



***Facultad
de
Ciencias***

ESTUDIO DE LAS TRANSICIONES DE FASE EN UN MODELO DE SINCRONIZACIÓN MASCROSCÓPICA

**(Study of the phase transitions in a model of
macroscopic synchronization)**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN FÍSICA

Autor: María Zarauza Martínez

Director: Diego Pazó Bueno

Julio-2016

Contenidos

1. Introducción general	
1.1 Oscilador auto-sostenido.....	3
1.2 Conjunto de osciladores.....	5
1.3 Sincronización	7
1.4 Sincronización macroscópica.....	9
2. Sincronización de dos osciladores	
2.1. Constante de acoplamiento $K > K_{umbral}$	13
2.2. Constante de acoplamiento $K < K_{umbral}$	14
3. Sincronización de N osciladores	
3.1 Fenomenología.....	6
3.2 Distribución lorentziana de frecuencias naturales.....	19
3.3 Análisis teórico	23
3.4 Efectos de tamaño finito.....	27
3.5 Distribución parabólica de frecuencias naturales.....	28
3.6 Distribución gaussiana de frecuencias naturales.....	31
3.7 Estudio del valor asintótico de R cercano al K_{umbral}	32
4. Distribución de frecuencias con máximo no parabólico	
4.1. Distribución de frecuencias naturales según una distribución de probabilidad triangular.....	37
4.2. Determinación exponente β	41
Conclusiones	45
Bibliografía	47
Apéndices	48

Resumen

El propósito de este trabajo es el estudio y análisis del modelo de Kuramoto, el cual describe una población de $N \gg 1$ osciladores con frecuencias naturales distribuidas en algún rango. El objetivo es observar la transición de fase a la sincronización macroscópica y determinar el valor de la fuerza de acoplamiento umbral para la cual esta transición de fase ocurre. En el estado de sincronización macroscópica un conjunto de osciladores se sincronizan mientras otros permanecen en un estado de incoherencia. El estudio está complementado con las comprobaciones numéricas correspondientes y el análisis de la coherencia de fase en función de la fuerza de acoplamiento

Palabras clave: Sincronización, Modelo de Kuramoto, osciladores acoplados, transiciones de fase.

Abstract

The aim of this work is to study and analyze the Kuramoto model, which describes a population of $N \gg 1$ oscillators whose natural frequencies are distributed over some range. The purpose is to observe the phase transition to the macroscopic synchronization and determine the value of the coupling strength threshold for which this phase transition occurs. This means that in the state of macroscopic synchronization some of the oscillators are synchronized while others remain out of synchronization. This studio is also complemented by the corresponding numerical checks and analysis of the phase coherence depending on the coupling strength.

Key words: Synchronization, Kuramoto model, coupled oscillators, phase transition.

Agradecimientos

En especial a Diego Pazó, director de este trabajo, por su dedicación, asesoramiento y paciencia durante la realización del mismo.

A mi familia y compañeros de carrera, por su apoyo y colaboración.

Capítulo 1

Introducción general

Este Trabajo de Fin de Grado es una investigación sobre un fenómeno casi omnipresente en la naturaleza, como es la sincronización. El término sincronización, que proviene del griego “συν” (sýn), que significa unido, y “χρόνος” (chrónos), que significa tiempo, describe el ajuste temporal de eventos. Se habla de sincronización cuando determinados fenómenos ocurren en un orden predefinido o a la vez.

La sincronización la observamos en aspectos muy diversos, desde partículas subatómicas hasta grandes fenómenos a nivel del cosmos. Un ejemplo de sincronización es el corazón, cuya contracción y relajación para bombear sangre se debe a la sincronización de las células marcapasos del nodo sinusal. Otro ejemplo de sincronización en la naturaleza serían los enjambres de luciérnagas que emiten pulsos de luz al unísono. Cada luciérnaga funciona como un oscilador, cuya frecuencia se ajusta en respuesta a los destellos de otras luciérnagas. La clave de la sincronización macroscópica se basa en que estos objetos no están aislados si no que interaccionan con el resto de individuos del colectivo. Estas interacciones pueden ser muy débiles, algunas veces casi imperceptibles, pero son las responsables de que un individuo ajuste su ritmo en conformidad con el resto de la población.

1.1. El oscilador auto-sostenido

La primera observación del fenómeno de sincronización se atribuye al científico Christian Huygens, quien sin embargo fue más famoso por sus estudios en óptica, construcción de telescopios y relojes. En el año 1665 convalecía de gripe en su habitación, y observando dos relojes de péndulo que colgaban de la pared que el mismo había fabricado, se percató que ambos péndulos estaban perfectamente sincronizados. Sus oscilaciones coincidían perfectamente, lo cual llamó su atención. La observación la realizó durante horas, continuando estos relojes sincronizados, de modo que supuso que de alguna manera los

relojes estaban interaccionando entre sí. Huygens intuyó que ambos relojes interaccionaban a través de la pared de la que estaban colgados. Para comprobarlo, colocó uno de los relojes en el otro extremo de la pared y al poco tiempo los relojes de desincronizaron. A partir de la observación de Huygens se ha desarrollado una rama de las matemáticas y de la física aplicada de gran importancia, la física de los osciladores acoplados. Gracias al estudio de esta rama de la ciencia, se han explicado fenómenos como por qué la Luna en su órbita alrededor de la Tierra muestra siempre la misma cara, o la propia invención de la luz láser, en la cual millones de átomos acoplados emiten fotones con la misma frecuencia y fase.

A continuación se van a describir una serie de claves que servirán de base para el resto de los apartados. Para ilustrar la sincronización, utilizaremos el sencillo ejemplo de un reloj de péndulo, el cual oscila de manera estable hasta que la energía se deja de transferir de la fuente. Una característica importante es que la forma del movimiento de oscilación está determinada por los parámetros internos del reloj y no de cómo se puso el péndulo en movimiento. Además, si perturbásemos este movimiento, el péndulo retornaría a su ritmo inicial o lo que es lo mismo, a su ritmo interno. Este tipo de osciladores, son denominados osciladores auto-sostenidos o “*self-sustained oscillators*”.

Existen muchos ejemplos de sistemas que se comportan según estas características, como pueden ser los circuitos eléctricos usados para la generación de radiofrecuencia. La característica universal es que son sistemas activos, ya que contienen una fuente interna de energía que se transforma en movimiento oscilatorio. Estando aislados, los osciladores siguen oscilando a su propio ritmo hasta que la fuente de energía se acaba. Los osciladores están caracterizados por un periodo T , de manera que si se retoma el ejemplo del reloj, el mecanismo que rota las manecillas realiza la cuenta de las oscilaciones del péndulo. El número de dichos ciclos de oscilaciones por unidad de tiempo caracteriza el ritmo, o en otras palabras la frecuencia, que corresponde matemáticamente a

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.1)$$

La frecuencia angular es equivalente a

$$\omega = 2\pi f \quad (1.2)$$

Esta frecuencia angular ω se denomina, frecuencia natural del oscilador.

1.2. Conjunto de osciladores

A continuación suponemos que existen dos relojes de péndulo, de manera que se pueda entender la interacción que tiene lugar entre ellos, teniendo en cuenta que sus periodos de oscilación pueden ser diversos. Si los observásemos en el mismo instante de tiempo, ambos péndulos mostrarían diferentes posiciones. Se ha supuesto que estos relojes de péndulo, que no son idénticos, tampoco son independientes si no que interactúan débilmente. La interacción que tiene lugar entre ellos, puede ser a través de un soporte que ambos relojes de péndulo tengan en común y este soporte no sea rígido sino que permita vibración. El movimiento de uno de los péndulos se transmite a través del soporte al otro péndulo, de manera que los dos péndulos están conectados, alterando de esta forma sus ritmos. Los experimentos muestran que incluso una interacción extremadamente débil puede sincronizar dos relojes de péndulo. Esto significa que dos relojes no idénticos, que poseen distintos periodos de oscilación por separado, si los acoplamos a través de un soporte en común, ajustan sus ritmos y empiezan a oscilar a un periodo común.

El hecho de que se produzca la sincronización depende de dos factores: la fuerza de acoplamiento, y la diferencia entre las frecuencia de ambos osciladores.

La fuerza del acoplamiento describe cuanto de débil o fuerte es la interacción. En el experimento descrito anteriormente, si el soporte fuese absolutamente rígido, entonces el movimiento del péndulo no afectaría al soporte y no habría forma de que los dos péndulos interactuasen, por lo que la fuerza de acoplamiento sería cero. Sin embargo si el soporte no es fijo, sino que puede vibrar o moverse con cierta facilidad, la fuerza de interacción aparece.

La diferencia en las frecuencias naturales entre ambos osciladores describe cuán diferentes son. Mientras que medir la fuerza de acoplamiento experimentalmente tiene cierta dificultad, la diferencia de frecuencias es sencilla de medir y de variar. En el caso de los relojes de péndulo, las frecuencias podrían ser modificadas cambiando la longitud del péndulo. Supóngase, haciendo uso del ejemplo de los relojes de péndulos, que se separan los relojes y se miden sus frecuencias ω_1 y ω_2 . Posteriormente se coloca ambos relojes sobre el soporte común y medimos sus frecuencias F_1 y F_2 del sistema acoplado.

Es posible llevar a cabo una medición de los valores de ΔF en función de los valores $\Delta\omega$. La dependencia de dichos parámetros se representa gráficamente en la figura 1.1. De esta curva se extrae que si la diferencia de frecuencias $\Delta\omega$ no es muy grande, las frecuencias de ambos péndulos son idénticas $\Delta F = 0$, están sincronizados a la misma frecuencia.

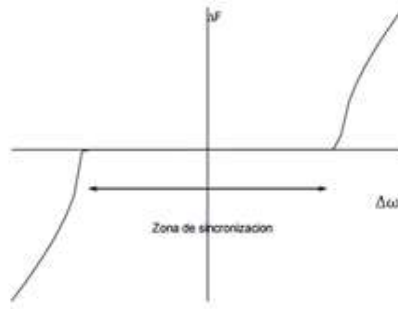


Fig. 1.1: Diferencia de frecuencias naturales $\Delta\omega$ frente a la diferencia de frecuencias acopladas ΔF . La zona de sincronización equivale lógicamente a una diferencia de frecuencias acopladas $\Delta F = 0$, y en este rango su diferencia de frecuencias naturales $\Delta\omega$ es pequeña.

A continuación se introduce un concepto fundamental en sincronización denominado fase del oscilador θ . A todo oscilador se le puede asignar una fase θ que crece linealmente con el tiempo

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (1.3)$$

Debemos tener en cuenta que dos fases que difieren en 2π son los mismos estados físicos, debido a que la función que rige el movimiento es periódica. De esta forma, las fases están comprendidas entre 0 y 2π . El término θ_0 corresponde a las fases iniciales. La ecuación de movimiento de cada oscilador de fase que denota la velocidad de rotación de la fase es

$$\dot{\theta} = \omega \quad (1.4)$$

En la observación que realizó Huygens, cada reloj de péndulo era un oscilador que poseía una frecuencia distinta, es decir, cada uno de los péndulos realizaba un recorrido de ida y vuelta en un tiempo diferente al otro péndulo. La pared representaba el medio a través del cual interactuaban y el resultado del acoplamiento entre ambos péndulos, fue la sincronización. Cuando se sincronizaron ambos péndulos realizaban su recorrido de ida y vuelta en el mismo tiempo, es decir, con la misma frecuencia, y además pudiendo ser la sincronización en fase o en antifase. Si se considera la diferencia de fases que puede existir entre dos osciladores, tenemos la clave para distinguir los dos regímenes de sincronización expuestos anteriormente. En el caso de moverse ambos péndulos en la misma dirección, sus fases θ_1 y θ_2 tendrán un valor similar de manera que su diferencia será aproximadamente 0. Este estado se denomina sincronización de fase. En el caso en que los péndulos se muevan en direcciones opuestas, la diferencia de sus fases será aproximadamente π y se denomina a este estado como sincronización en anti-fase.

Para entender mejor este concepto, imaginemos una pista circular donde un grupo de amigos se encuentra corriendo. Cada uno de estos amigos representa un oscilador. El número de vueltas realizadas por hora corresponde a la frecuencia. Imaginemos que si dos de ellos se encuentran corriendo a la misma velocidad, tendrían por tanto la misma frecuencia. Sin embargo, si otro de los chicos se encuentra corriendo detrás de otro a cierta distancia, pero manteniendo siempre dicha distancia, entonces se dice que poseen distintas fases. Si dos de los amigos corriesen uno junto al otro, tendrían la misma fase.

Hasta aquí se ha realizado una introducción intuitiva de los conceptos que vamos a utilizar.

1.3. Sincronización

La sincronización fue descubierta por primera vez en dos osciladores mutuamente acoplados, y se ha descrito anteriormente que Christiaan Huygens observó la interacción de dos relojes de péndulos. Previamente al concepto de sincronización, se describe el ajuste de frecuencias. Generalmente la interacción entre dos sistemas no es simétrica, esto quiere decir que uno de los osciladores es más potente que el otro. Denotamos a las frecuencias de los dos osciladores como ω_1 y ω_2 , siendo $\omega_1 < \omega_2$.

Las frecuencias observadas se definen como la velocidad promedio de rotación de fase de los osciladores y se denotan por $\Omega_{1,2}$. Es decir,

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \Omega \quad (1.5)$$

Esto es,

$$\Omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\theta_i}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [\theta_i(T) - \theta_i(0)] \quad (1.6)$$

Si el acoplamiento es suficientemente fuerte, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, donde generalmente $\omega_1 < \Omega < \omega_2$.

