



**Estabilidad Estructural de Elementos de Sección
Variable: Propuesta y Validación de un Método de Carga
Equivalente**

**Structural Stability of Tapered Members. Proposal and Validation of an
Equivalent Load Method**

TESIS DOCTORAL

Doctorando:

D. José Ramón Ibáñez del Río

Director:

Dr. D. Miguel Ángel Serna Oliveira

Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y
Puertos
Universidad de Cantabria

Santander, febrero de 2016

Estabilidad Estructural de Elementos de Sección Variable: Propuesta y Validación de un Método de Carga Equivalente

Structural Stability of Tapered Members. Proposal and Validation of an Equivalent Load Method

TESIS DOCTORAL
Santander, febrero de 2016

Autor: José Ramón Ibáñez del Río

Director: Miguel Ángel Serna Oliveira

Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Cantabria
Santander
España

2016

RESUMEN/ABSTRACT

RESUMEN

La determinación de las cargas críticas de pandeo elástico en elementos de sección variable sometidos a cargas también variables, o no se aborda en detalle o no está totalmente resuelto en las distintas norma de diseño actualmente vigentes. Partiendo de los resultados obtenidos tras el estudio numérico de un amplio conjunto de casos de pandeo de flexión y de pandeo lateral, el trabajo de investigación desarrollado en la tesis doctoral aborda la determinación de las cargas de pandeo mediante procedimientos sencillos y fórmulas de aplicación directa. El nuevo método propuesto, conceptualmente similar para el pandeo de flexión de elementos sometidos a compresión y para el pandeo lateral de vigas sometidas a momento flector, está basado en el cálculo de un esfuerzo equivalente asociado a una viga de igual longitud y de sección constante, cuya carga de pandeo coincide con la del elemento de sección variable. En último término, el nuevo método permite, a efectos de estabilidad, sustituir un elemento de sección variable y carga variable por otro de sección y esfuerzo uniformes. Finalmente, la tesis aborda la utilización de los nuevos procedimientos a la determinación de la resistencia de los elementos estructurales sometidos a flexo-compresión.

ABSTRACT

Present National Codes and Standards either do not deal with non-uniform members subject to variable loading or don not provide complete and appropriate formulation. Based on a number of flexural and lateral-torsional bluckling case results provided by numerical analysis, the doctoral research presents a new and simple procedure to determine buckling loads using closed-form expressions. The new method, which is similar for both flexural buckling of compression members and lateral-torsional buckling of beams, is based on the definition of an equivalent loading which applied to a uniform member provides the same buckling load of the original non-uniform member. As a result of the proposed new procedure, any non-uniform member subject to non-uniform loading may be replaced by a uniform member subject to uniform loading. Finally, the doctoral

research presents the application of the new concepts to structural members under combined flexural and compression loading in order to determine their buckling resistance.

AGRADECIMIENTOS

En este documento y en el trabajo de investigación realizado han colaborado otras personas que es de justicia mencionar pues sin su ayuda, seguramente no habría sido posible llevarlo a término.

En primer lugar, quiero mostrar mi agradecimiento a Miguel Ángel Serna, mi director de tesis, que ha sido al mismo tiempo maestro, tutor y amigo. Su trabajo y apoyo han hecho posible el que hoy yo esté optando al grado de doctor. Creo sinceramente que nunca seré capaz de pagarle la deuda contraída.

También doy las gracias al resto de compañeros de Departamento, tanto docentes como técnicos de laboratorio y PAS, que siempre me han alentado, sin olvidarme de los que ya nos dejaron –Alfredo, Luis, Germán- a quienes recuerdo con gran cariño.

A toda mi familia, principalmente a mi esposa, mis hijos y hermanas, que me han soportado en los momentos bajos, me han animado y apoyado durante todo el desarrollo del trabajo, y a quienes dedico el resultado de esta investigación.

Por último, quiero tener un recuerdo a la memoria de mis padres. A ellos les debo mucho de lo que ahora soy. Aunque ya no están entre nosotros, tengo la certeza de que desde el Cielo han sido testigos de mi esfuerzo y hoy, con el trabajo terminado, se alegran conmigo.

De corazón, a todos, muchas gracias.

Contenido

Resumen/Abstract	I
Resumen	I
Abstract.....	I
Agradecimientos.....	III
Contenido	V
Índice de figuras.....	IX
Índice de tablas.....	XVII
Notaciones	XXIII
Letras mayúsculas de alfabeto latino	XXIII
Letras minúsculas de alfabeto latino	XXV
Letras mayúsculas de alfabeto griego	XXVII
Letras minúsculas de alfabeto griego	XXVII
1 INTRODUCCIÓN	1
2 ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LOS ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE	3
2.1 INTRODUCCIÓN	3
2.2 ESTADO DEL ARTE	3
2.3 FILOSOFÍA DE DISEÑO DE LA NORMA AISC LRFD	10
2.3.1 Elementos sometidos a compresión.....	11
2.3.2 Elementos sometidos a flexión.....	14
2.3.3 Elementos sometidos a flexo-compresión	21
2.4 FILOSOFÍA DE DISEÑO DEL EUROCÓDIGO 3	26
2.4.1 Elementos sometidos a compresión.....	26
2.4.2 Elementos sometidos a flexión.....	30
2.4.3 Elementos sometidos a flexo-compresión	33

2.5	FILOSOFÍA DE DISEÑO DE LA NORMA BRITÁNICA.....	35
2.5.1	Elementos sometidos a compresión.....	35
2.5.2	Elementos sometidos a flexión.....	37
2.5.3	Elementos sometidos a flexo-compresión	40
3	PANDEO POR FLEXIÓN DE ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A AXILES NO UNIFORMES.....	43
3.1	INTRODUCCIÓN	43
3.2	COEFICIENTE DE CARGA UNIFORME EQUIVALENTE PARA ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE.....	45
3.3	MÉTODO DE LA CARGA EQUIVALENTE PARA ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE	52
3.3.1	Resultados para columnas con variación lineal de la altura del alma	56
3.3.2	Resultados para columnas con doble variación lineal de altura de alma.....	64
3.3.3	Resultados para columnas con variación lineal de alma y alas	71
3.4	MÉTODO COMBINADO DE COEFICIENTE Y CARGA EQUIVALENTES.....	78
3.5	EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO COMBINADO.....	98
3.6	APLICACIÓN A LA NORMA AMERICANA “AISC LRFD”	101
4	PANDEO DE ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A FLEXIÓN NO UNIFORME.....	105
4.1	INTRODUCCIÓN	105
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS	106
4.3	VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS GENERADOS EN ANSYS	107
4.4	ESTUDIO DE VIGAS DE CANTO VARIABLE SOMETIDAS A DIVERSOS ESTADOS DE FLEXIÓN	112
4.4.1	Resultados de la primera tanda. Ley de flectores lineal.....	117
4.4.2	Segunda tanda. Ley de flectores bilineal	120

