



Facultad de Educación

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL
PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Los conceptos matemáticos de *función* y de *derivada* en el proceso
de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía

The mathematical concepts of function and derivative in the
process of teaching-learning inside Economics

Alumna: Patricia Ruiz Pelayo

Especialidad: Economía, Administración y Gestión y FOL

Directores: Pedro Álvarez Causelo y Mario Fioravanti Villanueva

Curso académico: 2015-2016

Fecha: 24 de junio de 2016

Abstract

The aim of this work is to analyze the difficulties and obstacles that students face in their process of teaching-learning the concepts of function and derivative inside Economics.

Regardless of its economic application, most students have learned to work with these mathematical concepts, though in most cases, they have not internalized its meaning, as well as the profits they have towards their interpretation and use in their daily lives

On equal way, the students generally, do not link automatically a process with the idea of derivative, they are often not able to associate external situations to what they have seen in the classroom.

Key words: function, derivative, process of teaching-learning, Economics

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar las dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los alumnos de primero de Bachillerato en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y de derivada, especialmente, en la enseñanza de la asignatura de Economía.

Con independencia de su aplicación económica, la mayoría de los estudiantes han aprendido a trabajar con estos conceptos matemáticos, aunque en la mayoría de los casos, no han interiorizado su significado, así como las utilidades que éstos poseen de cara a su interpretación y uso en su vida diaria. De igual manera, los estudiantes generalmente, no vinculan automáticamente un proceso con la idea de derivada, no suelen ser capaces de asociar situaciones ajenas a las vistas en el aula.

Palabras clave: función, derivada, proceso de enseñanza-aprendizaje, economía.

Índice

1. Introducción.....	4
2. Obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y de derivada	5
2.2 Evolución del modelo de enseñanza de las matemáticas.....	5
2.2 Obstáculos en el aprendizaje de los conceptos de matemáticos.....	6
2.3 Dificultades del aprendizaje del concepto de función.....	7
2.4 Dificultades del aprendizaje del concepto de derivada	13
2.5 Conclusiones del marco teórico	17
3. Los conceptos de función y de derivada en 1º de Bachillerato	19
3.1 Los conocimientos previos con los que acceden los estudiantes a Bachillerato y el contenido de Matemáticas para las CCSS I en relación con los conceptos de derivada y de función.	19
3.2 El uso de los conceptos de función y de derivada en la asignatura de Economía de 1º de Bachillerato.....	22
4. Evaluación del grado de comprensión de los conceptos de función y de derivada por los alumnos de 1º de Bachillerato	24
5. Propuesta didáctica: los conceptos de función y derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los costes y beneficios	30
6. Conclusiones y valoración personal	41
7. Bibliografía	43

1. Introducción

Al comienzo de los grados de Administración y Dirección de Empresas y de Economía, muchos alumnos presentan dificultades en la comprensión de conceptos microeconómicos cuando se recurre a los conceptos matemáticos de función y de derivada.

Esta situación, que pudiera considerarse propia de alumnos que han accedido a cualquiera de los dos grados sin haber cursado en Bachillerato la asignatura de Economía, es común a su vez en aquellos que sí habían estado matriculados. Muchos profesores universitarios detectan dificultades en la comprensión de determinados términos económicos, cuando introducen los conceptos matemáticos de función y de derivada. Expresiones sencillas, como son los casos de las funciones de oferta y demanda, o de costes e ingresos de una empresa, presentan grandes dificultades en su proceso de comprensión a través de las representaciones matemáticas (tabla, gráfica, función y verbal).

Ante este hecho y dado que mis prácticas las he realizado en el departamento de Economía de un Instituto de Educación Secundaria, he podido ver de primera mano que es lo que sucede en el aula, los recursos didácticos y la metodología que comúnmente se emplea para explicar estos conceptos.

Este documento se estructura en cuatro grandes bloques. El primero se centra en el análisis de las dificultades y obstáculos a las que se enfrentan los alumnos en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y derivada. Posteriormente, se realiza una aproximación a los conocimientos previos con los que los estudiantes acceden a primero de Bachillerato, así como los conocimientos matemáticos asociados a los conceptos de función y derivada que adquieren en la asignatura de Matemáticas para las Ciencias Sociales en dicho curso. A continuación, con la intención de identificar el grado de comprensión de ambos conceptos matemáticos, se ha elaborado un cuestionario para alumnos de dicho nivel educativo. Finalmente, se proponen dos sesiones vinculadas a los conceptos de costes, ingresos y beneficios, en donde se trabajan la comprensión de la función y de la derivada.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función* y *derivada*

2. Obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y de derivada

Es bien sabido que las ciencias sociales se apoyan en conceptos matemáticos como los de función o derivada, para construir el conocimiento económico.

A lo largo del proceso de aprendizaje, los alumnos generalmente interiorizan la operativa que se requiere para trabajar los conceptos matemáticos, frente a la asimilación del concepto y su posterior interpretación. Esta situación dificulta el estudio y la posterior interpretación de los conceptos económicos expresados matemáticamente. Los alumnos generalmente, saben cómo operar las funciones o las derivadas, pero no han interiorizado las utilidades, o la forma de razonar e interpretar los resultados obtenidos a partir de sus cálculos.

Diversas investigaciones sobre la comprensión de la derivada y de la función, ponen de manifiesto que, para lograr su correcta asimilación, los estudiantes deben aprender a establecer relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que constituyen los conceptos económicos (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008).

2.2 Evolución del modelo de enseñanza de las matemáticas

En la ESO y el Bachillerato es común presentar la función como una regla en la que un único valor de la variable dependiente corresponde a cada valor de la variable independiente. Igualmente, y aunque el profesor no lo dice de forma literal, sus alumnos entienden que la gráfica es un camino. No es válido entender el concepto de "*función*", si no se asimila su significado a través de su uso.

El concepto de función se presenta de una manera descontextualizada, empleándose los problemas únicamente para la concreción del concepto de *función*, en lugar de utilizarlos para la construcción del propio concepto.

Por su parte, la metodología empleada en las aulas no universitarias se centra en reforzar: el deductivismo exagerado, las definiciones formalizadas, el exceso de generalización y las matemáticas por las matemáticas. Prevalen las enseñanzas teóricas acabadas, carentes de demostraciones deductivas, en donde prima el nivel de abstracción y generalización.

Con el paso de los años, ha surgido una nueva perspectiva que contextualiza la función a través de situaciones cotidianas, que favorecen su asimilación.

El siguiente fragmento extraído del libro de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales de primero de bachillerato, trata de dar sentido al concepto de función:

“El estudio de las propiedades de las funciones está presente en todo tipo de funciones observables a nuestro alrededor. Así podemos citar, fenómenos sociales relacionados con crecimientos demográficos, fenómenos económicos relacionados con inflación y capitalización de dinero, fenómenos naturales como la reproducción de especies vegetales y animales.” (González García, Llorente Medrano, & Ruiz Jiménez, 2008)

A lo largo de este apartado, se exponen los principales obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y de derivada.

2.2 Obstáculos en el aprendizaje de los conceptos de matemáticos

Este apartado ha sido elaborado a partir de la tesis doctoral: “El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica”, elaborada por Abraham Cuesta Borges.

Brousseau afirmaba que el objetivo principal de la didáctica es el de estudiar las condiciones que deben rellenar las situaciones propuestas a los alumnos. A continuación, se presentan las conclusiones extraídas por varios autores, quienes han analizado los obstáculos y dificultades que se producen en el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos (Brousseau, 1983).

Artigue vincula las dificultades con las concepciones previas del alumno, considerando los nuevos conceptos como inadecuados (Artigue, 1990).

Parece adecuado pensar desde el prisma de la matemática que la asistencia de un obstáculo cognitivo está vinculado a la definición de los objetos matemáticos, a partir de su representación y las ideas previas del estudiante. Por su parte, Vinner afirma que el esquema conceptual que posee el estudiante puede no asociarse a la definición conceptual, y generar así un obstáculo (Vinner, 1991).

Dreyfus, por su parte, hace hincapié en el hecho de que los estudiantes frecuentemente se limitan a trabajar en una única representación, generalmente

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

la algebraica, dejando de lado otras representaciones capaces de enriquecer su grado de comprensión e interpretación. Por ello, apuesta por el uso de diferentes representaciones con la intención de que los estudiantes logren el tránsito de la comprensión desde lo concreto, hacia lo más abstracto del concepto (Dreyfus, 1991).