Generalmente cuando las frecuencias de dos sistemas desacoplados obedecen la relación

$$\omega_1 \approx \omega_2 \quad (1.7)$$

Surge sincronización porque la fuerza de interacción es suficiente. Las frecuencias observadas se ajustan también según $\Omega_1 = \Omega_2$. Para que exista la sincronización, debe existir una cierta relación entre las fases de los osciladores ya que no solamente depende de sus frecuencias y de la fuerza de acoplamiento. La condición de sincronización en relación a las fases se formula como:

$$|\theta_1 - \theta_2| < \text{constante} \quad (1.8)$$

Esto quiere decir que la diferencia de fase está restringida. Si retomamos el ejemplo del grupo de amigos corriendo en una pista circular, se supone que alguno de ellos correrá a mayor velocidad (frecuencia natural alta) y otros a menor velocidad (frecuencia natural baja), y además, se encontrarán desperdigados, por tanto sus fases serán distintas. ¿Qué sucede si todos quieren correr a la vez? Deberán llegar a un compromiso, los que poseen una frecuencia natural alta deben de correr a menor velocidad, y al contrario, los que tienen una frecuencia natural baja, deben aumentar su velocidad. Para sincronizarse todos, deberán de colocarse de manera que ninguno doble o lleve una vuelta de ventaja al otro, es decir que la diferencia de fases esté restringida.

1.4. Sincronización macroscópica

En los últimos años se han producido muchos avances que permiten comprender cómo se sincronizan los osciladores gracias a investigadores como Winfree o Kuramoto.

Winfree quiso describir como se sincronizaba un gran grupo de osciladores auto-sostenidos que interactuaban. Para ello propuso un modelo matemático que describía la dinámica en términos exclusivamente de las fases, al asumir que los osciladores son casi idénticos (la diferencia de frecuencias es pequeña) y el acoplamiento entre ellos es pequeño. Posteriormente Kuramoto, basándose en las propuestas de Winfree, propuso que los osciladores se rigen por la siguiente ecuación

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

Γ_{ij} representa la función de interacción, que determina la forma de acoplamiento entre cada oscilador. El término ω_i es la frecuencia natural del oscilador y θ_i es la fase de cada oscilador. Para una función de interacción genérica, el modelo es muy complicado de analizar, de manera que Kuramoto asumió que las interacciones entre los osciladores dependen sinusoidalmente de la diferencia de fases, dada por

$$\Gamma_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.10)$$

Donde K es la constante de acoplamiento. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (1.9) se obtiene el modelo de Kuramoto sobre la cual se va a trabajar

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.11)$$

1.5. Aplicaciones

En los últimos años se ha discutido acerca de las aplicaciones que derivan del modelo de Kuramoto en ramas de la ciencia, como la neurociencia o la química. A continuación se describen algunas aplicaciones del modelo de Kuramoto que resultan atractivas a muchos científicos.

La corteza cerebral del ser humano está formada por alrededor de 20 mil millones de neuronas. Estas se conectan entre sí y forman lo que se conoce como redes. Algunas poseen funciones sensoriales, otras funciones motoras, y otras poseen funciones complejas de asociación. Son de nuestro interés, por su reciente vinculación al modelo de Kuramoto, las redes sensoriales. Estas redes están formadas por neuronas que se encargan de incorporar información sensorial a los circuitos corticales. En estas regiones de los circuitos corticales se producen oscilaciones o fluctuaciones rítmicas de los potenciales postsinápticos.

La actividad oscilatoria facilita la sincronización entre grupos neuronales en esa región, que intervienen por ejemplo en la tarea cognitiva o receptiva. Estas oscilaciones son de gran interés para comprender otros aspectos, y las investigaciones neurocientíficas están basadas en la comprensión del modelo de Kuramoto, dado que este modelo describe la naturaleza de los procesos oscilantes acoplados y los osciladores de fase pueden usarse como unidad elemental en modelos de información neuronal. A partir del modelo de Kuramoto es posible derivar ecuaciones que describen la actividad neuronal en una red de regiones corticales interconectadas.

Además de tener aplicaciones en un campo neurocientífico, tiene aplicaciones ligadas a la física y a la tecnología, como son las uniones Josephson. Las uniones Josephson son dispositivos superconductores capaces de generar voltajes de alta frecuencia. Un número N grande de uniones Josephson pueden ser considerados como un sistema de rotores acoplados que interconectados, dan lugar a una señal de alta potencia.

Por último se han encontrado también algunas aplicaciones físicas en relación a teorías de los neutrinos. Se producen oscilaciones sincronizadas de neutrinos, en sistemas de gases isotrópicos de neutrinos de dos sabores, en condiciones especiales.

Capítulo 2

Sincronización de dos osciladores

A través del estudio del comportamiento de dos osciladores se obtendrá una idea más refinada del concepto de sincronización.

El inicio del estudio se basa en un análisis teórico y numérico de la diferencia de fases ϕ (véase ecuación 2.3), en función de la constante de acoplamiento K . Posteriormente se estudia el comportamiento de las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 de los dos osciladores, en función de la constante de acoplamiento K . El objetivo consiste en vislumbrar cual es el valor de la constante de acoplamiento umbral K_{umbral} , es decir, el valor de K para el cual comienza la sincronización.

Se plantea el modelo de Kuramoto para un número de osciladores $N = 2$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \quad (2.1)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (2.2)$$

Se define

$$\phi = \theta_1 - \theta_2 \quad (2.3)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (2.4)$$

De manera que la derivada de ϕ resulta

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - K \sin \phi = f(\phi) \quad (2.5)$$

De esta ecuación se extrae para el caso en que $\omega_1 \neq \omega_2$, y el valor de $K > K_{umbral}$, siendo $K_{umbral} = |\Delta\omega|$, la obtención de un punto fijo $\phi = \phi^*$. Si $f(\phi) = \Delta\omega - K \sin \phi$, el punto fijo obtenido corresponde a

$$\phi^* = \pm \sin^{-1} \frac{\Delta\omega}{K} \quad (2.6)$$

2.1. Constante de acoplamiento $K > K_{umbral}$

La ecuación (2.5) es igual a 0, si $\phi = \phi^*$. Para $K < |\Delta\omega|$ los osciladores no alcanzan la sincronización, por tanto pasamos a estudiar el caso de interés cuando $K > |\Delta\omega|$.

A continuación se realiza un análisis del comportamiento de ϕ , que determina la diferencia de fases, en función de K . Recordamos que ϕ estaba definida por la ecuación (2.3) y su derivada por (2.5) que correspondía a

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - K \sin \phi$$

Dado que se trata de una función sinusoidal, existirán dos puntos en los que la función corte en el cero, de manera que analizamos esos puntos fijos ϕ^* (véase ecuación 2.6).

Se representa ϕ teórica y numéricamente frente a K . Para la simulación numérica, se realiza la integración de las ecuaciones (2.1) y (2.2) para valores de K entre 0 y un K límite, que debe ser mayor que el valor de K_{umbral} . Tras haber obtenido las fases θ_1 y θ_2 en un tiempo suficientemente largo, se calcula la diferencia de ambas (Véase ecuación 2.3), de esta forma se obtiene numéricamente el valor de ϕ . La integración numérica se lleva a cabo mediante ode45, un integrador de Matlab que se utiliza como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales (véase apéndice 1). Para resolver las ecuaciones (2.1) y (2.2) se han tomado condiciones iniciales (θ_i) aleatorias.

La siguiente figura 2.1 muestra la comparación teórica junto a la numérica. Si la constante de acoplamiento $K > K_{umbral}$, la diferencia de fases ϕ cuando el tiempo tiende

a infinito, tiende a un punto de equilibrio ϕ^* , es decir que $\phi(t \rightarrow \infty) = \phi^*$. Sin embargo si la constante de acoplamiento $K < K_{umbral}$, cuando el tiempo tiende a infinito, ϕ tiende a infinito también, es decir $\phi(t \rightarrow \infty) = \infty$.

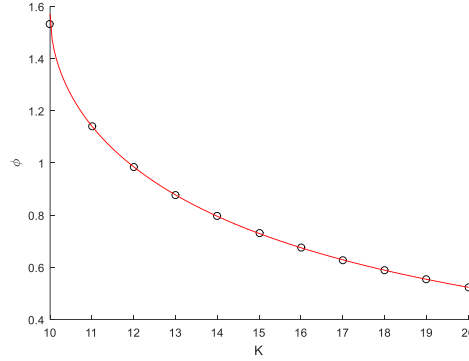


Fig. 2.1: Representación de los valores de ϕ en función de K (los puntos representan la simulación numérica y la línea de trazo rojo la teórica). Las frecuencias naturales de estos dos osciladores corresponden a $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 15$. En la representación se observa que el primer valor que toma la ϕ corresponde exactamente al valor de $K = K_{umbral}$.

2.2 Constante de acoplamiento $K < K_{umbral}$

A continuación se estudian las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 en función de la constante de acoplamiento K . Dado que ϕ solo puede tener un punto fijo ϕ^* para $K > K_{umbral}$, para $K < K_{umbral}$ el sistema se describe en función de las frecuencias observadas. Las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 están dadas por la ecuación (1.6). La diferencia de dichas frecuencias observadas es

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\phi(t) - \phi(0)] \quad (2.7)$$

De la ecuación anterior, junto a la ecuación (2.5), se extrae un sistema de ecuaciones que debemos resolver

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\phi(t) - \phi(0)]$$

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - K \sin \phi$$

Si integramos la ecuación (2.5) obtenemos

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{d\phi}{\Delta\omega - K \sin \phi} = \int_0^t dt' = t \quad (2.8)$$

Dado que ϕ se comporta de forma periódica para $K < K_{umbral}$, podemos integrar sobre un periodo τ . Definimos

$$T = n\tau$$

$$\phi(\tau) - \phi(0) = 2\pi$$

Si consideramos $\phi(0) = 0$ obtenemos

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \frac{2\pi}{\tau} \quad (2.9)$$

$$\int_0^{2\pi n} \frac{d\phi}{\Delta\omega - K \sin \phi} = n \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Delta\omega - K \sin \phi} = T = n\tau \quad (2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\phi(t)] = \frac{2\pi n}{n\tau} = \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Delta\omega - K \sin \phi}} = \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2} \quad (2.11)$$

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\phi(t) - \phi(0)] = \frac{2\pi n}{n\tau} = \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2} \quad (2.12)$$

Es decir

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2} \quad (2.13)$$

De manera que con la ecuación (2.13) y con la ecuación que aparece a continuación que determina $\Omega_1 + \Omega_2$, es posible teóricamente despejar las ecuaciones y estudiar las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 a través del valor de K .

Dado que $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = \omega_1 + \omega_2$

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \omega_1 + \omega_2 \quad (2.14)$$

Finalmente,

$$\Omega_1 = \frac{\sqrt{\Delta\omega^2 - K^2} + \omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.15)$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\Delta\omega^2 - K^2}}{2} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.15) y (2.16) representan los valores teóricos de las frecuencias observadas en función de la constante de acoplamiento K . En la figura 2.2 se muestra la contrastación numérica y teórica de las frecuencias observadas en función de K . La solución numérica de las frecuencias observadas se obtiene integrando las ecuaciones (2.1) y (2.2) para un tiempo suficientemente largo. Posteriormente el valor de las fases obtenido, se introduce en las ecuaciones que definen las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 (véanse las ecuaciones 1.7 y 1.8)

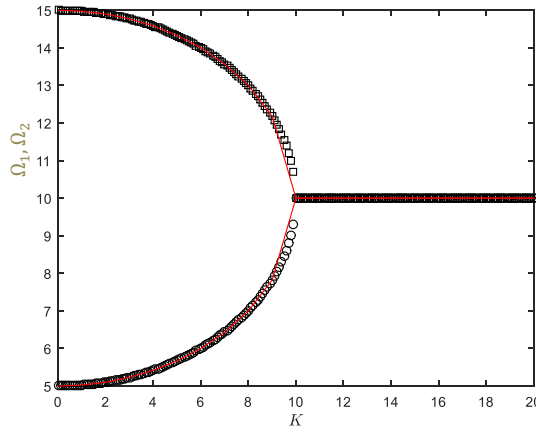


Fig. 2.2: Representación de los resultados numéricos y teóricos de las frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 en función de K . Las frecuencias naturales para los osciladores se han tomado con los valores, $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 15$. Se observa que $K_{umbral} = \Delta\omega = 10$, de acuerdo con la teoría.

Capítulo 3

Sincronización de N osciladores. Modelo Kuramoto

3.1. Fenomenología

El objetivo en esta segunda parte es el estudio de la transición de Kuramoto. El modelo de Kuramoto consiste en un número $N \gg 1$ de osciladores acoplados que tienen diferentes frecuencias naturales ω_i . La ecuación que rige dicho comportamiento es

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

K determina la fuerza de acoplamiento. El acoplamiento entre cada par es inversamente proporcional a N . La frecuencia natural de cada oscilador está distribuida en algún rango. Serán descritas por una distribución de probabilidad, que veremos a continuación. La transición de Kuramoto se ve representada en la figura. 3.1, donde se representa la dinámica de 500 osciladores gobernados por la ecuación (3.1), siendo su distribución de frecuencias naturales una distribución de probabilidad lorentziana.

