



*Facultad
de
Ciencias*

**SUPERFICIES COMO CURVAS
EN MOVIMIENTO**
(Surfaces as moving curves)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Joaquín Gutiérrez Rumoroso

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Septiembre - 2016

Índice

1. Resumen	4
2. Abstract	4
3. Introducción	5
3.1. Nota histórica	5
3.2. Prerrequisitos y aportaciones	6
3.3. Desarrollo de la memoria	7
4. Superficies simples y regulares. Puntos regulares y puntos singu- lares	8
5. Superficies de revolución	11
6. Superficies regladas	12
6.1. Superficies desarrollables	14
6.1.1. Superficies tangenciales	15
6.1.2. Superficies cilíndricas	16
6.1.3. Superficies cónicas	17
6.2. Otras superficies regladas	20
6.2.1. Superficies doblemente regladas	20
6.2.2. Helicoides	23
6.2.3. Superficies desarrollables generadas por un vector RM	23
7. Superficies de traslación	27
8. Otras superficies	29
8.1. Superficies canal	29
8.1.1. Superficies tubulares	30
8.2. Superficies swung	31
8.3. Superficies swept	32
9. Superficies definidas por el triedro de Frenet	33
10. Superficies envolventes de los planos del triedro de Frenet	36
11. Propiedades geométricas	40
11.1. Relaciones entre los distintos tipos de superficies	40
11.2. Superficies canal y superficies desarrollables	42
11.3. Referencia de Darboux y algunas propiedades de los tubos	45

1. Resumen

La noción de curva la podemos interpretar como un punto en movimiento. De la misma manera, podemos considerar una superficie como una curva en movimiento en lugar de como un abierto homeomorfo al plano como es habitual. Bajo este punto de vista podemos obtener las distintas familias de superficies: las regladas como una recta que se mueve apoyada en otra curva o las de revolución como una curva que gira sobre una recta. Debido a los avances en CAGD, estas y otras superficies (superficies de traslación, canal, tubulares, swung y swept) han recobrado actualidad. Los objetivos de la Memoria son estudiar las principales propiedades geométricas de estas superficies y las relaciones existentes entre las distintas familias de superficies.

Palabras clave: superficie, desarrollable, vector RM, referencia adaptada

2. Abstract

The idea of curve can be understood as a point in movement. In the same way, we can consider a surface as a curve in movement instead of an open set homeomorphic to the plane as usual. From this point of view, we can obtain different families of surfaces: ruled surfaces as a line that moves supported by another curve or surfaces of revolution as a curve that rotates around a line. Due to advances in CAGD, these and other surfaces (translation surfaces, canal, tubular, swung and swept) have been recovered. Goals of the Memory are to study main geometric properties of these surfaces and relationships among different families of surfaces.

Keywords: surface, developable, RM vector, adapted frame

3. Introducción

El presente Trabajo Fin de Grado estudia los distintos tipos de superficies y sus propiedades. Se trata de un trabajo de tipo conceptual en el que no se desarrollan ámbitos de la aplicación como pueden ser la arquitectura, la ingeniería o el CAGD (Diseño Geométrico Asistido por Ordenador).

3.1. Nota histórica

Las superficies regladas siempre han estado presentes. Prueba de ello son las pirámides egipcias, cuya construcción requirió conocimientos geométricos y arquitectónicos. Algunas propiedades de las superficies de revolución ya eran conocidas por Arquímedes, quien definió las figuras engendradas por la rotación de distintas secciones planas de un cono.

El estudio analítico de estas superficies comenzó a finales del siglo XVI y comienzos del XVII. En 1560 se comenzó a aplicar las superficies regladas desarrollables en el campo de la arquitectura. Ya en 1672, Newton expuso la teoría de curvas planas y en 1692 Leibniz se ocupó de las envolventes. Aproximadamente en 1697 Jakob Bernoulli encontró el arco más corto entre dos puntos de una superficie, para el caso de cilindros y superficies de revolución, problema propuesto por su hermano Johann.

La curvatura de las superficies fue estudiada por primera vez por Euler. En 1760 demostró una fórmula para la curvatura de una sección plana de una superficie y en 1771 introdujo el concepto de superficie desarrollable, demostrando que es la superficie descrita por la familia de tangentes a la curva alabeada. Gaspard Monge fue uno de los matemáticos que contribuyó a asentar las bases de la geometría. Además introdujo la noción de superficies canal.

La contribución que define la teoría de superficies fue realizada por Gauss en dos artículos escritos en 1825 y 1827. Fue un nuevo punto de partida ya que Gauss consideraba por primera vez la geometría intrínseca de una superficie. A través del Teorema Egregio de Gauss se establece que las isometrías locales conservan la curvatura de Gauss. Este punto de vista fue extendido a dimensiones superiores por Riemann. El siglo XIX fue la época de oro de la teoría de superficies, en especial bajo el punto de vista diferencial geométrico. Darboux se encargó de recoger muchos de estos resultados en su tratado *Théorie des surfaces*.

En el siglo XX comienza la aplicación práctica del CAGD con maquinaria automatizada para producir objetos. Las presiones de producción en la industria de la aviación durante la Segunda Guerra Mundial estimularon mejorar y acelerar el diseño y la fabricación de nuevos dispositivos.

Los constructores navales también se interesaron en el CAGD desde el principio. El problema principal surgía al dibujar los planos a escala real. Los ordenadores les proporcionan el mayor estímulo debido a que les permiten representar nuevas ideas.

A mediados del siglo XX, las empresas de automoción francesas se involucraron en el CAGD para diseñar carrocerías de automóviles. Tanto Bézier, en Renault, como Paul de Faget de Casteljau, en Citroën, desarrollaron a finales de los cincuenta y en la década de los sesenta superficies que tenían como base los polinomios de Bernstein, introducidos en 1912. Posteriormente, Schoenberg realizó trabajos acerca del término spline y ya en 1972 y 1975, Riessenfeld y Versprille introdujeron las nociones de B-spline y de NURBS respectivamente.

Desde entonces, las superficies utilizadas en el CAGD han recobrado actualidad y han aumentado sus ámbitos de interés.

3.2. Prerrequisitos y aportaciones

En las asignaturas de la carrera, hemos considerado el término superficie como un abierto homeomorfo al plano. Este trabajo tiene un punto de partida diferente pues las superficies son consideradas como curvas en movimiento. Esta consideración nos permite distinguir dos curvas: la generatriz, que es la curva que se mueve, y la directriz, que es la curva que gobierna el movimiento de la generatriz. En las superficies estudiadas en el grado podemos ilustrar este hecho:

- En las superficies regladas, la generatriz es la recta que se mueve y la directriz es la curva en la que se apoya la generatriz.
- En las superficies de revolución, la generatriz es la curva que gira y la directriz es la recta respecto de la que gira, también llamada eje de giro.

Esta forma de determinar una superficie a partir de dos curvas se puede extender a otro tipo de superficies. Por ejemplo:

- En las superficies de traslación, la generatriz se traslada de modo paralelo sobre la directriz.
- En las superficies tubulares, la generatriz, una circunferencia, se mueve mientras su centro va describiendo la directriz.
- En las superficies canal, la definición es análoga a las tubulares pero pudiendo variar el radio de la circunferencia.

- En las superficies swung, la directriz y la generatriz están ligadas por una homotecia.
- En las superficies swept, las más generales de todas, la directriz y la generatriz están ligadas por un movimiento.

A lo largo del trabajo encontraremos definiciones más precisas.

En la memoria, además de presentar las superficies, también se incluyen resultados de comparación entre ellas y de cálculo de propiedades geométricas relevantes de estas superficies. Entre los resultados destacados, cabe citar:

- La superficie determinada por un vector RM es desarrollable (Proposición 6.18) y de hecho es de tipo tangencial (Teorema 6.23).
- Las superficies definidas por el triedro de Frenet, caracterizándose aquellas que son desarrollables (Teorema 9.1). Además se presentan las envolventes de los planos del triedro de Frenet, superficie tangencial, polar y rectificante, donde en esta última la curva es geodésica de la superficie (Observación 10.1).
- Se caracterizan las superficies canal que son desarrollables (Teorema 11.2), posteriormente las superficies tubulares (Corolario 11.3), y también las líneas distinguidas en un tubo (Teoremas 11.5, 11.6 y 11.9).

3.3. Desarrollo de la memoria

Este trabajo está organizado en 11 secciones como sigue:

La sección 3 es la parte introductoria en la que nos encontramos.

La sección 4 está destinada a recordar conceptos básicos sobre superficies y definir los límites de nuestro estudio, nos dedicaremos a trabajar con superficies regulares. En la sección 5 se introduce el concepto de superficie de revolución y se muestran dos ejemplos característicos de este tipo de superficies.

En la sección 6 se presentan las definiciones de superficie reglada y superficie desarrollable. A lo largo del trabajo veremos la importancia de esta última clase de superficies. En esta sección se incluyen los tipos de superficies desarrollables y se muestran resultados tanto de superficies regladas como de superficies desarrollables, teniendo especial relevancia el teorema de clasificación de superficies desarrollables. También estudiaremos otros ejemplos de superficies desarrollables, los cuales tienen especial relevancia en campos como la arquitectura.

La sección 7 está dedicada a las superficies de traslación, caracterizadas por la forma tan intuitiva de generarlas.

La sección 8 está destinada a las superficies estudiadas en el CAGD: superficies

canal, tubulares, swung y swept.

En la sección 9 se estudian las superficies generadas por las rectas del triedro de Frenet. Además se calcula la curvatura de Gauss de estas superficies.

La sección 10 comienza definiendo los conceptos de recta característica y arista de retroceso para más adelante obtener dichas curvas en las superficies envolventes de los planos.

Por último en la sección 11 se tratan distintas propiedades geométricas de las superficies. En primer lugar se hace notar que una superficie puede pertenecer a varias familias al mismo tiempo. Más adelante se calcula cuando una superficie canal es también superficie desarrollable. Para finalizar, se trabaja con la referencia de Darboux, obteniendo interesantes propiedades de las superficies tubulares.

Anteriormente ya hicimos notar la influencia del CAGD en ámbitos como la automoción, la construcción naval o la aeronáutica, campos íntimamente ligados con la ingeniería. Otro gran campo de aplicaciones de las superficies y sus propiedades lo podemos encontrar en la arquitectura. Como veremos en la sección 6, elegir una superficie con buenas propiedades es muy importante al realizar una construcción.

4. Superficies simples y regulares. Puntos regulares y puntos singulares

En estos primeros capítulos trataremos algunas nociones básicas sobre superficies. Para ello haremos referencia a [9, Capítulo 3].

Definición 4.1 *Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 . Sea un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Decimos que la aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie simple si es inyectiva, de clase C^∞ y cumple que $\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ y que $f : U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.*

Es decir, una superficie simple no es más que un conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 que son imagen continua e inyectiva de un abierto del plano.

Esta definición para tratar la esfera, por ejemplo, nos es insuficiente ya que no es una superficie simple (la esfera es una superficie compacta y por tanto no puede ser homeomorfa a ningún abierto del plano). Por ello, procedemos a tratar el concepto de superficie regular.

Definición 4.2 *Dado un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ decimos que es una superficie regular si $\forall p \in S$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, una aplicación f y un entorno abierto V de p en S tales que $f : U \rightarrow V = f(U)$ es una superficie simple.*

Dicho de otro modo, una superficie regular es localmente una superficie simple. Tenemos por tanto que toda superficie simple es regular. En cambio el recíproco no es cierto. Por ejemplo, la esfera es una superficie regular que no es simple.

Observación 4.3 *Notemos que la expresión $\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ es equivalente a decir que los vectores $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son linealmente independientes. Geométricamente esto quiere decir que la superficie no tiene singularidades y para cada punto de S hay un único plano tangente.*

Observación 4.4 *Por otra parte el hecho de que f sea inyectiva indica que la superficie no tiene singularidades múltiples, esto es, no se corta a sí misma.*

Veamos ahora un par de ejemplos que nos ayuden a aclarar el concepto de superficie no regular.