Una de las dificultades más comunes para los estudiantes surge al pasar de las funciones entendidas como un proceso, a las que poseen una finalidad matemática. En el proceso de enseñanza, se espera que los estudiantes alcancen las capacidades que les permitan utilizar el conocimiento aprendido, en la resolución de problemas distintos a los del aula. Es necesario favorecer comprensión e interiorización de los conceptos en situaciones de la vida real.

Para lograr este propósito y favorecer este proceso de aprendizaje, Dreyfus establece cuatro etapas para su correcto desarrollo (Dreyfus, 1991):

1. Usar una representación
2. Usar varias representaciones en paralelo
3. Realizar nexos entre representaciones
4. Integrar las representaciones y flexibilizar los cambios entre ellas

Éstas serán consideradas posteriormente a través de la propuesta didáctica.

2.3 Dificultades del aprendizaje del concepto de función

Este apartado está inspirado a su vez en la tesis doctoral: “El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica”, elaborada por Abraham Cuesta Borges.

Existe una amplia variedad de obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados a las funciones, desde una etapa inicial de comprensión en donde el concepto es concebido de manera intuitiva, a otra etapa donde el concepto se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica. Dreyfus y Eisenberg señalan la existencia de tres dificultades en el aprendizaje del concepto de *función* motivadas por (Dreyfus & Eisenberg, 1982):

1. Su relación con otros conceptos matemáticos como: dominio, imagen, crecimiento, decrecimiento y extremos; todos ellos necesarios para determinar el concepto la función.
2. La relación que posee el concepto de función con otros campos de la matemática, como la geometría y el álgebra.
3. La existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto la función: descripción verbal, tabla de valores, gráficas, expresiones y diagramas.

En el ámbito de las funciones y gráficas, Leinhardt, Zaslavky y Stein, analizan la naturaleza del aprendizaje en términos de intuiciones y errores conceptuales de los estudiantes, así como las posibles aproximaciones a la enseñanza a través de explicaciones y ejemplos. Consideran que las intuiciones están vinculadas a dos maneras de definir la función (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990). Exponen así que:

- El proceso de aprendizaje está especialmente dirigido a potenciar en los estudiantes habilidades cuantitativas y abstractas.
- Las intuiciones basadas en el conocimiento del estudiante en torno a las situaciones reales son exitosas cuando son razonadas gráficamente.
- Una aproximación más cualitativa, abordar y entender la gráfica como una expresión de dos variables que interactúan y cambian, puede relacionarse y aprovechar el sentido común y las intuiciones de los estudiantes.

En lo que respecta a los errores conceptuales, se confirma que:

- *Los estudiantes poseen una visión restringida sobre las funciones.* Con frecuencia sólo identifican gráficas sencillas como modelos de función y se fracasa al tener que decidir si una gráfica representa o no una función, "conociendo" la definición exacta de función.
- Existe fuerte tendencia hacia la linealidad y/o sus propiedades, en una variedad de situaciones.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

- A menudo el estudiante necesita que los elementos de los conjuntos estén relacionados uno a uno, mientras que se observan dificultades con las correspondencias muchos a uno. En muchos casos se iguala el concepto de dependencia con el concepto de conexión causal.
- Existen dificultades al intentar construir e interpretar gráficas que representan situaciones concretas. En especial cuando el estudiante interpreta la gráfica de una situación como una imagen literal de ésta.
- Cuando la función es definida como una relación entre variables, en ocasiones los estudiantes ven una variable como un objeto único y se distraen en situaciones de símbolos arbitrarios, olvidando la relación funcional entre las variables.
- Existen dificultades en la traducción de una forma de representación a otra, en especial especialmente al pasar de una gráfica a una ecuación.

La idea de traducción surge de Janvier. A través de sus análisis observa las diferentes traducciones entre los distintos tipos de representación. Observa que los errores se producen en la comprensión de la función, se deben a confusiones entre las diferentes representaciones, siendo las confusiones más significativas: gráfico-dibujo, verbal-gráfico e intervalo-punto (Janvier, 1987).

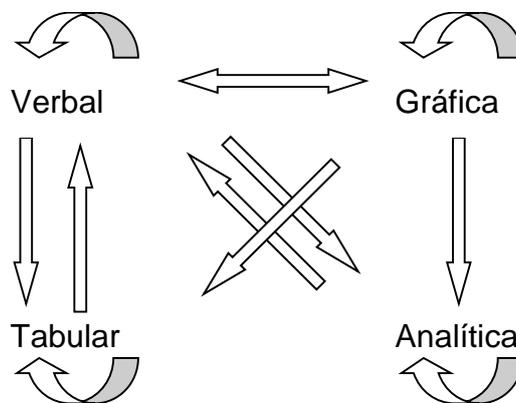
Tabla 1: Traducciones y conversiones entre representaciones f(x). Adaptación de la tabla C. Janvier

Hacia	Situación, descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión simbólica
Desde				
Situación, descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación o cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, etc.	Ajuste gráfico
Expresión simbólica	Interpretación de la fórmula	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformación de la fórmula

(Goni, 2011)

La gráfica adjunta recoge las traducciones que presentan mayores dificultades, y que resultan a su vez las menos trabajadas en el aula.

Gráfico 1: Conversiones y traducciones menos automatizables. Adaptación de la tabla C. Janvier



(Goni, 2011)

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

También Leinhardt, Zaslavsky y Stein señalan la necesidad de centrar la atención en las tareas relacionadas con el lenguaje gráfico, sean éstas: de **interpretación**, donde el alumno obtiene un significado; o de **construcción**, en donde debe generar una información nueva. Las dificultades en tareas de interpretación y construcción de gráficos tienen incidencia en el proceso de aprendizaje del concepto de función, llegando a convertirse en un obstáculo para el alumno (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990).

Artigue en el caso del concepto de función menciona:

"Algunas de las investigaciones muestran la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones en registros diferentes" (Artigue, 1995).

Otros autores constatan que muchas de las dificultades de los estudiantes guardan relación con el currículo, en especial con el uso del concepto de función. Tall afirma que, si bien los estudiantes comprenden el concepto de función a través de un procedimiento programado en el ordenador, existe un conjunto de obstáculos, en el desarrollo cognitivo, que pueden superarse mediante la explicación del concepto a través de diferentes formas de representación (Tall, 1989).

Existe la tendencia a imaginar determinados prototipos, como la línea recta, cuando se le menciona el concepto de función, así, el estudiante tiende a identificar la noción con una de las formas de representación más cercanas a ellos (en el caso de la función: una fórmula o una gráfica elemental).

Azcárate hace hincapié en el hecho de que los estudiantes asocian a la "*pendiente*" la imagen mental del coeficiente "*a*" en la fórmula del tipo $y = ax + b$; poseen un esquema conceptual carente de imagen gráfica (Azcárate, 1990).

El estudio de Fabra y Deulofeu, sobre las respuestas de los estudiantes a las preguntas relacionadas con situaciones gráficas descontextualizadas, se pone de manifiesto que en las percepciones de los estudiantes predominan: gráficas reducidas al trazado de rectas o segmentos de recta, parábolas o hipérbolas, que resultan ser las funciones más conocidas (Fabra & Deulofeu, 2000).

Sobre el concepto de función, Ruhana y Bruekheimer aportan otras dificultades cognitivas en el proceso de su comprensión (Ruhana & Bruekheimer, 1998):

- *Muchos estudiantes no entienden la relación entre las variables.*
- *Existen dificultades en el reconocimiento de las diversas formas de representación de una función, en especial la representación gráfica.*

Los resultados de Vall de Pérez y Deulofeu muestran como los alumnos, deben asimilar primero los modelos de función más sencillos (la dependencia lineal y la proporcionalidad inversa) para construir el concepto de dependencia (Vall de Pérez & Deulofeu, 2000).

Steinbring, plantea un estudio sobre las expresiones fundamentales de una función: dominio, relación entre variables, extremo de la función y su representación gráfica (Steinbring, 1993). Concluyendo que:

- Existe un conflicto entre las ideas del estudiante y la estructura de conocimiento fijada por el profesor
- Uno de los problemas de comprensión de funciones emerge del contexto de representación
- Resulta necesario que exista una mayor experiencia con objetos reales por parte del estudiante

Otras investigaciones reportan la existencia de dificultades en la comprensión del concepto de función como derivación de las tareas de enseñanza aprendizaje que pese a haber sido diseñadas para ejercitación han conducido a errores didácticos que han provocado que muchos estudiantes sólo puedan asociar al concepto de función una ecuación algebraica, como consecuencia producto de las actividades rutinarias (Guershon & Trgalová, 1996).

