M \left(\overline{P_{M,b}^{hist}}(x) + O[\Delta x_b] \right) \quad (7.6)$$

siendo $\overline{P_{M,b}^{hist}}(x) = \frac{P(x_{b-1} \leq x < x_b)}{\Delta x_b}$, con Δx_b siendo el ancho de la barra y M el número de barras.

7.2 Functional Expansion Tally

Como forma alternativa para obtener una información mayor podemos utilizar Monte-Carlo para estimar los coeficientes de una expansión funcional de una distribución real con respecto a un conjunto de funciones base, normalmente funciones ortogonales. El conjunto de coeficientes puede ser usado para construir una aproximación continua del funcional de la distribución real. Esta técnica se conoce como técnica de expansión funcional o functional expansion tallies (FET, siglas en inglés)

Las ventajas de este método son variadas, la principal es que cada conteo en la región contribuye a todo los coeficientes aportando información tanto a la forma de la distribución como al valor medio. Además es posible elegir un conjunto de funciones base que preserven, a términos de orden bajo, la integral en una región de interés, preservando así el valor medio estimado por los conteos convencionales. Por lo tanto esta técnica proporcionaría mayor información de ordenes altos de la caminata aleatoria que el método tradicional de Monte-Carlo.

La función densidad de probabilidad $f(x)$ se representa como una expansion en serie en una conjunto completo de una base de funciones. Esta base se utiliza posteriormente para estimar los coeficientes de la expansion. Tomando polinomios de la forma (2.2) tenemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} k_n P_n(x) \quad (7.7)$$

siendo $\overline{a_n}$ el coeficiente n-ésimo real de la expansión definido tal que

$$\overline{a_n} = \int_{\Gamma} P_n(x) K(x) f(x) dx \quad (7.8)$$

y k_n la constante de normalización de dicho coeficiente. Mediante Monte-Carlo podemos aproximar los coeficientes de la forma

$$\widehat{\overline{a_n}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_n(x_i) f(x_i) \quad (7.9)$$

7.3 Procedimiento utilizado

Para el análisis de las ecuaciones de Langevin de la forma (6.1) que hemos realizado se ha utilizado el método FET. Los potenciales se han definido en cada caso.

El algoritmo ha sido realizado con Matlab y sigue en todos los casos una estructura común, inicialmente se han generado un conjunto de números pseudoaleatorios mediante un algoritmo del tipo Box-Muller tal que

$$Y_1 = \sqrt{-2 \log(X_1)} \cos(2\pi X_2) \quad \text{y} \quad Y_2 = \sqrt{-2 \log(X_1)} \sin(2\pi X_2) \quad (7.10)$$

siendo X_1 y X_2 dos variables uniformes e independientes.

En nuestro caso la variable aleatoria Y_1 será introducida en (6.1) en forma de ruido blanco. Para la resolución de la ecuación diferencia se ha utilizado el método de Euler hacia delante quedando de la forma.

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} = U(x_i) + \sqrt{D} Y_1 \quad (7.11)$$

Se han generado el conjunto de polinomios según las relaciones de recurrencia definidas en el apartado 2. Posteriormente se han obtenido los coeficientes según (7.9)

Se ha generado un histograma de la función de densidad de probabilidad mediante el método tradicional de Monte-Carlo y calculado la función de densidad de probabilidad según (7.7) con los coeficientes obtenidos anteriormente. Para finalizar se han representado dichas funciones de densidad y se han comparado.

Es importante la elección en los polinomios ortogonales, como norma básica podemos tener en cuenta las regiones de integración de dichos polinomios y elegir en consecuencia según si nuestra función está acotada, va de 0 a ∞ o de $-\infty$ a ∞ .

Más información sobre los algoritmos utilizados puede encontrarse en los anexos adjuntados al final de este trabajo.

8. Resultados

Inicialmente hemos utilizado este método para observar la distribución de ángulos en la dispersión de partículas de masa m contra esferas de masa muy superior en función del parámetro de impacto. Para este caso vamos a utilizar polinomios de Legendre.

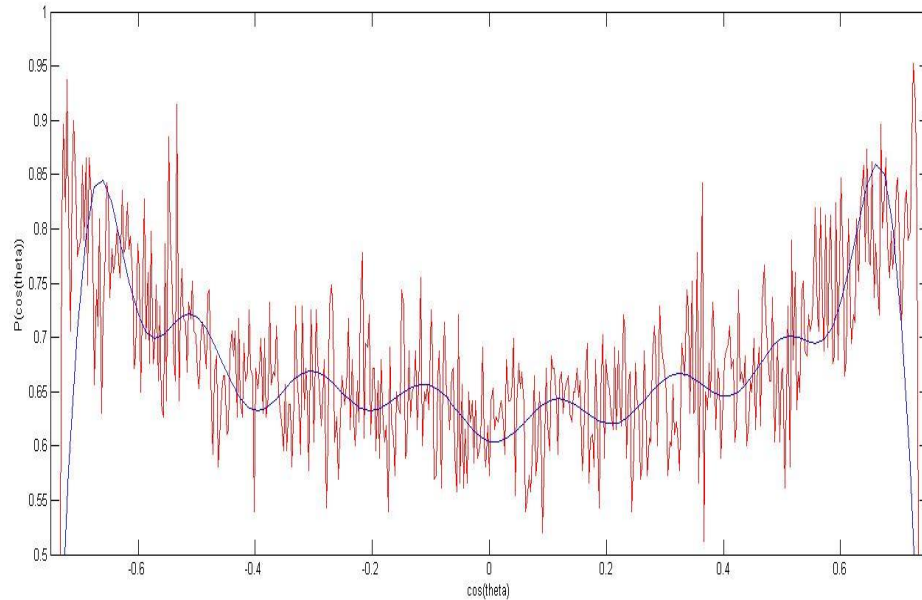


Figura 8.1. Representación gráfica de la función distribución del coseno de los ángulos para un parámetro de impacto $b=0.4$ y $n=30$.