Ejemplo 4.5 *El cono se obtiene al girar una recta oblicua al eje, desde un punto fijo del eje, a lo largo de la directriz, que es una circunferencia. Tomemos por ejemplo el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. En ecuaciones paramétricas tenemos:*

$$f(u, v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 + v^2} \right)$$

$$f_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

$$f_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)$$

Vemos que en $(u, v) = (0, 0)$ no existen derivadas parciales ya que el denominador se anula. Esto quiere decir que no existe un entorno abierto para dicho punto y por tanto no es superficie regular. Tenemos pues que las superficies generadas por una curva en movimiento no tienen por qué ser regulares.

Ejemplo 4.6 *También puede ocurrir que los puntos singulares de una superficie sean una recta, como es el caso del cilindro sobre el folium de Descartes. El folium*

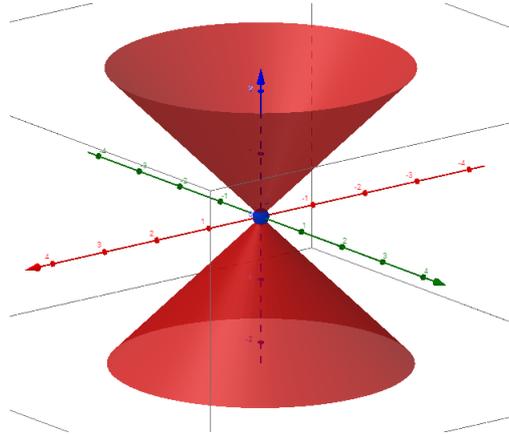


Figura 1: Cono y su punto singular

de Descartes tiene por ecuación:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

donde a es una constante.

Esta curva se puede parametrizar como sigue:

$$f(u, v) = \left(\frac{3au}{1+u^3}, \frac{3au^2}{1+u^3}, v \right)$$

$$f_u = \left(\frac{3a(1-2u^3)}{(1+u^3)^2}, \frac{3a(2u-u^4)}{(1+u^3)^2}, 0 \right)$$

$$f_v = (0, 0, 1)$$

Notemos que en $(u, v) = (-1, v)$ la derivada f_u no existe y por tanto no existe un entorno abierto para esos puntos. Luego la superficie no es regular:

Los puntos singulares de las superficies quedan fuera de nuestro estudio. Nos centraremos pues en superficies regulares.

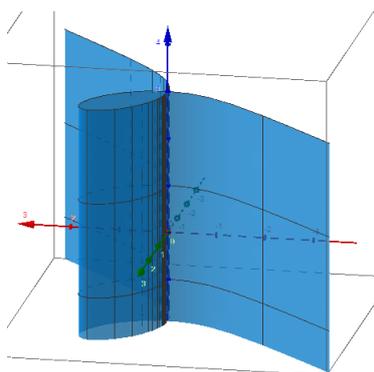


Figura 2: Cilindro sobre el folium de Descartes de ecuación $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

5. Superficies de revolución

Definición 5.1 Supongamos que tenemos una curva regular C :

$\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $a < v < b$ y $f(v) > 0$ ó $C : F(x, z) = 0$ con $x > 0$ en el plano $XZ : y = 0$. Entonces el subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ que se obtiene al girar C alrededor del eje z se llama superficie de revolución generada por C .

A la curva C se le llama generatriz de S y el eje z es el llamado eje de revolución de S .

Ecuaciones implícitas: $S : F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(v)\cos(u) \\ y = f(v)\sen(u) \\ z = g(v) \end{cases}$$

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 5.2 La esfera \mathbb{S}^2 de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$ es la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje z la semicircunferencia:

$C : \alpha(v) = (f(v), 0, g(v)) = (r\cos(v), 0, r\sen(v))$, $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ ó $F(x, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, $x > 0$ en el plano XZ .

Luego en implícitas tenemos $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ y en paramétricas: $x(u, v) = (r\cos(v)\cos(u), r\cos(v)\sen(u), r\sen(v))$, $0 < u < 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 5.3 El toro \mathbb{T}^2 es la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje z la circunferencia de centro $(a, 0, 0)$ y radio $r > 0$ con $a > r$:

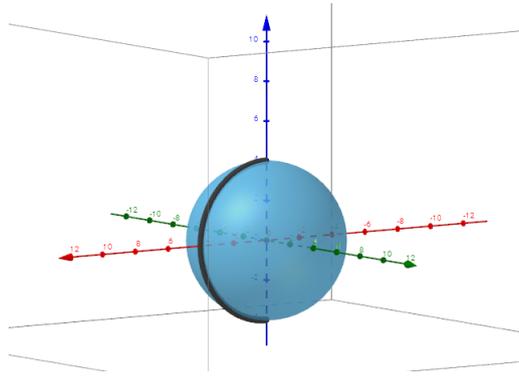


Figura 3: La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ como superficie de revolución

$C : \alpha(v) = (f(v), 0, g(v)) = (a + r\cos(v), 0, r\sen(v)), 0 < v < 2\pi$ ó

$F(x, z) = (x - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$ en el plano XZ .

Por tanto en implícitas tenemos $\mathbb{T}^2 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$ y en paramétricas $x(u, v) = (r\cos(v)\cos(u), r\cos(v)\sen(u), r\sen(v))$, $0 < u < 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$.

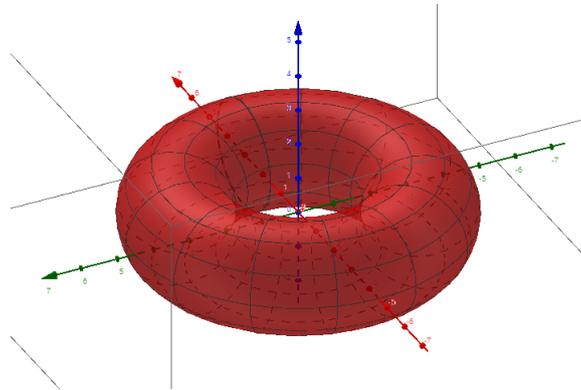


Figura 4: El toro generado por la circunferencia de centro $(3,0,0)$ y radio 1.5

6. Superficies regladas

Definición 6.1 Se dice que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie reglada si por cada punto de S pasa una recta, llamada generatriz, que está totalmente contenida

en ella.

Si tenemos una curva diferenciable $\alpha(u)$, $a < u < b$, sobre la superficie con la propiedad de que corta a todas las generatrices y $\beta(u)$ es un vector no nulo en la dirección de la generatriz, entonces podemos parametrizar la superficie reglada del siguiente modo:

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u), \quad a < u < b \quad \text{y} \quad -\infty < v < \infty.$$

La curva $\alpha(u)$ se llama directriz.

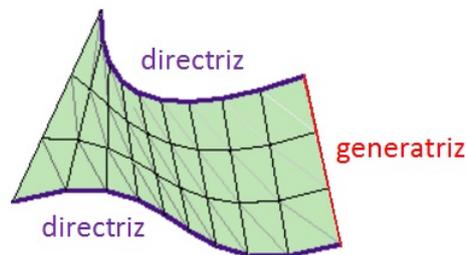


Figura 5: Ejemplo de superficie reglada

Ejemplo 6.2 En el espacio \mathbb{R}^3 consideramos α y β dos vectores linealmente independientes y un punto p cualquiera. La parametrización del plano es la siguiente: $x(u, v) = p + u\alpha + v\beta = (p + u\alpha) + v\beta = (p + v\beta) + u\alpha$ con $0 < u, v < \infty$, la cual es claramente una superficie reglada (de hecho es infinitamente reglada).

Observación 6.3 Notemos que con la definición 6, la superficie obtenida no es necesariamente regular. Indicaremos en cada caso donde falla la regularidad.

A continuación veremos una interesante propiedad de las superficies regladas.

Proposición 6.4 El plano tangente en un punto de la superficie reglada contiene a la generatriz que pasa por ese punto.

Demostración. Como la generatriz y el plano tangente tienen un punto en común (punto de tangencia), basta probar que la generatriz es paralela al plano tangente, o lo que es lo mismo, que es perpendicular al vector normal a la superficie, U , en el punto de tangencia.

$$U \cdot \beta = [\alpha' \times \beta + v(\beta' \times \beta)] \cdot \beta = [\alpha', \beta, \beta] + v[\beta', \beta, \beta] = 0$$

Observación 6.5 *Esta proposición nos indica como varía el plano tangente de una superficie reglada a lo largo de la generatriz, simplemente gira alrededor de la generatriz. Dicho con otras palabras, el vector normal se encuentra en todo momento paralelo a un plano fijo, que es perpendicular a la generatriz.*

6.1. Superficies desarrollables

Definición 6.6 *Se dice que una superficie es desarrollable si es reglada y verifica que todos los puntos de cada generatriz tienen el mismo plano tangente.*

De acuerdo con la definición 6 podemos caracterizar a las superficies desarrollables del siguiente modo:

Teorema 6.7 *Una superficie reglada regular de clase C^1*

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

es desarrollable si $[\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)] = 0, \forall u$, donde $[\cdot, \cdot, \cdot]$ indica el producto triple o mixto de los vectores.

Demostración: El plano tangente en un punto de la generatriz $x = x(u_0, v)$ es engendrado por los vectores

$$x_u(u_0, v) = \alpha'(u) + v\beta'(u), \quad x_v(u_0, v) = \beta(u).$$

En $v = 0$ tenemos los siguientes vectores

$$x_u(u_0, 0) = \alpha'(u), \quad x_v(u_0, 0) = \beta(u) = x_v(u_0, v).$$

Por definición, la superficie será desarrollable si y sólo si los planos tangentes en todos los puntos de la generatriz coinciden. Esto ocurre si y sólo si los tres vectores

$\alpha'(u) + v\beta'(u), \beta(u)$ y $\alpha'(u)$ son dependientes, es decir, si y sólo si

$$0 = [(\alpha'(u) + v\beta'(u)), \beta(u), \alpha'(u)] = \alpha'(u) \times (\alpha'(u) + v\beta'(u)) \cdot \beta(u) =$$

$$v\alpha'(u) \times \beta'(u) \cdot \beta(u) = -v[\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)]$$

y concluimos

$$[\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)] = 0, \quad \forall u.$$

Este teorema tiene un significado geométrico. Como veremos al finalizar esta sección, toda superficie desarrollable tiene curvatura de Gauss nula y además es localmente isométrica al plano.

Veamos ahora los tres tipos de superficies desarrollables.

6.1.1. Superficies tangenciales

Las superficies tangenciales son las superficies regladas en las cuales las rectas generatrices son las rectas tangentes a la curva.

Definición 6.8 *Sea $\alpha(s)$ una curva regular parametrizada por la longitud de arco. Se llama superficie tangencial de $\alpha(s)$ a la superficie generada por todas las rectas tangentes a $\alpha(s)$. Este tipo de superficie reglada se puede parametrizar como sigue:*

$$x(s, v) = \alpha(s) + vT(s), \text{ donde } T(s) = \dot{\alpha}(s).$$

Tomaremos como notación: $\frac{\partial x}{\partial s} = x_s$.

Como $x_s = T(s) + v\dot{T}(s) = T(s) + v\kappa(s)N(s)$ y $x_v = T(s)$ se tiene:

$$x_s \times x_v = v\dot{T}(s) \times T(s) = v\kappa(s)N(s) \times T(s) = -v\kappa(s)B(s).$$

Entonces si $\kappa(s) \neq 0 \forall s$, la condición de regularidad no se cumple si $v = 0$ (esta curva se conoce como línea de estricción de la superficie).