Para estos autores, en las concepciones de los estudiantes sobre la función predominan prototipos comunes, tales como: "*función es una fórmula*".

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

2.4 Dificultades del aprendizaje del concepto de derivada

Esta sección ha sido desarrollada a partir del trabajo: “La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática”, elaborada por Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares.

La dificultad respecto a la derivada se presenta al relacionar la gráfica y la fórmula, frente a la facilidad que resulta derivar con el uso de algoritmos y esbozar curvas siguiendo un algoritmo sobre puntos, al identificar las derivadas positivas y negativas (Cobb, y otros, 1991).

Habre & Abboud, realizan una investigación con estudiantes que procedían de un curso experimental de cálculo. En ella observaron que los alumnos no tenían la misma comprensión del concepto de derivada en el modo analítico, que en el gráfico. Muchos alumnos dominaban la representación gráfica y algebraica de la función, frente a los usos apropiados de la definición geométrica de derivada. Ello, es consecuencia de que las definiciones matemáticas que se enseñan son tradicionalmente analíticas y crean, un obstáculo en las mentes de los estudiantes, al igual que con la función (Habre & Abboud, 2006).

Las investigaciones que han analizado el papel que desempeñan las representaciones en la comprensión de la idea de derivada indican que los significados que construyen los alumnos están vinculados a determinados modos de representación y sus significados carentes de interconexión, como sucedía con la función. Esto insiste en la importancia de coordinar las diferentes representaciones para que los estudiantes puedan comprender la derivada.

El estudio de Aspinwall, Shaw y Presmeg sobre la capacidad del alumno para discriminar gráficamente una función y su derivada, ilustró el modo en que las imágenes mentales que algunas veces los estudiantes crean y asocian a determinadas funciones, pueden condicionar su forma de actuar durante la resolución de problemas. Los resultados hacen hincapié en el papel que cumple el tipo de tareas que realizan los estudiantes y el tipo de funciones y representaciones (más o menos prototípicas) que los profesores usan al exponer las ideas sobre la derivada (Aspinwall, Shaw, & Presmeg, 1997).

LA DERIVADA EN UN PUNTO Y LA FUNCIÓN DERIVADA

Otro aspecto importante en la comprensión de la derivada es la relación entre el aspecto local y global dado en un punto, y la idea de función derivada que permite pasar de una perspectiva puntual a una global, en intervalos.

El estudio que hizo Badillo dio a conocer la existencia de diferentes significados de la idea de derivada en un punto y de la función derivada. La comprensión gráfica de $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, resultó ser difícil (Badillo, 2003).

Los resultados señalaron que comprender la idea de función derivada en un punto, $f(a)$, no implicaba comprender la idea de función derivada $f'(x)$. Sin embargo, quienes comprendían la idea de función derivada, $f'(x)$, parecían entender de manera sencilla la derivada de la función en un punto $f'(a)$.

La complejidad del concepto de derivada llevó a esta investigadora a reparar en que la comprensión del esquema de la derivada conlleva la tocante a la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada). Sin embargo, tal vínculo no ha sido ampliamente estudiado hasta estos momentos, por lo cual se plantean interrogantes acerca de cómo las diferentes aproximaciones que pueden ser enfatizadas en la enseñanza pueden determinar el entendimiento de dicha relación, así como el papel que cumplen los diferentes modos de representación para favorecer la comprensión de la relación entre local y lo global en el desarrollo de la comprensión del esquema de derivada.

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN Y LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DERIVADA

Un estudio realizado por Ferrini–Mundy y Graham hizo énfasis en el papel clave que desempeñaba la comprensión de la relación entre la gráfica de una función y la de la función derivada (Ferrini-Mundy & Graham, 1994).

Asiala, Cottrill, Dubinsky, y Schwingendorf estudiaron la comprensión de los alumnos sobre la relación entre la gráfica de una función y su derivada. De inicio, concibieron una trayectoria de aprendizaje hipotética del concepto derivada para presumir cómo se desarrollaba su comprensión (Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997). La descomposición que efectuaron fue la siguiente:

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

- Conocer y comprender la representación gráfica de puntos de una curva en los ejes de coordenadas.
- Conocer y comprender el concepto pendiente de una línea.
- Conocer y tener una buena comprensión del concepto de función, así como una imagen bien desarrollada.
- Al construir un esquema para la derivada se deben recorrer dos caminos que están coordinados: el gráfico y el analítico.

Los investigadores entrevistaron a estudiantes que habían completado cursos tradicionales y experimentales de cálculo con ocho preguntas divididas en dos grupos: cuatro sobre comprensión gráfica de una función y cuatro sobre comprensión gráfica de su derivada.

Estas cuestiones tenían como objetivo proporcionar información sobre la coordinación que hacían los estudiantes entre los modos gráficos y los analíticos, lo cual se considera clave para construir un esquema del concepto de derivada.

Los resultados de la investigación indicaron que los estudiantes que habían seguido el curso experimental (el cual enfatizaba la relación entre lo gráfico y lo analítico, y cuyo diseño instruccional tomó en cuenta al análisis a priori de la forma en que se suponía que se construía el conocimiento) tuvieron más éxito que los que habían seguido los cursos tradicionales. Asimismo, un énfasis en la enseñanza sobre la coordinación entre los modos de representación gráfico y analítico, así como sobre la relación explícita entre los significados gráficos de la función y los correspondientes a la derivada, ayudan a que los estudiantes lleguen a coordinar los dos modos de representación.

Este tipo de trabajo apoya la hipótesis de que una enseñanza dirigida a la generación de mecanismos de construcción del conocimiento, como la coordinación entre los modos de representación, favorece la comprensión de los procesos que favorecen la construcción del significado por parte de los alumnos (Gavilán, García, & Llinares, 2007).

Ahora bien, los resultados también plantearon cómo se debía caracterizar el proceso de comprensión de la derivada, siendo necesario construir su concepto más allá de las simples características del concepto.

Los resultados de distintos estudios muestran que, si se combinan en la enseñanza del concepto de derivada las tres aproximaciones (límite del cociente incremental, pendiente de la recta tangente y tabla de valores), se facilita la comprensión del estudiante.

EL DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

Sánchez–Matamoros realizó un estudio con el fin de conocer el modo en que los alumnos de diferentes niveles (primero, segundo de bachillerato y universitarios) interpretan y resuelven y justifican sus decisiones en torno al concepto de derivada (Sánchez-Matamoros G. G., 2004).

Los resultados del trabajo apuntan que, pese a que los alumnos universitarios podían conocer más elementos del esquema de derivada que los de bachillerato, un número importante de ellos sólo eran capaz de usar los elementos matemáticos de manera aislada, o de relacionar un número limitado para obtener la información necesaria para resolver un problema.

2.5 Conclusiones del marco teórico

Los estudiantes no vinculan automáticamente un proceso con la idea de derivada, no son capaces de asociar situaciones ajenas a las vistas en el aula. La comprensión completa de la derivada, se espera que surja al reconocer y reconstruir los significados de razón, límite y función en diferentes contextos.

Asimismo, los modos de representación gráfico y analítico influyen en la construcción de los significados que hacen los alumnos (Ferrini-Mundy & Graham, 1994). Las dificultades para relacionar los modos gráfico, numérico y analítico surgen en contextos gráficos, cuando los estudiantes necesitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997). Ello quizá sea consecuencia de que las definiciones matemáticas son tradicionalmente analíticas, generando un obstáculo en las mentes de los alumnos (Habre & Abboud, 2006).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

Por otra parte, la explicación basada en el empleo de distintos modos de representación (Font, 2000) potencia la comprensión de la idea de variación y ayuda a la construcción del significado de la derivada. Cuestión que como se verá posteriormente en un extracto de la LOMCE, es la propia legislación la que motiva a centrar el uso de expresiones gráficas y a través de tablas en la interpretación y el análisis de los conceptos económicos.

Los estudiantes tienden a recordar el concepto imagen frente a la definición de cualquier concepto matemático, por lo que al resolver las tareas matemáticas los estudiantes enriquecen el propio concepto y les ayuda a visualizar los conceptos matemáticos. Sin embargo, los múltiples conceptos de imagen para una misma noción matemática pueden resultar útiles o conflictivos para éstos.