Para el análisis de la transición de Kuramoto, es más conveniente transformar la ecuación (3.1) en una más conveniente trabajando con el campo medio en términos de parámetro de orden complejo $Z(R, \varphi)$:

$$Z = Re^{i\varphi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} \quad (3.2)$$

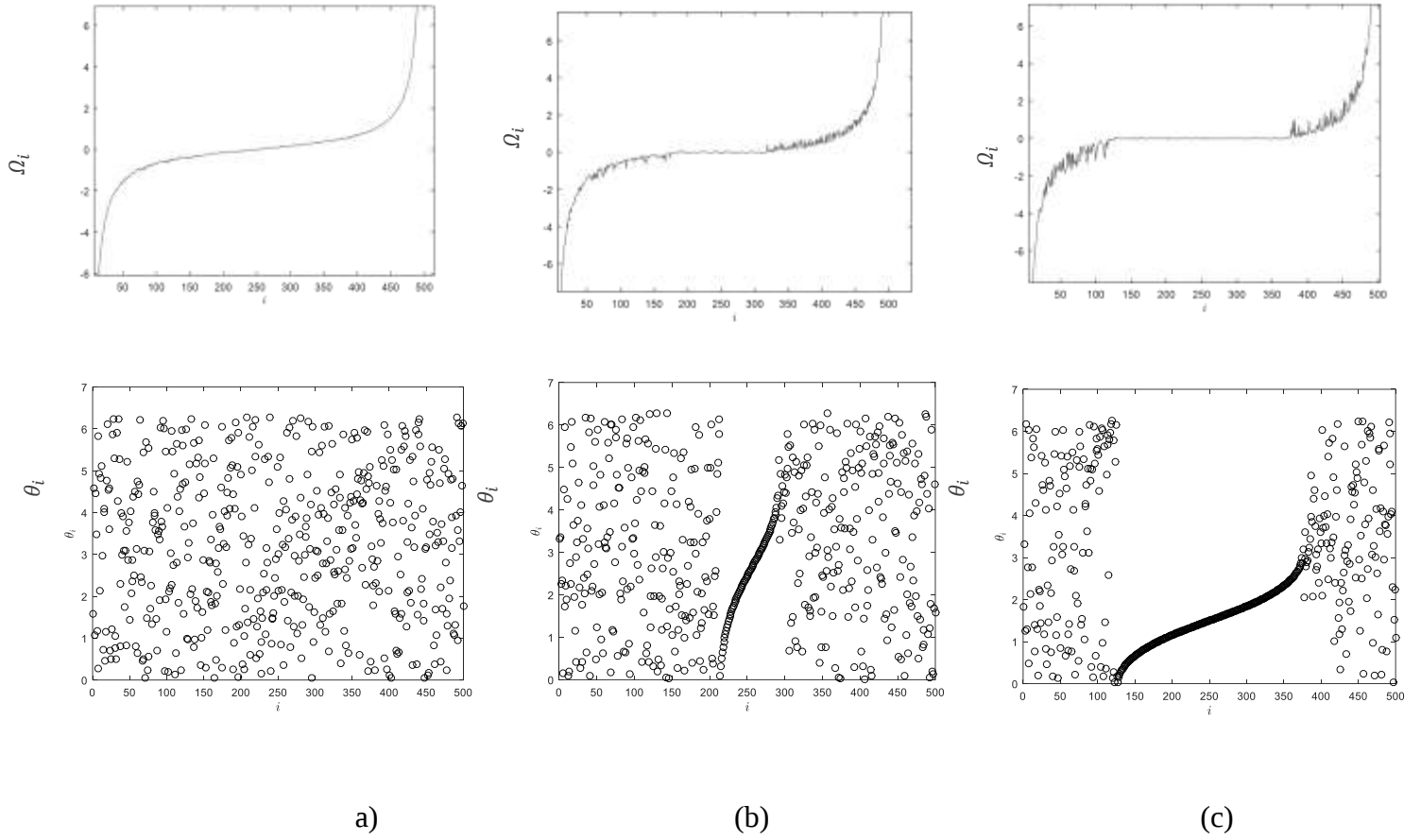


Fig. 3.1: Dinámica de una población de 500 osciladores gobernados por la ecuación (2.1). La distribución de frecuencias naturales es Lorentziana con $\gamma = 0.5$ y $\bar{\omega} = 0$; Las frecuencias ω_i están ordenadas como $\omega_{i+1} > \omega_i$. El valor crítico de acoplamiento es $K_{umbral} = 1$. Las figuras superiores presentan las frecuencias observadas Ω_i , que están definidas como $\Omega_i = \langle \dot{\theta}_i \rangle$. Las figuras inferiores representan la posición de las fases en un instante dado. (a) El valor de K , es $K = 0.7$, por debajo de valor crítico de acoplamiento, por lo tanto los osciladores no están sincronizados. (b) El valor de K está ligeramente por encima del valor de K_{umbral} , siendo $K = 1.01$, los osciladores con frecuencia cercana a $\bar{\omega}$ se han sincronizado. (c) Una gran parte de la población se ha sincronizado, debido a que su constante de acoplamiento tiene un valor $K = 1.2$.

Donde R mide la coherencia de fase y φ es la fase media. Se puede visualizar esta dinámica de las fases geométricamente en el círculo unidad, imaginando las fases en forma de puntos alrededor del círculo unidad. (véase la fig. 2.2).

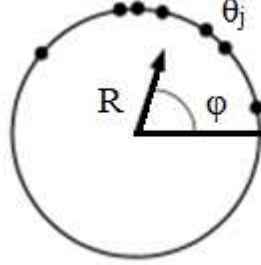


Fig. 2.2: Representación de la dinámica de fases θ_j en el círculo unidad. La posición de las fases está dada por $R e^{i\varphi}$, siendo R (el radio), que mide la coherencia de fase y φ es la fase media.

Si todos los osciladores se moviesen como un grupo, tendríamos un valor del campo medio, $R \approx 1$ y la población actuaría como un gran oscilador mientras que por el contrario si los osciladores están dispersos sobre el círculo unidad, R adquiere un valor de $R \approx 0$ y no se observa sincronización.

Si desarrollamos el término del parámetro de orden obtenemos

$$r_x = R \cos \varphi = \frac{1}{N} \sum \cos \theta_i \quad (3.3)$$

$$r_y = R \sin \varphi = \frac{1}{N} \sum \sin \theta_i \quad (3.4)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{r_y}{r_x} \quad (3.5)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + KR \sin(\varphi - \theta_i) \quad (3.6)$$

Cada oscilador aparece como desacoplado del resto, sin embargo están interactuando entre ellos. De la ecuación (3.6) se deduce que cada oscilador interacciona con el resto a través de los parámetros del campo medio φ y R . Además la fuerza de acoplamiento efectivo KR es proporcional a la coherencia R . Cuando la población comienza a ser más coherente, R crece y por tanto KR también, lo cual crea una tendencia en el resto de osciladores a unirse a los osciladores sincronizados. Con los nuevos

osciladores reclutados, la coherencia aumenta de nuevo produciéndose así un ciclo que se retroalimenta.

3.2 Distribución lorentziana de frecuencias naturales

A continuación se estudia el comportamiento de R en función del tiempo. Para ello, estudiamos en primer lugar la distribución de frecuencias, de acuerdo con alguna densidad de probabilidad $g(\omega)$. Se asume por simplicidad que $g(\omega)$ es unimodal y simétrica respecto a su frecuencia central Ω , lo que significa que $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$. El estudio se realiza de manera que el muestreo de la distribución de frecuencias sea determinista.

La siguiente tabla recoge las distribuciones de probabilidad $g(\omega)$ con su correspondiente distribución acumulada $G(\omega)$ que van a ser utilizadas, aunque posteriormente en cada caso sean desarrolladas en mas detalle.

Nombre	$g(\omega)$	$G(\omega)$	Soporte
Lorentziana	$\frac{c}{\pi(\omega^2 + c^2)}$	$\frac{\tan^{-1} \frac{\omega}{c} + \frac{\pi}{2}}{\pi}$	$(-\infty, \infty)$
Parabolica	$\frac{3}{4a^3} (a^2 - \omega^2)$	$\frac{3\omega}{4a} - \frac{\omega^3}{4a^3} + \frac{1}{2}$	$(-a, a)$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$	$\frac{1}{2} (\text{erf}(\frac{\omega}{\sqrt{2}}) + 1)$	$(-\infty, \infty)$

Tabla (3.1): Recoge brevemente las distribuciones de probabilidad que van a ser utilizadas. Las funciones de densidad (PDF) se representan por $g(\omega)$, mientras que la funcion de distribucion acumulada (CDF) se representan por $G(\omega)$.

Primeramente se estudia la distribución lorentziana. Para ello trabajamos la función acumulada, que describe la probabilidad de que una variable aleatoria real X sujeta a cierta ley de distribución de probabilidad, se sitúe en la zona de valores menores o iguales a x (figura 3.3).

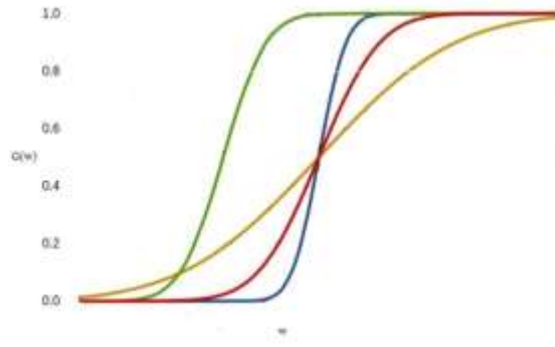


Fig. 3.3: Ejemplo de distribuciones acumuladas. Se observa que $G(\omega)$ tiene valores entre 0 y 1.

La distribución acumulada $G(\omega)$ se define como $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega') d\omega'$. La función de densidad de la distribución lorentziana corresponde a

$$g(\omega) = \frac{c}{\pi(\omega^2 + c^2)}, \quad (3.7)$$

por tanto

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega') d\omega' = \frac{\tan^{-1}(\frac{\omega}{c}) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \quad (3.8)$$

Despejando ω , obtenemos

$$\omega(G) = c \cdot \tan(G \cdot \pi - \pi/2) \quad (3.9)$$

Con la ecuación (3.9) es posible adoptar un conjunto de frecuencias que simule una distribución lorentziana. Se utiliza un muestreo determinista tomando valores $G = (2i - 1)/2N$ donde $i = 1, 2, 3 \dots N$.

Se realiza un estudio del modelo de Kuramoto teniendo en cuenta la ecuación (3.6). Se realiza un análisis para 500 osciladores cuyas fases iniciales (θ_i) son aleatorias. Tras comprender el muestreo de frecuencias naturales en el caso de una distribución de probabilidad lorentziana determinista, estudiamos dos parámetros importantes. El

primero, el comportamiento del parámetro de orden R en función del tiempo, así como su valor cuadrático medio, $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, y el segundo, cuál es el valor de K_{umbral} contrastado con el valor teórico que se obtendrá teóricamente más adelante.

Para estudiar dichos comportamiento, se lleva a cabo una integración numérica de la ecuación (3.6) en función del tiempo. La coherencia de fase R experimentará una evolución a medida que la integral se resuelve en 500 pasos de tiempo, dicha evolución se muestra en la figura 3.4.

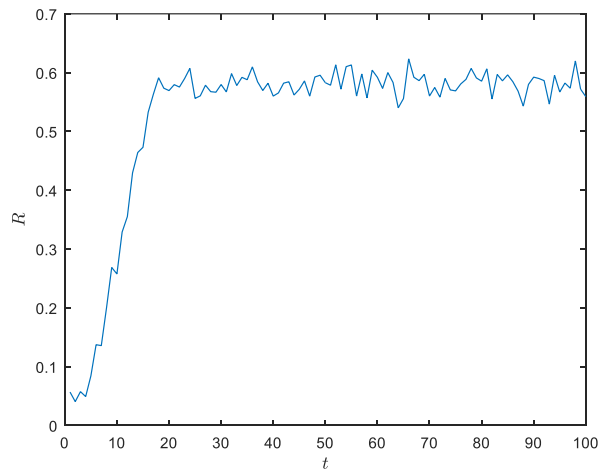


Fig. 3.4: Representación de R en función del tiempo para 500 osciladores. El parámetro c de la ecuación (3.9) corresponde a $c = 0.5$. Para la integración numérica (3.6) ha sido utilizado un valor de $K=1.5$. Se observa que R alcanza un valor de saturación por debajo de 1.

Las simulaciones muestran que para un valor de K por debajo de un cierto K_{umbral} , los osciladores actúan como si estuviesen desacoplados. Las fases θ_i aparecen uniformemente distribuidas en el círculo unidad, independientemente de sus condiciones iniciales (véase Fig. 3.1a). Sin embargo, cuando K adquiere un valor mayor que el valor de K_{umbral} , R crece, dando lugar a un grupo de osciladores en sincronización (véase figura 3.5). La situación es análoga a una transición de fase de segundo orden. En la representación de la figura 3.4, se observa que R adquiere un valor por debajo de 1 para el cual se estabiliza. Este caso corresponde a un K mayor que el K_{umbral} correspondiente para la distribución de frecuencias según una distribución de probabilidad lorentziana.

A continuación se muestran dos figuras, la primera referente a la evolución R en función de la constante de acoplamiento K con el fin de observar el valor de K_{umbral} numéricamente. En la segunda figura, se representa el promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a la constante de acoplamiento K .

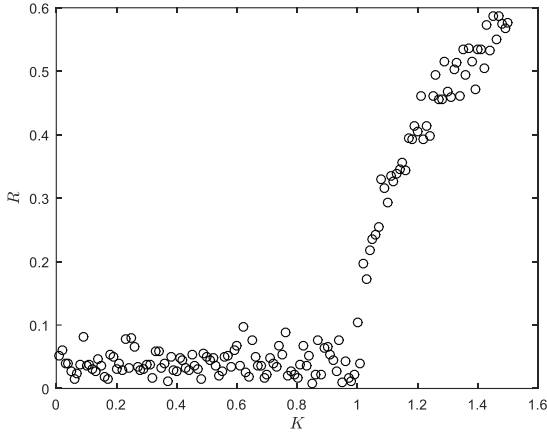


Fig. 3.5: Representación R en función de K para 500 osciladores, en un instante de tiempo dado. Se observa la transición en $K = K_{\text{umbral}}$.