Observación 6.9 *Las superficies tangenciales no son regulares en la línea de estricción.*

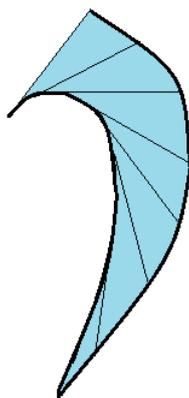


Figura 6: Superficie desarrollable tangencial

6.1.2. Superficies cilíndricas

Las superficies cilíndricas son las superficies regladas en las cuales todas las rectas generatrices son paralelas.

Definición 6.10 Sea $\alpha(u)$ una curva regular, con $a < u < b$ y sea β un vector de \mathbb{R}^3 constante no nulo. Entonces:

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\beta, \quad a < u < b \quad \text{y} \quad -\infty < v < \infty$$

es una superficie reglada, llamada superficie cilíndrica.

En este caso tenemos que:

$$x_u = \alpha'(u) \quad \text{y} \quad x_v = \beta, \quad \text{luego} \quad x_u \times x_v = \alpha'(u) \times \beta.$$

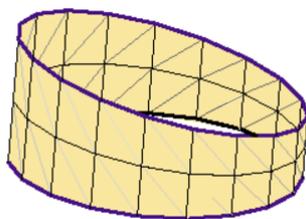


Figura 7: Superficie desarrollable cilíndrica

Observación 6.11 *Las superficies cilíndricas no son regulares en los puntos que satisfacen $\alpha'(u) \times \beta = 0$.*

En el caso particular de que α sea una circunferencia y $\beta \neq 0$ sea perpendicular al plano que contiene a α , se tiene que la superficie es un cilindro circular recto.

6.1.3. Superficies cónicas

Las superficies cónicas son las superficies regladas en las cuales las rectas generatrices tienen un punto en común, el vértice.

Definición 6.12 *Consideremos $\alpha(u) = p$ un punto y $\beta(u) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una curva diferenciable con $a < u < b$. Entonces la superficie reglada:*

$$x(u, v) = p + v\beta(u), \quad a < u < b \quad \text{y} \quad -\infty < v < \infty$$

se llama superficie cónica y el punto p se llama vértice del cono.

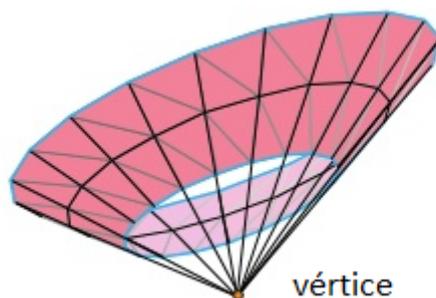


Figura 8: Superficie desarrollable cónica

En este caso, como $x_u = v\beta'(u)$ y $x_v = \beta(u)$ tenemos $x_u \times x_v = v\beta'(u) \times \beta(u)$.

Se obtiene que la condición de regularidad no se tiene cuando $v = 0$ (el vértice) ó si $\beta'(u) \times \beta(u) = 0$.

En el caso particular de que los vectores $\beta(u)$ formen un ángulo constante θ con una recta fija pasando por p , tenemos que la superficie es un cono circular recto y a la recta fija se le llama eje del cono.

Teorema 6.13 (a) *Las superficies desarrollables son localmente superficies cónicas, cilíndricas o tangenciales.*

(b) *Las superficies desarrollables tienen curvatura de Gauss nula.*

Demostración. (a) Para esta parte seguimos [8]. Sea $x(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$, $\|\beta(u)\| = 1$, $a < u < b$, una superficie reglada que además es desarrollable. Veamos que el intervalo $a < u < b$ se puede subdividir en subintervalos $s_{i-1} < s < s_{i+1}$ de manera que en cada una de las subdivisiones, la superficie sea un cilindro, un cono o una superficie tangencial.

De acuerdo con el teorema 6.1, los vectores α' , β , β' son dependientes. De esta manera existen k_1, k_2 y k_3 con $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$ tales que $k_1\alpha' + k_2\beta + k_3\beta' = 0$.

- Supongamos que $k_1 = 0$ en un intervalo $s_{i-1} < s < s_{i+1}$. Se cumple entonces que $k_2\beta + k_3\beta' = 0$, donde $k_2^2 + k_3^2 \neq 0$. Como $\|\beta\| = 1$, se tiene que $\beta \cdot \beta' = 0$. Deducimos por tanto que $0 = (k_2\beta + k_3\beta') \cdot \beta = k_2\|\beta\|^2$. Se tiene en este caso que $k_2 \equiv 0$. Como $k_1 = k_2 = 0$, debe ser $k_3 \neq 0$ y por tanto $\beta' = 0$. Concluimos que β es una constante y la superficie es localmente un cilindro.
- Supongamos ahora que $k_1 \neq 0$ en el intervalo $s_{i-1} < s < s_{i+1}$. Entonces podemos escribir $\alpha' = c_1\beta + c_2\beta'$, en donde $c_1 = -\frac{k_2}{k_1}$ y $c_2 = -\frac{k_3}{k_1}$. Definamos ahora $y = \alpha - c_2\beta$. Se tiene pues que $y' = \alpha' - c_2'\beta - c_2\beta' = c_3\beta$, donde $c_3 = c_1 - c_2'$.
 - Si $c_3 = 0$ en el intervalo $s_{i-1} < s < s_{i+1}$, $y = y_0$ es una constante. Por tanto la superficie es de la forma $x = y_0 + c_2\beta + v\beta = y_0 + (v + c_2)\beta$. Luego la superficie es localmente un cono.
 - Si $c_3 \neq 0$ en el intervalo de $s_{i-1} < s < s_{i+1}$, como $y' = c_3\beta$ se tiene $\beta = \frac{y'}{c_3}$ y también sabemos que $y = \alpha - c_2\beta$. Por tanto la superficie es de la forma

$$x = \alpha + v\beta = y + c_2\beta + v\beta = y + (c_2 + v)\beta = y + uy',$$

donde $u = \frac{c_2+v}{c_3}$ y la superficie es localmente tangencial.

(b) Veamos ahora que los tres tipos de superficies citados de superficies desarrollables tienen curvatura de Gauss nula. Para ello calcularemos la curvatura de Gauss de cada una de ellas.

Denotemos por

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

a la matriz asociada a la primera forma fundamental y como

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

a la matriz asociada a la segunda forma fundamental. Llamaremos T, N, B a la referencia de Frenet.

- Superficie tangencial

$$x_u = T + v\kappa N$$

$$x_v = T$$

$$x_{uu} = -v\kappa^2 T + (\kappa + v\kappa')N + v\kappa\tau B$$

$$x_{uv} = x_{vu} = \kappa N$$

$$x_{vv} = 0$$

Calculemos ahora el vector normal unitario a S :

$$U = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = -B$$

$$g_{11} = x_u \cdot x_u = 1 + v^2\kappa^2$$

$$g_{12} = g_{21} = x_u \cdot x_v = 1$$

$$g_{22} = x_v \cdot x_v = 1$$

$$L_{11} = x_{uu} \cdot U = -v\kappa\tau$$

$$L_{12} = L_{21} = x_{uv} \cdot U = 0$$

$$L_{22} = x_{vv} \cdot U = 0$$

Finalmente, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0$$

Por tanto la superficie tangencial tiene curvatura de Gauss nula.

- Superficie cilíndrica $x(u, v) = \alpha(u) + v\beta$

$$x_u = T, \quad x_v = \beta, \quad x_{uu} = \kappa N, \quad x_{uv} = x_{vv} = 0$$

$$L_{12} = L_{22} = 0 \Rightarrow K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0.$$

Luego toda superficie cilíndrica tiene curvatura de Gauss nula.

- Superficie cónica $x(u, v) = p + v\beta(u)$

$$x_u = v\beta'(u), \quad x_v = \beta(u), \quad x_{uu} = v\beta''(u), \quad x_{uv} = x_{vv} = 0$$

$$L_{11} = L_{12} = 0 \Rightarrow K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0.$$

Por tanto, toda superficie cónica también tiene curvatura de Gauss nula.

Observación 6.14 *Por el Teorema de Minding, como las superficies desarrollables tienen todas curvatura de Gauss nula y el plano también, se tiene que las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano.*

6.2. Otras superficies regladas

En esta sección vamos a tratar las cuádricas doblemente regladas: el paraboloides hiperbólico y el hiperboloides hiperbólico. Ambas superficies las podemos ver como rectas en movimiento que se apoyan en dos rectas dadas como veremos a continuación. Para finalizar veremos tipos de helicoides.

6.2.1. Superficies doblemente regladas

Empecemos con las superficies doblemente regladas.

- Paraboloides hiperbólico: Consideremos el paraboloides hiperbólico con ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, con $a, b > 0$. Es una superficie doblemente reglada ya que la podemos parametrizar del siguiente modo:

$$x_1(u, v) = (au, 0, u^2) + v(a, b, 2u)$$

$$x_2(u, v) = (au, 0, u^2) + v(a, -b, 2u)$$

El paraboloido hipérbólico es una superficie engendrada por el movimiento de una línea recta (generatriz) que se apoya en dos líneas rectas (directrices) que se cruzan y además permanece siempre paralela a un plano fijo. Dicho plano se puede suponer cualquiera siempre que no contenga una de las directrices dadas.

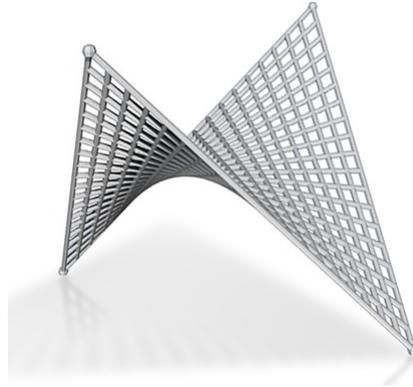


Figura 9: Paraboloido hipérbólico como superficie doblemente reglada

- Hiperboloide hiperbólico: Consideremos el hiperboloide hiperbólico de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, con $a, b, c > 0$. De nuevo se trata de una superficie doblemente reglada, que podemos parametrizar como sigue:

$$x_1(u, v) = (a \cos(u), b \operatorname{sen}(u), 0) + v(-a \operatorname{sen}(u), b \cos(u), c)$$

$$x_2(u, v) = (a \cos(u), b \operatorname{sen}(u), 0) + v(-a \operatorname{sen}(u), b \cos(u), -c)$$

El hiperboloide hiperbólico lo podemos generar a partir de dos rectas que se cruzan, siendo una de ellas la directriz (el eje de simetría) y la otra la generatriz.

Notemos que ambas superficies son regulares en todos los puntos, pero no son desarrollables.

Todos los puntos de ambas superficies son hiperbólicos. Esto quiere decir que la curvatura de Gauss es negativa, o lo que es lo mismo, las curvaturas principales tienen distinto signo. Para ello basta ver que localmente el plano tangente interseca a la superficie, de modo que existen puntos a ambos lados del plano tangente.

Observación 6.15 *Importancia en la arquitectura:*

El paraboloido hipérbólico es una de las superficies más utilizadas por Gaudí ó Félix



Figura 10: Hiperboloide hipérbólico como superficie doblemente reglada

Candela, con obras como la Sagrada Familia o el Palacio de los Depotes de Mexico respectivamente. Tiene importantes propiedades entre las que destaca que, a pesar de ser una superficie alabeada, se puede generar como hemos hecho notar por líneas rectas.

Otra propiedad interesante, para su construcción, es que dados 4 puntos del espacio no coplanarios hay un único paraboloides hiperbólico que pasa por ellos. Los obreros deben unir con sendas barras uno de los pares de puntos de una parte, y el otro par opuesto por la otra. Después sólo se tiene que dejar resbalar otra barra sobre las dos anteriores manteniendo una velocidad constante en los extremos. Un ejemplo de esta estructura lo podemos encontrar también en El Oceanográfico, Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia (2002) realizada por Félix Candela.[13]



Figura 11: L'Oceanogràfic

Por otro lado el hiperboloide hiperbólico también tiene interesantes propiedades arquitectónicas. Es la superficie más utilizada por Eduardo Torroja, en obras como el depósito de Fedala y el hipódromo de la Zarzuela. Al igual que el paraboloides hiperbólico es una superficie alabeada que podemos generar con rectas.