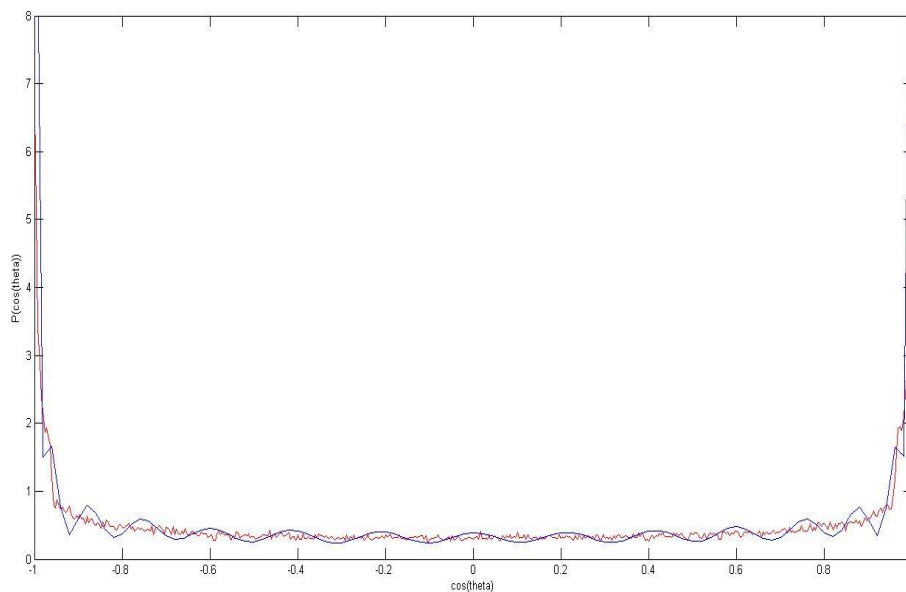


Figura 8.2. Representación gráfica de la función distribución del coseno de los ángulos para un parámetro de impacto $b=0.8$ y $n=30$.

Ha continuación hemos estudiado las ecuaciones de Langevin para ello hemos tomado un potencial tal que $U(x) = a \frac{x^2}{2}$, además en este caso se ha dibujado la distribución teórica obtenida y se ha comparado con los resultados obtenidos por Montecarlo y por FET.

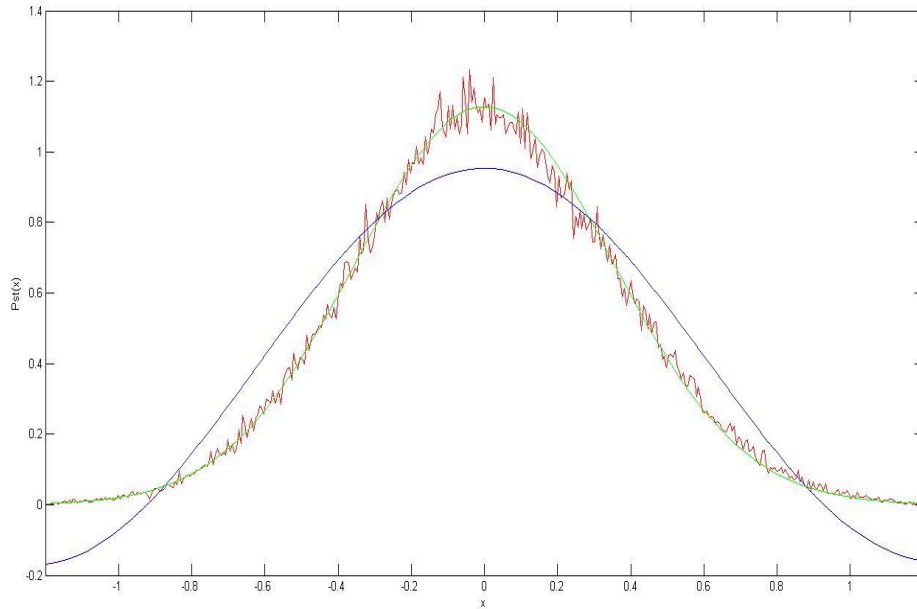


Figura 8.3. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,4$ y $n = 10$. Siendo la función teórica la verde, Montecarlo la roja y FET la azul.

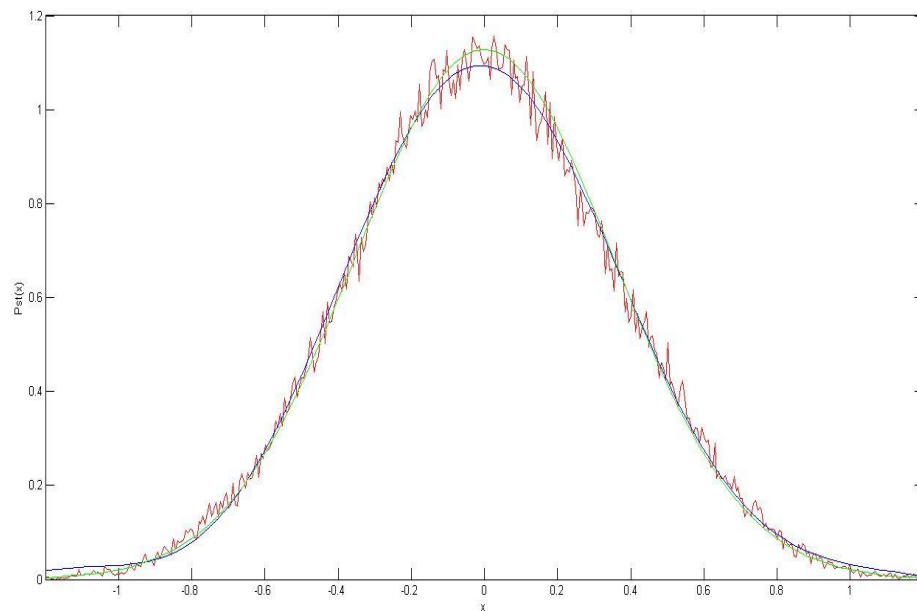


Figura 8.4. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,4$ y $n = 30$. Siendo la función teórica la verde, Montecarlo la roja y FET la azul.