4.4.3	Tercera tanda. Ley de flectores parabólica.....	123
4.4.4	Cuarta tanda. Ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz..	127
4.4.5	Quinta tanda. Ley de flectores lineal en viga con variación lineal de canto y ancho	130
4.4.6	Sexta tanda. Ley de flectores lineal en viga con variación lineal de canto y sección con sólo un eje de simetría.	133
4.5	MÉTODO DEL MOMENTO EQUIVALENTE (MME).....	136
4.5.1	Resultados numéricos de vigas de canto variable sometidas a diversos estados de flexión aplicando el Método del Momento Equivalente (MME).	139
5	PROCEDIMIENTO DE VERIFICACIÓN DE LA RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A FLEXO-COMPRESIÓN	157
5.1	INTRODUCCIÓN	157
5.2	RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A COMPRESIÓN	158
5.2.1	Aplicación a la norma americana.....	163
5.2.2	Aplicación a la norma europea	163
5.2.3	Aplicación a la norma británica	167
5.2.4	Ejemplos de aplicación	168
5.3	RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN.....	173
5.3.1	Aplicación a la norma americana.....	178
5.3.2	Aplicación a la norma europea	180
5.3.3	Aplicación a la norma británica	189
5.3.4	Ejemplos de aplicación	190
5.4	RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXO-COMPRESIÓN	194
5.4.1	Ejemplo de aplicación	200
6	APORTACIONES, CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	209
6.1	Aportaciones	209
6.2	Conclusiones.....	210

6.3 Futuras líneas de investigación	212
ANEJOS.....	215
Anejo A: Fórmula de Ayrton-Perry	215
Anejo B: Artículos publicados	221
Bibliografía.....	259

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Curva de pandeo para elementos sometidos a compresión AISC LRFD 2001.....	12
Figura 2-2 Esquema gráfico de la variación del momento nominal M_n en función de la longitud lateral no arriostrada L_b (AISC LRFD 2001)	17
Figura 2-3 Concepto de longitud equivalente	18
Figura 2-4 Viga de sección variable	20
Figura 2-5 Diagrama de interacción entre compresión y flexión (AISC LRFD, 2001).....	22
Figura 2-6 Efectos $P-\delta$ y $P-\Delta$ de segundo orden.....	23
Figura 2-7 Elemento biarticulado con imperfección inicial senoidal.....	26
Figura 2-8 Curvas de pandeo del Eurocódigo 3	29
Figura 3-1 Distribución de carga axial no uniforme.....	45
Figura 3-2 Casos de distribución no uniforme de carga	46
Figura 3-3 Variación de los valores de C para distribución lineal de esfuerzos.....	48
Figura 3-4 Variación de los valores de C para distribución bilineal de esfuerzos.....	49
Figura 3-5 Variación de los valores de C para distribución parabólica ME.....	50
Figura 3-6 Variación de los valores de C para distribución parabólica de MM	51
Figura 3-7 Variación de los valores de C para distribución parabólica MM	52
Figura 3-8 Elemento de sección variable y ley de esfuerzos no uniforme	53
Figura 3-9 Esquema del Método de la Carga Equivalente.....	55
Figura 3-10 Columnas con variación lineal de altura de alma (Caso A).....	57
Figura 3-11 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso A y $\alpha=0,80$	59
Figura 3-12 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso A y $\alpha=0,60$	60
Figura 3-13 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso A y $\alpha=0,40$	60
Figura 3-14 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,80$	63
Figura 3-15 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,60$	63
Figura 3-16 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,40$	64

Figura 3-17 Columnas con doble variación lineal de altura de alma (Caso B).....	65
Figura 3-18 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,80$	67
Figura 3-19 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,60$	67
Figura 3-20 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,40$	68
Figura 3-21 Método CE. Coeficiente C para sección 2 - caso B y $\alpha=0,80$	70
Figura 3-22 Método CE. Coeficiente C para sección 2 – caso B y $\alpha=0,60$	70
Figura 3-23 Método CE. Coeficiente C para sección 2 - caso B y $\alpha=0,40$	71
Figura 3-24 Columnas con variación lineal de altura de alma y alas (Caso C).....	72
Figura 3-25 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C y $\alpha=0,80$	74
Figura 3-26 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C y $\alpha=0,60$	74
Figura 3-27 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C y $\alpha=0,40$	75
Figura 3-28 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C y $\alpha=0,80$	77
Figura 3-29 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C y $\alpha=0,60$	77
Figura 3-30 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C y $\alpha=0,40$	78
Figura 3-31 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A y $\alpha=0,80$	81
Figura 3-32 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A y $\alpha=0,60$	82
Figura 3-33 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A y $\alpha=0,40$	82
Figura 3-34 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A y $\alpha=0,80$	84
Figura 3-35 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A y $\alpha=0,60$	85
Figura 3-36 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A y $\alpha=0,40$	85
Figura 3-37 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,80$	88
Figura 3-38 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,60$	88
Figura 3-39 Método MC. Coeficiente C para sección 1 – caso B y $\alpha=0,40$	89
Figura 3-40 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B y $\alpha=0,80$	91
Figura 3-41 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B y $\alpha=0,60$	91

Figura 3-42 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso B y $\alpha=0,40$	92
Figura 3-43 Método MC. Coeficiente C para sección 1–caso C y $\alpha=0,80$	94
Figura 3-44 Método MC. Coeficiente C para sección 1–caso C y $\alpha=0,60$	94
Figura 3-45 Método MC. Coeficiente C para sección 1–caso C y $\alpha=0,40$	95
Figura 3-46 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,80$	97
Figura 3-47 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,60$	97
Figura 3-48 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,40$	98
Figura 3-49 Estructura en Wuhan (China) con rigidez variable (Li, 2001)	99
Figura 3-50 Estructura original y estructura uniforme equivalente	100
Figura 4-1 Distribución de momentos para carga 0-1-0	108
Figura 4-2 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 1.....	109
Figura 4-3 Distribución de momentos para carga 1-1	111
Figura 4-4 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 2.....	112
Figura 4-5 Geometría de la sección	113
Figura 4-6 Geometría de la viga estudiada	113
Figura 4-7 Ley de flectores con variación lineal.....	114
Figura 4-8 Estado de carga con ley de flectores bilineal	115
Figura 4-9 Relación entre el parámetro λ y la ley de flectores en la viga con ley bilineal .	115
Figura 4-10 Distribución de momentos flectores en el caso de ley parabólica.....	116
Figura 4-11 Geometría y distribución de flectores en el caso de viga con canto máximo en centro de luz y ley de flectores bilineal.....	116
Figura 4-12 Geometría en vigas de ancho y canto variable.....	117
Figura 4-13 Definición de la carga para ley lineal de flectores	117
Figura 4-14 Variación de C_1 en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores lineal.....	118
Figura 4-15 Variación de C_1 en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores lineal.....	119
Figura 4-16 Variación de C_1 en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores lineal.....	119