El análisis de Sánchez–Matamoros reveló que había una construcción progresiva del esquema de derivada, conforme el alumno a lo largo de su formación debía utilizar; así como los modos de representación influían para instaurar relaciones lógicas entre los elementos matemáticos durante la resolución de problemas (Sánchez-Matamoros G. G., 2004).

Así, se debe afirmar que la adquisición de los conceptos de función y de derivada toman relevancia en todos los niveles de matemática educativa, donde las ideas que se trabajan en torno a ellos facilita su interpretación y comprensión.

3. Los conceptos de función y de derivada en 1º de Bachillerato

Una vez revisados los obstáculos y dificultades de la didáctica de las matemáticas, es preciso conocer los conocimientos previos con los que los estudiantes acceden al Bachillerato, en concreto, en relación a los conceptos de función y tasa de variación media (la derivada se empieza a explicar en 1º de Bachillerato), y su uso en Matemáticas para las Ciencias Sociales. Además, es necesario revisar el uso que se hace de los conceptos de función y de derivada en la asignatura de Economía de 1º de Bachillerato

3.1 Los conocimientos previos con los que acceden los estudiantes a Bachillerato y el contenido de Matemáticas para las CCSS I en relación con los conceptos de derivada y de función.

Dado que los alumnos de 4º de la ESO, de acuerdo con la LOE, tienen la posibilidad de cursar las asignaturas de Matemáticas Opción A, o Matemáticas Opción B¹, se ha realizado una sencilla comparativa entre los contenidos y criterios de evaluación definidos para en cada una de ellas, con la intención de conocer los conceptos previos con los que acceden los alumnos a bachillerato.

Posteriormente, se hace una revisión en relación a los conceptos de derivada y función en la asignatura de Matemáticas para las Ciencias Sociales I.

CONOCIMIENTOS PREVIOS DE ACCESO A BACHILLERATO

Los conceptos de función y tasa de variación media son impartidos a lo largo del “*Bloque 5: funciones y gráficas*” en las asignaturas de Matemáticas Opción A y Matemáticas Opción B, Ambas comparten los siguientes tres epígrafes:

- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.

¹ Se toma como referencia la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, ya que los alumnos que se encuentran matriculados de primero de Bachillerato en el curso 2015-2016, cursaron dicha ley el pasado año en 4º de la ESO.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- Reconocimiento del crecimiento, los extremos, las discontinuidades, la periodicidad y la tendencia en gráficas.

De la misma manera, ambas asignaturas no son coincidentes en varios apartados. Todos estos, aparecen recogidos en la siguiente tabla:

Tabla 2: Diferencias de contenidos en las asignaturas de Matemáticas, 4º ESO

Matemáticas Opción A.	Estudio, descripción y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Uso de tecnologías de la información para su análisis.
Matemáticas Opción B.	Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. Definición formal de función. Expresión algebraica de una función. Variables. Expresión analítica. Análisis de resultados Reconocimiento de otros modelos funcionales: función lineal, cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

En términos generales, la principal diferencia se centra en la impartición de un mayor número de modelos funciones en las Matemáticas Opción B, así como en el reconocimiento, simulación y análisis de los distintos gráficos asociados a ellas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En los criterios de evaluación es donde mayores diferencias se observan, ya que los grados de profundización son mayores en Matemáticas. Opción B. En el conjunto de ambas asignaturas, se espera que los alumnos sean capaces de:

1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas.
2. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado.

Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos

A continuación, se enumeran las diferencias en relación a los apartados anteriores en cada una de las asignaturas.

1. Además de lo indicado en el punto anterior, los alumnos que cursen Matemáticas Opción B, deberán ser capaces de: aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
2. Junto a lo ya indicado será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.

Adicionalmente, los alumnos de Matemáticas. Opción A. deben de adquirir las competencias necesarias que les permitan:

1. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
2. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento.

Consecuentemente, se observa que ambas asignaturas comparten nociones básicas en lo que a los conceptos de función y tasa de variación se refiere. Aunque se debe destacar que la asignatura de Matemáticas Opción B genera unas mejores bases matemáticas de cara a Bachillerato.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

Hay que destacar que ninguno de los dos currículos hace referencia a situaciones cotidianas o de índole económica en el proceso de aprendizaje.

Igualmente, se han extraído los estándares de aprendizaje asociados a los conceptos de función y de derivada, recogidos en la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, *Bloque 3. Análisis*, del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, por el que se establece el currículum de la LOMCE, con la intención identificar los resultados de aprendizaje asociados a ambos términos matemáticos.

1.1. Analiza funciones expresadas en forma algebraica, por medio de tablas o gráficamente, y las relaciona con fenómenos cotidianos, económicos, sociales y científicos extrayendo y replicando modelos.

1.2. Selecciona de manera adecuada y razonadamente ejes, unidades y escalas reconociendo e identificando los errores de interpretación derivados de una mala elección, para realizar representaciones gráficas de funciones.

1.3. Estudia e interpreta gráficamente las características de una función comprobando los resultados con la ayuda de medios tecnológicos en actividades abstractas y problemas contextualizados.

3.1. Calcula límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función.

3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales.

4.1. Examina, analiza y determina la continuidad de la función en un punto para extraer conclusiones en situaciones reales.

5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geoméricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real.

5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.

Con esta información, se ha procedido a revisar el modo en que se asocian los conceptos de función y de derivada a situaciones de la vida real, en la *Unidad 11: Introducción a las derivadas y sus aplicaciones*, del libro de texto: *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1º Bachillerato. Ed: Editex* (González García, Llorente Medrano, & Ruiz Jiménez, 2008). De la revisión se ha extraído:

1. Predominan los ejercicios enfocados al cálculo de la derivada, a partir de una función descontextualizada.
2. Menos del 10% de los ejercicios que aparecen recogidos se refieren a situaciones económicas, y en el caso de aparecer, se muestra una función a la cual se debe calcular su máximo.
3. Existe un ejercicio en el que el alumno debe construir la función de beneficio a través de las funciones de ingresos y gastos.
 - a. Todas las funciones aparecen expresadas de forma algebraica.
 - b. No se recoge la posibilidad de expresar las funciones gráficamente.
 - c. La función de ingresos goza de cierta complejidad para el alumno.

Ejercicio 24 (pág. 255): Una empresa ha estimado que los gastos anuales (en euros) que genera la fabricación y venta de x unidades de un producto vienen dados por las funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 2x^2 - 500x - 350.000$$

$$\text{Gastos: } G(x) = 3x^2 - 2.000x + 120.000$$

- a) *Determina la función que da el beneficio anual de la empresa.*
- b) *¿Qué número de unidades hay que vender para que el beneficio sea máximo?*
- c) *¿A cuánto asciende este beneficio máximo?*

En definitiva, cabe destacar la ausencia de actividades, o explicaciones que inviten al alumno a comprender en toda su esencia los conceptos de función y

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

de derivada. Prevalece el uso de expresiones algebraicas a la hora de trabajar y explicar el concepto de derivada, y sus utilidades.

3.2 El uso de los conceptos de función y de derivada en la asignatura de Economía de 1º de Bachillerato.

Como se ha indicado, el libro de Matemáticas para las Ciencias Sociales I carece de actividades o explicaciones que favorezcan la comprensión de los conceptos de derivada y función desde una perspectiva económica o de la vida real.

Ante esta circunstancia, se ha optado por la revisión de dos libros de Economía de 1º de Bachillerato, con la intención de verificar el uso y asociación de los conceptos matemáticos de derivada y de función, a los términos económicos que se imparten en la asignatura, concretamente los asociados a la producción.

Economía. 1º Bachillerato. Ed: Bruño. Unidad 2: La producción y la empresa. (Foj Candel , Goñi Stroetgen, & Narváez Villena, 2015)

Los ejercicios resueltos y propuestos responden a una misma estructura. Todos ellos se centran en el uso de expresiones y a través de tabla. Tan sólo aparecen las fórmulas de Beneficios, Ingresos, Producción Media y Producción Marginal. No existe ningún ejercicio en el que se indique al alumno cómo calcular las tasas marginales, si quiera a través del cálculo de diferencias.