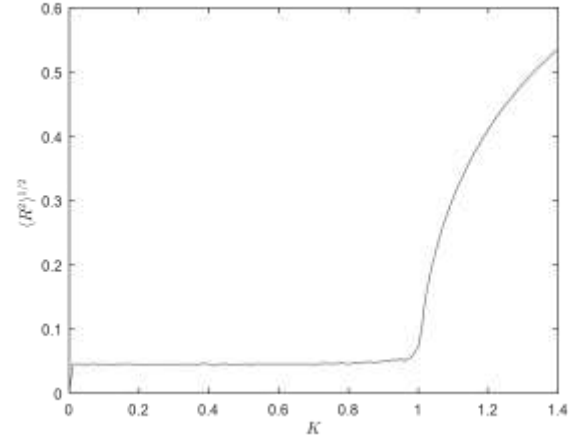


Fig. 3.6: Representación $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K para 500 osciladores. Para su obtención se ha integrado numéricamente la ecuación (3.6) en 500 pasos de tiempo, para cada valor de K .

3.2. Análisis teórico

Los resultados numéricos que describen el comportamiento de R (Fig. 3.5) o los resultados del promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ (Fig. 3.6) en función de K , deben de ser contrastados con el análisis que Kuramoto realizó, aunque a primera vista de las representaciones anteriores se observa qué valor tiene aproximadamente el K umbral. Nuestros resultados tienen un sentido si los entendemos y los comparamos con el análisis que realizó Kuramoto de estos sistemas en rotación. Kuramoto asumió dos condiciones basadas en el hecho de que la distribución de frecuencias $g(\omega)$ es unimodal y simétrica respecto de su frecuencia media Ω , es decir que $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$. Debido a que

existe una simetría rotacional, se puede redefinir $\theta'_i \rightarrow \theta_i - \Omega t$, que equivale a trabajar en un marco de rotación a la frecuencia Ω . Si se introduce esta equivalencia en la ecuación (3.1) da lugar a $\dot{\theta}'_i = \omega_i - \Omega + \frac{K}{N} \sum \sin(\theta'_j - \theta'_i)$. Esta frecuencia media Ω , es equivalente a $\langle \omega \rangle$ de la distribución de frecuencias y se asume igual a 0, lo que nos lleva a que $g(\omega) = g(-\omega)$, es decir, que se trabaja con una función par. Se asume entonces que $R(t)$ es constante considerando que el sistema ha llegado a un punto de estabilización y además se supone que $\varphi(t)$ rota uniformemente a la frecuencia Ω . Dado que nos encontramos en un sistema de rotación, es posible elegir correctamente el origen de coordenadas y atribuir a la fase media el valor igual a cero $\varphi \equiv 0$, dado que no se pierde generalidad. La ecuación (3.6) se ve transformada en

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - KR \sin(\theta_i) \quad (3.10)$$

Dado que R se está considerando constante en el tiempo y $\varphi \equiv 0$ (3.10), es posible estudiar los osciladores de forma independientes. A continuación se trata de resolver cual es el movimiento resultante de todos los osciladores que dependen de R . Este movimiento a su vez implica valores de R y de φ que deberán ser consistentes con los valores originales asumidos. A esto se le denomina auto consistencia que es la clave para el análisis que se presenta a continuación.

Atendiendo a (3.10) existen dos comportamientos posibles dependiendo del valor $|\omega_i|$ respecto a KR . Aquellos osciladores con $|\omega_i| \leq KR$ tendrán entonces un punto fijo estable definido por

$$\omega_i = KR \sin(\theta_i) \quad (3.11)$$

De lo que se deduce que $|\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$. Estos osciladores son llamados osciladores sincronizados porque se encuentran en reposo o enganchados a la frecuencia Ω . Mientras que sin embargo los osciladores con $|\omega_i| \geq KR$ van a la deriva, posicionados en el círculo de una manera no uniforme. Los osciladores sincronizados corresponden a la parte central de $g(\omega)$ y aquellos osciladores que van a la deriva corresponden a la cola de la distribución (véase figura 3.1). Llegados a este punto, a través del análisis de Kuramoto se ha explicado por qué la población se divide en dos grupos. A continuación se plantea el hecho de que los osciladores que van a la deriva van a contradecir la suposición de que R y φ son constantes. Para estos osciladores, la fase está rotando no uniformemente en el

tiempo, por ello Kuramoto se cuestionó como iba a permanecer constante el centroide de la población con todos aquellos osciladores a la deriva moviéndose en el círculo. Este problema quedó resuelto obligando a los osciladores a la deriva a formar una distribución estacionaria en el círculo. Se toma el límite termodinámico y se denota por $\rho(\theta, \omega, t) d\theta$ a la fracción de osciladores con frecuencias naturales ω , que se sitúan entre θ y $\theta + d\theta$. Para ser estacionario, se requiere que $\rho(\theta, \omega)$ sea inversamente proporcional a la velocidad en θ . Esta suposición se deduce de la ecuación de continuidad, expresada como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \dot{\theta}) = 0 \quad (3.12)$$

Donde ρ es la densidad y $\dot{\theta}$ es la velocidad. Dado que $(\rho \dot{\theta})$ deben permanecer constantes se llega a la conclusión de que $\rho(\theta, \omega)$ es inversamente proporcional a la velocidad en θ .

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{\omega - KR \sin \theta} \quad (3.13)$$

C es una constante de normalización que se calcula resolviendo $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega) d\theta = 1$, lo que resulta

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (KR)^2} \quad (3.14)$$

A continuación se retoman las condiciones de auto consistencia. El valor constante del parámetro de orden debe ser consistente con $Re^{i\varphi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = \int \int \rho(\theta, \omega) g(\omega) e^{i\theta} d\theta d\omega = \langle e^{i\theta} \rangle$,

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_l + \langle e^{i\theta} \rangle_d \quad (3.15)$$

Siendo l los osciladores sincronizados y d los osciladores que van a la deriva.

De nuevo se toma el eje x en la dirección del eje φ y se asume $\varphi \equiv 0$, entonces $\langle e^{i\theta} \rangle = Re^{i\varphi} = R$, entonces

$$R = \langle e^{i\theta} \rangle_l + \langle e^{i\theta} \rangle_d \quad (3.16)$$

Comenzamos evaluando la contribución de los osciladores sincronizados. Nos situamos según (3.11) en el estado acoplado de $\sin \theta^* = \frac{\omega}{KR}$ para todos los $|\omega| \leq KR$.

Como $N \rightarrow \infty$, la distribución de fases sincronizadas es simétrica respecto a $\theta = 0$ porque $g(\omega) = g(-\omega)$, como se había comentado anteriormente. Por tanto en promedio $\langle \sin \theta^* \rangle_l = 0$, con lo cual obtenemos

$$\langle e^{i\theta} \rangle_l = \langle \cos \theta^* \rangle_l = \int_{-KR}^{KR} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega \quad (3.17)$$

Donde $\theta(\omega)$ está definido implícitamente por (3.11), en este caso, cambiando las variables correspondientes obtenemos

$$\begin{aligned} \langle e^{i\theta} \rangle_l &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(KR \sin \theta) KR \cos \theta d\theta = \\ &= KR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(KR \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

A continuación comienza el estudio de los osciladores que van a la deriva. Contribuyen de esta manera

$$\langle e^{i\theta} \rangle_d = \int_{-\pi}^{\pi} \int e^{i\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta \quad (3.19)$$

Teniendo en cuenta que $|\omega| > KR$. Sin embargo, esta integral se hace cero si se tiene en cuenta que $g(\omega) = g(-\omega)$ y además que $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$. Por tanto se reduce a

$$R = KR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(KR \sin \theta) d\theta \quad (3.20)$$

Esta ecuación muestra el comportamiento de R en función de K . De ella se deducen dos soluciones posibles, la primera cuando $R = 0$ (véase figura 3.5), correspondiente a un estado en el que cada oscilador tiene un movimiento inconexo del resto, es decir, oscilan con sus frecuencias naturales y no existe sincronización. El segundo resultado es aquel que nos es de interés, que se basa en cuál es el valor crítico de K para el cuál R comienza a tener un valor distinto de cero, es decir, el valor de K para el cual comienza a tener lugar la sincronización. Dado que $R \neq 0$, la ecuación (3.20) se transforma

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(KR \sin \theta) d\theta \quad (3.21)$$

De esta última ecuación se deduce el valor de K crítico teórico, teniendo en cuenta que aunque $R \neq 0$, en el punto donde $K = K_{umbral}$, $R \rightarrow 0$. Este K crítico se corresponde a

$$K_{umbral} = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (3.22)$$

Según nuestra distribución Lorentziana adquiere un valor $K_{umbral}(\text{teórico}) = 1$. Este valor corresponde a lo observado en la (Fig. 3.5) y (Fig. 3.6), sin embargo a continuación se mostrará un resultado numérico más minucioso del valor de K crítico.

3.4. Efectos de tamaño finito

A continuación se estudia la representación de $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K para estudiar con mayor precisión el valor del K_{umbral} . Se realizan estas representaciones para distintos valores de α , para obtener el mejor valor de α y así visualizar con mayor precisión K_{umbral} . Para comprender este paso, recurrimos a la ecuación (3.2) que recogía el parámetro de orden: $Re^{i\varphi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$. Si $K < K_{umbral}$, las fases actúan como descorrelacionadas, el sumatorio $\sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$, va como $\sqrt{N}$, por tanto el parámetro de orden $Re^{i\varphi}$, va como $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Es decir, R decae a una pequeña fluctuación de tamaño $O(N^{-\frac{1}{2}})$, lo esperado de cualquier dispersión aleatoria de N puntos en un círculo. Si ahora calculamos $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, vuelve a ser estadísticamente como $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Esto quiere decir que para los valores de K por debajo del K umbral, R tiene un valor próximo a cero que va como $\frac{1}{\sqrt{N}}$, cuando $N \rightarrow \infty$. Para los valores de $K > K_{umbral}$, este estado incoherente se vuelve inestable y R crece, hasta llegar a un punto de saturación que se aproxima a una constante, como vimos anteriormente. Para el valor de $K = K_{umbral}$, es de esperar que R decaiga a cero como $O(N^{-\alpha})$, con $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

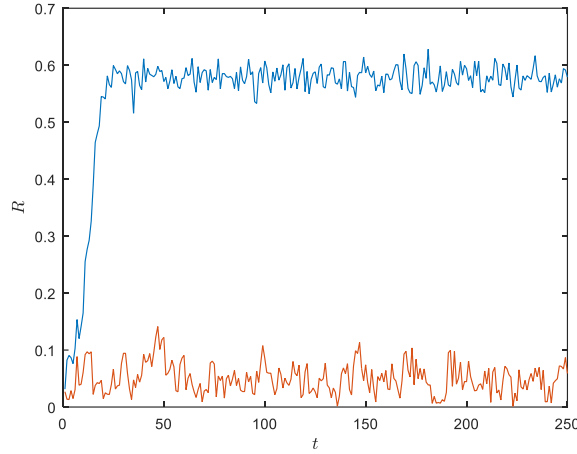


Fig. 3.7: Representación de la evolución de $R(t)$ de 500 osciladores en una simulación numérica, para $K > K_{umbraI}$ (azul) y $K < K_{umbraI}$ (naranja).

La figura 3.7 es una ilustración de la explicación anterior. Para $K < K_{umbraI}$, $R(t)$ decae a una pequeña fluctuación de tamaño $O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$, es decir decae a un valor próximo a 0. Mientrás que cuando $K > K_{umbraI}$, $R(t)$ alcanza un valor de saturación por debajo de 1.

En la figura 3.8 se representa $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a la constante de acoplamiento K , para diferentes valores del número de osciladores, $N = 500$ (verde); 1000 (azul); 2000 (rojo) ;4000 (negro), con el objetivo de obtener el valor de K_{umbraI} . Se estudia para valores de $\alpha \in [0, 0.5]$, pero solo se presenta aquel con el que se obtiene la mejor intersección de las distintas curvas. Finalmente, el alpha con el cual se obtiene una mejor visualización de punto de corte de las curvas es $\alpha = 0.3$ (véase la ampliación en la figura 3.9). Para la representación numérica de $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a la constante de acoplamiento K , se ha integrado la ecuación (3.6) en 1000 pasos de tiempo para cada valor de K . Previamente a la integración, se ha dejado al sistema un tiempo de transición para estabilizarse. Posteriormente se ha representado cada curva correspondiente a un numero de osciladores N diferente.

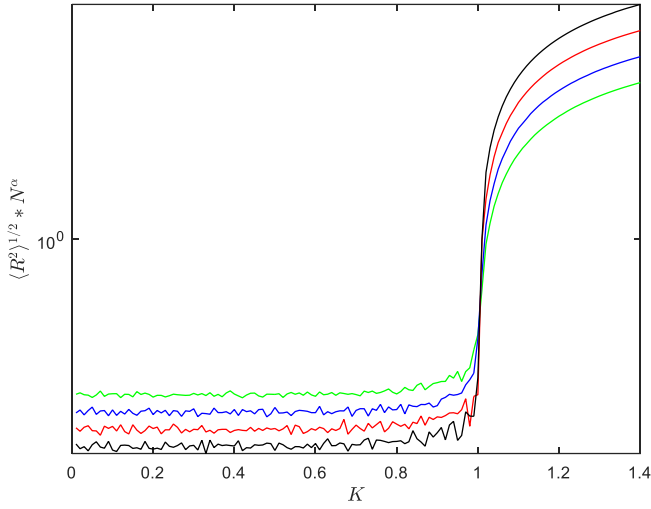


Fig. 3.8: Representación de $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K . El valor de alpha de la figura corresponde a $\alpha = 0.3$.