Además es una superficie muy cercana a una superficie minimal: el catenoide. Esto quiere decir que al ser casi de área mínima se ahorra en material. Un ejemplo son las torres de refrigeración de las centrales nucleares. Por otra parte, estas superficies son más fuertes y resistentes por su estructura doblemente reglada, independientemente del material utilizado. Es por ello que el hiperboloide hiperbólico es una excelente estructura para construir torres altas, baratas y resistentes.[14]

6.2.2. Helicoides

Veamos ahora las superficies regladas que se generan cuando tomamos como directriz la hélice circular y como generatrices las rectas tangentes y normales, dando lugar a diferentes helicoides.

- Helicoide desarrollable: La directriz es la hélice $\alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$, $0 < u < 2\pi$ y las generatrices son las rectas tangentes a la hélice: $\beta(u) = (-\sin(u), \cos(u), 1)$.

Obtenemos pues, la superficie reglada $x(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$, $v \in \mathbb{R}$. Como $\alpha'(u) = \beta(u)$, de acuerdo con la caracterización de la definición 6.1 tenemos que además la superficie es desarrollable. Notemos que se trata de un tipo de superficie ya mencionado, es una superficie tangencial.

- Helicoide no desarrollable: La directriz es la misma que en el ejemplo anterior. En este caso tomamos como generatrices las rectas normales a la hélice: $\beta(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$.

Vemos que la superficie reglada $x(u, v)$ en este caso no es desarrollable, puesto que $[\alpha'(u), \beta(u), \beta'(u)] = 1, \forall u$.

6.2.3. Superficies desarrollables generadas por un vector RM

En esta sección vamos a ver otra forma de generar superficies desarrollables. Con el objetivo de introducir este nuevo concepto, vector RM, vamos a hablar primero de las referencias adaptadas. Se hace referencia a [7, Capítulo 1].

Definición 6.16 *Llamaremos referencia adaptada de una curva $c(s)$ de \mathbb{R}^3 a un sistema de tres vectores ortonormales $\{e_1, e_2, e_3\}$ de manera que uno de los tres*

vectores es el vector tangente a la curva, $e_1 = \frac{c'}{\|c'\|}$, y los otros dos, e_2, e_3 , generan el plano normal en cada punto de la curva.

En otras palabras, una referencia adaptada es un sistema de referencia local que se mueve a lo largo de la trayectoria de la curva de modo que el primer vector es el vector tangente a la curva.

Dada una curva del espacio, hay infinitas referencias adaptadas. Entre todas ellas, dos son especialmente importantes debido a diversas características geométricas:

- La referencia de Frenet, la cual define una base ortonormal de \mathbb{R}^3 en términos de la geometría intrínseca local de la curva.
- La referencia RM (*rotation minimizing*), para la cual las derivadas de e_2 y e_3 son paralelas a e_1 , el vector tangente.

La referencia de Frenet a lo largo de la curva $\alpha(s)$ queda definida como sigue:

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned}$$

donde T , N y B son los vectores tangente, normal y binormal de α respectivamente.

En este caso el vector normal apunta siempre al centro de curvatura. Como consecuencia no podemos definir la referencia de Frenet en los puntos en los que dicha curvatura se anula. En las referencias RM esto no ocurre y es la razón por la que son utilizadas en áreas como el Diseño Geométrico Asistido por Ordenador (CAGD). Vamos a definir el concepto de vector RM para poder dar paso al posterior resultado.

Definición 6.17 *Dada la curva $c(s)$ parametrizada de modo natural diremos que v es un vector RM si v pertenece al plano normal de c y cumple que su derivada es proporcional al vector tangente a c , es decir, $v' = \alpha T$.*

A continuación veremos que podemos generar superficies desarrollables a partir de un vector RM.

Proposición 6.18

$$v \text{ es vector RM} \Leftrightarrow f(s, \lambda) = c(s) + \lambda v(s)$$

Demostración. \Rightarrow Supongamos que v es un vector RM, es decir, $v' = \alpha T$. Veamos que $f(s, \lambda)$ es desarrollable usando la caracterización 6.1.

Podemos suponer que la curva c está parametrizada de modo natural, esto es, $c' = T$. Entonces:

$$[c'(s), v(s), v'(s)] = [T(s), v(s), \alpha T(s)] = 0$$

\Leftarrow Veamos que v es vector RM.

Como $f(s, \lambda)$ es desarrollable, sabemos que existe una combinación lineal tal que que $v'(s) = \alpha T(s) + \beta v(s)$.

Si tomamos v unitario, se cumple $\|v\| = 1 \Rightarrow v \cdot v = 1 \Rightarrow 0 = v \cdot v' = v \cdot (\alpha T + \beta v) = \alpha \cdot v \cdot T + \beta \cdot v \cdot v \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow v' = \alpha T \Rightarrow v$ es RM vector.

Ejemplo 6.19 *El helicoido no desarrollable es generado por el vector normal a la hélice circular. Como la superficie es no desarrollable, (ver 6.2.2) resulta que el vector normal no es vector RM.*

Observación 6.20 *Notemos que la superficie desarrollable que acabamos de definir a partir de un vector RM no contradice el teorema 6.1.3. De hecho se trata de una superficie tangencial.*

Antes de ver el teorema que lo prueba, vamos a recordar algunos resultados acerca de evolutas y evolventes, los cuales nos ayudarán posteriormente con la demostración.

Definición 6.21 *Sean p y q dos curvas de \mathbb{R}^3 . Se dice que p es una evoluta de q y que q es una evolvente de p si las rectas tangentes a p son normales a q , siendo q una curva contenida en la superficie tangencial definida por p .*

Si $p = p(s)$ es una parametrización natural, entonces

$$q(s) = p(s) + (c - s)\dot{p}(s)$$

es una parametrización de q (ver [8, pág. 90]).

Veamos ahora una proposición con la que podremos construir un campo RM por medio de evolutas y evolventes.

Proposición 6.22 *Sea q una evolvente de la curva p . Entonces el campo vectorial $v = \frac{p-q}{\|p-q\|}$ es un campo RM sobre q .*

Demostración. Por la definición 6.2.3, hemos de ver que $v'(t)$ es proporcional a $q'(t)$. Sabemos que

$$v(t) = \frac{p(t) - q(t)}{\|p(t) - q(t)\|},$$

y como q es evolvente de p , q está parametrizada como

$$q(s) = p(s) + (c - s)T_p(s) = p(s) + (c - s)\dot{p}(s),$$

siendo $p = p(s)$ una parametrización natural.

Tenemos pues

$$v(s) = \frac{p(s) - q(s)}{\|p(s) - q(s)\|} = \frac{(s - c)\dot{p}(s)}{|s - c|} = \pm\dot{p}(s).$$

Luego $v'(s) = \pm\ddot{p}(s)$.

Por otra parte, $q(s) = p(s) + (c - s)\dot{p}(s) \Leftrightarrow q'(s) = \dot{p}(s) - \dot{p}(s) + (c - s)\ddot{p}(s) = (c - s)\ddot{p}(s)$.

Obtenemos pues que $v'(s)$ y $q'(s)$ son proporcionales y v es un campo RM sobre q .

Teorema 6.23 *Sea v un campo vectorial RM a lo largo de una curva q y sea S la superficie desarrollable que definen el campo v y la curva q . Entonces en S existe una curva p que es evoluta de q , y por tanto S es la superficie tangencial de p .*

Demostración. Vamos a desarrollar la superficie S sobre el plano. Como el desarrollo es una isometría local preserva ángulos. La curva q se proyecta en una curva \bar{q} y v en un campo \bar{v} ortogonal a \bar{q} .

Entonces existe \bar{p} evoluta de \bar{q} obtenida como lugar geométrico de los centros de curvatura de \bar{q} . Como \bar{v} es normal a \bar{q} , también marca la dirección de las tangentes a \bar{p} (por ser \bar{p} evoluta de \bar{q}).

La isometría local entre la superficie S y el plano \mathbb{R}^2 transforma \bar{p} en una curva contenida en S que es evoluta de q , ya que las tangentes a \bar{p} se transforman en tangentes a p (debido a que se mantienen los ángulos) que son normales a q . De esta manera S es la superficie tangencial de p .

7. Superficies de traslación

En esta sección haremos referencia a [10]. Sean las curvas $C_1 \equiv (x(u), y(u), z(u))$ y $C_2 \equiv (x^*(v), y^*(v), z^*(v))$ con un punto en común $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Si desplazamos C_2 de modo que el punto P_0 recorra C_1 , la curva C_2 irá adoptando distintas posiciones para cada tiempo t_0 y se formará una superficie llamada superficie de traslación.

Si el punto P al recorrer la curva C_1 llega a la posición P' , entonces aplicamos a cada punto A de la curva C_2 una traslación de vector $\overrightarrow{PP'}$ de manera que entonces los vectores $\overrightarrow{PP'}$ y $\overrightarrow{AA'}$ son paralelos. La siguiente imagen ilustra este hecho.

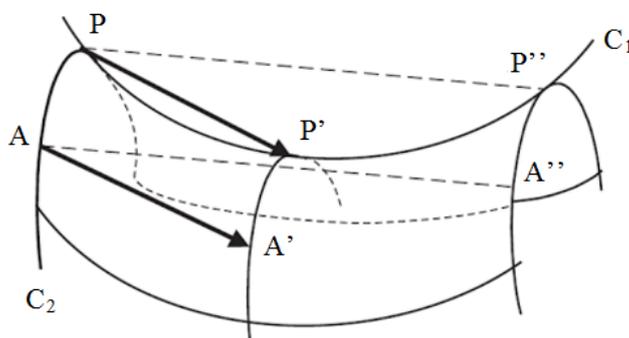


Figura 12: Superficie de traslación

Definición 7.1 Se llama superficie de traslación de directriz C_1 y generatriz C_2 a la superficie formada por todas las curvas que se obtienen al trasladar la generatriz C_2 paralelamente a sí misma cuando el punto P_0 describe la directriz C_1 .

Ecuación paramétrica de una superficie de traslación de directriz C_1 y generatriz C_2 :

$$\begin{cases} x = x(u) + x^*(v) - x_0 \\ y = y(u) + y^*(v) - y_0 \\ z = z(u) + z^*(v) - z_0 \end{cases}$$

Observación 7.2 La superficie generada al tomar como generatriz la curva C_1 y como directriz la curva C_2 es la misma que la superficie generada al tomar como generatriz la curva C_2 y como directriz la curva C_1 .

Veamos ahora algunos ejemplos de superficies que ya hemos citado anteriormente, esta vez como superficies de traslación.

Ejemplo 7.3 *Paraboloide elíptico: Una parábola (generatriz) se traslada sobre otra parábola (directriz) siendo ambas parábolas perpendiculares entre sí y teniendo la concavidad en la misma dirección y sentido.*

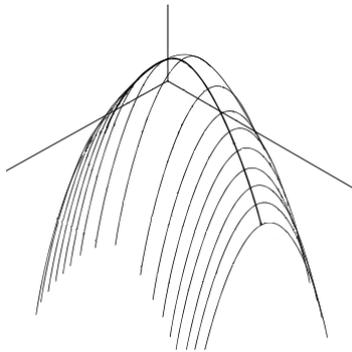


Figura 13: Paraboloide elíptico como superficie de traslación

Ejemplo 7.4 *Paraboloide hiperbólico: Una parábola (generatriz) se traslada sobre otra parábola (directriz) siendo las dos parábolas perpendiculares entre sí y teniendo la concavidad en distinta dirección y sentido.*

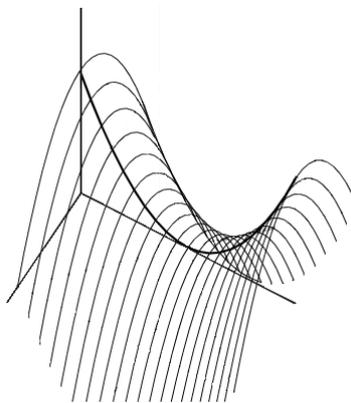


Figura 14: Paraboloide hiperbólico como superficie de traslación

Acabamos de observar que tanto las superficies de revolución, en el caso del paraboloide elíptico, como las superficies regladas, en el caso del paraboloide hiperbólico,

las podemos ver como superficies de traslación, como una curva que se desliza sobre otra curva. Tenemos por tanto, que tanto las superficies de revolución, las superficies regladas como las superficies de traslación son superficies que se obtienen por movimiento de una curva respecto de otra:

- Las superficies de revolución se obtienen por rotación de la generatriz respecto del eje de giro, la directriz.
- Las superficies regladas se generan al apoyar rectas, las generatrices, sobre una curva base, la directriz.
- Las superficies de traslación se engendran al trasladar la generatriz paralela a sí misma a lo largo de la directriz.