Un aspecto positivo es que recoge dos gráficas vinculadas entre sí: (1) Gráfica de costes fijos, variables y totales, (2) Gráfica del umbral de rentabilidad.

Economía. 1º Bachillerato. Ed: Mc Graw Hill. La Unidad 4: La producción y la empresa (Mochón, 2002)

A diferencia del libro anterior, no aparecen más que tablas de datos para calcular los ejercicios, sin recurrir a explicaciones gráficas como en el caso anterior, capaces de facilitar la comprensión de los conceptos económicos y matemáticos. Tampoco los ejercicios propuestos incitan a la representación gráfica de los datos, por lo que no se favorece su comprensión, así como sus efectos.

4. Evaluación del grado de comprensión de los conceptos de función y de derivada por los alumnos de 1º de Bachillerato

Tomando como referencia los apartados anteriores, y las razones que sustentan este trabajo, se ha diseñado un cuestionario, con la intención de identificar el grado de comprensión de los conceptos de función y de derivada por parte de los alumnos de 1º de Bachillerato que cursan Economía.

El uso del cuestionario como técnica de investigación cuantitativa, está justificado por tratarse de una herramienta que permite plantear un conjunto de preguntas para recoger información estructurada en torno a la comprensión y aplicación de los conceptos, en este caso de derivada y de función, en contextos económicos o situaciones propias de la vida real.

La tabla 3 recoge los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables definidos para el bloque 2 de la asignatura de Economía de primero de Bachillerato según el *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*, por el que se establece el currículum de la LOMCE, que han servido de inspiración para la construcción del cuestionario.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

Tabla 3. *Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque 2. La actividad productiva.*

Bloque 2. La actividad productiva	
Contenidos	Obtención y análisis de los costes de producción y de los beneficios. Lectura e interpretación de datos y gráficos de contenido económico.
Criterios de evaluación	6. Calcular y manejar los costes y beneficios de las empresas, así como representar e interpretar gráficos relativos a dichos conceptos. 7. Analizar, representar e interpretar la función de producción de una empresa a partir de un caso dado.
Estándares de aprendizaje evaluables	6.1. Comprende y utiliza diferentes tipos de costes, tanto fijos como variables, totales, medios y marginales, así como representa e interpreta gráficos de costes. 6.2. Analiza e interpreta los beneficios de una empresa a partir de supuestos de ingresos y costes de un periodo. 7.1. Representa e interpreta gráficos de producción total, media y marginal a partir de supuestos dados.

A partir de los citados estándares de aprendizaje evaluables, se han establecido los indicadores sobre los que se sustenta el cuestionario. De la misma manera, se han tenido en consideración varios aspectos recogidos en el apartado 2 de este documento. Además, se ha tenido en consideración la tesis de Marilyn Carlson, Michael Oehrtman, and Nicole Engelke, titulada “*The Precalculus Concept Assessment: A Tool for Assessing*” (Carlson, Oehrtman, & Engelke, 2010), dado su rico contenido en el proceso de definición de los indicadores, así como de las preguntas que conforman el cuestionario que en ella se recoge. Otro de los trabajos que ha inspirado el cuestionario, es el trabajo realizado por Daniel I. “Drlik, *Student understanding of function and success in calculus*” (Drlik, 2015).

Tabla 4. Indicadores definidos en el diseño del cuestionario

Indicador		Descripción
Dominio de conceptos y procedimientos		
Interpretación en las distintas representaciones y conversión de una a otra	I1	Interpretación de la información en las distintas representaciones.
	I2	Conversión de una representación a otra.
	I3	Identificar funciones y familias de funciones.
Realizar operaciones con funciones e interpretarlas correctamente	R1	Álgebra de funciones.
	R2	Composición de funciones.
	R3	Inversa de una función.
	R4	Ecuaciones
Determinar e interpretar la tasa media de variación y la derivada	D1	Tasa media de variación.
	D2	Derivada en un punto.
	D3	Función derivada.
Capacidad de razonamiento		
Capacidad de razonamiento	C1	Concepto de función como proceso.
	C2	Razonamiento covariacional.
	C3	Interpretación y aplicación contextualizada de conceptos y procedimientos

Igualmente, se valora la capacidad del alumno para trabajar en cada una de las cuatro representaciones de la función (verbal, tabla, gráfica y fórmula).

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

Considerando los indicadores anteriores, y tomando como referencia los libros de texto señalados en el apartado 3, se han formulado un total de 10 preguntas para la composición de este cuestionario. Aparecen recogidas en la figura 1.

El cuestionario se compone de preguntas asociadas a los conceptos de función y de derivada, aplicadas a situaciones relacionadas con el cálculo y/o interpretación de los costes de producción y los beneficios de la empresa. Además, incluye ejercicios de carácter no económico, con la intención de medir sus conocimientos en relación a los conceptos de función y de derivada.

Figura 1: Cuestionario de evaluación del grado de comprensión de los conceptos de función y de derivada de los alumnos de 1º Bachillerato (elaboración propia).

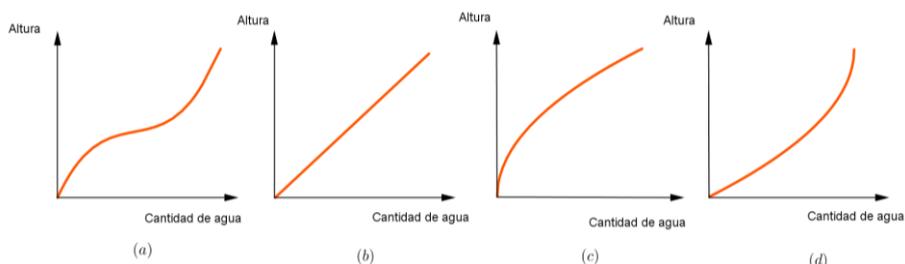
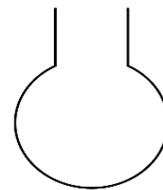
1. Representa gráficamente las siguientes funciones, teniendo en consideración lo indicado en cada uno de los apartados:

$$y = (x + 1)^2$$

$$y = 50 + 2xy$$

- a) Representa en el sistema de coordenadas cartesianas y en una tabla al menos 3 puntos de cada una de las funciones.
- b) Representa en el sistema de coordenadas cartesianas esas mismas funciones en el intervalo (-2,2).

2. Imagine que pone un recipiente con la forma del de la figura adjunta debajo de un grifo hasta que el agua rebose. Seleccione cuál de los gráficos recogidos en la parte inferior de la figura representa la relación que guardaría la altura que alcanza el agua en el recipiente con la cantidad de agua introducida.



3. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 1$, resuelva la ecuación $f(x) = 5$

4. Una empresa tiene unos costes fijos de 1.000€ y unos costes variables de 200€ por unidad producida. Suponga además que puede vender todo lo producido a un precio de 300 € cada unidad.

Considere valores de la producción que vayan de 0 a 12 unidades y represente en un eje de coordenadas la función que relaciona los ingresos totales con el volumen de producción. Haga lo mismo para el caso de los costes totales. ¿A partir de qué nivel de producción empezaría la empresa a tener beneficios?

5. Suponga que el valor de un coche se deprecia un 20% con cada año que transcurre desde el momento de su compra.

a) Proponga una fórmula que exprese el valor que tendrá el vehículo en función del tiempo que haya transcurrido desde su compra.

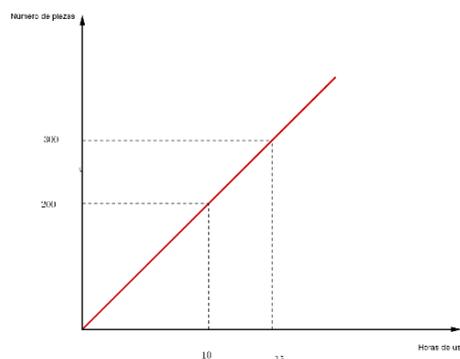
b) Represente a través de una tabla y una función la depreciación del vehículo, si su valor de compra fue de 45.000€

6. La tarifa de móvil de Juan tiene una parte fija de 15 euros al mes que le da derecho al consumo gratuito de 150 minutos teniendo que pagar 2 céntimos por cada minuto adicional.