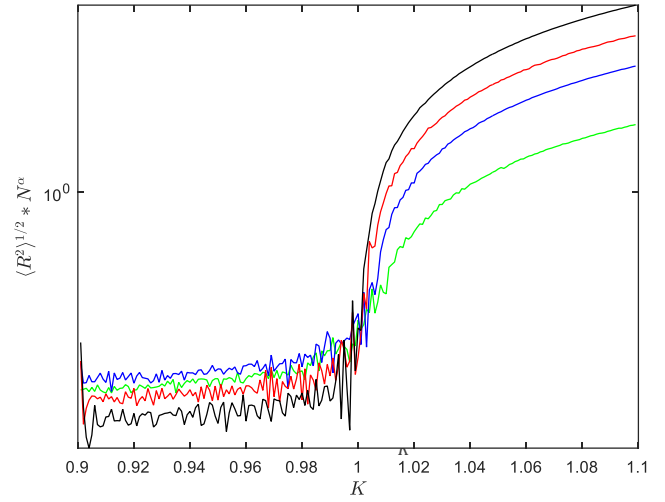


Fig. 3.9 : Ampliación de (fig.3.8). Estudio de los valores obtenidos de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ para cada $\delta K = 0.001$, mientras que en la figura (3.8) $\delta K = 0.01$.

Se observa de la figura 3.9, que el resultado obtenido para el $K_{\text{umbral}} = 1.00 \pm 0.01$ de acuerdo con el resultado teórico.

3.5. Distribución parabólica de frecuencias naturales.

Dado que es de nuestro interes la utilización de más distribuciones de probabilidad para describir las frecuencias naturales, se estudian al igual que la anterior, la distribución parabólica y la distribución gaussiana.

El estudio dentro de la distribución parabólica se realiza de igual manera que el anterior.

La función de densidad parabólica $g(\omega)$ y su respectiva función de distribución acumulada vienen dadas por la tabla 3.1. Despejando esta última, se obtiene la ecuación que muestra como están distribuidas las frecuencias naturales ω en función del valor de $G(\omega)$. Considerando que la distribución parabólica se encuentra entre -1 y 1 ($a = 1$), obtenemos que la ecuación que relaciona ω con $G(\omega)$ es

$$\omega^3 - 3\omega - 2 + 4G = 0 \quad (3.23)$$

Dado que la distribución de frecuencias es determinista, $G(\omega)$ adquiere valores entre 0 y 1 de la forma , $G(\omega) = (2i - 1)/2N$ donde $i = 1, 2, 3 \dots N$. Esta ecuación se resuelve a través de Matlab, haciendo uso de un método que resuelve polinomios de tercer grado y tomando finalmente la solución real. De esta manera, obtenemos las frecuencias naturales ω_i en el caso parabólico.

Al igual que en el caso de una distribución de probabilidad lorentziana, se realiza el estudio del modelo de Kuramoto suponiendo 500 osciladores cuyas condiciones iniciales (θ_i) son aleatorias.

Recordamos que era de nuestro interés calcular el promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de la constante de acoplamiento K , con el objetivo de visualizar el valor de K_{umbral} en esta distribución de frecuencias naturales. La integración de la ecuación (3.6) se realiza en 500 pasos de tiempo para obtener la dependencia $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de diversos valores de K . El resultado obtenido aparecen a continuación

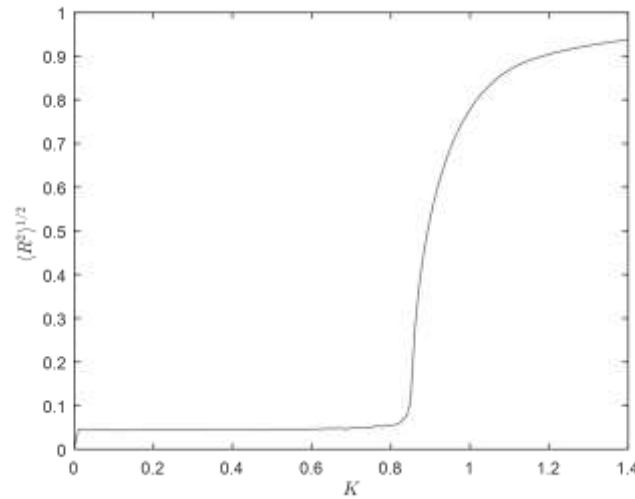


Fig 3.10: Representación de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de K . Caso de distribución de frecuencias según distribución de probabilidad parabólica determinista

A través de la ecuación (3.22) es posible predecir de nuevo el valor de K_{umbral} para el caso de una distribución de frecuencias parabólica y contrastarlo con los resultados numéricos. Dado que $g(\omega) = \frac{3}{4a^3} (a^2 - \omega^2)$, el valor de g en $\omega = 0$ es, $g(0) = \frac{3}{4}$, para $a = 1$. Por tanto el valor K_{umbral} teórico corresponde a $K_{umbral} (teórico) = 0,8488 \dots$

La figura 3.10 es la representación numérica del promedio temporal de $R, \langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de K , se observa que el K_{umbral} , efectivamente coincide con su valor teórico en una primera aproximación. Pero al igual que en el caso de una distribución de frecuencias lorentziana, se lleva a cabo una representación más minuciosa para obtener un mejor resultado del valor de K_{umbral} numéricamente.

A continuación se muestra la representación de cinco curvas que representan $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K , para un número de osciladores, $N = 500$ (verde); 1000 (azul); 2000 (rojo); 4000 (negro). El valor de α con el cual se obtiene una mejor intersección de las cuatro curvas corresponde de nuevo a $\alpha = 0,3$. Para la representación numérica de $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a la constante de acoplamiento K , se ha realizado el mismo procedimiento que en el caso de una distribución de frecuencias naturales lorentziana.

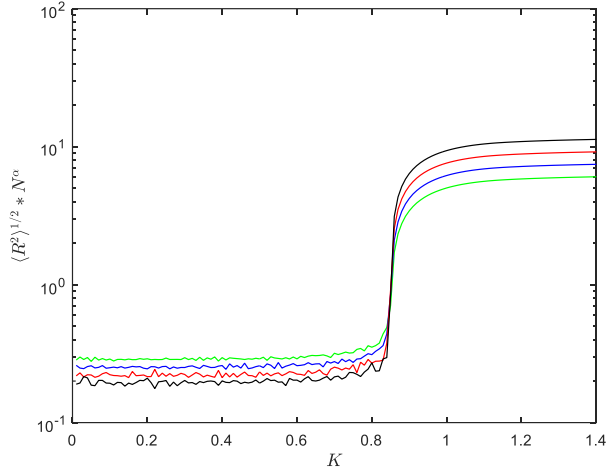


Fig 3.11: Representación de $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K . Dado que el $K_{umbral} = 0,8488 \dots$ se atribuye a K valores desde 0 hasta un valor de $K > K_{umbral}$.

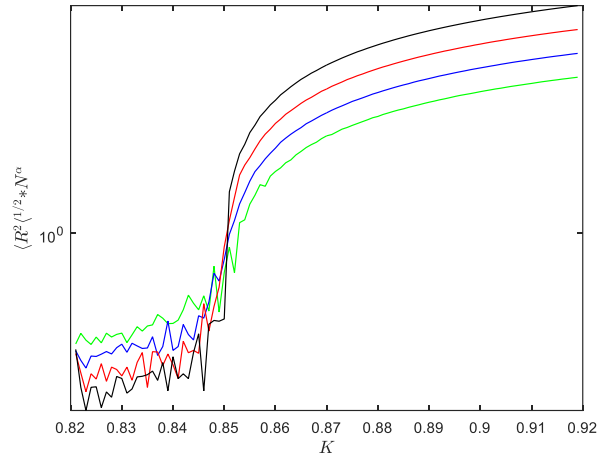


Fig 3.12 : Ampliación de la fig. (3.11). En esta ampliación se muestran los valores del promedio temporal con menor ruido que la anterior gráfica. Se han tomado valores de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, para cada paso de $\delta K = 0.001$, mientras que la figura (3.11), la toma de valores es para cada $\delta K = 0.01$.

El valor obtenido de la figura 3.11 es $K_{umbral} = 0,85 \pm 0,01$, valor coherente con el obtenido teóricamente.

3.6. Distribución gaussiana de frecuencias naturales.

A continuación se realiza el estudio en relación a una distribución de frecuencias en forma de una distribución de probabilidad gaussiana. La función de densidad normal viene dada por la tabla 3.1 y corresponde a

$$g(\omega) \propto e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}} \quad (3.24)$$

Dado que la integral de $g(\omega)$ no es posible expresarla en términos de funciones elementales para obtener $G(\omega)$, se resuelve este problema utilizando la función de error, pues esta viene tabulada en Matlab.

A continuación se recoge el análisis de la transición de Kuramoto para una distribución de probabilidad de frecuencias gaussiana. Primeramente estudiamos el comportamiento de R en una distribución normal estándar donde las frecuencias de nuevo se dividen en un rango determinista. De nuevo, el número de osciladores es de 500 y sus condiciones iniciales son aleatorias. Se estudia el promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a la constante de acoplamiento K para verificar si el valor de K_{umbral} se corresponde con el resultado teórico. Al igual que en la sección (3.2) y (3.3) el promedio temporal se obtiene numéricamente integrando la ecuación (3.6) en 500 pasos de tiempo, para cada valor de K (Véase figura 3.13)

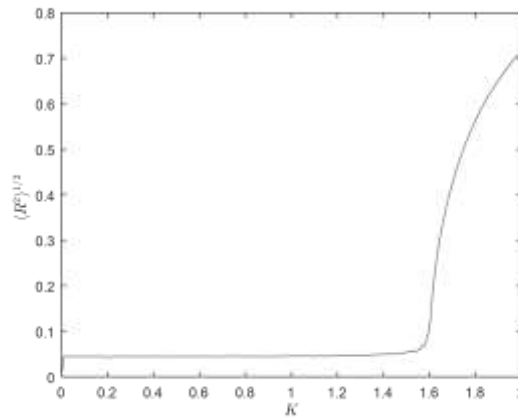


Fig 3.13 Representación $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de K . Caso de distribución de frecuencias según distribución de probabilidad gaussiana determinista.

A través de la ecuación (3.22) estudiamos el valor de K_{umbral} para este caso. Dado que $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ en el caso de una distribución de probabilidad gaussiana, el valor de K umbral corresponde a $K_{umbral}(teórico) = 1,5957...$ A través de la representación (véase figura 3.13) se observa que este valor el K_{umbral} teórico es consistente con la simulación numérica.

Al igual que en el caso lorentziano y parabólico, llevamos a cabo una representación más minuciosa para obtener un resultado del valor de la constante de acoplamiento umbral numéricamente. Se muestra la representación de cuatro curvas de la forma $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K , para un número de osciladores $N = 500$ (verde); 1000 (azul); 2000 (rojo); 4000 (negro).

El valor de α se estudia entre 0 y 0.5 buscando la mejor intersección de dichas curvas. De nuevo en este caso, el mejor valor de α corresponde a $\alpha = 0,3$, coincidiendo con las distribuciones utilizadas anteriormente.

Para la representación (3.14) se ha integrado la ecuación (3.6) para cada valor del número de osciladores N . La integración de dicha ecuación se realiza durante 1000 timesteps, habiendo dejado al sistema previamente durante otros 100 timesteps un periodo de transición, para llegar a un estado de equilibrio y poder empezar a tomar valores de R . El mismo procedimiento se ha llevado a cabo para la representación (3.15). Sin embargo, en este caso, el sistema solo se estudia desde valores de K muy cercanos a K_{umbral} , con pasos mas pequeños entre los valores de K , de manera que se ha obtenido una mayor información de los valores de R en función de K , próximos al punto que nos interesa.

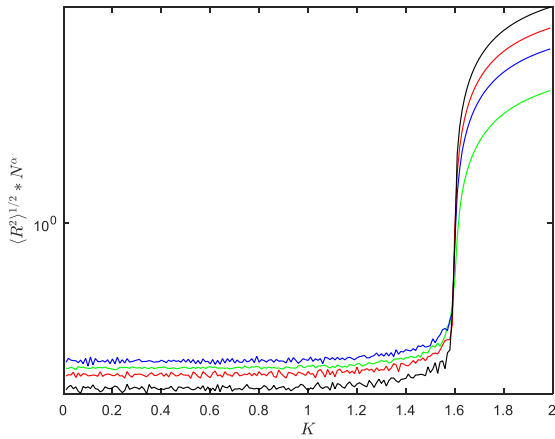


Fig 3.14: Representación de $N^{1/4} \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K para $N = 500$ (-), 1000 (-), 2000 (-) y 4000 (-). El valor de α de la figura corresponde a $\alpha = 0.3$.

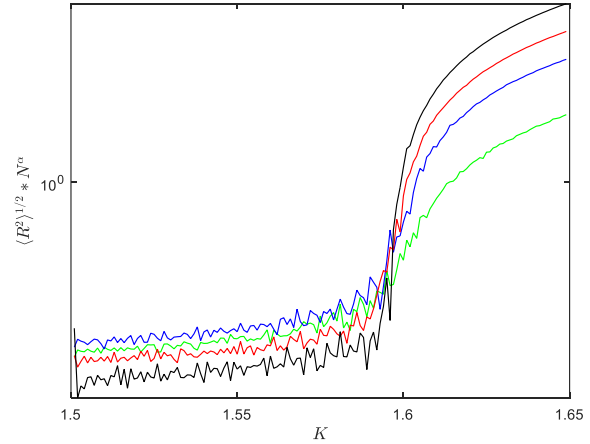


Fig 3.15: Ampliación de (fig. 3.14). La toma de valores de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ se ha realizado para pasos de $\delta K = 0.001$

El valor obtenido de la figura 3.15 es $K_{umbral} = 1.60 \pm 0.01$, valor coherente con el obtenido teóricamente.

3.7. Estudio del valor asintótico de R cercano al K_{umbral} .

Hasta aquí se ha realizado para las tres distribuciones de probabilidad, un estudio del valor de K_{umbral} numérico contrastado con el valor teórico, según el análisis de Kuramoto. A continuación se presenta el valor asintótico de R ligeramente por encima del K_{umbral} . El objetivo es su obtención teórica y posteriormente que sea contrastado numéricamente.