Figura 4-17 Variación de C_1 en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores lineal.....	120
Figura 4-18 Cargas y leyes de flectores para el segundo caso de estudio.....	120
Figura 4-19 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores bilineal	121
Figura 4-20 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores bilineal	122
Figura 4-21 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores bilineal	123
Figura 4-22 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores bilineal	123
Figura 4-23 Cargas y ley de flectores para la tercera tanda de estudio	124
Figura 4-24 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores parabólica	125
Figura 4-25 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores parabólica	126
Figura 4-26 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores parabólica	126
Figura 4-27 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores parabólica	126
Figura 4-28 Geometría, cargas y ley de flectores estudiados en la cuarta tanda.....	127
Figura 4-29 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 1 y longitud de 10m	128
Figura 4-30 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 1 y longitud de 20m	129
Figura 4-31 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 2 con canto máximo en centro de luz, carga bilineal y longitud de 10m	129
Figura 4-32 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 2 con canto máximo en centro de luz, carga bilineal y longitud de 20m	130
Figura 4-33 Geometría de la sección transversal para canto y ancho variable.....	130
Figura 4-34 Valores de $C_1(\psi)$ para viga 1 de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal.....	131
Figura 4-35 Valores de $C_1(\psi)$ para viga 1, de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal.....	132
Figura 4-36 Valores de $C_1(\psi)$ para viga 2, de 10m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal.....	132
Figura 4-37 Valores de $C_1(\psi)$ para viga 2, de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal.....	133

Figura 4-38 Geometría de la sección con un solo eje de simetría	133
Figura 4-39 Valores de C_1 para viga 1, de 10m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal	134
Figura 4-40 Valores de C_1 para viga 1, de 20m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal	135
Figura 4-41 Valores de C_1 para viga 2, de 10m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal	136
Figura 4-42 Valores de C_1 para viga 2, de 20m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal	136
Figura 4-43 Esquema de transformación de la viga de sección variable a la equivalente de sección constante sometida al momento equivalente	137
Figura 4-44 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=10m y distribución lineal de momentos	141
Figura 4-45 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=20m y distribución lineal de momentos	141
Figura 4-46 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=10m y distribución lineal de momentos	142
Figura 4-47 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=20m y distribución lineal de momentos	142
Figura 4-48 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=10m y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos.....	144
Figura 4-49 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=20m y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos.....	144
Figura 4-50 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=10m y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos.....	145
Figura 4-51 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=20m y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos.....	145
Figura 4-52 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=10m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos	147

Figura 4-53 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=20m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos	147
Figura 4-54 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=10m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos	148
Figura 4-55 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, L=20m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos	148
Figura 4-56 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 1, L=10m y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos.....	150
Figura 4-57 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 1, L=10m y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos.....	150
Figura 4-58 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 2, L=10m y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos.....	151
Figura 4-59 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 2, L=20m y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos.....	151
Figura 4-60 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma y ala variable: Viga 1, L=10m y con una distribución lineal de flectores.....	153
Figura 4-61 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 1, L=20m y con una distribución lineal de flectores.....	153
Figura 4-62 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 2, L=10m y con una distribución lineal de flectores.....	154
Figura 4-63 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 2, L=20m y con una distribución lineal de flectores.....	154
Figura 5-1 Elemento de sección y esfuerzo axial variable	158
Figura 5-2 Elemento y esfuerzos originales y equivalentes	159
Figura 5-3 Comparación de los resultados en compresión uniforme	165
Figura 5-4 Curvas de pandeo en función de la esbeltez λ (Sección 100x10)	166
Figura 5-5 Curvas de pandeo en función de la esbeltez λ_0 (Sección 100x10)	167
Figura 5-6 Geometría de elemento y sección del ejemplo de Kaehler et al. (2011)	169

Figura 5-7 Viga de sección y diagrama de momentos variables	174
Figura 5-8 Viga y momento originales y equivalentes.....	175
Figura 5-9 Variación del momento nominal según la norma americana	179
Figura 5-10 Comparación de resultados en flexión uniforme (Sección 100x10).....	180
Figura 5-11 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (Sección 100x10 con momento uniforme).....	181
Figura 5-12 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento uniforme).....	182
Figura 5-13 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (IPE300 con momento proporcional al canto).....	183
Figura 5-14 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto).....	184
Figura 5-15 Factor de reducción modificado normalizado en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)	185
Figura 5-16 Variación de la resistencia relativa en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)	186
Figura 5-17 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (IPE300 con momento proporcional al módulo resistente)	187
Figura 5-18 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente).....	187
Figura 5-19 Factor de reducción modificado normalizado en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente).....	188
Figura 5-20 Variación de la resistencia relativa en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente).....	188
Figura 5-21 Ejemplo de Bradford (1988)	190
Figura 5-22 Ejemplo de Marques (2012)	192
Figura 5-23 Elemento de sección y diagramas de esfuerzos variables	194
Figura 5-24 Elemento y esfuerzos originales y equivalentes	198

Figura 5-25 Datos del ejemplo de aplicación de Kaehler et al. (2011) 201

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1 Error (%) de la AISC LRFD con respecto a Elementos Finitos	21
Tabla 2-2 Factores de imperfección para las curvas de pandeo en EC3	29
Tabla 2-3 Valores de k_c (EC3, 2005).....	33
Tabla 2-4 Constante de Robertson para las curvas de pandeo en BS 5950.....	36
Tabla 2-5 Error (%) de la BS 5950 con respecto a Elementos Finitos.....	40
Tabla 3-1 Valores de C para la distribución lineal de esfuerzos.....	48
Tabla 3-2 Valores de C para la distribución bilineal de esfuerzos.....	48
Tabla 3-3 Valores de C para distribución parabólica ME	49
Tabla 3-4 Valores de C para distribución parabólica MM	50
Tabla 3-5 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal ME	57
Tabla 3-6 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal MM.....	58
Tabla 3-7 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica ME	58
Tabla 3-8 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica MM....	59
Tabla 3-9 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal ME	61
Tabla 3-10 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal MM.....	61
Tabla 3-11 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica ME ...	61
Tabla 3-12 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica MM .	62
Tabla 3-13 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal ME	65
Tabla 3-14 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal MM.....	66
Tabla 3-15 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica ME ...	66
Tabla 3-16 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica MM..	66
Tabla 3-17 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal ME	68
Tabla 3-18 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal MM.....	69
Tabla 3-19 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica ME ...	69
Tabla 3-20 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica MM .	69