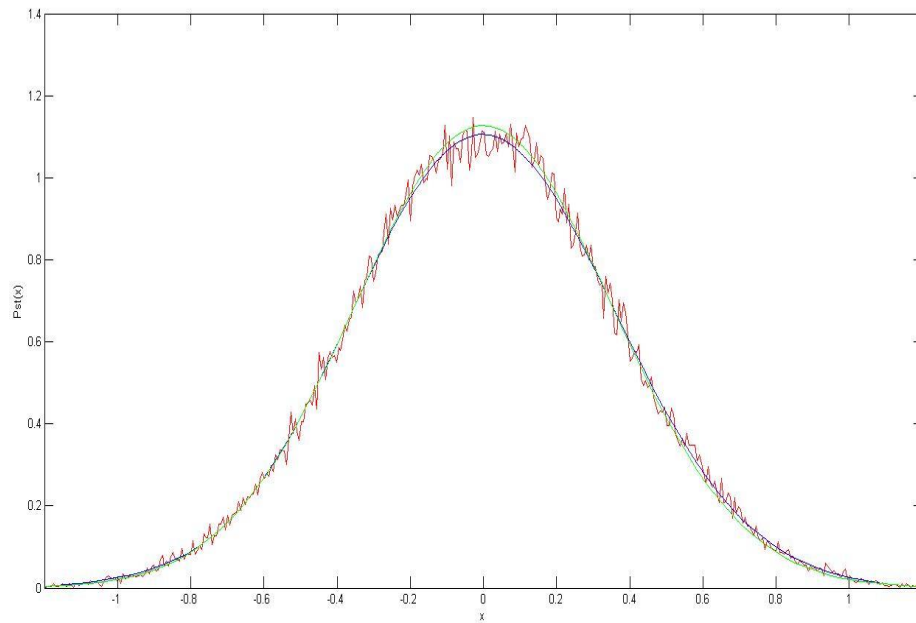


Figura 8.5. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,4$ y $n = 50$. Siendo la función teórica la verde, Montecarlo la roja y FET la azul.

En el siguiente caso hemos tomado un potencial tal que $U(x) = a \frac{x^4}{4}$ y se han comparado las funciones de distribución obtenidas por Montecarlo y FET

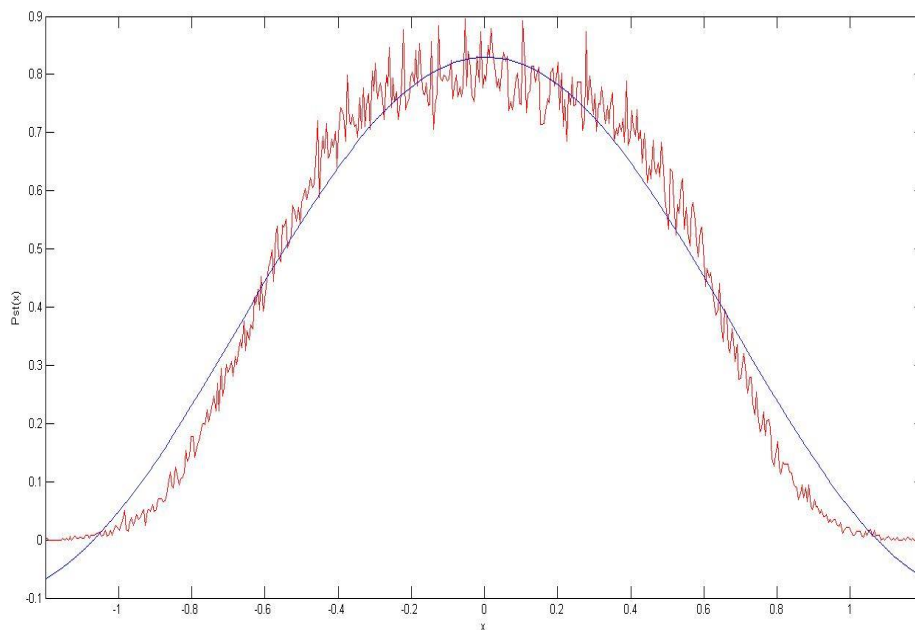


Figura 8.6. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 10$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

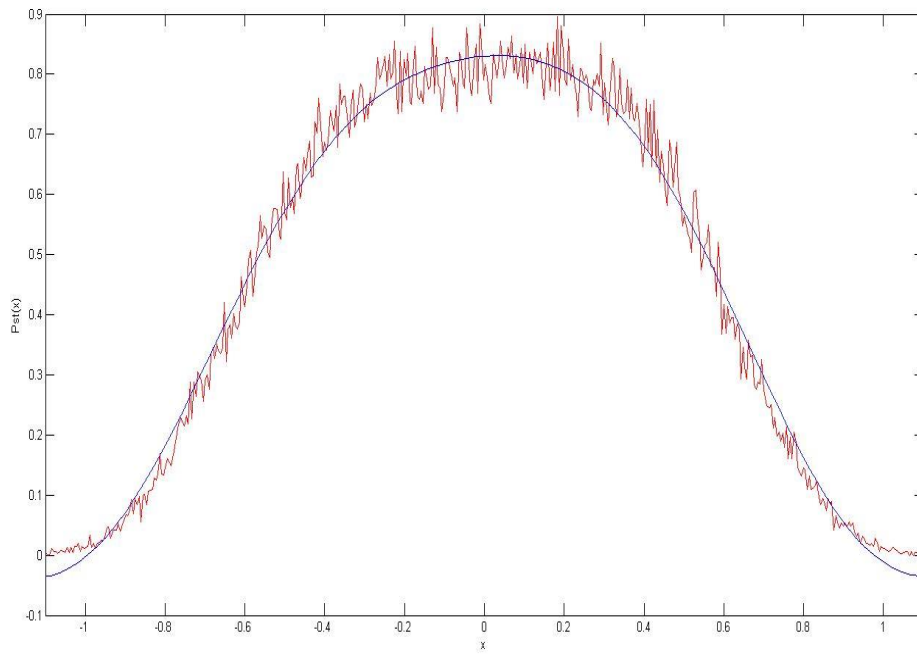


Figura 8.7. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 30$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

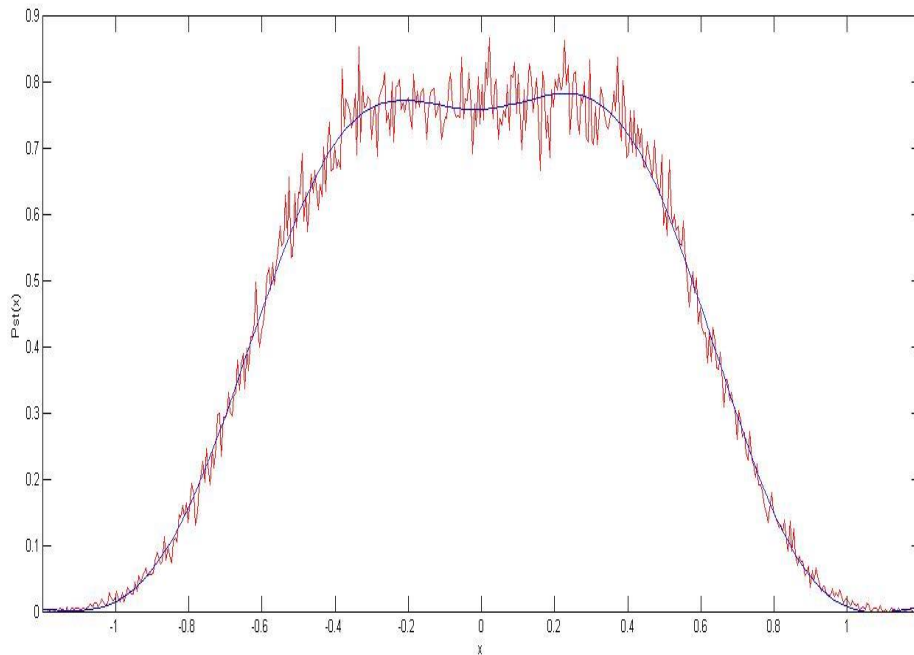


Figura 8.8. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 50$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