Retomamos la ecuación (3.22) que nos proporcionaba la integral clave para obtener el valor teórico de K_{umbral} . Si expandimos R , se obtiene la ecuación que nos muestra el valor de R teóricamente. La expansión en serie de potencias del término $g(KR \sin \theta)$, da como resultado $g(0) + (1/2) g''(0) R^2 K^2 \sin^2(\theta)$. Teniendo en cuenta que K es un valor muy próximo al valor umbral, K puede escribirse de la forma $K = K_{umbral} + \delta K = K_{umbral} (1 + \mu)$, donde $\mu = \frac{K - K_c}{K_c}$. Se obtiene entonces el valor teórico aproximado de R

$$R = \sqrt{\frac{16}{\pi K_{umbral}^3}} \sqrt{\frac{\mu}{-g''(0)}} \propto \mu^{1/2} \quad (3.25)$$

De la ecuación (3.25) se extrae que R es proporcional a $\mu^{1/2}$, es decir que R es proporcional a $(K - K_{umbral})^{1/2}$.

A continuación se exponen las curvas teóricas (color verde) frente a las numéricas (color azul) de R en función de μ (K), de manera que quede contrastada la parte teórica con la numérica, para las distribuciones de probabilidad lorentziana, parabólica y gaussiana. La curva teórica se obtiene al representar la ecuación (3.25) incluyendo los parámetros necesarios (K_{umbral} (teórico) y la derivada segunda en cero $g''(0)$ para cada respectiva distribución), frente a μ . Las curvas numéricas son el resultado de representar los valores de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ que habíamos obtenido en los apartados anteriores para cada distribución en función de μ .

Atendiendo a la ecuación (3.25), el desarrollo de R requiere del cálculo de $g''(0)$ y del K_{umbral} que ya conocemos. En el caso lorentziano atendiendo a la ecuación (3.7) obtenemos un valor de $g''(0) = -5.093...$ Siendo $K_{umbral} = 1$, obtenemos que R depende de μ de la siguiente manera

$$R \approx \sqrt{\mu} \quad [\text{Caso lorentziano}] \quad (3.26)$$

En el caso parabólico atendiendo a la tabla 3.1, obtenemos que $g''(0) = -3/2$. El valor de K_{umbral} corresponde a $K_{umbral} = 0,8488...$ de acuerdo a estos dos parámetros obtenemos que R depende de μ como

$$R \approx 2.3094\sqrt{\mu} \quad [\text{Caso parabólico}] \quad (3.27)$$

Por último, en el caso gaussiano se obtiene atendiendo a la tabla 3.1, que el valor de la segunda derivada de $g(\omega)$ en $\omega = 0$ es, $g''(0) = -1/\sqrt{2\pi}$. El valor de K crítico previamente calculado, correspondía a $K_{umbral} = 1.5957...$, de manera que R tiene la siguiente dependencia con μ

$$R \approx 1.7818\sqrt{\mu} \quad [\text{Caso gaussiano}] \quad (3.28)$$

La curva lorentziana tiene además, una ecuación teórica que relaciona R con K de forma exacta en el límite $N \rightarrow \infty$. Dicha ecuación, es una de las soluciones que se deducen de la ecuación (3.20). De nuevo, si introducimos en la ecuación (3.21) la función de densidad lorentziana $g(\omega)$, se obtiene la siguiente solución:

$$R = \sqrt{1 - \frac{2c}{K}} \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta que $K = K_{umbral} (1+\mu)$ y que el valor de $K_{umbral} = 1$ y $c = 0.5$, R se reescribe como

$$R = \sqrt{\frac{\mu}{\mu+1}} \quad (3.30)$$

Siendo este valor de R específico para el caso de una distribución lorentziana, a parte del obtenido teóricamente por la ecuación (3.26). A continuación se muestran las curvas

numéricas y teóricas correspondientes a una distribución de frecuencias lorentziana, parabólica y gaussiana.

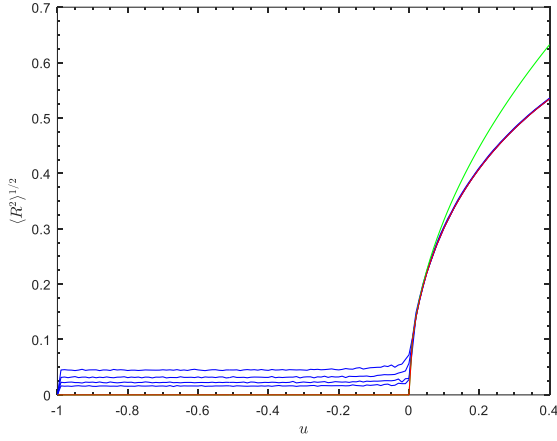


Fig 3.16: Representación lineal de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ . Las curvas azules corresponden a $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.26). La curva roja representa la curva teórica deducida de (3.30)

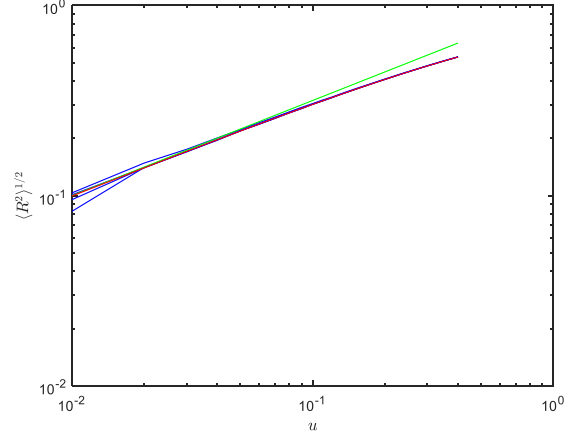


Fig 3.17: Representación logarítmica de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ (Representación logarítmica de la figura (3.16)). Las curvas azules corresponden a $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.26). La curva roja representa la curva teórica deducida de (3.30)

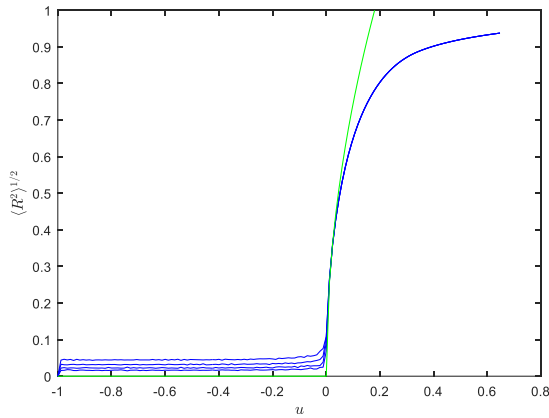


Fig 3.18: Representación lineal de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ para un muestreo de frecuencias según una distribución parabólica. Las curvas azules corresponden a los resultados numéricos para $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.27).

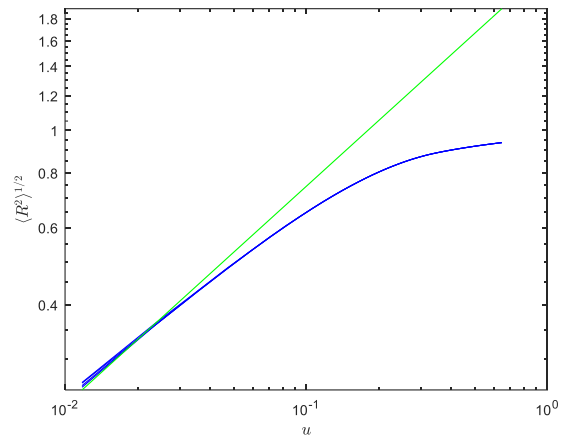


Fig 3.19: Representación logarítmica de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ (Representación logarítmica de la figura (3.18)). Las curvas azules corresponden a los resultados numéricos para $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.27).

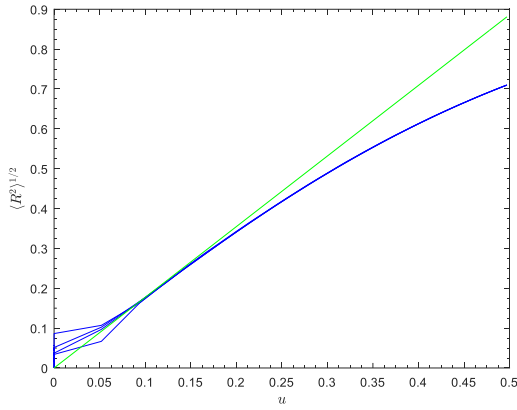


Fig 3.20: Representación lineal de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ para una distribución de frecuencias gaussiana. Las curvas azules corresponden a los resultados numéricos para $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.28).

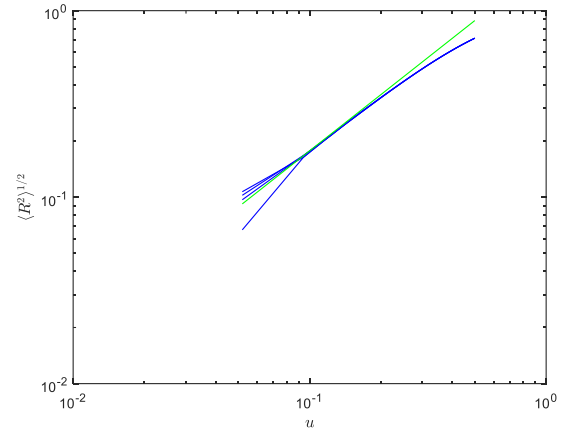


Fig 3.21: Representación logarítmica de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ (Representación logarítmica de la figura (3.20). Las curvas azules corresponden a los resultados numéricos para $N = 500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (3.28).

Capítulo 4

Distribución de frecuencias naturales con máximo no parabólico.

4.1. Distribución triangular de frecuencias naturales.

Llegados a este punto, se ha investigado fundamentalmente teórica y numéricamente el valor K_{umbral} , es decir, el valor de K para el cuál comienza la sincronización, y el valor de la coherencia de fase R en las proximidades de K_{umbral} . Se ha examinado para osciladores con frecuencias naturales distribuidas según las distribuciones de probabilidad lorentziana, parabólica y gaussiana, cómo evoluciona R en función del

tiempo y cómo evoluciona en función de K . Además, se realizó un estudio para obtener el mejor valor de α que da lugar a la mejor intersección de las representaciones de $\langle R^2 \rangle^{1/2} N^\alpha$ en función de K , para distintos valores de N . De manera que hasta aquí, se ha obtenido una visión general del fenómeno de la sincronización cuando los osciladores poseen una distribución de frecuencias equivalentes a una distribución de probabilidad con máximo parabólico, es decir, distribuciones del tipo lorentziana, parabólica o gaussiana. Pero, ¿Qué ocurriría si la distribución de probabilidad fuese triangular?

Al igual que con las anteriores distribuciones comenzamos desarrollando su función de densidad $g(\omega)$

$$g(\omega) = \frac{2(\omega-a)}{(b-a)(c-a)} \quad a \leq \omega < c \quad (4.1)$$

$$g(\omega) = \frac{2(b-\omega)}{(b-a)(b-c)} \quad c < \omega \leq b \quad (4.2)$$

Por simplificar, se considera $a = -1, c = 0$ y $b = 1$, de manera que la distribución triangular es simétrica $g(\omega) = g(-\omega)$. Teniendo en cuenta dichas anotaciones $g(\omega)$ se reescribe como

$$g(\omega) = 1 - |\omega| \quad -1 < \omega \leq 1 \quad (4.4)$$

Al igual que con las distribuciones anteriores, se calcula la función acumulada para obtener la relación entre la variable ω y $G(\omega)$, siendo $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega) d\omega$.

$$G(\omega) = 0 \quad \omega < -1 \quad (4.5)$$

$$G(\omega) = \frac{(1+\omega)^2}{2} \quad -1 \leq \omega < 0 \quad (4.6)$$

$$G(\omega) = 1 - \frac{(1-\omega)^2}{2} \quad 0 \leq \omega < 1 \quad (4.7)$$

$$G(\omega) = 1 \quad \omega \geq 1 \quad (4.8)$$

Finalmente, se obtiene que las frecuencias obedecen a

$$\omega = \sqrt{2G} - 1 \quad G \leq \frac{1}{2} \quad (4.9)$$

$$\omega = 1 - \sqrt{2 - 2G} \quad G > \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

Habiendo resuelto la distribución de frecuencias naturales, necesaria para integrar numéricamente la ecuación (3.6), la cual describe el comportamiento de N osciladores, recurrimos al análisis de Kuramoto para obtener la ecuación que describe el K_{umbral} y además, la ecuación que describe el comportamiento de la coherencia de fase R . De esta manera, es posible contrastar los resultados numéricos con los resultados teóricos.

A continuación se repasa el análisis de Kuramoto y se observa que las consideraciones que fueron tomadas para llegar a la ecuación (3.22), son válidas igualmente para una distribución triangular. Se consideran de nuevo las mismas condiciones: la distribución $g(\omega)$ necesariamente debe de ser unimodal y la distribución debe de ser simétrica respecto a una frecuencia central: $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$. Dado que se cumplen estas premisas, la ecuación (3.22) que proporcionaba el valor teórico de K_{umbral} continua siendo válida para esta distribución de probabilidad. A continuación se comprueba que numéricamente obtenemos el mismo valor. Haciendo uso de la ecuación (3.22) se obtiene un valor teórico de $K_{umbral} = \frac{2}{\pi}$. Para visualizar el valor del K_{umbral} , se integra la ecuación (3.6) para diversos valores de K . En la figura 4.1 se presenta la representación del promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, que nos permite visualizar el valor K_{umbral} a primera vista.

Dado que es de nuestro interés encontrar el valor de K_{umbral} con mayor precisión, recurrimos al método de intersección de gráficas para diversos valores del número de osciladores N .