En la siguiente sección trataremos otro tipo de superficies, que generalizan las que ya hemos visto. Es por ello que nos apoyaremos en nociones vistas para tratar de construir estas nuevas superficies.

8. Otras superficies

Debido a los últimos avances en el CAGD, han recobrado especial importancia ciertos tipos de superficies que generalizan las anteriores superficies vistas, entre las cuales cabe destacar las superficies canal, las superficies tubulares, las superficies swung o las superficies swept. Esta sección está dedicada a introducir estas nuevas superficies y sus parametrizaciones, para en posteriores secciones poder trabajar con ellas. A lo largo de esta sección haremos referencia a [12]. Las imágenes están tomadas de [15].

8.1. Superficies canal

Las superficies generadas por el movimiento de una esfera fueron investigadas por primera vez por Monge en 1807, quién las bautizó como superficies canal. Hay dos formas de obtener este tipo de superficies: pueden ser generadas bien por el movimiento de una esfera a lo largo de una curva o bien por el movimiento de una sección circular de una esfera a lo largo de la misma curva.

Definición 8.1 *Una superficie canal se define como la envolvente de un conjunto de esferas, centradas en la curva directriz $c(u)$, también llamada spine, con radio $r(u)$, también llamada función radial. Entonces, un punto de la superficie*

$p = S(u, v)$ satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (p - c(u))^2 - r(u)^2 = 0 \\ (p - c(u)) \cdot c'(u) - r(u)r'(u) = 0 \end{cases}$$

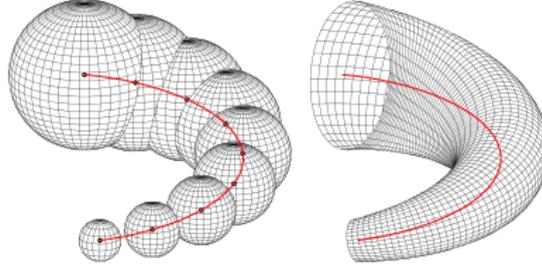


Figura 15: Superficie canal generada por una familia de esferas de distinto radio

La superficie canal se puede parametrizar usando el Triedro de Frenet T, N, B como sigue:

$$S(u, v) = c(u) + r(u)[\sqrt{1 - r'(u)^2}(\cos(v)N + \sin(v)B) - r'(u)T], \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

8.1.1. Superficies tubulares

Las superficies tubulares son un caso particular de las superficies canal. Si la función radial $r(u) = r$ es constante, entonces la superficie canal se llama tubo o superficie tubular. Por tanto, una superficie tubular es simplemente la envolvente del movimiento de una esfera centrada en la curva directriz. Notemos que la intersección entre las esferas de la familia y la superficie tubular es un círculo máximo de la esfera, situado en el plano normal de la curva generatriz.

Las superficies tubulares las podemos parametrizar fácilmente a partir de la parametrización de las superficies canal, utilizando de nuevo el Triedro de Frenet, para el caso particular en el que $r(u) = r$ es constante. Basta tener en cuenta que $r'(u) = 0, \forall u$ y entonces obtenemos:

$$S(u, v) = c(u) + r[\cos(v)N + \sin(v)B], \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Observación 8.2 *Las superficies tubulares también son un claro ejemplo de superficies como curvas en movimiento. Si tomamos la circunferencia de radio r*

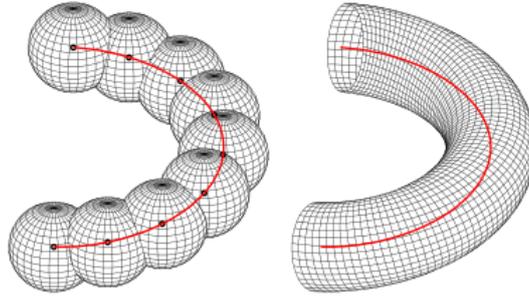


Figura 16: Superficie tubular generada por una familia de esferas con el mismo radio

centrada en la curva directriz y la deslizamos a lo largo de la misma, la superficie que generamos es la misma superficie tubular descrita anteriormente.

Ejemplo 8.3 *Claramente, si c es una línea recta, la superficie tubular de radio r asociada es simplemente el cilindro circular de radio r , siendo c el eje de simetría. Si, por otro lado, si c es una circunferencia, entonces la correspondiente superficie tubular es un toro.*

Observación 8.4 *Las superficies tubulares están muy relacionadas con la noción de offset. Los offsets ocupan un lugar destacado en el diseño geométrico asistido por ordenador, principalmente por sus múltiples aplicaciones, entre las que destacan la planificación de trayectorias de robots, el análisis de tolerancia, el modelado geométrico, o la generalización de diagramas de Voronoi.*

De forma intuitiva la noción de offset de una curva o una superficie se introduce como el lugar geométrico de los puntos a distancia d de la curva o superficie considerada. Es decir, el offset de una curva (ó de una superficie) se puede considerar como la envolvente del sistema de circunferencias (ó de esferas) de radio d centradas en los puntos de la curva (resp. superficie) original.

El offset de la curva directriz $c(u)$ anterior se puede definir como la intersección entre la superficie tubular $S(u, v)$ y el plano que contiene a la curva. Es por ello que las superficies tubulares pueden ser consideradas como la generalización del offset de una curva del espacio.

8.2. Superficies swung

En la construcción de una superficie de revolución, la curva generatriz realiza una rotación completa alrededor del eje de revolución y no sufre una homotecia. Es decir, la curva generatriz nunca cambia en el transcurso de la rotación. Las

superficies swung son una generalización de las superficies de revolución. Tenemos pues, una curva generatriz que gira sobre el eje de revolución, pero el giro no tiene por qué ser de 360 grados y es controlada por la curva directriz. Para diseñar una superficie swung necesitamos una curva generatriz en el plano XZ y una curva directriz en el plano XY.

Definición 8.5 Sea la curva directriz $D(u) = (D_x(u), D_y(u), 0)$ y la curva generatriz $G(v) = (G_x(v), 0, G_z(v))$. La superficie swung definida por $G(v)$ y $D(u)$ es:

$$S(u, v) = (\alpha G_x(v)D_x(u), \alpha G_x(v)D_y(u), G_z(v)),$$

donde α es un número real positivo.

La definición precedente podemos interpretarla como sigue. Para cada punto de la curva directriz $D(u)$, el plano XZ gira sobre el eje z de modo que contiene a $D(u)$. Como resultado una superficie swung se obtiene girando la curva generatriz sobre el eje z y al mismo tiempo realizando una homotecia por la curva directriz.

Como se puede observar en la imagen, si tomamos secciones de corte paralelas

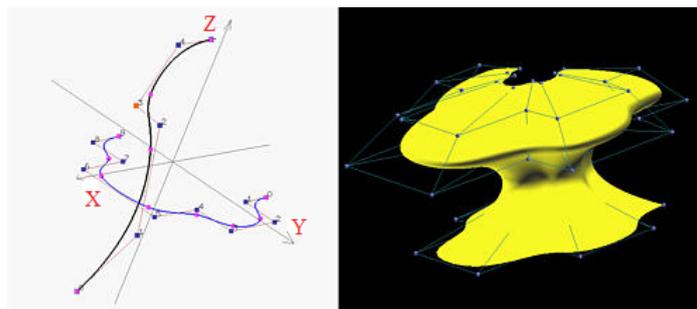


Figura 17: A la izquierda tenemos las curvas directriz y generatriz y a la derecha la superficie swung resultante

al plano XY obtenemos una curva parecida a la curva directriz, mientras que si las secciones son planos que contienen al eje z se obtiene una curva parecida a la curva generatriz.

8.3. Superficies swept

Esta familia de superficies es muy general como veremos más adelante. De ahí que tenga una gran utilidad como superficie de modelado primitivo.

Dadas dos curvas $G(v)$ y $D(u)$, una superficie swept es la superficie generada por el movimiento de la curva generatriz $G(v)$ a lo largo de la curva directriz $D(u)$. La curva $G(v)$ puede sufrir un giro y una homotecia, es decir puede sufrir una transformación. Más precisamente, para cada u , la curva $G(v)$ es transformada y trasladada a $D(u)$. Como consecuencia, la superficie se puede definir como:

$$S(u, v) = D(u) + M(u)G(v)$$

donde $M(u)$ es la matriz de transformación lineal en u , de modo que para cada u podemos tener una matriz de transformación diferente $M(u)$.

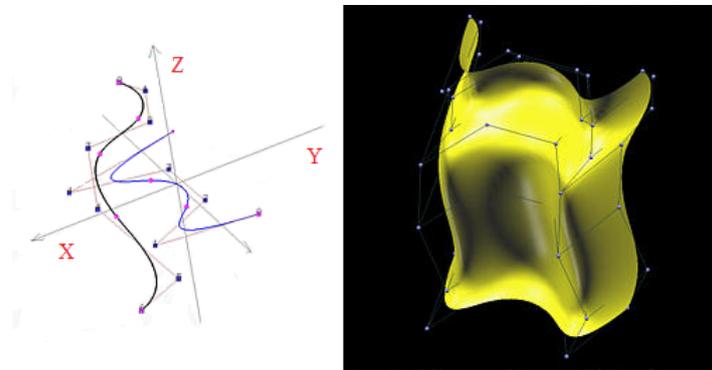


Figura 18: A la izquierda tenemos las curvas directriz y generatriz y a la derecha la superficie swept resultante

9. Superficies definidas por el triedro de Frenet

En esta sección trataremos las superficies definidas por las rectas del triedro de Frenet. Dada una curva en el espacio, calcularemos la primera y segunda forma fundamental en cada caso para más adelante ver en qué condiciones son desarrollables las superficies obtenidas por medio de la curvatura de Gauss. Se hace referencia a [3]. Sea $S(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ una superficie reglada. La referencia de Frenet a lo largo de la curva α queda definida como sigue:

$$T(u) = \alpha'(u)$$

$$N(u) = \frac{\alpha''(u)}{\|\alpha''(u)\|}$$

$$B(u) = T(u) \times N(u)$$

donde T , N y B son los vectores tangente, normal y binormal de α respectivamente.

Recordemos también las fórmulas de Frenet, las cuáles nos ayudarán a continuación con los cálculos:

$$\begin{aligned} T'(u) &= \kappa(u)N(u) \\ N'(u) &= -\kappa(u)T(u) + \tau(u)B(u) \\ B'(u) &= -\tau(u)N(u) \end{aligned}$$

donde κ y τ son la curvatura y la torsión de la curva α .

- La superficie reglada

$$S(u, v) = \alpha(u) + vT$$

se llama superficie desarrollable tangencial de α , como ya hicimos notar en 6.1.1. Además también vimos en 6.1.3 que esta superficie definida por el vector tangente del triedro de Frenet es siempre desarrollable.