En el siguiente caso hemos tomado un potencial tal que $U(x) = a \frac{x^6}{6}$ y se han comparado las funciones de distribución obtenidas por Montecarlo y FET.

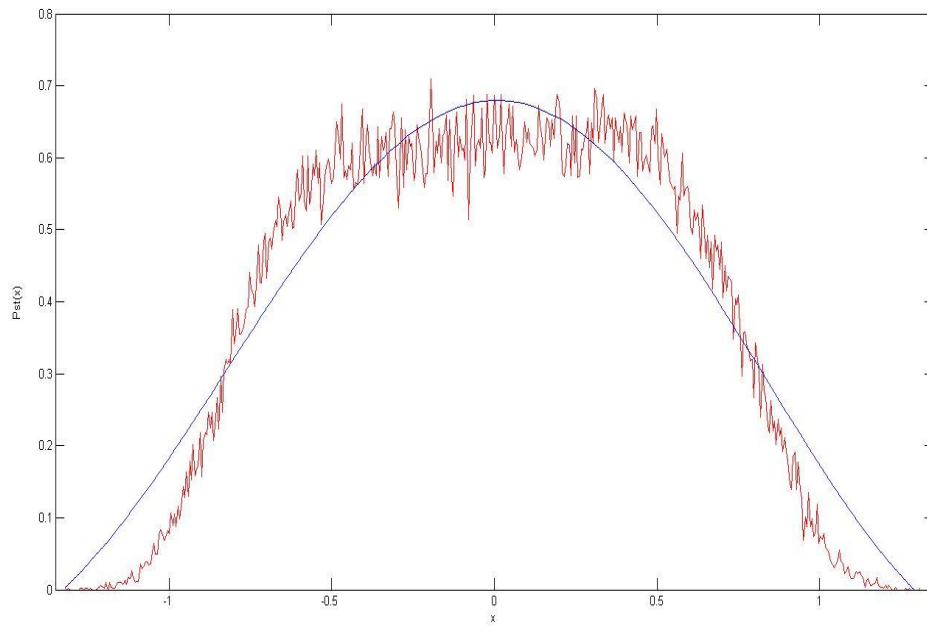


Figura 8.9. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,6$ y $n = 10$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

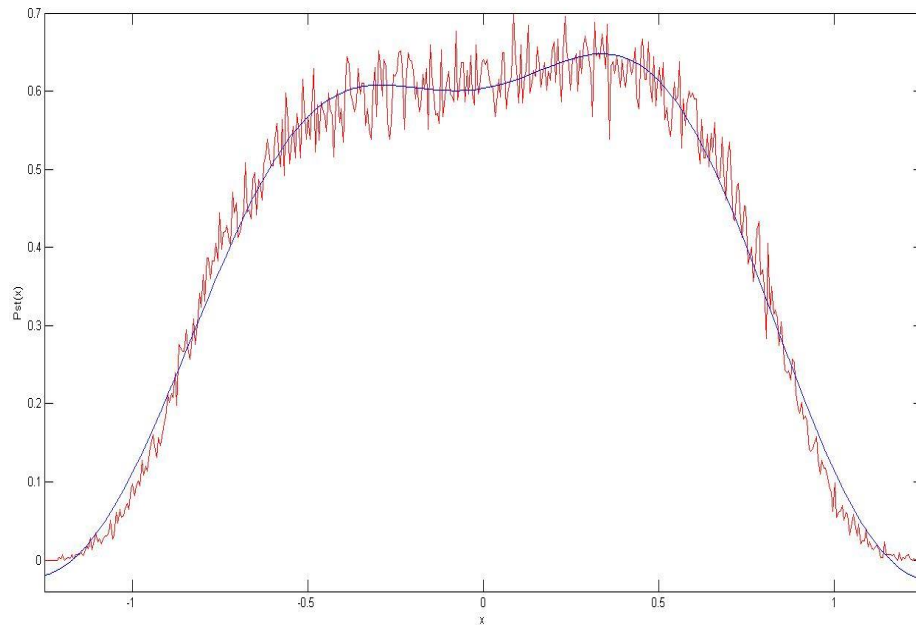


Figura 8.10. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,6$ y $n = 30$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

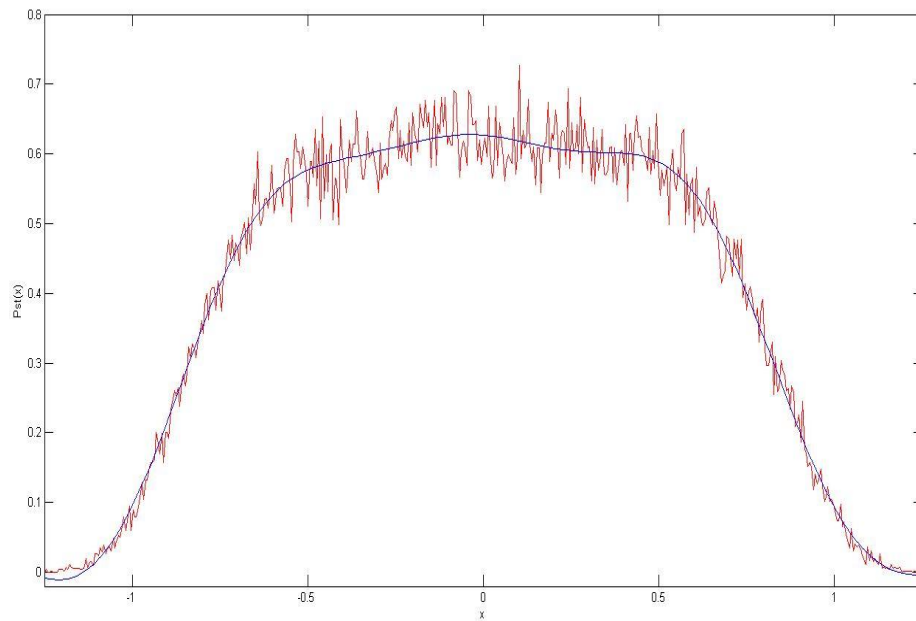


Figura 8.11. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$ y $a = 0,6$ y $n = 60$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

En siguiente supuesto hemos tomado un potencial tal que $U(x) = a_1 \frac{x^4}{4} - a_2 \frac{x^4}{2}$, se han comparado con los resultados obtenidos por Montecarlo y por FET.