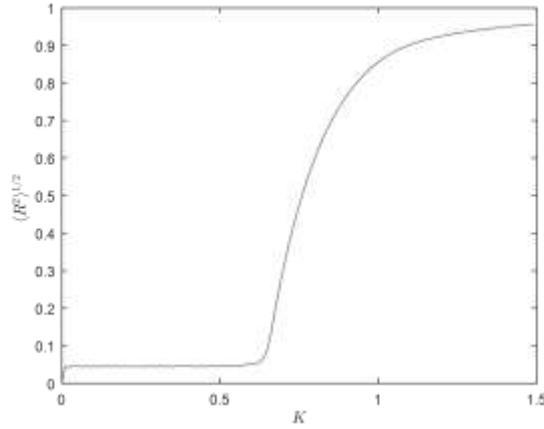


Fig. 4.1: Representación de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K para 500 osciladores, donde se observa que el valor de K_{umbral} parece coincidir en una primera aproximación con el K_{umbral} hallado teóricamente.

Este método consiste en representar $\langle R^2 \rangle^{1/2} N^\alpha$ frente a K , para $N = 500; 1000; 2000; 4000$. Al igual que en el apartado anterior, el valor de α se varía entre 0 y 0,5. Tras estudiar diversos valores de α comprendidos en este rango, se presenta la gráfica en la que las curvas se intersectan mejor, de manera que el mejor valor de α en este caso es $\alpha = 0,4$. Este resultado difiere del obtenido a partir de las otras distribuciones de probabilidad.

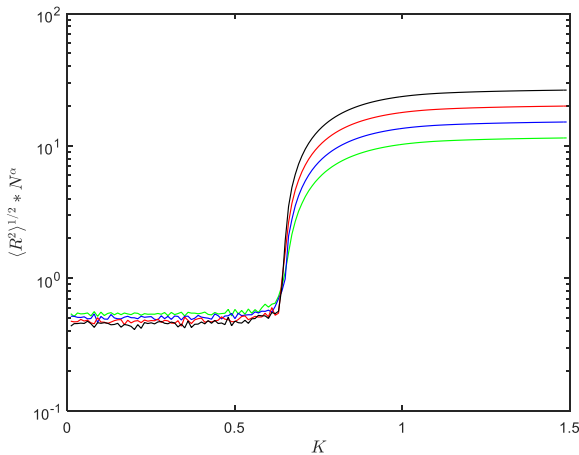


Fig 4.2: Representación de $N^{2/5} \langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K para $N=500$ (-), 1000 (-), 2000 (-) y 4000 (-). El valor de α de la figura corresponde a $\alpha = 0,4$

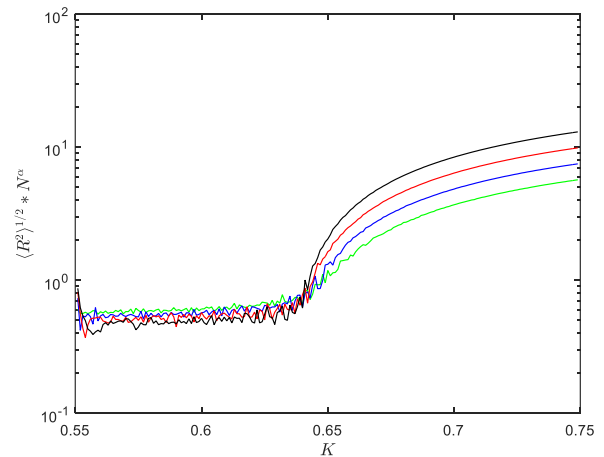


Fig 4.3: Ampliación de la figura anterior para observar el punto de intersección con mayor detenimiento. El cálculo de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ se ha llevado a cabo para cada $\delta K = 0.001$.

A partir de la figura 4.3 se extrae que el valor numérico de $K_{umbral} = 0.64 \pm 0.01$. Este resultado es consistente con el valor teórico obtenido anteriormente.

4.2. Determinación del exponente β

Tras el estudio del valor de K_{umbral} , se procede, al igual que en las otras distribuciones de probabilidades, a calcular el valor de la coherencia de fase R , para comprobar que teórica y numéricamente coinciden los resultados. A través del análisis de Kuramoto se llegó a la ecuación (3.25), que nos presentaba el valor de R en función de μ , o lo que es lo mismo, en función de $(K - K_{umbral})$. Para las distribuciones de probabilidad lorentziana, parabólica y gaussiana se obtenía (véase la ecuación 3.25) que R era proporcional a $(K - K_{umbral})^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, la distribución de probabilidad triangular, R no sigue esta ley. Se denomina a β al exponente al cual esta elevado la diferencia $(K - K_{umbral})^\beta$, que determina el valor de R . Esto se debe a que existe una relación, que desentrañaremos más adelante, que relaciona el exponente γ con el exponente β . Las distribuciones de probabilidad $g(\omega)$ se toman de la forma $g(\omega) = g(0) - c|\omega|^\gamma$. Para las distribuciones de frecuencias lorentziana, parabólica y gaussiana, el exponente γ posee un valor $\gamma = 2$, sin embargo, para la distribución de probabilidad triangular, el exponente γ tiene un valor $\gamma = 1$. A continuación se va a desarrollar R para ambos casos. Recordamos que para la obtención de R , partíamos de la ecuación (3.21) y desarrollamos $g(KR\sin\theta)$, teniendo en cuenta que $g(\omega) = g(0) - c|\omega|^\gamma$. Para el primer caso (distribuciones de probabilidad lorentziana, parabólica y gaussiana), el exponente γ tiene un valor $\gamma = 2$, de manera que el desarrollo en serie de $g(\omega)$ da lugar a $g(KR\sin\theta) = g(0) + \frac{g''(0)}{2} K^2 R^2 \sin^2 \theta$. Si ahora este término lo incluimos en la ecuación (3.22), se obtiene

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(0) d\theta + K^3 R^2 \frac{g''(0)}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$1 = Kg(0)\frac{\pi}{2} + K^3R^2\frac{g''(0)\pi}{2}\frac{\pi}{8}$$

$$\text{Siendo } K = K_{umbral} + \delta K = K_{umbral} (1 + \mu)$$

$$1 = K_{umbral} (\mu + 1)g(0)\frac{\pi}{2} + K_{umbral}^3(\mu + 1)^3R^2\frac{g''(0)\pi}{2}\frac{\pi}{8}$$

$$\text{Dado que } K_{umbral} = \frac{2}{\pi g(0)}$$

$$1 = \mu + 1 + K_{umbral}^3(\mu + 1)^3R^2\frac{g''(0)\pi}{2}\frac{\pi}{8}$$

$$R = \sqrt{\frac{\mu}{-g''(0)} \frac{16}{\pi K_{umbral}^3}} \quad (4.11)$$

Como $R \approx \sqrt{\mu}$, dado que $\mu = \frac{K - K_{umbral}}{K_{umbral}}$, efectivamente el exponente $\beta = \frac{1}{2}$, para el caso en el que $\gamma = 2$. Se desarrolla a continuación el valor de R para la distribución triangular, cuyo exponente γ tiene un valor $\gamma = 1$. En primer lugar, desarrollamos el término $g(KR\sin\theta)$, que dado que $\gamma = 1$, se obtiene que el desarrollo en serie sea $g(\omega) = g(0) - c|\omega|^1$, por tanto $g(KR\sin\theta) = g(0) - |cKR\sin\theta|$.

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(0) d\theta - K^2 R c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta |\sin \theta| d\theta$$

$$1 = Kg(0)\frac{\pi}{2} - K^2 Rc \frac{2}{3}$$

$$1 = K_c(\mu + 1)g(0)\frac{\pi}{2} - K_c^2(\mu + 1)^2 Rc \frac{2}{3}$$

$$1 = \mu + 1 - RK_{umbral}^2 c \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{\mu}{K_{umbral}^2 c^{\frac{2}{3}}} \quad (4.12)$$

En este caso el exponente β , tiene un valor $\beta = 1$.

Para comprobar que este resultado de R es correcto, realizamos una comparación de la representación de R en función de μ para el valor teórico (4.12) y el valor numérico.

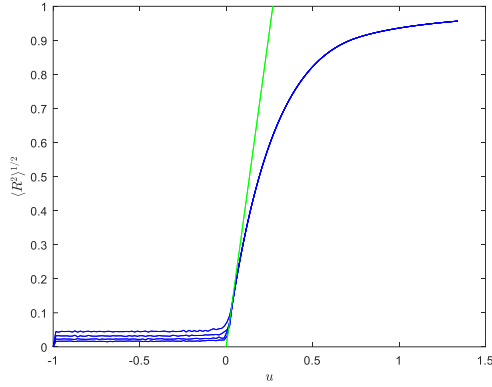


Fig 3.4: Representación lineal de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ para una distribución de frecuencias triangular. Las curvas azules corresponden a $N=500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (4.12).

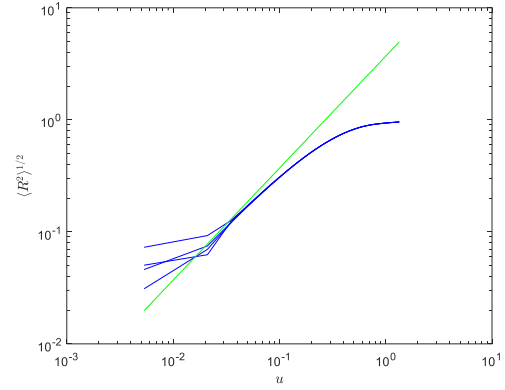


Fig 3.5: Representación logarítmica de $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ para una distribución de frecuencias triangular. Las curvas azules corresponden a $N=500, 1000, 2000$ y 4000 . La curva verde es la curva teórica que representa la ecuación (4.12).

Efectivamente a través de las figuras 3.4 y 3.5 se observa que el valor de R cercano al valor de K_{umbral} concuerda con el estudio teórico.

En el caso de que el valor del exponente γ sea $\gamma = 3$, se obtiene un exponente β correspondiente a $\beta = 1/3$. Por tanto, se concluye que la dependencia de R con $(K - K_c)^\beta$ depende del exponente γ y más concretamente el valor del exponente β equivale genéricamente a $\beta = \frac{1}{\gamma}$.

Conclusiones

- I. Se ha realizado un estudio del modelo de Kuramoto, primeramente para dos osciladores, por ser más sencillo de visualizar los conceptos, y posteriormente, para un número de osciladores $N \gg 1$. Se ha observado que cuando la fuerza de acoplamiento K es mayor que un cierto valor umbral K_{umbral} , se produce una transición de fase. Esto quiere decir que un conjunto de los osciladores se sincronizan mientras otros permanecen en un estado desincronizado. En el caso de que la fuerza de acoplamiento K sea menor que ese valor umbral, no se produce la sincronización. Se ha estudiado teóricamente el valor de la constante de acoplamiento, obteniéndose $K_{umbral} = \frac{2}{\pi g(0)}$. Este resultado ha sido contrastado numéricamente para diversas distribuciones de frecuencias naturales de los osciladores.

- II. Se ha realizado un estudio del valor asintótico de la coherencia de fase R cercano al K_{umbral} , determinándose que R tiene una relación de dependencia con el exponente β , de la forma $(K - K_{umbral})^\beta$. El parámetro β depende de la distribución de frecuencias naturales utilizada $g(\omega)$. En el capítulo 3 se tomaron tres distribuciones: lorentziana, parabólica y gaussiana, que ambas tenían en común la forma del máximo de la distribución, un máximo suave y progresivo. Sin embargo en el capítulo 4 se tomó un muestreo según una distribución triangular, cuyo máximo es brusco. Dado que las distribuciones de frecuencias naturales son de la forma $g(\omega) = g(0) - c|\omega|^\gamma$, se ha determinado el valor del exponente β , dependiendo del tipo de máximo de la distribución, siendo $\beta = \frac{1}{\gamma}$. En el caso de las distribuciones de frecuencias naturales lorentziana, parabólica y gaussiana, el valor de la coherencia de fase es $R \sim (K - K_{umbral})^{1/2}$ y en el caso de una distribución de frecuencias triangular, $\sim (K - K_{umbral})$.

III. Se ha determinado el exponente α para obtener el valor de K_{umbral} numéricamente. Se ha llevado a cabo una serie de representaciones de la forma $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de K . En el límite termodinámico, cuando $N \rightarrow \infty$, si K adquiere un valor menor que K_{umbral} , R decae a una pequeña fluctuación de tamaño $R \sim O(N^{-1/2})$, es decir, un valor próximo a cero. Mientras que por el contrario, si K adquiriera un valor mayor que el valor de K_{umbral} , la coherencia de fase R crece, alcanzando tras un tiempo suficientemente largo, un estado de saturación menor que 1, $R \sim O(1)$. Por último, el valor de la coherencia de fase en $K = K_{umbral}$, es $R \sim N^{-\alpha}$. El mejor valor de α depende de la distribución de frecuencias utilizada $g(\omega)$. Para las distribuciones lorentziana, parabólica y gaussiana se ha obtenido un valor de $\alpha = 0.3$ y sin embargo para la distribución triangular el mejor valor de α calculado ha sido $\alpha = 0.4$

Bibliografía

- Acebrón J, Bonilla L, Pérez Vicente CF. and Spliger R. The Kuramoto model: A simple paradigm of synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*. 2005; 77: 8-16, 70-78.
- Artieda J, Alegre M, Valencia M, Urrestarazu E, Pérez-Alcázar P, Nicolás MJ, López Azcárate J, Iriarte J. Oscilaciones cerebrales: papel fisiopatológico y terapéutico en algunas neurológicas y psiquiátricas. *Anales Sis San Navarra* 2009; 32 supl.3.
- Pikovsky A, Rosenblum M and Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge university pres, Nonlinear Science Series 12, Cambridge, 2001.
- Sadilek M, Thurner S. Physiologically motivated multiplex Kuramoto model describes phase diagram of cortical activity. *Sci Rep*. 2015; 5: 1-8.
- Strogatz S.H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2000;143: 1-20.
- Wiesenfeld K, Colet P. Strogatz SH. Synchronization transitions in a disordered Josephson Series Array. *Physical review letters*. 1996; 76 (3): 404-407

Apéndices

I. Método de integración numérica

El software matemático que se utiliza en este TFG para obtener los resultados numéricos es Matlab. Más específicamente la función ode45. Este integrador resuelve ecuaciones diferenciales del tipo $y = f(t, y)$ desde un tiempo inicial t_0 hasta un tiempo final t_f con condiciones iniciales y_0 . La rutina de este método utiliza el método Runge-Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones numéricamente. Este método consiste en un conjunto de pasos iterativos para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, más concretamente, del problema de valor inicial. Se plantea la ecuación genérica

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Con condiciones iniciales y_0 y t_0 . Entonces el método Runge-Kutta de un orden dado s tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

Donde h es el paso por iteración, o el incremento entre los puntos t_n y t_{n+1} . Los parámetros k_i son términos de aproximación, que se van definiendo de forma recursiva, como

$$k_i = f(t_n + hc_i, y_n) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j$$

Con a_{ij}, b_i, c_i siendo los coeficientes.