- La superficie reglada

$$S(u, v) = \alpha(u) + vN$$

se llama superficie normal de α . Las derivadas parciales de $S(u, v)$ con respecto a u y v son las siguientes:

$$\begin{aligned} S_u &= (1 - v\kappa)T + v\tau B \\ S_v &= N \\ S_{uu} &= -v\kappa'T + [\kappa - v(\kappa^2 + \tau^2)]N + v\tau'B \\ S_{uv} &= S_{vu} = -\kappa T + \tau B \\ S_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

Calculemos ahora el vector normal unitario a S :

$$U = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v\kappa)^2 + v^2\tau^2}}[-v\tau T + (1 - v\kappa)B]$$

En este caso tenemos

$$g_{11} = S_u \cdot S_u = (1 - v\kappa)^2 + v^2\tau^2$$

$$g_{12} = g_{21} = S_u \cdot S_v = 0$$

$$g_{22} = S_v \cdot S_v = 1$$

$$L_{11} = S_{uu} \cdot U = \frac{v\tau' + v^2\tau^2(\frac{\kappa}{\tau})'}{\sqrt{(1 - v\kappa)^2 + v^2\tau^2}}$$

$$L_{12} = L_{21} = S_{uv} \cdot U = \frac{\tau}{\sqrt{(1 - v\kappa)^2 + v^2\tau^2}}$$

$$L_{22} = S_{vv} \cdot U = 0$$

Finalmente, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{\tau^2}{[(1 - v\kappa)^2 + v^2\tau^2]^2}$$

- La superficie reglada

$$S(u, v) = \alpha(u) + vB$$

se llama superficie binormal de α . Las derivadas parciales de $S(u, v)$ con respecto a u y v son las siguientes:

$$S_u = (1 - v\kappa)T - v\tau N$$

$$S_v = B$$

$$S_{uu} = v\kappa\tau T + (\kappa - v\tau')N - v\tau^2 B$$

$$S_{uv} = S_{vu} = -\tau N$$

$$S_{vv} = 0$$

Calculemos ahora el vector normal unitario a S :

$$U = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2\tau^2}}[-v\tau T - N]$$

$$g_{11} = S_u \cdot S_u = 1 + v^2\tau^2$$

$$g_{12} = g_{21} = S_u \cdot S_v = 0$$

$$g_{22} = S_v \cdot S_v = 1$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= S_{uu} \cdot U = \frac{-v^2 \kappa \tau^2 - \kappa + v \tau'}{\sqrt{1 + v^2 \tau^2}} \\
L_{12} &= L_{21} = S_{uv} \cdot U = \frac{\tau}{\sqrt{1 + v^2 \tau^2}} \\
L_{22} &= S_{vv} \cdot U = 0
\end{aligned}$$

Por último, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{\tau^2}{[1 + v^2 \tau^2]^2}$$

Ya hicimos notar que las superficies desarrollables eran aquellas cuya curvatura de Gauss era nula. Observamos que tanto para superficies normales como binormales de α , la curvatura de Gauss se anula si y sólo si la torsión es cero. Este hecho da lugar al siguiente teorema.

Teorema 9.1 *Sea α una curva regular. Entonces las superficies definidas por los vectores normal y binormal de α son desarrollables si y sólo si α es una curva plana.*

Demostración. Se sigue de los cálculos expuestos precedentes al teorema. Basta tener en cuenta que α es una curva plana si y sólo si $\tau = 0$.

10. Superficies envolventes de los planos del triedro de Frenet

En esta sección veremos otro tipo de superficies desarrollables que son las superficies obtenidas como envolvente de los planos normales, binormales y rectificantes del triedro de Frenet. Llamaremos $\alpha(s)$ a la curva regular con la que trabajaremos. Además supondremos que la torsión, τ , nunca se anula. En esta sección se hace referencia a [1].

Sea $F(x, y, z, a) = 0$, donde a es una constante, la ecuación implícita de una superficie. Si cambiamos el valor de a obtenemos otra superficie. De esta manera obtenemos infinitas superficies, que se corresponden con los infinitos valores de a , y se llama familia de superficies de parámetro a .

La intersección de dos superficies de la familia, correspondientes a los valores a y

δa queda determinada por

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad F(x, y, z, \delta a) = 0$$

y por tanto también por

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{F(x, y, z, \delta a) - F(x, y, z, a)}{\delta a} = 0.$$

Si ahora hacemos tender δa a 0, obtenemos a la dercha un conocido límite, y la curva queda definida por

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, a)}{\partial a} = 0.$$

La intersección de las dos ecuaciones anteriores da lugar a una curva, llamada curva característica de la superficie de parámetro a . Como el parámetro a varía, obtenemos una familia de curvas características, y su lugar geométrico se llama envolvente de la familia de superficies.

Otro elemento importante de las superficies envolventes es la arista de retroceso. Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} F(x, y, z, a) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z, a)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial^2 F(x, y, z, a)}{\partial^2 a} = 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones hacen referencia a las rectas características de la familia de superficies. Si el sistema es compatible, obtenemos una curva, la cuál, en cada punto, es tangente a una recta característica, es decir, es la envolvente de las rectas características. Esta envolvente es llamada arista de retroceso de la superficie envolvente de la familia.

- Superficie tangencial

La ecuación de los planos osculadores en el punto de la curva P viene dada por:

$$(P - \alpha(s)) \cdot B(s) = 0 \tag{1}$$

Derivando la ecuación anterior respecto de s , obtenemos

$$-\alpha'(s) \cdot B(s) + (P - \alpha(s)) \cdot B'(s) = 0$$

y teniendo en cuenta que $\alpha' \cdot B = T \cdot B = 0$, utilizando las fórmulas de Frenet,

$$(P - \alpha(s)) \cdot N(s) = 0 \quad (2)$$

ya que habíamos supuesto que la torsión no se anulase.

A partir de las ecuaciones (1) y (2) observamos que las rectas características son perpendiculares a $B(s)$ y $N(s)$, es decir, es la recta tangente a la curva. Para obtener la arista de retroceso derivamos la ecuación (2) respecto de s :

$$-\alpha'(s) \cdot N(s) + (P - \alpha(s)) \cdot N'(s) = (P - \alpha(s)) \cdot [-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)] = 0$$

Como $-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \neq 0$ ya que τ no se anula, obtenemos que

$$P = \alpha(s),$$

la arista de retroceso es la propia curva. Notemos que esta superficie ya la habíamos definido anteriormente. Como acabamos de ver, la superficie definida por las tangentes a la curva es también la superficie envolvente de los planos osculadores.

- Superficie polar

La envolvente del plano normal de una curva se llama superficie polar o desarrollable polar, y es generada por las llamadas líneas polares. La ecuación del plano normal es

$$(P - \alpha(s)) \cdot T(s) = 0. \quad (3)$$

Derivando respecto de s tenemos que

$$-1 + (P - \alpha(s)) \cdot \kappa(s)N(s) = 0. \quad (4)$$

Se sigue entonces que

$$(P - \alpha(s)) \cdot N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \quad (5)$$

Notemos que (5) es la ecuación de un plano paralelo al plano rectificante, ya que tiene como vector normal el vector normal unitario. Entonces la característica de la envolvente de los planos normales que pasan por $\alpha(s)$ se obtiene intersecando el plano normal a la curva en el punto con un plano paralelo al plano rectificante de la curva que pase por el mismo punto, es decir, es una

línea recta paralela al vector binormal que pasa por $\alpha(s)$.

Por otra parte, dicha recta característica pasa por el punto de vector de posición $\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, que es el centro de curvatura de la curva.

Calculemos ahora la arista de retroceso. Para ello derivamos la ecuación (4) y obtenemos

$-\alpha'(s) \cdot \kappa(s) \cdot N(s) + (P - \alpha(s)) \cdot \kappa'(s) \cdot N(s) + (P - \alpha(s)) \cdot \kappa(s) \cdot N'(s) = 0$,
de donde siguiendo con los cálculos y usando (5)

$$\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} + (P - \alpha(s)) \cdot \kappa(s) \cdot [-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)] = 0,$$

de donde finalmente con (3) llegamos a

$$(P - \alpha(s)) \cdot B(s) = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s) \cdot \tau(s)}. \quad (6)$$

De las ecuaciones obtenidas deducimos lo siguiente:

- La recta de intersección entre los planos (3) y (6) es paralela al plano osculador y al plano normal, es decir, es paralela al vector binormal.

- La recta pasa por el punto

$$\alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s) \cdot \tau(s)} \cdot B(s).$$

Por tanto el punto de la arista de retroceso se obtiene intersecando las rectas

$$P(a) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot N(s) + aB(s), \quad (7)$$

$$P(b) = \alpha(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \cdot B(s) + bN(s), \quad (8)$$

El punto tendrá como vector de posición

$$P(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot N(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \cdot B(s). \quad (9)$$

- Superficie rectificante La ecuación del plano rectificante es

$$(P - \alpha(s)) \cdot N(s) = 0. \quad (10)$$

Derivando obtenemos:

$$-\alpha'(s) \cdot N(s) + (P - \alpha(s)) \cdot N'(s) = (P - \alpha(s)) \cdot [-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)] = 0. \quad (11)$$

Los puntos de la curva verifican las ecuaciones (10) y (11), por tanto la curva está en la superficie rectificante y se puede tomar como directriz de la superficie, entendida como superficie reglada. Además deducimos que las rectas características son perpendiculares a N y a N' . Podemos tomar entonces como vector director

$$N \times N' = N \times (-\kappa T + \tau B) = -\kappa(N \times T) + \tau(N \times B) = \tau T + \kappa B = \delta,$$

donde δ es el vector de Darboux de la curva. Por tanto, las rectas características de la superficie rectificante de una curva del espacio son los ejes de la referencia de Darboux de la curva o los ejes de rotación instantáneo de la referencia de Frenet .

El plano tangente de la superficie rectificante en un punto de la curva dada contiene el vector tangente de la curva $\alpha' = T$ y el vector de Darboux de la curva, δ . Como consecuencia, el vector normal a la superficie en ese punto tiene la misma dirección que el vector

$$T \times \delta = T \times (\tau T + \kappa B) = \kappa(T \times B) = -\kappa N.$$

Tenemos por tanto que el vector normal a la superficie rectificante en un punto de la curva coincide con el vector normal de la curva. Esto da lugar a la siguiente observación.

Observación 10.1 *El plano osculador de la curva es perpendicular al espacio tangente de la superficie, es decir, la curva es una geodésica de su superficie rectificante.*

11. Propiedades geométricas

En esta última sección se estudian distintas propiedades geométricas de las superficies estudiadas.

11.1. Relaciones entre los distintos tipos de superficies

En CAGD se utilizan muchos tipos de superficies, como ya vimos en la sección 8. Sin embargo puede ocurrir que una superficie pertenezca a varias familias de

superficies a la vez.

- Superficies swung y superficies swept

Se hace referencia a [12]. Tomemos las curvas $G(v)$ y $D(u)$ como curvas generatriz y directriz respectivamente. Como $D(u)$ está en el plano XY y tiene un cierto ángulo con el eje x, la matriz de transformación $M(u)$ es la composición de un giro sobre el eje z, que gira el plano XZ que contiene a $D(u)$, y una homotecia del vector $G(v)$ en la dirección de $D(u)$. El resultado de aplicar a $G(v)$ el giro y la homotecia es $M(u) \cdot G(v)$. Puesto que $M(u) \cdot G(v)$ ya contiene a $D(u)$, no es necesaria una traslación y la superficie es $S(u, v) = M(u) \cdot G(v)$. Por lo tanto, las superficies swung también son superficies swept.

Ya habíamos hecho notar, que las superficies de revolución eran un caso particular de superficies swung. Por tanto, de manera inmediata tenemos que las superficies de revolución las podemos expresar como superficies swept.

- Superficies canal y superficies swept

En este caso haremos referencia a [2]. La propia definición en inglés ya nos indica que las superficies canal son un caso particular de superficies swept, ya que: “ Canal surfaces is the class of surfaces sweeping a sphere”. Formalmente, debemos deducir la forma de una ecuación de una superficie tubular como una superficie swept o lo que es lo mismo debemos indicar la forma de la matriz M para el caso particular de superficies tubulares.