Tabla 3-21 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal ME	72
Tabla 3-22 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal MM.....	73
Tabla 3-23 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica ME...	73
Tabla 3-24 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica MM .	73
Tabla 3-25 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal ME	75
Tabla 3-26 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal MM.....	76
Tabla 3-27 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica ME...	76
Tabla 3-28 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica MM .	76
Tabla 3-29 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal ME	80
Tabla 3-30 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal MM	80
Tabla 3-31 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica ME .	80
Tabla 3-32 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica MM	81
Tabla 3-33 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal ME	83
Tabla 3-34 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal MM	83
Tabla 3-35 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica ME .	83
Tabla 3-36 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica MM	84
Tabla 3-37 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal ME.....	86
Tabla 3-38 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal MM	86
Tabla 3-39 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica ME .	87
Tabla 3-40 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica MM	87
Tabla 3-41 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal ME.....	89
Tabla 3-42 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal MM	90
Tabla 3-43 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica ME .	90
Tabla 3-44 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica MM	90
Tabla 3-45 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal ME.....	92
Tabla 3-46 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal MM	93

Tabla 3-47 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica ME .	93
Tabla 3-48 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica MM	93
Tabla 3-49 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal ME.....	95
Tabla 3-50 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal MM	96
Tabla 3-51 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica ME .	96
Tabla 3-52 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica MM	96
Tabla 4-1 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 1	109
Tabla 4-2 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 2	111
Tabla 4-3 Valores geométricos de las vigas estudiadas	112
Tabla 4-4 Valores de α estudiados.....	113
Tabla 4-5 Valores de C_1 para viga 1 con longitudes de 10m y 20m	118
Tabla 4-6 Valores de C_1 para viga 2 con longitudes de 10m y 20m	119
Tabla 4-7 Valores de C_1 para viga 1 y longitudes de 10m y 20m	121
Tabla 4-8 Valores de C_1 para viga 2 y longitudes de 10m y 20m	122
Tabla 4-9 Valores de C_1 para la viga 1 y longitudes de 10m y 20m, carga repartida y dos momentos	124
Tabla 4-10 Valores de C_1 para la viga 2 y longitudes de 10m y 20m, carga repartida y dos momentos	125
Tabla 4-11 Valores de C_1 para viga 1 con ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz	127
Tabla 4-12 Valores de C_1 para viga 2 con ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz	128
Tabla 4-13 Valores de C_1 para viga1 con variación de ancho y canto y ley de flectores lineal.	131
Tabla 4-14 Valores de C_1 para viga 2 con variación de ancho y canto y ley de flectores lineal	132
Tabla 4-15 Dimensiones de la sección	133
Tabla 4-16 Valores de C_1 para viga 1 sin simetría horizontal con variación canto y ley de flectores lineal	134

Tabla 4-17 Valores de C_1 para viga 2 sin simetría horizontal con variación canto y ley de flectores lineal	135
Tabla 4-18 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución lineal de momentos	140
Tabla 4-19 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución lineal de momentos	140
Tabla 4-20 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución bilineal de momentos	143
Tabla 4-21 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución bilineal de momentos	143
Tabla 4-22 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución parabólica de momentos	146
Tabla 4-23 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución parabólica de momentos.....	146
Tabla 4-24 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable con canto máximo en centro de luz y distribución bilineal de momentos.....	149
Tabla 4-25 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable (máximo en centro de luz) y distribución bilineal de momentos.....	149
Tabla 4-26 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto y ancho variable y distribución lineal de momentos.....	152
Tabla 4-27 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto y ancho variable y distribución lineal de momentos	152
Tabla 5-1 Valor de la esbeltez λ en función de L y α (Sección 100x10).....	166
Tabla 5-2 Valor del factor χ^* en función de L y α (Sección 100x10)	166
Tabla 5-3 Valor de la esbeltez λ_{LT} en función de L y α (momento uniforme).....	181
Tabla 5-4 Valor del factor χ_{LT}^* en función de L y α (momento uniforme)	181
Tabla 5-5 Valor de la esbeltez λ_{LT} en función de L y α (Sección 100x10 con momento proporcional al canto).....	183

Tabla 5-6 Valor del factor χ_{LT}^* en función de L y α (Sección 100x10 con momento proporcional al canto).....	183
---	-----

NOTACIONES

En esta tesis se han utilizado las siguientes notaciones:

LETRAS MAYÚSCULAS DE ALFABETO LATINO

A	Área de la sección transversal recta
A_f	Área del ala comprimida
A_g	Área de la sección recta en BS
B	Coefficiente que multiplica a la tensión crítica de pandeo lateral en la norma americana
B_1, B_2	Factores de amplificación
C	Coefficiente de carga uniforme equivalente
C_b	Factor de momento uniforme equivalente
C_m	Factor de momento uniforme equivalente asumiendo pórtico intraslacional
E	Módulo de elasticidad del material
F_{cr}	Tensión crítica
F_{sy}	Tensión de Saint-Venant
F_{wy}	Tensión de alabeo
G	Módulo de elasticidad transversal
I	Inercia de la sección para el caso de sección constante
I'	Inercia a una distancia determinada
I_1	Inercia correspondiente a la sección situada en $x=0$
I_2	Inercia correspondiente a la sección situada en $x=L/2$
I_3	Inercia correspondiente a la sección situada en $x=L$
I_m	Inercia de la sección menor
I_M	Inercia de la sección mayor
I_t	Inercia torsional de la sección
I_w	Constante de alabeo