En esencia, los métodos de Runge-Kutta son generalizaciones de la formula básica de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ en los que el valor de la función f se reemplaza por un promedio ponderado de valores de f en el intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$.

El método de Runge-Kutta de cuarto orden es un algoritmo de uso extendido y una valiosa herramienta por la buena aproximación que produce. es un algoritmo de uso extendido y una valiosa herramienta por la buena aproximación que produce. Tiene un error en cada paso de $O(h^5)$ y un error global $O(h^4)$.

II. Códigos de Matlab

Capítulo 2

2.1. Obtención de ϕ

Comparación teórica de ϕ junto a la representación numérica en la Fig. 2.1. El interés de este programa es representar un punto fijo (correspondiente al valor de $K = K_{umbral}$)

```
%Parámetros necesarios:

%frecuencias iniciales
w1=input('Introduce frecuencia 1: ');
w2=input('Introduce frecuencia 2: ');

%tiempo final hasta el que integro
tf=input('Introduce tiempo final: ');

%valor de k para que el cual quiero dejar de evaluar phi.
klim=20;

%Condiciones iniciales aleatorias de phi
c=0;
d=2*pi;

xo(1)=c+(d-c)*rand(1);
x0(2)=c+(d-c)*rand(1);

%parámetros ode45: tiempo integracion y opciones
tspan=linspace(0,tf);
options=odeset('RelTol',1e-6);

%a=Kumbral, es la diferencia de ambas frecuencias
a=w2-w1;

%realizamos bucle para que recorra cada k, hasta un k que queremos
estudiar
%la solución numérica con ode45

for k=a:1:klim
```

```

%funcion que queremos integrar
fg=@(t,x) [w1+(k/2)*sin(x(2)-x(1)); w2+(k/2)*sin(x(1)-x(2))];

%ode45 integra funcion
[t,x]=ode45(fg,tspan,x0,options);

y=x(length(t),2)-x(length(t),1)

%plot phi (Y) respecto a k
plot(k,y,'ok')

hold on
end

%%Parte teórica ecuación (2.6)
% Se considera el primer valor de k el Kumbral.
k=a;
for b=2:1:320
k(b)=k(b-1)+0.05;
q(b)=asin(a/k(b));

end

plot(k,q,'-r')

```

2.2. Frecuencias observadas Ω_1 y Ω_2 en función de K.

Representación numérica y teórica de la Fig. 2.2 Se trata en observar en qué punto las frecuencias observadas se sincronizan.

```

%frecuencias iniciales
w1=input(' Frecuencia 1: ');
w2=input('Frecuencia 2: ');

%tiempo final hasta el que integro
tf=input('Introduce el tiempo que consideres suficientemente largo: ');

%que me pida un k para el que dejar de evaluar
klim=input('Introduce el k limite: ');

%Condiciones iniciales aleatorias
c=0;
d=2*pi;

xo(1)=c+(d-c)*rand(1);
x0(2)=c+(d-c)*rand(1);

%parámetros ode45: tiempo integracion y opciones
tspan=linspace(0,tf);
options=odeset('RelTol',1e-6);

```

```

%realizamos bucle para que recorra cada k hasta un k que queremos
estudiar
%la solucion numérica con ode45
for k=0:0.1:klim

%funcion que queremos integrar
fg=@(t,x) [w1+(k/2)*sin(x(2)-x(1)); w2+(k/2)*sin(x(1)-x(2))];

%ode45 integra funcion
[t,x]=ode45(fg,tspan,x0,options);

%soluciones obtenidas cuando t tiende a infinito
x(length(t),1);
x(length(t),2);

%frecuencias observadas n y m entre el t, cuando el tiempo tiende a
%infinito
n=(x(length(t)-x0(1),1))/tf;
m=(x(length(t)-x0(2),2))/tf;

%pinta las frecuencias observadas m y n en funcion de los valores de
k.
plot(k,n,'ok')
hold on
plot(k,m,'sk')

end

%Ahora incluimos la parte teorica para observar que coinciden
a=(w2-w1);
k=0:1:klim;
g=sqrt(a.^2-k.^2);

% frecuencias observadas omega 1(z1) omega 2(z2) ya despejadas
z1=((g+w1+w2)/2);
z2=(z1-g);

plot(k,z1,'r')
hold on
plot(k,z2,'r')

```

Capítulo 3

Se presentan los códigos generales para la integración de la ecuación principal (3.6). Muchas de las representaciones del capítulo 3 se han basado en un largo proceso de cálculos para posteriormente utilizarse de diversas formas. Se presenta dos códigos básicos: primeramente, dos (Kuramoto y Parámetro-orden), necesarios para la realización del resto de códigos y posteriormente las distintas distribuciones de frecuencias.

3.1 Kuramoto y Parámetro-orden (parord)

Ambos códigos son necesarios para el resto de códigos utilizados. La función Kuramoto presenta la ecuación diferencial (3.6) con sus correspondientes parámetros. La función parord, recoge el parámetro de orden basado en las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5).

```
function dy=kuramoto(y,w,k)
[R,phi]=parord(y);
dy=w+k*R*sin(phi-y);
```

```
function [R,phi]=parord(y)
N=length(y);
coseno=sum(cos(y));
seno=sum(sin(y));
R=sqrt((coseno/N)^2+(seno/N)^2);
phi=atan2(seno,coseno);
phi=transpose(phi);
```

3.2. Distribuciones de frecuencias naturales

Distribución de frecuencias lorentziana

```
%Nuestra ecuación w=c*tan(G*pi-pi/2)
G=1./(2*(N)):1./(N):1;
G=transpose(G);
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);
```

Distribución de frecuencias parabólica

```
%Nuestra ecuación x^3-3x-2+4G=0 que viene de 3x/4-x^3/4+1/2=G.
a=0;
b=-3;
c=-2+4*G;

Q=(-3*b)/9;
R=27*c/54;

if (R.*R)<(Q.^3)
    tetha=acos(R./sqrt(Q.^3));
    %x=-2*sqrt(Q).*cos(tetha/3);

    w=-2*sqrt(Q)*cos((tetha-2*pi)/3);
```

```
else
```

```
A=-sign(R).*nthroot(abs(R)+sqrt(R.*R-Q.^3),3);
sp(A)
B=Q./A;
w= (A+B);
end
```

Distribución de frecuencias gaussiana

```
%Se basa en la función de error tabulada por Matlab.
G=1./(2*(N/2)):1./(N/2):1;
G=transpose(G)
x=G;
w1=sqrt(2)*erfinv(x);
w2=sqrt(2)*erfinv(-1+x);
w=vertcat(w1,w2);
```

3.3 Transición de Kuramoto

Se presenta primero para las frecuencias observadas Ω_i la dinámica de una población de 500 osciladores para diversos valores de K. El objetivo es visualizar la transición de Kuramoto en función de que valor de K, está siendo utilizado.

```
N=500;
```

```
%%G determinista
G=1./(2*N):1./N:1;
G=transpose(G)
```

```
%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);
```

```
%fValor de la constante K
K=input('Introduce el valor de K: ');
```

```
%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);
xoi=xo;
fobs=[];
y=xo;
```

```
[R,phi]=parord(y)
```

```
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
```

```
%ode45 integra funcion
for i=1:500;
```

```

i
[T,theta]=ode45(@ (t,y) kuramoto (y,w,K) , [0 1],xo);
xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
[R(i),phi(i)]=parord(xo);

```

```

%Phi prima son las frecuencias observadas
phiprima(i)=w(i)+K*R(i)*sin(phi(i)-xo(i));

```

```

end

```

```

plot(hiprima)

```

A continuación se muestra la transición de Kuramoto para las fases θ_i

```

N=500;

```

```

%%G determinista
G=1./(2*N):1./N:1;
G=transpose(G)

```

```

%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);

```

```

%fValor de la constante K
K=1.2;

```

```

%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);

```

```

y=xo;

```

```

[R,phi]=parord(y)

```

```

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);

```

```

    %ode45 integra funcion
for i=1:500;
i
[T,theta]=ode45(@ (t,y) kuramoto (y,w,K) , [0 1],xo);
xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
[R(i),phi(i)]=parord(xo);

```

```

end

```

```

plot(xo,'ko')

```

3.3. La coherencia de fase R en función del tiempo t.

El objetivo de este código es observar la evolución temporal de R, descrita en el TFG.

```
N=input(' Introduce el numero de osciladores :');

%%G determinista
G=1./(2*N):1./N:1;
G=transpose(G)

%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);

%fValor de la constante K
K=1.5;

%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);

y=xo;

[R,phi]=parord(y)

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);

%ode45 integra funcion
for i=1:500;
i
[T,theta]=ode45(@ (t,y) kuramoto(y,w,K),[0 1],xo);
xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
[R(i),phi(i)]=parord(xo);
end

plot(R)
```

3.4. La coherencia de fase R en función de K

Este código representa la coherencia de fase en un instante de tiempo dado en función de K. Es posible visualizar a través de la representación, cuál es el valor de K_{umbral} .

```

N=input(' Introduce el numero de osciladores :');

%%G determinista
G=1./(2*N):1./N:1;
G=transpose(G)

%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);

%fValor de la constante K
Klim=1.5;

%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);

y=xo;

[R,phi]=parord(y)

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
K=0;
    %ode45 integra funcion para cada valor de K
    for a=1:1:250
        K=K+0.01;
    for i=1:500;
        i
        [T,theta]=ode45(@(t,y) kuramoto(y,w,K),[0 1],xo);
        xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
        [R(i),phi(i)]=parord(xo);

    end
    %%%Si queremos representar R en funcion de K
    R(end);
    plot(K,R(end),'ok')
    hold on

end

```

3.5. Promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K (General)

```

N=input(' Introduce el numero de osciladores :');

%%G determinista
G=1./(2*N):1./N:1;
G=transpose(G)

%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);

%fValor de la constante K
Klim=1.5;

%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);

y=xo;

[R,phi]=parord(y)

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);
K=0;
    %ode45 integra funcion para cada valor de K
    for a=1:1:250
        K=K+0.01;
    for i=1:500;
        i
        [T,theta]=ode45(@(t,y) kuramoto(y,w,K),[0 1],xo);
        xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
        [R(i),phi(i)]=parord(xo);
        %%%Si queremos representar <R^2>^(1/2) frente a K
        R2=R.^2;
        M=median(R2);
        r=sqrt(M); %raiz del valor medio del cuadrado de
    end

plot(K,r,'ok')
hold on
end

```

3.6. Promedio temporal de R , $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ frente a K (Toma de datos)

Los datos tomando a partir de este código por ejemplo, han sido utilizados posteriormente para las representaciones $N^\alpha \langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de K o $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ en función de μ .

```
%Paso de tiempo: uno de transicion y otro de calculo
ntran=100;
ncal=1000;

%Numero osciladores
N=input('N: ');

G=1./(2*(N)):1./(N):1;
G=transpose(G);

%%%%%frecuencias iniciales (caso lorentziana)
c=0.5;
w=c*tan(G*pi-pi/2);

%Calculamos condiciones iniciales para las theta(i) que la vamos a
llamar
%xo(dentro del bucle de tiempo)
z=0;
v=2*pi;
xo=z+(v-z)*rand(N,1);

y=xo;

[R,phi]=parord(y)

options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5]);

%ode45 integra funcion
K=0;
r=0;
    for b=2:1:150
        K(b)=K(b-1)+0.01;
        k=K(end)

    for i=1:ntran;
        [T,theta]=ode45(@(t,y) kuramoto(y,w,k),[0 1],xo);
        % [R(i),phi(i)]=parord(xo);
        xo=theta(end,1:end);
    end

xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);
```

```

for i=1:ncal;
[T,theta]=ode45(@(t,y) kuramoto(y,w,k), [0 1],xo);
xo=theta(end,1:end);
[R(i),phi(i)]=parord(xo);
end

xo=mod(theta(end,1:end),2*pi);

%%Toma de datos de  $\langle R^2 \rangle^{(1/2)}$  frente a K
R2=R.^2;
M=mean(R2);
r(b)=sqrt(M);%raiz del valor medio del cuadrado de

end

plot(K,r)

```

Capítulo 4

Dado que el procedimiento es similar al capítulo anterior pero alternando la distribución de frecuencias, se presenta a continuación el código que recoge la distribución de frecuencias triangular.

```

N=input('N: ');

G=1./(2*(N)):1./(N):1;
G=transpose(G);

for i=1:1:N
if G(i)<= 0.5
    G(i)
    W=sqrt(2*G(i))-1;

else
    G(i)
    W=1-sqrt(2-2*G(i));

end
w(i)=W;
end
h=histogram(w);

```