Primero definimos la curva G como la circunferencia de radio r que se encuentra en el plano XY, en otras palabras, su ecuación es de la forma:

$$G(v) = (r \cos(v), r \sin(v), 0). \quad (12)$$

Lo que vamos a hacer ahora es girar la curva G de forma que, después del giro, quedará situada en el plano normal de la curva D . Entonces, para cualquier u , la matriz de transformación M deberá convertir el plano XY en el plano normal de la curva en el punto $D(u)$. La idea es encontrar el giro de \mathbb{R}^3 que convertirá los ejes del sistema de coordenadas (trasladado al punto de la curva) en los ejes de la referencia de Frenet, de manera que el eje z se corresponda con el vector tangente de D , el eje x con el vector normal y el eje y con el vector binormal.

Haciendo referencia a [6], sabemos que las columnas de la matriz de rotación son los vectores unitarios de la nueva dirección. En nuestro caso, los denotaremos como sigue

$$M(u) = [N(u) \ B(u) \ T(u)]. \quad (13)$$

Si ahora consideramos una superficie canal cualquiera, en lugar de una superficie tubular, y tomamos como razón de la homotecia $f(u)$, la matriz de la transformación resulta del siguiente modo:

$$M(u) = [N(u) \ B(u) \ T(u)] \cdot \begin{pmatrix} f(u) & 0 & 0 \\ 0 & f(u) & 0 \\ 0 & 0 & f(u) \end{pmatrix} \equiv \\ [f(u) \cdot N(u) \ f(u) \cdot B(u) \ f(u) \cdot T(u)].$$

Observación 11.1 *Se puede comprobar fácilmente, que la ecuación de superficies swept, 18, con la matriz de transformación (13) y la curva directriz (12) coincide con la ecuación de superficies tubulares definida anteriormente 8.1.1.*

11.2. Superficies canal y superficies desarrollibles

El diseño de las superficies canal y las superficies desarrollibles es objeto de estudio debido a sus propiedades en diversas aplicaciones del CAGD. En esta sección vamos a ver en que condiciones dada una superficie canal se comporta también como superficie desarrollible. En este apartado se hace referencia a [11].

Como vimos, las superficies canal se pueden parametrizar utilizando el triedro de Frenet $\{T, N, B\}$ del siguiente modo:

$$S(u, v) = c(u) + r(u)[\sqrt{1 - r'(u)^2}(\cos(v)N + \sen(v)B) - r'(u)T], \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

A continuación vamos a ver cuando una superficie canal es desarrollible. Para ello calcularemos previamente la curvatura de Gauss, la cual ya sabemos que se tiene que anular en ese caso. Para facilitar los cálculos llamaremos $g = r\sqrt{1 - r'^2}$ y $h = rr'$. Entonces nuestra superficie canal queda parametrizada como sigue:

$$S(u, v) = c(u) + g(u)[\cos(v)N + \sen(v)B] - h(u)T \\ S_u = [1 - \kappa g \cos(v) - h']T + [g' \cos(v) - \tau g \sen(v) - h\kappa]N + [g' \sen(v) + \tau g \cos(v)]B \\ S_v = [-g \sen(v)]N + [g \cos(v)]B$$

$$\begin{aligned}
S_{uu} &= [(-\kappa'g) - 2\kappa g']\cos(v) + \kappa\tau g\text{sen}(v) - h'' + h\kappa^2]T + \\
&[(\kappa - \kappa^2g + g'' - \tau^2g)\cos(v) + (-\tau'g - 2\tau g')\text{sen}(v) - 2h'\kappa - h\kappa']N + \\
&[(\tau'g + 2\tau g')\cos(v) + (g'' - \tau^2g)\text{sen}(v) - h\kappa\tau]B
\end{aligned}$$

$$S_{uv} = [g\kappa\text{sen}(v)]T + [-g'\text{sen}(v) - g\tau\cos(v)]N + [g'\cos(v) - g\tau\text{sen}(v)]B$$

$$S_{vv} = [-g\cos(v)]N + [-g\text{sen}(v)]B$$

$$g_{11} = S_u \cdot S_u = (1 - \kappa g \cos(v) - h')^2 + (g' \cos(v) - \tau g \text{sen}(v) - h\kappa)^2 + (g' \text{sen}(v) + \tau g \cos(v))^2$$

$$g_{12} = S_u \cdot S_v = \tau g^2 + g h \kappa \text{sen}(v)$$

$$g_{22} = g^2$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|} = \\
&\frac{[g' - h\kappa\cos(v)]T + [-1 + \kappa g \cos(v) + h'][\cos(v)N + \text{sen}(v)B]}{\sqrt{(g' - h\kappa\cos(v))^2 + (-1 + \kappa g \cos(v) + h')^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= S_{uu} \cdot U = [g'(h\kappa^2 - h'') + (h' - 1)(g'' - \tau^2g)] + \cos(v)[\kappa g(g'' - \tau^2g) - h\kappa(h\kappa^2 - \\
&h'') + g'(-\kappa'g - 2\kappa g') + (h' - 1)(\kappa - 2\kappa h' - h\kappa')] + \text{sen}(v)[\kappa\tau g g' + (h' - 1)(-h\kappa\tau)] + \\
&\cos^2(v)[2h\kappa^2g' - 3h'\kappa^2g - \kappa + 2\kappa^2g] + \cos^3(v)[- \kappa^3g^2] + \text{sen}(v)\cos(v)[-2h\kappa^2\tau g].
\end{aligned}$$

$$L_{12} = S_{uv} \cdot U = [-g\tau(-1 + h')] + \text{sen}(v)[g g' \kappa] + \cos(v)[- \kappa g^2 \tau] + \text{sen}(v)\cos(v)[- h\kappa^2 g].$$

$$L_{22} = S_{vv} \cdot U = g(1 - h') + \cos(v)[- \kappa g^2].$$

Por último la curvatura de Gauss viene dada por:

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Teorema 11.2 *Una superficie canal regular es desarrollable si y sólo si la superficie canal es un cilindro o un cono.*

Demostración: Claramente si la superficie es un cilindro o un cono, la superficie es desarrollable como se muestra en la clasificación de superficies desarrollables de la sección 6.1

Para la otra implicación consideremos que la superficies es desarrollable o equivalentemente que la curvatura de Gauss $K = 0$. De esta manera obtenemos una

expresión que depende de combinaciones de $\text{sen}(v)$ y $\text{cos}(v)$.

Ahora elevamos al cuadrado a ambos términos y realizamos el cambio $\text{sen}^2(v) = 1 - \text{cos}^2(v)$. Obtenemos un polinomio de grado 8 en función de $\text{cos}(v)$ igualado al polinomio nulo. Por propiedades de los polinomios, el coeficiente de mayor grado de la izquierda, entre otros, debe ser 0. Por tanto $\kappa^4 g^2 (g^2 + h^2) = 0$.

Sabemos que $g \neq 0$, luego se tiene que $\kappa = 0$. Podemos ahora sustituir en la ecuación de K y obtenemos lo siguiente:

$$(h' - 1)(g'h'' - g''(h' - 1)) = 0. \quad (14)$$

Notemos que cuando $k = 0$, si $h'(u_0) - 1 = 0$ para cierto $u_0 \in [0, l]$, entonces $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = 0$ en (u_0, v) , con $v \in [0, 2\pi)$. Por tanto, cuando $h'(u_0) - 1 = 0$ la superficie no es regular y se cumple:

$$g'h'' - g''(h' - 1) = 0. \quad (15)$$

Veamos a continuación que g'' lo podemos escribir como sigue:

$$g'' = \left(\frac{3r'r'' + rr'''}{h' - 1} + \frac{r''}{r'(1 - r'^2)} \right) g'. \quad (16)$$

Calculemos primero g' :

$$g' = r'\sqrt{1 - r'^2} - \frac{rr'r''}{\sqrt{1 - r'^2}}.$$

De acuerdo con la expresión (16) y agrupando adecuadamente, obtenemos que:

$$g'' = -\frac{3r'^2r'' + rr'r'''}{\sqrt{1 - r'^3}} + \frac{r''}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{rr''^2}{(1 - r'^2)\sqrt{1 - r'^2}}.$$

Por otro lado, derivando obtenemos:

$$g'' = \frac{r'' - r'^2r''}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{r'^2r''}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{r'^2r'' + rr'r'''}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{rr'^2r''^2}{\sqrt{1 - r'^2}(1 - r'^2)} = \\ -\frac{3r'^2r'' + rr'r'''}{\sqrt{1 - r'^3}} + \frac{r''}{\sqrt{1 - r'^2}} - \frac{rr''^2}{(1 - r'^2)\sqrt{1 - r'^2}}.$$

Utilizando el resultado (16), la igualdad (15) queda del siguiente modo:

$$(h' - 1) \frac{r''}{r'(1 - r'^2)} g' = 0. \quad (17)$$

Ya hicimos notar que $h' - 1 \neq 0$. Luego se cumple que $g' = \frac{r'(1 - h')}{\sqrt{1 - r'^2}} = 0$ ó $r'' = 0$.

En el primer caso tenemos que $r' = 0$. Luego si $g' = 0$, r es una constante. En el segundo caso si $r'' = 0$ tenemos que r es una función lineal de u .

Se deduce por tanto de (17) que r es una constante o una función lineal de u y por tanto la superficie canal es un cilindro o un cono respectivamente.

Corolario 11.3 *Una superficie tubular regular es desarrollable si y sólo si la superficie tubular es un cilindro.*

11.3. Referencia de Darboux y algunas propiedades de los tubos

Continuaremos esta sección viendo algunas propiedades de las superficies descritas anteriormente. Para ello vamos a comenzar describiendo la referencia de Darboux y enunciaremos una proposición para caracterizar a las geodésicas, líneas de curvatura y líneas asintóticas de una superficie. Hacemos referencia a [5] y [4]. Para una curva regular, la referencia de Darboux (N, T, H) a lo largo de la curva es una referencia adaptada formada por el vector normal a la superficie N , el vector tangente a la curva T y el vector normal intrínseco $H = N \times T$, vector unitario en la superficie tangente, ortogonal al vector tangente a la curva.

La variación de la referencia de Darboux se describe a partir de su velocidad angular

$$\omega = \kappa_g N - \tau_g T - \kappa_n H$$

por las ecuaciones $N' = \sigma\omega \times N$, $T' = \sigma\omega \times T$, $H' = \sigma\omega \times H$, donde

$$\kappa_g = \frac{H \cdot T'}{\sigma}, \quad \tau_g = \frac{H \cdot N'}{\sigma}, \quad \kappa_n = \frac{N \cdot T'}{\sigma}.$$

La curvatura geodésica, τ_g , mide la desviación entre el vector normal principal de la curva, P , y el vector normal a la superficie N a lo largo de ella. Una curva geodésica se caracteriza por el hecho de que $P \equiv N$ y por tanto $\kappa_g \equiv 0$.

La torsión geodésica en una dirección cualquiera en un punto de la superficie es la torsión de la geodésica en dicha dirección y en ese punto. Las líneas de curvatura de una superficie se caracterizan por satisfacer $\tau_g \equiv 0$.

Por último las líneas asintóticas se caracterizan por cumplir $\kappa_n \equiv 0$.