$I(x)$	Ley que define la inercia a lo largo de la pieza para el caso de sección variable
J	Inercia torsional de la sección
K	Factor de longitud efectiva
K_y	Factor de longitud efectiva para el miembro de sección variable
L	Longitud
L_b	Distancia entre puntos arriostrados
L_p	Máxima longitud lateral no arriostrada para pandeo plástico
L_r	Máxima longitud lateral no arriostrada para pandeo inelástico
M	Momento en el extremo de la viga
M''	Momento de segundo orden
M_A	Momento flector a un cuarto de la longitud de la viga
M_B	Momento flector a mitad de la longitud de la viga
M_C	Momento flector a tres cuartos de la longitud de la viga
M_{CL}	Momento en centro de luz
M_{CR}	Momento crítico
ME	Refiere a la ley con valor máximo en el extremo de la pieza
MM	Refiere a la ley con valor máximo en el centro de la pieza
M_{nt}	Momento calculado en análisis elástico de primer orden para pórtico traslacional
M_{max}	Momento flector máximo
M_n	Momento nominal
M_{nt}	Momento calculado en análisis elástico de primer orden para pórtico intraslacional
M_o	Diferencia entre el momento en centro de luz M_{CL} y el momento en el extremo de la viga M
M_p	Momento plástico
M_r	Momento crítico para el caso de que la longitud lateral entre puntos arriostrados sea la máxima para pandeo inelástico ($L_b=L_r$)

$N(x)$	Ley de axiles de la pieza
$\hat{N}(x)$	Ley de axiles equivalente en viga de sección constante
N_{cr}	Carga crítica de Euler
N_{crm}	Axil crítico del elemento de sección constante igual a la menor sección del elemento de sección variable
N_{ed}	Axil sobre la pieza según EC3
N_i	Axil correspondiente a una sección i (1 para un cuarto de L , 2 para un medio de L y 3 para tres cuartos de L)
N_M	Axil máximo que actúa en el elemento
N_0	Axil en la sección cero
P_c	Esfuerzo resistente a compresión en BS
P_{cr}	Carga de pandeo elástico
P_E	Carga crítica de Euler
P_{e1}	Carga crítica de Euler correspondiente al plano de flexión asumiendo pórtico intraslacional
P_{e2}	Carga crítica de Euler correspondiente al plano de flexión asumiendo pórtico traslacional
P_n	Resistencia nominal a compresión
Q	Factor de reducción
R_f	Ratio del área de las alas en la sección de menor momento respecto de la sección de mayor momento en BS
R_H	Reacción horizontal en el apoyo de la columna en teoría de segundo orden.
S_z	Módulo resistente de la sección en BS
$W_{el,y}$	Módulo resistente respecto del eje mayor
X_1	Resultado de la expresión $\pi(\sqrt{EG I_t A/2})/W_{el,y}$
X_2	Resultado de la expresión $4I_w(W_{el,y}/GI_t)^2/I_z$
LETRAS MINÚSCULAS DE ALFABETO LATINO	
b	Ancho del ala de la sección

c_i	Coeficiente de ponderación
$c(x)$	Coeficiente que transforma la ley de axiles de la pieza en la equivalente para sección constante
d	Canto de la sección
d_0	Canto menor en vigas de sección variable
d_L	Canto mayor en vigas de sección variable
$e_{0,d}$	Amplitud máxima de la imperfección
f_L	el menor de los valores entre $f_{yf}-f_r$ y f_{yw}
f_r	Tensión residual de compresión en el ala
f_y	Tensión de fluencia del material
f_{yf}	Tensión de fluencia en el ala
f_{yw}	Tensión de fluencia en el alma
h	Distancia entre los centroides de las alas del perfil I en EC3
h_s, h_w	Factores de longitud equivalente
k_c	Factor de corrección para el EC3 que depende de la forma de la ley de flectores.
k_{yy}, k_{zz}	Factores de interacción en EC3
k_{yz}, k_{zy}	Factores de interacción en EC3
m_{LT}	Factor de momento uniforme equivalente en BS
p_b	Tensión resistente a pandeo lateral en BS
p_c	Tensión resistente a compresión en BS
r	Radio de giro
r_{0y}	Radio de giro de la sección de menor altura respecto del eje y (eje débil)
r_{0z}	Radio de giro de la sección de menor altura respecto del eje z (eje fuerte)
r_{T0}	Radio de giro de la sección menor considerando sólo el ala comprimida más un tercio del área comprimida del alma respecto de un eje en el plano del alma
t_f	Espesor de las alas

t_w	Espesor del alma
u	parámetro de pandeo en BS
v	Factor de esbeltez en BS
v_{max}	Flecha máxima
$v_0(x)$	Deformada inicial por imperfección
$v(x)$	Ley de flechas (deformada)
$v''(x)$	Ley de curvaturas
x	Variable en la dirección del eje de la pieza

LETRAS MAYÚSCULAS DE ALFABETO GRIEGO

Δ_{0H}	Desplazamiento lateral relativo entre el nivel superior e inferior
ΣP	Suma de axiles de todas las columnas de una planta
ΣH	Suma de todas las fuerzas horizontales que producen desplazamiento en Δ_{0H}

LETRAS MINÚSCULAS DE ALFABETO GRIEGO

α	Cociente entre el canto de la sección menor y el de la sección mayor, mide el peralte de la viga ($\alpha=1$ para sección constante). También factor de imperfección o constante de Robertson
β	Exponente que pondera las inercias de la secciones situadas en $x=0$ $x=L$. También, en vigas sometidas a flectores parabólicos, cociente entre el momento en el extremo y el valor de $qL^2/12$
β_w	En la BS inverso del factor de forma en secciones semi-compactas y 1 para compactas
χ	Exponente que pondera la inercia menor. También factor de reducción por pandeo de flexión en EC3
χ_{LT}	Factor de reducción por pandeo lateral en EC3
$\chi_{LT,mod}$	Factor de reducción modificado para pandeo lateral según el comité Técnico 8 de la ECCS
ϕ_b	Factor de resistencia a la flexión

ϕ_c	Factor de resistencia a compresión
γ	Gradiente de variación del canto en vigas de sección variable en AISC LRFD. También exponente que pondera la inercia en la sección situada en $x=L/2$
η	Factor de Perry
λ	En una viga con ley bilineal de flectores, cociente entre el momento en el extremo y la diferencia entre el momento en centro de luz y el momento en el extremo
$\bar{\lambda}$	Esbeltez adimensional $\sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}}$
$\bar{\lambda}_{LT}$	Esbeltez adimensional a pandeo lateral en el EC3 definida como $\sqrt{\frac{W_{el,y}f_y}{M_{cr}}}$ y en BS como $uv\lambda\sqrt{\beta_w}$
λ_c	Esbeltez de la columna
λ_{eff}	Esbeltez efectiva
ν	Coefficiente de Poisson
ψ	Relación entre el axil mínimo y el máximo ($N_m = \psi N_M$). También relación entre el momento mínimo y el máximo en leyes de flectores con variación lineal

1 INTRODUCCIÓN

Dentro del campo del diseño estructural, cuando se busca una solución más económica, adecuada a los esfuerzos a los que va a estar sometida la estructura, o bien por motivos puramente estéticos, es frecuente encontrarnos con elementos de sección variable cuyo análisis tenemos que abordar. Estos elementos, en ocasiones sometidos a esfuerzos axiales importantes (caso de soportes) o a flectores (caso de vigas) o a la combinación de ambos efectos de flexo-compresión (viga-columna), necesitan estudiarse teniendo en cuenta los efectos del pandeo de flexión o del pandeo lateral. El cálculo está suficientemente estudiado cuando los elementos son de sección constante y ante determinadas leyes de esfuerzos, pero ante geometrías más complejas y variaciones en las leyes de esfuerzos, las distintas normativas presentan métodos no concluyentes. Esto nos obliga a buscar formas de análisis adecuadas que tengan en cuenta las condiciones de inestabilidad de una forma sencilla.