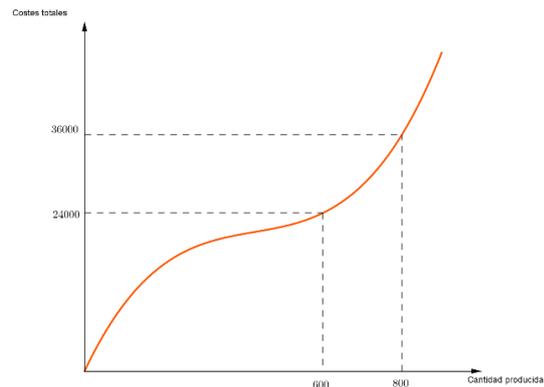
a) Represente en una gráfica el total a pagar por Juan a la compañía de teléfonos en función del número de minutos que consuma al mes.

b) Exprese a través de una función el total a pagar por Juan en función del número de minutos que consuma al mes.

7. La figura adjunta recoge la relación entre el número de piezas procesadas por una máquina y el número de horas que está en funcionamiento. Sabiendo que el coste por hora de uso de la maquina es de 50 euros, proponga una fórmula algebraica que exprese el coste total de usar dicha máquina en función del número de piezas que sea necesario procesar.



8. En la figura adjunta está representada la relación entre los costes totales que tendría una empresa y la cantidad producida por la misma. ¿A qué coste medio le sale cada unidad si la cantidad producida es 600? ¿Y cuándo es de 800? ¿Cuál es el coste medio de producir cada una de las 200 unidades adicionales si está produciendo en la actualidad 600 unidades, y decide ampliar la producción a 800?

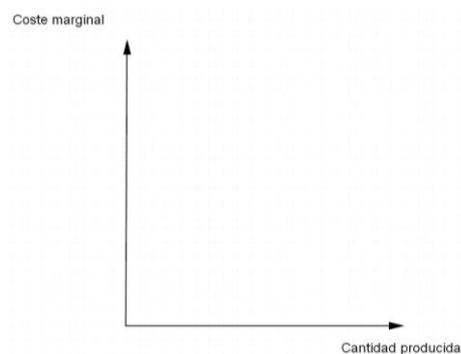
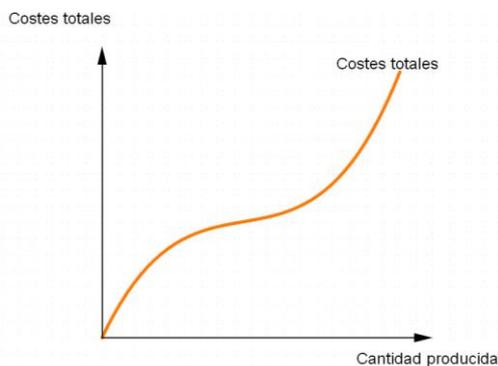


9. Suponga que x representa la cantidad total de un bien producido por una empresa y que la función $C(x)$ representa el coste total de producir dicha cantidad.

a) ¿Qué interpretación le daría al cociente $\frac{C(400)-C(300)}{100}$?

b) Suponga ahora que para una producción $x = 100$ el valor de la derivada en dicho punto es de cinco ($C'(100) = 5$), ¿cómo interpreta este valor?

10. En la figura de la izquierda aparece representada la función que relaciona los costes totales que tendría una empresa en función de su volumen de producción. A partir de dicha función se define la función de coste marginal como su derivada. Sabiendo esto, represente en la figura de la derecha la forma que tendría la función de coste marginal.



La tabla 5 recoge la relación entre las preguntas, los indicadores y las representaciones que se plantean en el cuestionario.

Tabla 5. Relación entre las preguntas, los indicadores y las representaciones que se evalúan a lo largo del cuestionario.

		Pregunta									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Indicador	Dominio de conceptos y procedimientos										
	I1	■			■	■	■				■
	I2	■					■	■			
	I3				■						■
	R1	■		■	■	■					
	R2				■	■					
	R3				■			■			
	R4			■				■			
	D1		■						■	■	
	D2								■	■	
	D3										■
	Capacidad de razonamiento										
	C1		■		■	■	■	■			
	C2		■						■	■	■
	C3						■	■			

		Pregunta									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Representaciones	Expresiones										
	V					■					
	G		■							■	■
	T	■			■						
	F			■		■					
	Traducción										
	V-T				■						
	V-G		■		■			■			
	V-F				■	■					
	T-F	■				■					
	G-T					■					
	G-F								■		■

En apartado 2 se destacaba la dificultad que presenta la traducción de tabla a expresión algebraica, así como la marcada ausencia en los libros de texto de actividades que promuevan esta conversión; por ello no se han introducido ejercicios en el cuestionario referidos a estas tareas.

Por cuestiones de tiempo, no ha sido posible realizar el cuestionario en el centro.

5. Propuesta didáctica: los conceptos de función y derivada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los costes y beneficios

Tomando como referencia los indicadores señalados en el proceso de diseño del cuestionario, así como en las dificultades y obstáculos que surgen en el proceso de aprendizaje de los conceptos de derivada y de función señalados, se ha elaborado una propuesta didáctica en torno a éstos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los costes y beneficios. Estas sesiones buscan introducir y comprender los citados elementos matemáticos en situaciones cotidianas.

Desde una perspectiva económica, es necesario que los estudiantes comprendan como varían las magnitudes y cuál es la influencia que tienen sobre cada una las variaciones de otras. Así, por ejemplo, un empresario puede estar interesado en estimar la variación de sus beneficios que ocasionaría un incremento en la producción, o un incremento en el gasto publicitario, etc. De esta manera, se plantean cuatro etapas para la impartición del apartado: “**6. Costes y beneficios**”, de la unidad didáctica: **2. La producción y la empresa**. Éstas son: (1) usar una representación, (2) usar varias representaciones en paralelo, (3) realizar nexos entre representaciones, y (4) integrar las representaciones y flexibilizar los cambios entre ellas (Dreyfus, 1991).

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Las sesiones que se proponen en este apartado están inspiradas en los objetivos didácticos que se definen para la *Unidad 2: La producción y la empresa*, así como para las necesidades formativas en relación a los conceptos de derivada y función que se han detectado tras la realización del cuestionario. Se han establecido los siguientes objetivos de aprendizajes:

1. El alumno comprende y utiliza diferentes tipos de costes, tanto fijos como variables, totales, medios y marginales, así como representa e interpreta gráficos de costes.
2. El alumno es capaz de comprender e interpretar las funciones asociadas a los conceptos de coste, ingreso, beneficio y umbral de rentabilidad.
3. El alumno entiende la información que reporta la derivada.

4. El alumno analiza e interpreta los beneficios de una empresa a partir de supuestos de ingresos y costes de un periodo.
5. El alumno representa e interpreta gráficos de producción total, media y marginal a partir de supuestos dados.

CONTENIDOS DE LAS SESIONES

Los contenidos que configuran las sesiones que a continuación se diseñan son:

- Obtención y análisis de las funciones de costes y beneficios.
- Lectura e interpretación de datos y gráficos de contenido económico.

Ambas sesiones se plantean desde un proceso de enseñanza-aprendizaje eminentemente práctico, en donde el alumno debe comprender e interiorizar los conceptos de función y de derivada, así como su aplicación en Economía.

La tabla 6 desglosa la distribución temporal de las sesiones.

Tabla 6: Distribución temporal de las sesiones:

Sesión 1		Sesión 2	
¿Qué se va a tratar?	Tiempos	¿Qué se va a tratar?	Tiempos
Diferencia entre coste y pago	5'	Ingreso	1'
		Beneficios	4'
Coste de producción	2'	Umbral de rentabilidad, Geogebra	10'
Costes fijos y variables	13'	Ejercicio. Geogebra	10'
Explicación Geogebra	20'	Ejercicio. Geogebra	5'
Coste marginal	10'	Ejercicio. Geogebra	20'

Con la intención de favorecer la consolidación de los conceptos matemáticos de función y de derivada, se recurre al programa informático Geogebra. Este

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

software de matemáticas dinámicas ha sido especialmente diseñado para todos los niveles educativos. Ofrece la posibilidad tanto a alumnos como profesores de trabajar con distintas perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas. Esta herramienta libre y gratuita forma parte del hilo conductor de las sesiones, así como el medio sobre el que se tratan los términos económicos a estudiar.

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE A DESARROLLAR

Las tablas 7 y 8 detallan las actividades de enseñanza aprendizaje a realizar.