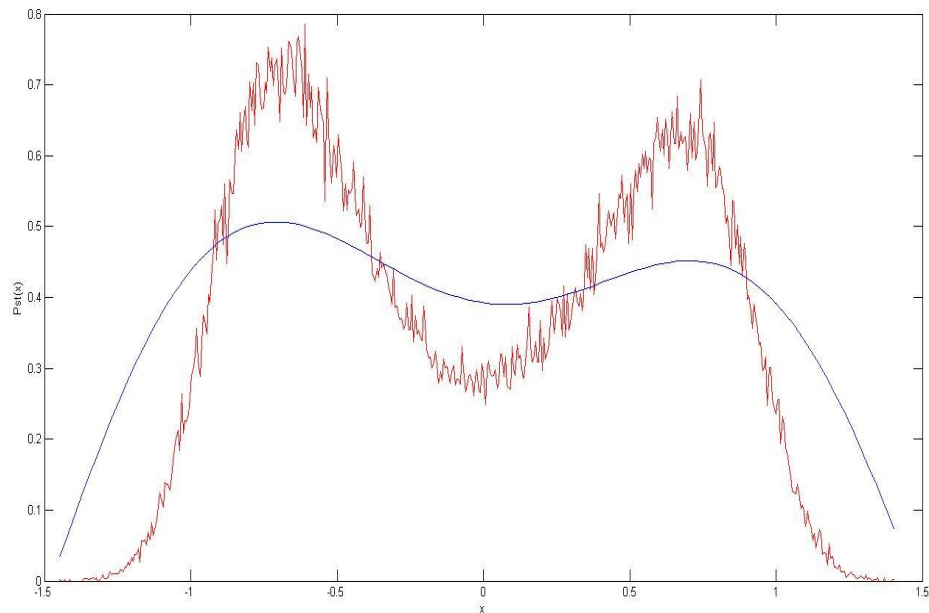


Figura 8.12. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$, $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,4$ y $n = 10$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

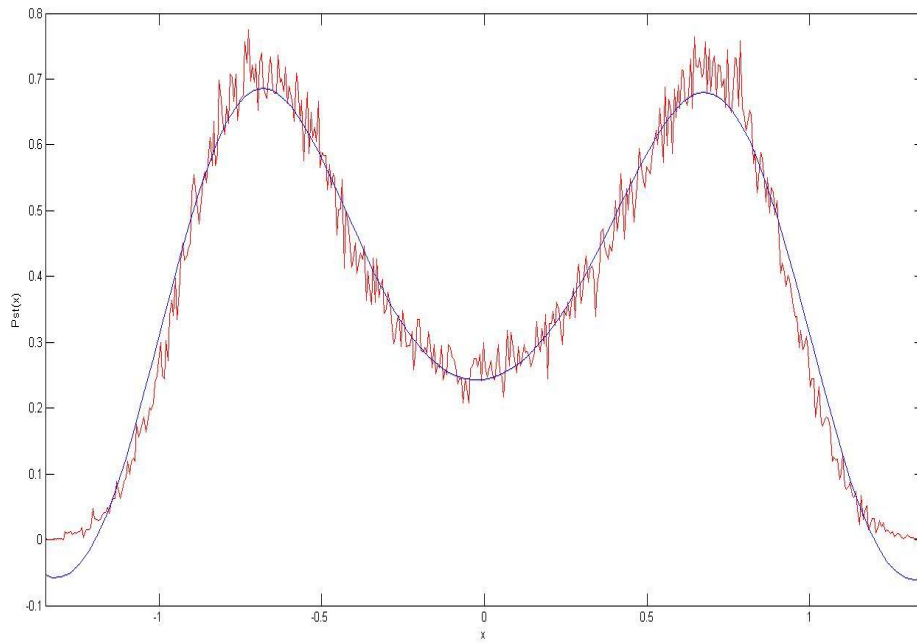


Figura 8.13. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$, $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,4$ y $n = 40$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

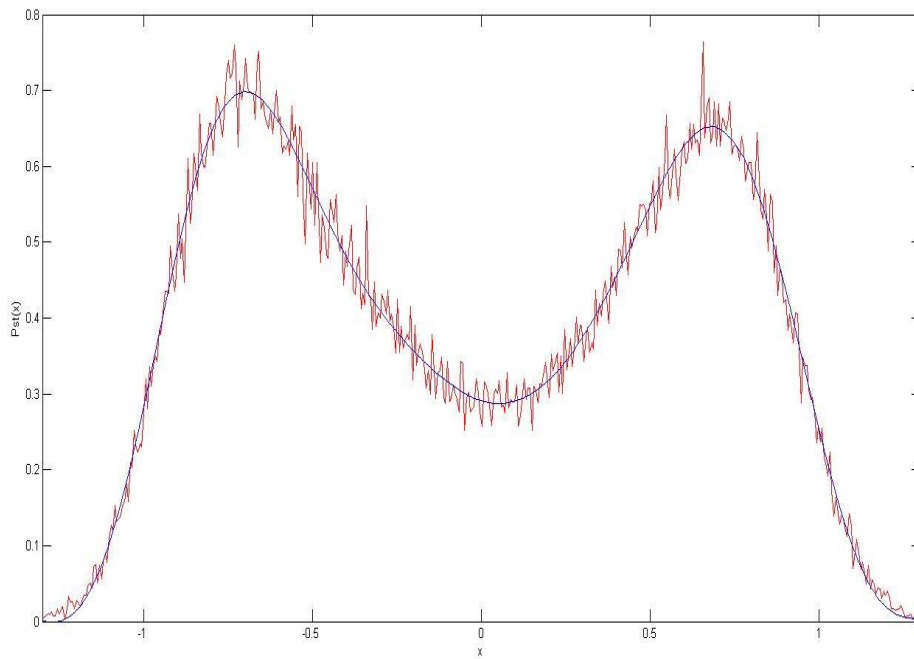


Figura 8.14. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \xi$, con $N = 100.000$, $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,4$ y $n = 80$. Siendo la función obtenida por Montecarlo la roja y FET la azul.