Los métodos basados en elementos finitos solucionan el problema; sin embargo, cuando se trata de analizar piezas concretas dentro del conjunto de una estructura, su utilización puede ser poco práctica por el esfuerzo que ello representa.

Para dar una solución a este problema, las distintas normativas han propuesto alternativas aplicables a algunas de las situaciones más frecuentes, pero que no se pueden utilizar de forma generalizada sin cuestionarse la validez.

El presente estudio intenta buscar un método basado en sustituir, a efectos de cálculo, la pieza de sección variable sometida a un determinado estado de cargas por otra pieza equivalente, de la misma longitud y de sección constante sometida a una carga tal que plantee la misma solución del problema de inestabilidad.

Para ello, se ha estructurado el trabajo en seis capítulos, en el primero se realiza una introducción dónde se justifica la necesidad de dicho estudio y se sintetiza la estructura del mismo.

En el segundo capítulo se estudia la estabilidad estructural de los elementos de sección variable, y se recoge el estado del arte con los estudios previos publicados que se han considerado tanto en este estudio como en la elaboración de las distintas normativas analizadas, en compresión, flexión o flexo-compresión. Por último se exponen los distintos planteamientos que realizan las normas americana, eurocódigo y británica sobre el tema.

En el capítulo 3 se plantean las aportaciones de la tesis al estudio del pandeo por flexión de elementos de sección no uniforme sometidos a distribuciones no uniformes de axiles. Se detalla en primer lugar el método de carga uniforme equivalente para piezas de sección constante sometidas a leyes de axiles variables y el de carga equivalente para transformar piezas de sección variable sometidas a axiles constantes a elementos de sección constante. Finalmente se propone un método combinado aplicable a elementos de sección variable sometidos a leyes de axiles también variables.

En el capítulo 4 se repite el estudio del capítulo anterior pero en este caso para elementos sometidos a leyes de flectores. En el capítulo 5 se plantea la utilización conjunta de los procedimientos estudiados en los dos capítulos anteriores para el caso del cálculo de la inestabilidad en elementos sometidos a flexo-compresión donde intervienen conjuntamente los esfuerzos axil y flector, planteando la interacción de ambos. En este capítulo también se compara la utilización del método propuesto con soluciones encontradas en diversas publicaciones con el fin de comprobar que la solución recomendada da valores fiables con bajos porcentajes de error.

Por último el capítulo 6 recoge las conclusiones y plantea las posibles futuras líneas de investigación que podrían complementar al trabajo desarrollado en esta tesis.

En la parte de apéndices, se recoge por una parte el planteamiento teórico de la formulación de Ayrton-Perry y por otra los dos artículos publicados hasta este momento en las revistas *International Journal of Structural Stability and Dynamics* y *Journal of Constructional Steel Research*, así como la comunicación al congreso de Eurosteel, todo ello fruto del trabajo realizado durante la investigación de esta tesis.

2 ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE LOS ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE

2.1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento estructural de los elementos de sección variable no difiere significativamente del comportamiento de los miembros prismáticos, debiendo el análisis estructural correspondiente tener en cuenta los mismos estados límite, tanto a nivel de sección como de elemento. Por lo que hace referencia a la estabilidad estructural, el análisis deberá contemplar el pandeo de flexión, el pandeo lateral y el pandeo de flexo-compresión entre otros, teniendo en cuenta en todos los casos las condiciones de arriostramiento de los elementos.

En el presente capítulo, presentaremos en primer lugar una revisión bibliográfica relativa a la estabilidad estructural de los elementos de sección variable sometidos a compresión, flexión y flexo-compresión, con especial énfasis en los trabajos que de algún modo han influido y siguen haciéndolo en el desarrollo de las normas de diseño actualmente vigentes.

A continuación se presentan las formulaciones propuestas por las normas americana, europea y británica, para la determinación de la resistencia a pandeo.

2.2 ESTADO DEL ARTE

Si aceptamos la afirmación de Ostwald (1910), recogida por distintos autores, los primeros estudios sobre la estabilidad estructural de los elementos de sección variable se remontan a Euler, que no sólo obtuvo la ecuación diferencial de la curva elástica, y con ello el valor de la carga crítica que hoy lleva su nombre, sino que también analizó el comportamiento para el caso de una variación lineal de sección. En tiempos más recientes, pero previos a la era computacional, Timoshenko (1936) presentó una compilación de métodos, analíticos y energéticos, disponibles para obtener la carga de pandeo elástico para elementos no prismáticos. Posteriormente, con apoyo en los trabajos de Newmark (1943) y Salvadori (1951), Bleich (1952) propuso soluciones analíticas para el pandeo elástico de columnas biarticuladas con variación lineal y

parabólica del canto de la sección, y analizó distintos métodos basados en técnicas de aproximaciones sucesivas. Las primeras soluciones numéricas presentadas en la literatura son debidas a Timoshenko y Gere (1961); en ellas utilizan también las técnicas de aproximaciones sucesivas de Newmark (1943). Siguiendo el camino abierto por estos autores, Chen y Lui (1987) y Bazanta y Cedolin (1991) han presentado nuevos trabajos basados en aproximaciones sucesivas.

Gran parte del trabajo de investigación desarrollado en este campo en la segunda mitad del siglo XX se debe a la iniciativa del Structural Stability Research Council de Estados Unidos, que en 1966 promovió un trabajo exhaustivo para analizar la estabilidad estructural de pórticos de acero con elementos de sección variable, con énfasis en trabajos experimentales. Prawel et al. (1974) documentaron los ensayos experimentales relativos a elementos con sección en doble T sometidos a flexo compresión. Con estos primeros ensayos, Lee et al. (1972) presentaron un primer método basado en la modificación de la longitud de pandeo del elemento mediante un factor que tenga en cuenta la variación de sección. El factor de modificación de longitud es tal que la resistencia a pandeo de un elemento prismático con la sección más pequeña y la nueva longitud, sea la misma que la del elemento original de sección variable. Estos trabajos concluyeron con la redacción de las primeras recomendaciones de diseño, publicadas por el American Institute of Steel Construction (AISC, 1978). Una magnífica recopilación de estas y otras propuestas de diseño fue presentada por Lee et al. (1981).