Proposición 11.4 *Una curva de una superficie es*

- (1) *una geodésica*
- (2) *una línea de curvatura*
- (3) *una línea asintótica*

si y sólo si la referencia de Darboux (N, T, H) es RM con respecto a

- (1) *el vector normal a la superficie*
- (2) *el vector tangente*
- (3) *el vector normal intrínseco*

Las ecuaciones de Darboux para esta referencia vienen dadas por

$$\begin{aligned} N' &= -\kappa_n T - \tau_g H \\ T' &= \kappa_g H + \kappa_n N \\ H' &= -\kappa_g T + \tau_g N. \end{aligned}$$

Sea $c(s)$ una curva en la superficie. Como los círculos máximos de una superficie canal se encuentran en el plano que es perpendicular al vector tangente de la curva, podemos escribir el tubo con la referencia de Darboux como

$$D(s, v) = c(s) + r(\cos(v)H(s) + \sin(v)N(s)),$$

Entonces, aplicando las fórmulas de la referencia de Darboux, tenemos que:

$$\begin{aligned} D_s &= [1 - r\cos(v)\kappa_g - r\sin(v)\kappa_n]T - r\sin(v)\tau_g H + r\cos(v)\tau_g N \\ D_v &= [-r\sin(v)]H + [r\cos(v)]N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ss} &= [-r\cos(v)(\kappa'_g + \kappa_n\tau_g) + r\sin(v)(\kappa_g\tau_g - \kappa'_n)]T + \\ &\quad [\kappa_g - r\cos(v)(\kappa_g^2 + \tau_g^2) - r\sin(v)(\kappa_n\kappa_g + \tau'_g)]H + \\ &\quad [\kappa_n - r\cos(v)(\kappa_n\kappa_g - \tau'(g)) - r\sin(v)(\kappa_n^2 + \tau_g^2)]N \end{aligned}$$

$$D_{vs} = [r\sin(v)\kappa_g - r\cos(v)\kappa_n]T - r\cos(v)\tau_g H - r\sin(v)\tau_g N$$

$$D_{vv} = -r\cos(v)H - r\sin(v)N$$

$$D_s \times D_v = -r(1 - r\sin(v)\kappa_n - r\cos(v)\kappa_g)[\cos(v)H + \sin(v)N]$$

$$\|D_s \times D_v\| = r(1 - r\sin(v)\kappa_n - r\cos(v)\kappa_g)$$

Calculemos ahora el vector normal unitario de la superficie y los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$N = \frac{D_s \times D_v}{\|D_s \times D_v\|} = -\cos(v)H - \sin(v)N$$

$$g_{11} = (1 - r\cos(v)\kappa_g - r\sin(v)\kappa_n)^2 + r^2\tau_g^2$$

$$g_{12} = r^2\tau_g$$

$$g_{22} = r^2$$

$$L_{11} = -(\kappa_g\cos(v) + \kappa_n\sin(v))[1 - r\cos(v)\kappa_g - r\sin(v)\kappa_n] + r\tau_g^2$$

$$L_{12} = r\tau_g$$

$$L_{22} = r.$$

Por último obtenemos que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v)}{r(1 - r\cos(v)\kappa_g - r\operatorname{sen}(v)\kappa_n)}.$$

A continuación veremos algunas relaciones entre las curvas paramétricas y las geodésicas, líneas de curvatura y líneas asintóticas de la superficie $D(s, v)$.

Teorema 11.5 *Sea $D(s, v)$ un tubo regular, entonces*

(1) *Las curvas v -paramétricas son geodésicas.*

(2) *Las curvas s -paramétricas son geodésicas $\Leftrightarrow \kappa_n, \kappa_g$ y τ_g de $c(s)$ satisfacen el sistema*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(v)\kappa_g - \cos(v)\kappa_n + r\cos(2v)\kappa_n\kappa_g + \frac{1}{2}r\operatorname{sen}(2v)(\kappa_n^2 - \kappa_g^2) - r\tau_g' = 0 \\ \cos(v)(\kappa_g' + \kappa_n\tau_g) + \operatorname{sen}(v)(\kappa_n' - \kappa_g\tau_g) = 0 \end{cases}$$

Demostración. Para las curvas s -paramétricas y v -paramétricas tenemos lo siguiente

$$N \times D_{vv} = r\operatorname{sen}(v)\cos(v)T - r\operatorname{sen}(v)\cos(v)T = 0$$

$$\begin{aligned} N \times D_{ss} &= (\operatorname{sen}(v)\kappa_g - \cos(v)\kappa_n + r\cos(2v)\kappa_n\kappa_g + \frac{1}{2}r\operatorname{sen}(2v)(\kappa_n^2 - \kappa_g^2) - r\tau_g')T + \\ &\quad r\operatorname{sen}(v)[\cos(v)\kappa_g' + \operatorname{sen}(v)\kappa_n' - \operatorname{sen}(v)\kappa_g\tau_g + \cos(v)\kappa_n\tau_g]H - \\ &\quad r\cos(v)[\cos(v)\kappa_g' + \operatorname{sen}(v)\kappa_n' - \operatorname{sen}(v)\kappa_g\tau_g + \cos(v)\kappa_n\tau_g]N. \end{aligned}$$

(1) Como $N \times D_{vv} = 0$, las curvas v -paramétricas son también geodésicas.

(2) Como T, H y N son linealmente independientes, para que $U \times D_{ss} = 0$, debe ser:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(v)\kappa_g - \cos(v)\kappa_n + r\cos(2v)\kappa_n\kappa_g + \frac{1}{2}r\operatorname{sen}(2v)(\kappa_n^2 - \kappa_g^2) - r\tau_g' = 0 \\ r\operatorname{sen}(v)[\cos(v)\kappa_g' + \operatorname{sen}(v)\kappa_n' - \operatorname{sen}(v)\kappa_g\tau_g + \cos(v)\kappa_n\tau_g] = 0 \\ -r\cos(v)[\cos(v)\kappa_g' + \operatorname{sen}(v)\kappa_n' - \operatorname{sen}(v)\kappa_g\tau_g + \cos(v)\kappa_n\tau_g] = 0 \end{cases}$$

Por las dos últimas ecuaciones se tiene que

$$\cos(v)\kappa_g' + \operatorname{sen}(v)\kappa_n' - \operatorname{sen}(v)\kappa_g\tau_g + \cos(v)\kappa_n\tau_g = \cos(v)(\kappa_g' + \kappa_n\tau_g) + \operatorname{sen}(v)(\kappa_n' - \kappa_g\tau_g) = 0$$

Luego la afirmación (2) del teorema se cumple.

Teorema 11.6 Sea $D(s, v)$ un tubo regular, entonces

(1) Las curvas v -paramétricas no pueden ser líneas asintóticas.

(2) Las curvas s -paramétricas son líneas asintóticas $\Leftrightarrow D(s, v)$ es generada por el movimiento de la esfera de función radial

$$r = \frac{\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v)}{(\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v))^2 + \tau_g^2} = c,$$

donde c es una constante.

Demostración. (1) Como $N \cdot D_{vv} = r \cos^2(v) + r \operatorname{sen}^2(v) = r \neq 0$, las curvas v -paramétricas no pueden ser líneas asintóticas.

(2) Las curvas s -paramétricas son líneas asintóticas \Leftrightarrow

$$N \cdot D_{ss} = (\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v))[r(\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v) - 1)] + r\tau_g^2 = 0.$$

De aquí podemos despejar la función radial, de modo que

$$r = \frac{\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v)}{(\kappa_g \cos(v) + \kappa_n \operatorname{sen}(v))^2 + \tau_g^2} = c,$$

donde c es una constante.

Definición 11.7 Sea M una superficie y sea α una curva de la superficie. Entonces

$$(L_{12}g_{11} - L_{11}g_{22})(u')^2 + (L_{22}g_{11} - L_{11}g_{22})u'v' + (L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22})(v')^2 = 0 \quad (18)$$

se llama ecuación diferenciable de las líneas de curvatura de M .

A partir de la definición precedente, demostraremos a continuación un teorema que nos permita caracterizar las líneas de curvatura a partir de la primera y segunda forma fundamental.

Teorema 11.8 Las curvas paramétricas de una superficie son líneas de curvatura $\Leftrightarrow L_{12} = g_{12} = 0$.

Demostración. El teorema es cierto tanto para una esfera como para un plano, ya que en estos casos tenemos $L_{12} = kg_{12}$, de manera que si $g_{12} = 0$, entonces $L_{12} = 0$.

Para cualquier otra superficie, si $L_{12} = g_{12} = 0$, la ecuación (18) se reduce a $u'v' = 0$ y por tanto las líneas de curvatura son las curvas paramétricas.

Por otra parte si la ecuación (18) se reduce a $u'v' = 0$, entonces $L_{12}g_{11} - L_{11}g_{12} = 0$ y $L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22} = 0$. Pero como $L_{22}g_{11} - L_{11}g_{22} \neq 0$, la única solución es $L_{12} = g_{12} = 0$.

Teorema 11.9 Sea $D(s, v)$ un tubo regular. Entonces, las curvas paramétricas de $D(s, v)$ son líneas de curvatura \Leftrightarrow la curva directriz $c(s)$ es una línea de curvatura de M .

Demostración. De los cálculos de la primera y segunda forma fundamental, vemos que

$$g_{12} = r^2 \tau_g$$

$$L_{12} = r \tau_g$$

De acuerdo con el teorema que acabamos de ver, las curvas paramétricas de una superficie son líneas de curvatura si y sólo si $g_{12} = L_{12} = 0$. Luego debe ser $\tau_g = 0$, es decir, $c(s)$ es una línea de curvatura de M .

Referencias

- [1] Blaga, Paul A.: *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2005, Napoca Press ,197-200
- [2] Blaga, Paul A. : *On tubular surfaces in computer graphics*, 2005, Babes-Bolyai University, L (2), 85-86
- [3] Doğan, Fatih : *On characteristic curves of developable surfaces in euclidean 3-space*, 2015, arXiv: 1508.05439, 1-6
- [4] Doğan, Fatih y Yayl, Yusuf: *Tubes with Darboux frame*, 2012, Journal of Computational and Applied Mathematics, 7 (16), 751-757
- [5] Farouki, Rida T.; Gianelli, Carlotta; Sampoli, Maria Lucia y Sestini, Alessandra: *Rotation-minimizing osculating frames*, 2013, Elsevier Science, 31 (1), 6-7
- [6] Foley, J.D.; van Dam, A.; Feiner, S.K. y Hughes, J.F.: *Computer Graphics, Principles and Practice*,1990, Segunda Edición, Addison-Wesley, Capítulo 5
- [7] Giannelli, Carlotta; Tesis Doctoral: *Rational moving frames on polynomial space curves: theory and applications*, 2005, University of Florence,Capítulo 1
- [8] Lipschutz, Martin: *Teoría y Problemas de Geometría Diferencial*, 1990, serie Schaum, Mc Graw Hill, 89-92, 274

- [9] Martínez de la Rosa, Félix y Garrido Atienza, María José: *Matemáticas 2: resúmenes teóricos y ejercicios*, 1998, Servicio de publicaciones UCA, Capítulo 3
- [10] Navarro Camacho, Jorge; Gómez Gómez, Jesús; García Gómez, Fulgencio y M. Pina Coronado, Emilio: *Matemáticas: Profesores de Educación Secundaria, Volumen 3*, 2013, Centro de Oposiciones de Murcia, Tema 49
- [11] Xu, Zhiqiang; Feng, Renzhong y Sun, Jia-guang: *Analytic and Algebraic Properties of Canal Surfaces*, 2004, Journal of computational and applied mathematics, 195 (1), 1-6
- [12] Zhao, Yuan; Zao, Yan; John L. Lowther y Shene, Ching-Kuang : *Cross-Sectional Design: A Tool for Computer Graphics and Computer-Aided Design Courses*, 1999, IEEE, 2 (1), 3-6
- [13] [http : //www.ecured.cu/Paraboloide-hiperbolico](http://www.ecured.cu/Paraboloide-hiperbolico), EcuRed: Paraboloide hiperbólico, página web pública, (22-06-2016)
- [14] <http://www.matematicasdigitales.com/hiperboloide-de-una-hoja>, artículo escrito por Jose Carlos Gámez, (23-06-2016)
- [15] <http://www.cs.mtu.edu/shene/COURSES/cs3621/LAB/surface/surface.html>, página web de Dr. C.-K. Shene, Universidad Tecnológica de Michigan. (29-06-2016)