Para finalizar hemos tomado un potencial tal que $U(x) = a \frac{x^2}{2}$ y en vez de estudiar en el caso de ruido blanco ξ hemos utilizado ruido correlacionado de la forma $\zeta = -\frac{\dot{x}}{\tau} + \xi$, en este caso se ha comparado los resultados obtenidos por Montecarlo y por FET para ambos ruidos.

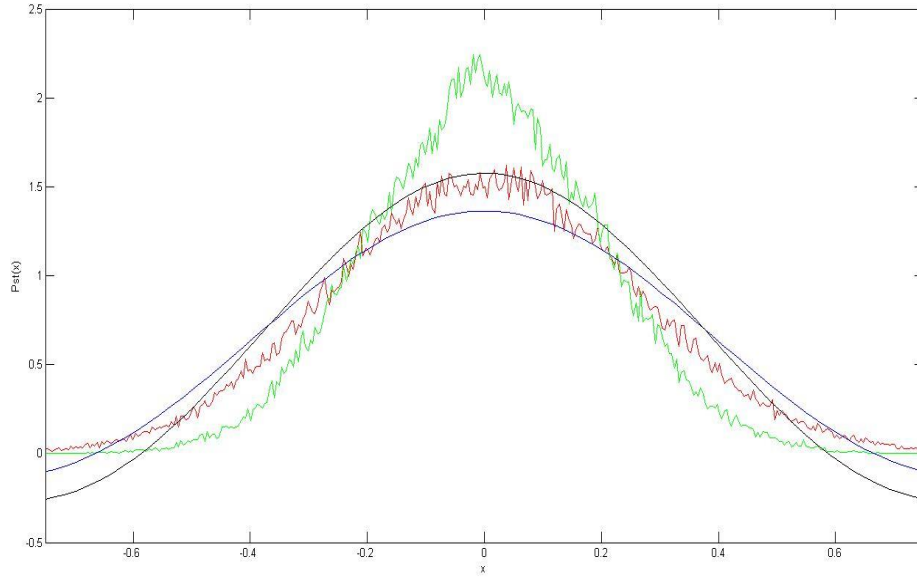


Figura 8.15. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \zeta$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 20$. Siendo Montecarlo con ruido blanco la función roja, con ruido de color la verde, FET con ruido blanco la función azul y con ruido de color la negra.

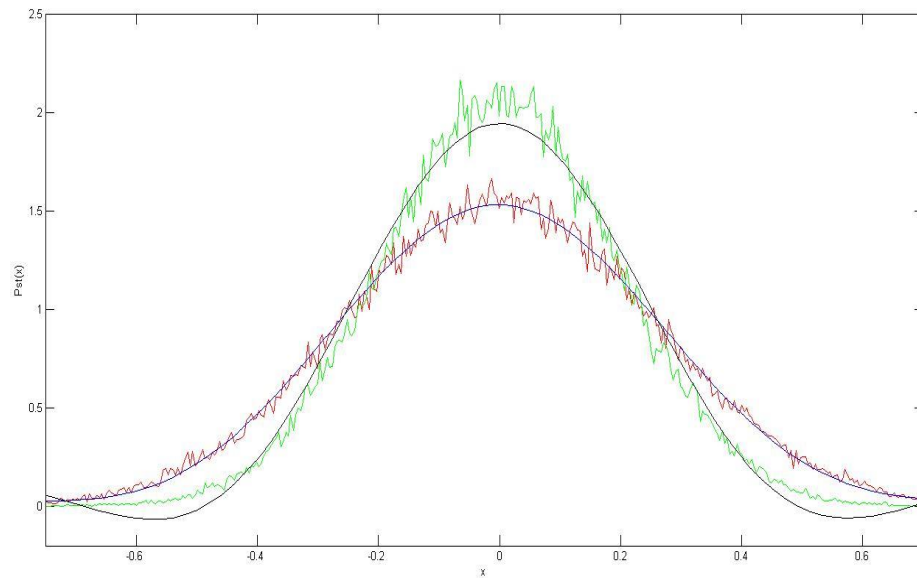


Figura 8.16. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \zeta$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 50$. Siendo Montecarlo con ruido blanco la función roja, con ruido de color la verde, FET con ruido blanco la función azul y con ruido de color la negra.

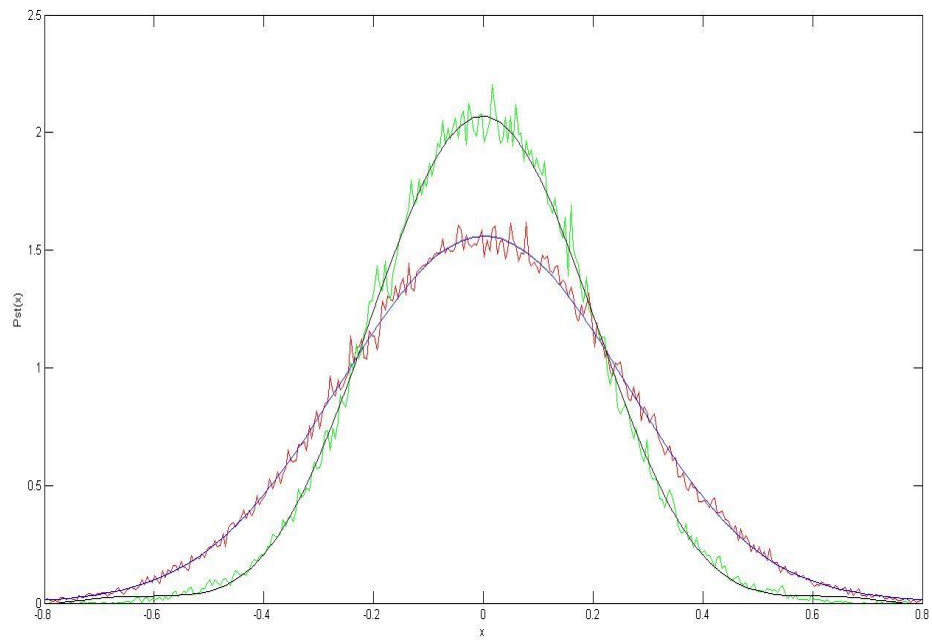


Figura 8.17. Representación gráfica de la función de distribución estacionaria de $\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}[U(x)] + \zeta$, con $N = 100.000$ y $a = 0,8$ y $n = 90$. Siendo Montecarlo con ruido blanco la función roja, con ruido de color la verde, FET con ruido blanco la función azul y con ruido de color la negra.