Con posterioridad a los trabajos que llevaron al desarrollo del concepto de “Factor de Modificación de Longitud” utilizado desde entonces en la normativa americana, y que más adelante detallaremos, el trabajo de investigación ha continuado de forma intensiva hasta nuestros días. Salter et al. (1980), Shiomi et al. (1983) y Shiomi y Kurata (1983) han presentado resultados experimentales con elemento de sección compacta en doble T con variación lineal de altura. Por su parte, Forest y Murray (1982) llevaron a cabo un conjunto de experimentos con pórticos completos y secciones no compactas, comparando sus resultados con los procedimientos recomendados por Lee et al. (1981); su conclusión fue

que “ningún conjunto de reglas de diseño predice la resistencia real de los pórticos”.

La longitud efectiva en dinteles de pórticos, teniendo en cuenta el esfuerzo axial presente en el elemento y su efecto en la estabilidad global del pórtico, ha sido analizada por Watwood (1985), Davies (1990); Silvestre y Camotin (2002); y White y Kim (2006). Para estructuras traslacionales, Cary y Murray (1997) han propuesto una mejora sustancial de los gráficos habitualmente utilizados para definir la longitud efectiva teniendo en cuenta las rigideces de los elementos anejos.

Considerando que los elementos estructurales de acero pueden alcanzar la fluencia en algún punto antes de llegar al límite de su resistencia, Jimenez (1998, 2005, 2006) y Jimenez y Galambos (2001) han llevado a cabo un conjunto de trabajos dirigidos al estudio de estabilidad inelástica teniendo en cuenta las deformaciones iniciales nominales y las tensiones residuales. Sus resultados confirman que los valores proporcionados por la norma americana son en general conservadores para el pandeo de flexión. Por lo que se refiere al pandeo lateral, sus resultados indican que la línea de transición correspondiente al pandeo inelástico sigue un modelo de curva cóncava en lugar de la línea recta adoptada por la AISC LRFD (2001). Por el contrario, los resultados experimentales obtenidos por White y Jung (2008) y White y Kim (2008) indican que la línea recta proporciona una suficiente aproximación.

En relación con el coeficiente C_b , utilizado por la norma americana para tener en cuenta la variación de esfuerzos a lo largo del elemento estructural en la determinación de la resistencia a pandeo lateral, Yura y Helwig (1996) han propuesto una nueva fórmula basada en los esfuerzos axiales en el ala comprimida, tomando como referencia la sección en el centro de la luz para los elementos de sección variable. Esta formulación ha sido validada y extendida a otros supuestos por Kim y White (2007a).

Utilizando técnicas computacionales, Andrade et al. (2005) y Boissonnade y Maquoi (2005) han mostrado que la sustitución de elementos de sección variable por barras prismáticas para el cálculo de la resistencia al pandeo lateral

puede conducir a errores significativos. Posteriormente Andrade et al. (2007) han presentado nuevos desarrollos a su modelo de elemento finito para el estudio del pandeo elástico de miembros de sección variable.

La estabilidad de columnas con variación discreta de sección sometidas a fuerzas concentradas y distribuidas seguidoras, es decir, no conservadoras, ha sido analizada por Li (2002). Partiendo del caso simple de elementos con un solo cambio de sección, el autor hace una aplicación para el caso general “multi-step”, con buenos resultados al ser comparados con los obtenidos mediante elementos finitos.

La estabilidad elástica de columnas de acero, de sección variable de forma continua o discreta, cargadas excéntricamente y con imperfecciones iniciales, ha sido abordada por Raftoyiannis y Ermopoulos (2005).

El estudio de la estabilidad de elementos de sección compuesta y variable, sometidos a compresión, ha sido estudiada por Guo et al. (2014), quienes proponen una fórmula para obtener las cargas de pandeo elástico, teniendo en cuenta la deformación de cortante de la sección compuesta.

Marques et al. (2012), tras poner de manifiesto la falta de métodos que permitan extender los beneficios de la formulación presentada por EC3 para la determinación de la resistencia de los elementos sometidos a compresión, presentan una formulación “Ayrton-Perry” aplicable a los elementos de sección variable y proponen una metodología específica para determinar la resistencia de columnas con alma linealmente variable sometidas a esfuerzo axial constante.

Riahi et al. (2012) han presentado un estudio relativo a la estabilidad de pórticos con elementos de sección variable; tras analizar la longitud efectiva de sus columnas, los autores presentan un nuevo método analítico supuestamente válido para determinar con mayor exactitud la carga de pandeo de este tipo de elementos.

Zhang et al. (2013), utilizando funciones de Bessel y técnicas de ajuste, proporcionan una formulación explícita para determinar, con un error inferior al

10%, el pandeo elástico de columnas de sección tubular axisimétricas con doble variación lineal de sección.

El pandeo lateral de elementos no uniformes en inercia de la sección y en módulo de elasticidad del material ha sido analizado por Totry et al. (2007) utilizando técnicas basadas en perturbación funcional. Su formulación, fundamentalmente matemática, es utilizada en su trabajo para optimizar las propiedades geométricas y materiales del elemento.

La determinación del factor de momento uniforme equivalente para la determinación del momento crítico de pandeo lateral de vigas de alma calada, es decir, con huecos en el alma, ha sido estudiada por Mohebkah (2004).

Con la intención de ser usada en combinación con la norma americana, Li (2007) ha propuesto una nueva formulación general del pandeo lateral, aplicable tanto a barras prismáticas como a elementos de sección variable, con doble o simple simetría de sección, incluyendo el coeficiente de momento equivalente.

Utilizando desarrollos propios de la flexión y torsión de vigas de pared delgada, Lei y Shu (2008) han propuesto una nueva teoría para el análisis mediante elementos finitos del pandeo lateral de vigas en I con alma de canto variable.

El caso de vigas continuas con cambios discretos de sección en los apoyos intermedios ha sido analizado por Park y Stalling (2003). En su trabajo, basado en un conjunto de casos estudiados mediante elementos finitos, extienden la formulación de la norma americana válida para piezas prismáticas. Complementariamente, el trabajo demuestra que los coeficientes de momento uniforme equivalente pueden ser aplicables a este caso con suficiente aproximación.

Andrade et al. (2010) han investigado el pandeo lateral de vigas de sección en I, doblemente simétricas y de canto variable, en voladizo, con restricciones elásticas y rígidas al pandeo.