Tabla 7: Actividades de enseñanza aprendizaje a desarrollar en la sesión 1

Sesión 1	
¿Qué se va a tratar?	¿Cómo se va a trabajar?
Diferencia entre coste y pago	Preguntas de diagnóstico. Conjuntamente se trata de elaborar las definiciones adecuadas.
Coste de producción	Explicación del concepto. Se pregunta a los alumnos ejemplos de costes de producción.
Costes fijos y variables	Partiendo de los ejemplos que han puesto los alumnos en el concepto anterior, se les explica los conceptos, y se les pide que los clasifiquen según fijos y variables.
Explicación Geogebra	Se representan las funciones de coste variable, coste fijo y coste total, para que los alumnos comprenderán su relación, y su fluctuación al modificar alguno.
Coste marginal	<ul style="list-style-type: none"> • La derivada y el costo marginal (KhanAcademyEspañol, 2016) • Costo marginal, costo total promedio (Economía y Desarrollo, Youtube: Costo marginal, costo total promedio Cap. 16 - Microeconomía, 2016)

Tabla 8 Actividades de enseñanza aprendizaje a desarrollar en la sesión 2

Sesión 2	
¿Qué se va a tratar?	¿Cómo se va a trabajar?
Ingreso	Pregunta de diagnóstico, qué es un ingreso.
Beneficios	Pregunta de diagnóstico, qué son los beneficios y cómo se calculan. De las respuestas obtenidas, se les indica las fórmulas a considerar para su cálculo
Umbral de rentabilidad, Geogebra	Se incorpora a la función de costes totales, la función de ingresos. Se explica el concepto de umbral de rentabilidad, y su interpretación gráfica. Además, podrá recurrirse a la reproducción del vídeo: Función de producción, costos fijos y variables (Economía y Desarrollo, Youtube: Función de producción, costos fijos y variables Cap. 15 - Microeconomía, 2016)
Ejercicio. Geogebra	Se les indica que realicen en parejas un ejercicio, lo representen e interpreten a través de Geogebra.
Ejercicio. Geogebra	A cada pareja se les indica que modifiquen determinados datos, y rehagan el ejercicio.
Ejercicio. Geogebra	Cada pareja dispondrá de dos minutos para explicar el modo en que ha variado su caso.

PROPUESTA DIDÁCTICA A TRAVÉS DE GEOGEBRA

A través de Geogebra los alumnos comprenden, e interpretan los términos económicos de ingreso, costes, beneficio y umbral de rentabilidad, desde una perspectiva matemática en donde refuerzan los conceptos de función y de

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

derivada, así como las utilidades que ambos términos poseen. Para favorecer la consolidación de ambos se trabajan sobre un mismo ejercicio.

En la primera sesión, se entrega a los alumnos el siguiente enunciado. A partir de él, comenzarán a explicarse todos términos económicos aquí programados.

La empresa “Cartones Fabricol” produce cajas de cartón duro que son vendidas en paquetes de mil cajas. El mercado es altamente competitivo con paquetes que se venden a 100€. Los costes fijos ascienden a 180€, y los costes variables vienen definidos por la función $Cv(x) = x^3 - 8x^2 + 40x$.

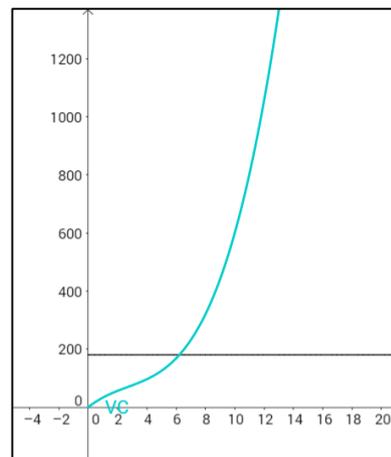
A continuación, se indica el proceso de explicación de los conceptos de costes, ingresos, beneficios y umbral de rentabilidad, a lo largo de ambas sesiones:

Etapa 1:

Se explica a los alumnos cómo introducir las funciones a través de Geogebra.

En paso, se dibujan las funciones de costes fijos y costes variables. Previamente, se pide a los alumnos que formulen la función de costes fijos.

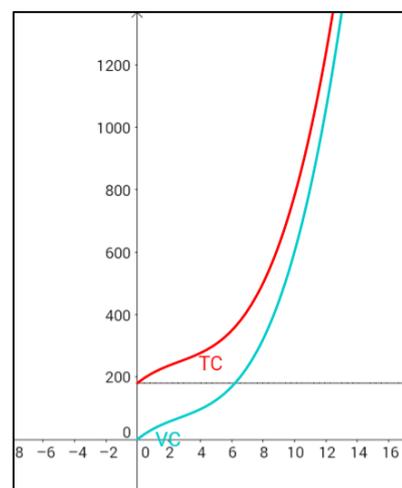
Se interpretan las gráficas obtenidas.



Etapa 2:

Se formula la función de costes totales a partir de los datos enunciados.

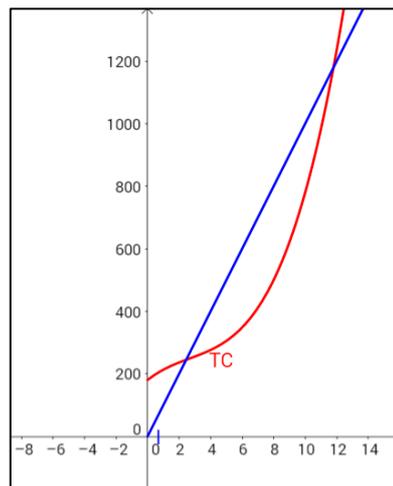
Se introduce la función en Geogebra, y se interpreta su significado. Se pregunta a los alumnos el porqué de la cierta similitud entre las funciones de costes variables y totales y cuál o cuáles de ellas debería emplearse para conocer el beneficio.



Etapas 3:

Se formula la función de ingresos y se introduce en Geogebra. Se pregunta qué función de las vistas el día anterior permite obtener el beneficio. Se interpreta y explica el gráfico, así como las intersecciones que se producen entre ambas funciones.

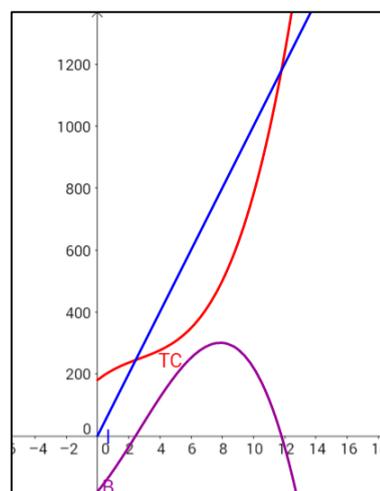
Se explica el umbral de rentabilidad, y se realiza una aproximación al concepto de punto muerto.

**Etapas 4:**

Se formula la función de beneficios.

Se les pide que calculen el beneficio máximo que pueden lograr en las condiciones dadas.

Se representa la función de beneficio en Geogebra, y se interpreta la gráfica resultante. Se hace especial hincapié en los conceptos de función, y derivada, así como de la información que reporta esta última.



Como muestran las etapas 1 y 2, correspondientes a la clase 1, se explica a partir del enunciado dado, el proceso en que se imparte a los alumnos los conceptos de coste fijo, coste variable y coste total, así como su interpretación gráfica. De la misma manera, se hace especial hincapié en que deben entender el concepto de función como un proceso.

Las etapas siguientes (etapas 3 y 4), referidas a los conceptos de ingreso, beneficio y umbral de rentabilidad, se parte de la sesión anterior, con la intención de dar continuidad a los conceptos impartidos, para su interpretación global.

Por ello, partiendo de las curvas de costes que resumen lo visto el día anterior, se incorpora la recta de ingresos. Llegado este punto, se pregunta a los alumnos qué curva o curvas de costes debe asociarse al cálculo del beneficio. A

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

continuación, se les explica el concepto de umbral de rentabilidad, tomando como punto de partida la representación gráfica.

Para contrastar la asimilación de los conceptos por parte de los alumnos, se varían los datos de costes de producción, unidades producidas y precio, con la intención de que los alumnos visualicen individualmente, el efecto que tienen las variaciones en cada uno de estos conceptos. A través de las gráficas, se les señala y explica el método de cálculo del beneficio máximo y la tasa media de variación.