9. Conclusiones

Una vez realizadas las comparaciones entre distintos casos y ejemplos, se puede afirmar que la técnica de expansión funcional o FET es adecuada para la simulación mediante Monte-Carlo de distintos tipos de ejemplos en particular ecuaciones de Langevin que han sido las estudiadas en este trabajo.

Es importante señalar que mediante el uso de la técnica de expansión funcional obtenemos una función continua que nos puede facilitar cálculos teóricos posteriores

Este trabajo se ha centrado en la comparación de las funciones de distribución, si bien en trabajos posteriores sería interesante incluir el tratamiento de errores a la hora del estudio de los coeficientes de la expansión en serie. En este caso tendremos dos fuentes de error, el error estadístico, que provendrá de la naturaleza estocástica del método de Monte Carlo y el error de truncamiento, que proviene de la aproximación de una función por una expansión en serie finita.

Bibliografía

- [1] A. Noel and H. S. Wio, A new series-expansion approach in Monte Carlo: Application to neutron shielding, Ann.nucl. Energy, Vol11, No.5, pp.225-227, 1984.
- [2], Journal of Computational Physics 211, pp. 129-153, 2006.
- [3] G. E. Andrews and R. Askey, Classical Orthogonal Polynomial,, Volume 1171 of the series Lecture Notes in Mathematic pp 36-52, 2006.
- [4] A. Fuchs, Nonlinear Dynamics in Complex Systems, Theory and Applications for the Life-, Neuro- and Natural Sciences, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013, ISBN 978-3-642-33551-8
- [5] J. K. Hunter, Lecture Notes on Applied Mathematics, Methods and Models, Chapter 5, Department of Mathematics University of California, Davis, 2009, https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m280_09/ch5.pdf
- [6] P. Hänggi and P. Jung, Colored Noise in Dynamical Systems, Advances in Chemical Physics, Volume LXXXIX, edited by I. Prigogine and Stuart A. Rice, ISBN 0-471-05157-8, 1995
- [7] What is the Monte Carlo method, GoldSim Technology Group, 2016, <http://www.goldsim.com/Web/Introduction/Probabilistic/MonteCarlo/>
- [8] P. J. Atzberger, The Monte-Carlo Method, UCSB Math Department, <http://www.math.ucsb.edu/~atzberg/finance/monteCarloMethod.pdf>

A.1. Código Matlab 1

```
clear all
N=input('N =')%N° de puntos
n=input('n=') %n° de polinomios de legendre
b=input('b=')%parámetro de impacto
x=random('Uniform',-b,b,N,1);%Generación de números aleatorios
P(n,N)=0;
%Ecuación de distribución de ángulos
for j=1:1:N

    T(j)=pi-2*asin(x(j));

end
M=(max(T)+ min(T));
for i=1:1:N
    T(i)=T(i)-pi/2;
end
T=T(N/10:N); %Eliminamos régimen transitorio
T2=cos(T);
N=length(T2);
%Polinomios Ortogonales de Legendre.
P(1,1:N)=ones(1,N);
P(2,1:N)=T2;
for i=2:1:n-1

    P(i+1,1:N)=((2*i-1)*T2.*P(i,1:N)-(i-1)*P(i-1,1:N))/(i);

end
%Normalización de los Polinomios.
for l=1:1:n
    P(l,1:N)=P(l,1:N)*(2*(l-1)+1)/2;
end
%Coeficientes del desarrollo en serie.
for q=1:1:n
    A(q)=sum(P(q,1:N))/N;
end

T1=(min(T2):(max(T2)-min(T2))/100:max(T2));
f=length(T1);
%Generación de números y de polinomios de Legendre para uso en la
%función de densidad de probabilidad generada por FET.
p(1,1:f)=ones(1,f);
p(2,1:f)=T1;
for a=2:1:n-1

    p(a+1,1:f)=((2*a-1)*T1.*p(a,1:f)-(a-1)*p(a-1,1:f))/(a);

end
%histograma para representación de la pdf por montecarlo
y=min(T2):(max(T2)-min(T2))/500:max(T2);
y2=min(T2):(max(T2)-min(T2))/100:max(T2);
k=hist(T2,y);
%función de densidad de probabilidad
for d=1:1:f
    Y(d)=sum(A(1:n)*p(1:n,d));
end
%Representación de las pdf teórica, por montecarlo y FET
plot(y,k/((max(T2)-min(T2))/length(y)*N),'r',y2,Y,'b')
```

A.2. Código Matlab 2

```
clear all
format long
N=input('N=') %Número total de historias.
n=input('n=') %Número de polinomios ortogonales tomados.
%Generación de números aleatorios mediante el método de Box Mauler.
X1=random('Uniform',0,1,N,1);
X2=random('Uniform',0,1,N,1);
Y1=sqrt(-2*log(X1)).*cos(2*pi*X2);
Y2=sqrt(-2*log(X1)).*sin(2*pi*X2);
dt=input('dt=') %Paso temporal.
a1=input('a1=') %Primer coeficiente del potencial.
a2=input('a2=') %Segundo coeficiente del potencial.
q=input('q=') %Exponente ecuación langevin.

%Ecuación Langevin .
x(1)=-a1*power(X1(1),q)*dt+a2*power(X1(1),1)*dt+X1(1)+Y1(1)*dt;
for i=2:1:N
    x(i)=-a1*power(x(i-1),q)*dt+a2*power(x(i-1),1)*dt+x(i-1)+Y1(i)*dt;
end
x=x(1/(dt*a1):N); %Eliminamos régimen transitorio .
N1=length(x);

%Polinomios Ortogonales de Hermite.
H(1,1:N1)=ones(1,N1);
H(2,1:N1)=2*x(1,1:N1);
for k=2:1:n-1
    H(k+1,1:N1)=2*x(1,1:N1).*H(k,1:N1)-2*(k-1)*H(k-1,1:N1);
end
%Normalización de los Polinomios.
for l=1:1:n
    H(l,1:N1)=H(l,1:N1)/(factorial(l-1)*(2^(l-1))*sqrt(pi));
end

%Coeficientes del desarrollo en serie.
for s=1:1:n
    A(s)=sum(H(s,1:N1).*exp(-(x.*x)))/(N1);
end

%Generación de números y de polinomios de Hermite para uso en la
%función de densidad de probabilidad generada por FET.
x1=min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x);
f=length(x1);
h(1,1:f)=ones(1,f);
h(2,1:f)=2*x1(1,1:f);
for a=2:1:n-1
    h(a+1,1:f)=2*x1(1,1:f).*h(a,1:f)-2*(a-1)*h(a-1,1:f);
end
for l=1:1:n
    h(l,1:f)=h(l,1:f);
end

%función de densidad de probabilidad
for d=1:1:f
    Y(d)=sum(A(1:n)*h(1:n,d));
end

%Función teórica para q=1
```

```
x2=(min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x));  
F=sqrt(a1/(dt*pi))*exp(-a1/dt*(x2.*x2));
```

```
%histograma para representación de la pdf por montecarlo
```

```
y=min(x):(max(x)-min(x))/500:max(x);  
y2=min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x);  
l=hist(x,y);
```

```
y=min(x):(max(x)-min(x))/500:max(x);  
y2=min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x);
```

```
%Representación de las pdf teórica, por montecarlo y FET
```

```
%figure  
%plot(y,l/((max(x)-min(x))/length(y)*N1),'r',y2,Y,'b',y2,F,'g')
```

```
%Representación de las pdf teórica, por montecarlo
```

```
%figure  
%plot(y,l/((max(x)-min(x))/length(y)*N1),'r',y2,F,'g')
```

```
%Representación de las pdf teórica y FET
```

```
%figure  
%plot(y2,Y,'b',y2,F,'g')
```

```
%Representación de las pdf montecarlo y FET
```

```
%figure  
%plot(y,l/((max(x)-min(x))/length(y)*N1),'r',y2,Y,'b')
```

A.3. Código Matlab 3

```
N=input('N=') %Número total de historias.
n=input('n=') %Número de polinomios ortogonales tomados.
%Generación de números aleatorios mediante el método de Box Mauler.
X1=random('Uniform',0,1,N,1);
X2=random('Uniform',0,1,N,1);
Y1=sqrt(-2*log(X1)).*cos(2*pi*X2);
Y2=sqrt(-2*log(X1)).*sin(2*pi*X2);
dt=input('dt=') %Paso temporal.
a1=input('a1=') %Primer coeficiente del potencial.
a2=input('a2=') %Segundo coeficiente del potencial.
q=input('q=') %Exponente ecuación langevin.
T=input('T=') %Tiempo de correlación
D=input('D=') %Coeficiente de difusión

%Ecuación Langevin
x(1)=-a1*power(X1(1),q)*dt+a2*power(X1(1),1)*dt+X1(1)+Y1(1)*dt;
for i=2:1:N
    x(i)=-a1*power(x(i-1),q)*dt+a2*power(x(i-1),1)*dt+x(i-1)+Y1(i)*dt;
end
x=x(1/(dt*a1):N); %Eliminamos régimen transitorio .
N1=length(x);

%Polinomios Ortogonales de Hermite.
H(1,1:N1)=ones(1,N1);
H(2,1:N1)=2*x(1,1:N1);
for k=2:1:n-1
    H(k+1,1:N1)=2*x(1,1:N1).*H(k,1:N1)-2*(k-1)*H(k-1,1:N1);
end
%Normalización de los Polinomios.
for l=1:1:n
    H(l,1:N1)=H(l,1:N1)/(factorial(l-1)*(2^(l-1))*sqrt(pi));
end

%Coeficientes del desarrollo en serie.
for s=1:1:n
    A(s)=sum(H(s,1:N1).*exp(-(x.*x)))/(N1);
end

%Generación de números y de polinomios de Hermite para uso en la
%función de densidad de probabilidad generada por FET.
x1=min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x);
f=length(x1);
h(1,1:f)=ones(1,f);
h(2,1:f)=2*x1(1,1:f);
for a=2:1:n-1
    h(a+1,1:f)=2*x1(1,1:f).*h(a,1:f)-2*(a-1)*h(a-1,1:f);
end
for l=1:1:n
    h(l,1:f)=h(l,1:f);
end

%función de densidad de probabilidad ruido blanco
for d=1:1:f
    Y(d)=sum(A(1:n)*h(1:n,d));
end
y=min(x):(max(x)-min(x))/500:max(x);
y2=min(x):(max(x)-min(x))/100:max(x);
```

```

l1=hist(x,y);

%Ruido correlacionado generado como derivada del ruido blanco
for j=2:1:N
    z(1)=Y1(1);
    z(j)=z(j-1)-z(j-1)*dt/T+Y1(j)*dt/T;
end

x2(1)=(-a1*power(X1(1),q)+a2*power(X1(1),q-2))*dt+X1(1)+z(1)*dt;
for l=2:1:N
    x2(l)=(-a1*power(x2(l-1),q)-a2*power(x2(l-1),q-2))*dt+x2(l-1)+sqrt(D)*z(l)*dt;
end
x2=x2(1/(dt*a1):N); %Eliminamos régimen transitorio .
N2=length(x2);
l2=hist(x2,y);

%Polinomios Ortogonales de Hermite.
H(1,1:N1)=ones(1,N1);
H(2,1:N1)=2*x2(1,1:N1);
for k=2:1:n-1
    H(k+1,1:N1)=2*x2(1,1:N1).*H(k,1:N1)-2*(k-1)*H(k-1,1:N1);
end
%Normalización de los Polinomios.
for l=1:1:n
    H(l,1:N1)=H(l,1:N1)/(factorial(l-1)*(2^(l-1))*sqrt(pi));
end

%Coeficientes del desarrollo en serie.
for s=1:1:n
    A(s)=sum(H(s,1:N1).*exp(-(x2.*x2)))/(N1);
end

%función de densidad de probabilidad ruido de color
for d=1:1:f
    Yb(d)=sum(A(1:n)*h(1:n,d));
end

%Montecarlo y FET ruido de color
%figure
%plot(y,l2/((max(x)-min(x))/length(y)*N2),'b',y2,Yb,'g')

%Montecarlo y FET ruido blanco
%figure
%plot(y,l1/((max(x)-min(x))/length(y)*N1),'r',y2,Y,'b')

%Representación de las diferentes gráficas obtenidas por distintos métodos
%y con distinto ruido.
%figure
%plot(y,l1/((max(x)-min(x))/length(y)*N1),'r',y,l2/((max(x)-min(x))/length(y)*N2),'g',y2,Y,'b',y2,Yb,'k')

```