Finalmente, con la intención de asentar las explicaciones, se les propone a los alumnos el siguiente ejercicio:

Una empresa ha estimado que las siguientes fórmulas de costes e ingresos anuales (en euros), siendo x las unidades de producto:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 500x$$

$$\text{Costes variables: } C_v(x) = x^3 - 8x^2 + 60x$$

$$\text{Costes fijos: } C_f(x) = 220$$

- a) Determina la función de beneficio de la empresa.
- b) ¿Qué número de unidades hay que vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende este beneficio máximo? ¿Cuál es la tasa media de variación de los beneficios si pasa de producir 10 a 20 unidades?
- c) Representa gráficamente las funciones de ingresos y gastos.
- d) ¿Cuál es el umbral de rentabilidad? Indícalo gráficamente.

Anteriormente se indicó que este ejercicio sufriría leves modificaciones en cada una de las parejas en las que se ha dividido la clase. Dichas variaciones se referirán a incrementos o decrementos en los ingresos, costes variables o fijos.

A continuación, cada una de las parejas deberá representar gráficamente y explicar el efecto que han tenido las modificaciones indicadas por el profesor.

Como se indicó anteriormente, cada pareja deberá explicar brevemente a sus compañeros de clase, el efecto que ha tenido la modificación que se les ha indicado al inicio de la tarea.

EVALUACIÓN DEL PROCESO DE APRENDIZAJE

Es necesario medir la comprensión de los conceptos trabajados a lo largo de ambas sesiones, así como su didáctica. Para ello, se propone a los alumnos actividades que permitan medir su capacidad a la hora de resolver las siguientes tareas:

- Calcular y manejar los costes y beneficios de las empresas, así como representar e interpretar gráficos relativos a dichos conceptos.
- Analizar, representar e interpretar la función de producción de una empresa a partir de un caso dado.
- Calcular e interpretar gráficamente la tasa de variación media de las funciones de costes y beneficios, así como calcular el beneficio máximo

Las conclusiones extraídas de sus respuestas permiten mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como la capacidad adaptar la necesidades actuales y futuras del alumno.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

6. Conclusiones y valoración personal

De acuerdo con el marco teórico, los estudiantes tienden a recordar el concepto imagen frente a la definición de cualquier concepto matemático. Por esta razón, es necesario plantearles las tareas matemáticas de forma que enriquezcan el propio concepto y les ayude a visualizarlos.

Por su parte, la LOMCE a través de sus estándares de aprendizaje muestra el compromiso por fomentar la adquisición de la competencia matemática por parte de los alumnos, así como favorecer la interconexión de los contenidos que se imparten a los alumnos a lo largo de las diversas asignaturas. En el caso concreto de este trabajo, a través de los conceptos de ingresos, beneficios, y costes, se busca la interiorización de los términos: función y derivada.

Por medio de este trabajo, se ha puesto de manifiesto la necesidad de combinar e interconectar las explicaciones teóricas, con las diversas representaciones matemáticas, y demás conocimientos que posean los alumnos como base. Todo ello, con la intención de consolidar sus conocimientos a través de la interiorización de todo aquello que se les ha enseñado a lo largo del tiempo.

Se debe concluir este trabajo haciendo especial hincapié en tres cuestiones asociadas al proceso de aprendizaje de los alumnos de los conceptos de índole matemática y económica:

1. Los libros de texto, las explicaciones de los profesores y los ejercicios que se les proponen en el aula, deben centrarse en el razonamiento, la interiorización, la asociación y la aplicación de los conceptos impartidos, así como ejemplificarse en situaciones propias de la vida diaria.
2. Los alumnos deben dotar de significado los conocimientos que se les enseñan. Además, deben ser capaces de trasladar situaciones cotidianas, a los conceptos matemáticos y económicos que se les inculcan.
3. Generalmente las situaciones que se plantean en el aula no representan con exactitud situaciones propias de la vida real.

Adicionalmente, sería de gran interés poder realizar el cuestionario propuesto en el apartado 4, con la intención de profundizar en el grado de comprensión de los conceptos de función y de derivada en los alumnos de 1º de Bachillerato.

Hay que tener en consideración, que las conclusiones extraídas a partir de las respuestas del cuestionario, además de suministrar información relativa al grado de interiorización de los conceptos matemáticos y económicos, permitiría: revisar, mejorar y adaptar las sesiones diseñadas en el apartado 6, de acuerdo con las necesidades de los estudiantes.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

7. Bibliografía

- Ariza, Á., & Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las ciencias*, 121-136.
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 241-286. Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douaby, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pág. 109). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of student's graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 399-431. Recogido en "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática" (Sánchez-Matamoros, García, & Linares, 2008).
- Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 301-317. Recogido en "La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática" (Sánchez-Matamoros, García, & Linares, 2008).
- Aula de Economía. (s.f.). Obtenido de www.auladeeconomia.com
- Azcárate. (1990). La velocidad introducción al concepto de derivada. *Tesis doctoral Universidad Autónoma de Barcelona*. Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)

- Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. *Tesis de doctorado no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona*. Recogido en “*La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*” (Sánchez-Matamoros, García, & Linares, 2008).
- Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 557-578.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 167-198. Obtenido de HAL. Recogido en “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*” (Cuesta, 2007)
- Cobb, P., Wood, T., Yacked, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem centered second grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Educations*, 3-29. Recogido en “*La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*” (Sánchez-Matamoros, García, & Linares, 2008).
- Cornu, B. (1991). Limits EnTall. *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166.
- Cuesta Borges, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41. Recogido en “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*” (Cuesta, 2007)
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33-48. Recogido en “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función*

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica” (Cuesta, 2007)

Economía y Desarrollo. (30 de 01 de 2016). *Youtube: Costo marginal, costo total promedio | Cap. 16 - Microeconomía*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=ivtS63OiCY0>

Economía y Desarrollo. (26 de 01 de 2016). *Youtube: Función de producción, costos fijos y variables | Cap. 15 - Microeconomía*. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=EKts4Hg7zqY>

Fabra , M., & Deulofeu , J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". *RELIME*, 207-230. Recogido en “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica” (Cuesta, 2007)*

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivatives and integrals. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, 31-45.

Foj Candel , F., Goñi Stroetgen, L., & Narváez Villena, M. (2015). *Economía*. Madrid: Bruño.

Font, V. (2000). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada. *Tesis de doctorado no publicada, Universitat de Barcelona*. .

Gavilán, J. M., García, M., & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 157-170. Recogido en “*La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática” (Sánchez-Matamoros, García, & Linares, 2008)*.

Goni, J. M. (2011). 6. Funciones. En *Matemáticas. Complementos de Formación Disciplinar* (pág. 170). GRAO.

González Garcia, C., Llorente Medrano, J., & Ruiz Jiménez, M. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, 1º Bachillerato*. Madrid: Editex.

- Guershon, H., & Trgalová, J. (1996). Higher mathematics Education. En *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 675-700). Netherlad: Khrwer Academic Publishers. *Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)*
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 57-72.
- Hercovics , N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the teaching and learning of algebra.
- Janvier, C. (1987). Representarions and understanding: The notion of function as an example. En *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (págs. 67-71).
- KhanAcademyEspañol. (13 de 02 de 2016). Obtenido de Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=u6IU4CChX3U>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, 1-64. *Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)*
- Mochón, F. (2002). *Economía*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Parella, J. F. (2008). *Apuntes de economía*. Bubok Publishing, S.L.
- Ruhana, E., & Bruekheimer, M. (1998). Univalente: A critical on non-critical characteristics of functions? *For the Learning in Mathematics*, 30-32.
- Ruiz, K., Córdoba, Y., & Rendón, C. (s.f.). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de geogebra como propuesta didáctica. *Congreso Internacional de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*.
- Sánchez-Matamoros, G. G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de la universidad sobre la noción matemática

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura de Economía a través de los conceptos matemáticos de *función y derivada*

de derivada (desarrollo del concepto). *Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Sevilla.*

Sánchez-Matamoros, G., Fernández , C., Llinares , S., & Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 501-509). Bilbao: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Linares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-296.

Steinbring, H. (1993). Problems in the development of mathematical knowledge in the classroom: the case of the calculus lesson. *For the Learning in Mathematics*, 37-50. *Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)*

Tall, D. (1989). Different Cognitive Obstacles in an technological Paradigm. *Research issues in the teaching on learning of algebra*, 87-92. *Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)*

Vall de Pérez, C., & Deulofeu , J. (2000). Las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables. *SUMA*, 73-81. *Recogido en "El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica" (Cuesta, 2007)*

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Recogido en “*El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*” (Cuesta, 2007)