Utilizando técnicas de series de potencia para resolver las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno, Asgarian et al. (2013) han presentado un método teórico y numérico para el estudio del pandeo lateral de vigas de sección variable con diversas condiciones de contorno.

Usando el programa ANSYS, Bhurke y Alandkar (2013) han comparado la resistencia estática y a pandeo lateral de vigas uniformes y de vigas con canto variable, demostrando que la disminución del canto en los extremos, con el ahorro consiguiente, no perjudica la resistencia a pandeo.

Benyamina et al. (2013) han propuesto una fórmula analítica para la determinación de la resistencia a pandeo lateral de vigas doblemente simétricas de canto variable en función de las propiedades de la sección, de la altura de la carga y de la variación de la altura. En su trabajo comparan los resultados analíticos con los obtenidos mediante el método de Ritz y elementos finitos, mostrando que su formulación ofrece una buena aproximación.

Tras poner de manifiesto que el Eurocódigo 3 no proporciona directrices aplicables al estudio del pandeo lateral de vigas de sección variable, Raftoyiannis y Adamakos (2010) ofrecen una técnica numérica simple para determinar el momento crítico elástico tomando como referencia las propiedades de la sección media.

Nguyen et al. (2013), tras trabajos previos, han sido capaces de presentar una formulación explícita para la determinación de la carga de pandeo lateral de vigas en I con alma de acero corrugado de altura linealmente variable sometidas a momento uniforme o linealmente variable, con diferentes condiciones de apoyo.

Yuan et al. (2013) presentan una formulación analítica para describir el pandeo lateral de vigas en ménsula con sección en T de altura de alma linealmente variable sometidas a cargas uniformes y/o concentradas en el extremo; una de las conclusiones de su investigación es que para secciones de ala estrecha la variación de la altura del alma a lo largo de la longitud puede

conllevar una disminución de la resistencia al pandeo lateral en un 10% para cargas concentradas.

Trahair (2014a) analiza el pandeo lateral de vigas continuas, estudiando la interacción que se presenta entre segmentos con distintas características de carga y longitud de pandeo.

Trahair (2014b) presenta un nuevo elemento finito para el análisis elástico de la flexión en el plano y el pandeo fuera del plano de vigas de sección variable con sección en I monosimétrica, con cargas que incluyen momentos concentrados y cargas uniformes y puntuales transversales fuera del eje de la viga, así como cargas longitudinales. Previamente, el mismo autor (Trahair, 2012) había estudiado el pandeo inelástico de vigas uniformes de sección I monosimétricas sometidas a momentos variables, comparando sus resultados con los proporcionados por las normas de diseño.

Soltani et al. (2014) han desarrollado un método semi-analítico, basado en series de potencia, para resolver el problema de autovalores, propio de la inestabilidad elástica y de las vibraciones libres, de vigas de sección variable de pared delgada.

En el marco de los trabajos de su tesis doctoral (Marques, 2012), dirigida por los profesores Luis Simoes da Silva, de la Universidad de Coimbra, y Richard Greiner, de la Universidad Tecnológica de Graz, Liliana Marques ha presentado un nuevo procedimiento, basado en la fórmula de "Ayrton-Perry", para la verificación de vigas de sección variables sometidas a distribuciones de momentos flectores con variación lineal o parabólica (Marques et al., 2013), y su aplicación a los elementos sometidos a flexo-compresión (Marques et al., 2014) mediante una extensión de las fórmulas de interacción del Eurocódigo 3.

En su investigación relativa a elementos sometidos a flexo-compresión, Sapalas et al. (2005) han propuesto el uso de dos factores de carga, uno para la carga de compresión y otro para el momento flector, en la determinación de la resistencia de barras con sección en I de canto variable. Los valores que

proponen para dichos factores son obtenidos en base a un conjunto de casos analizados mediante el programa de elementos finitos COSMOS/M.

Ronagh et al. (2000a, 2000b) han presentado una formulación de elementos finitos para el estudio de la estabilidad de barras de sección variable sometidas a esfuerzo axial y momento flector, utilizando teoría no lineal de deformación axial y tensiones de Kirchhoff.

El estudio de la estabilidad de vigas de sección en I de canto variable sometidas a momento torsor ha sido abordado por Yau en la Universidad de Tamkang (Taiwan). Un resumen de sus trabajos de investigación puede encontrarse en Yau (2006), donde concluye que las rigideces al alabeo y a la torsión de Saint-Venant afectan de forma significativa al pandeo de torsión y pueden verse afectadas por el tipo de carga.

Li et al. (2003) han propuesto un modelo de plasticidad concentrada para el análisis inelástico de segundo orden de pórticos con elementos de sección variable de alma esbelta. En su modelo tienen en cuenta tanto las tensiones residuales y las imperfecciones geométricas, como la plastificación gradual de la sección en los extremos, la plasticidad distribuida dentro del elemento y el pandeo local del alma. Por su parte, Li y Li (2002) han desarrollado un elemento viga, con los efectos de axil y cortante incorporados, para el estudio estático, dinámico y de estabilidad de pórticos integrados por barras de sección variable.

2.3 FILOSOFÍA DE DISEÑO DE LA NORMA AISC LRFD

Consideramos en este apartado la filosofía de diseño de la norma americana AISC LRFD (2001) en lo que hace referencia a los problemas de estabilidad estructural de los elementos de sección variable. En términos generales, la norma americana se limita a extender la formulación básica, aplicable a los elementos prismáticos, introduciendo para ello diversos coeficientes que tienen en cuenta la variación de sección.

2.3.1 Elementos sometidos a compresión

El cálculo de la resistencia de los elementos prismáticos sometidos a compresión es desarrollada en el Capítulo E de las Especificaciones de la AISC LRFD (2001). Definiendo la esbeltez de la columna, λ_c , como

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (2.1)$$

donde K es el factor de longitud efectiva, L la longitud no arriostrada, r el radio de giro con respecto al eje de flexión en el pandeo, f_y la tensión de fluencia del material, y E el módulo de elasticidad del material, el estado límite de pandeo viene determinado por:

para $\lambda_c \leq 1.5$

$$\phi_c P_n = \phi_c \left(0.658^{\lambda_c^2} \right) A f_y \quad (2.2)$$

para $\lambda_c > 1.5$

$$\phi_c P_n = \phi_c \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) A f_y \quad (2.3)$$

Donde ϕ_c es el factor de resistencia a compresión, cuyo valor es igual a 0.85; P_n es la resistencia nominal a compresión y A es el área de la sección recta del elemento.

La Ecuación (2.2) corresponde al supuesto de pandeo inelástico y la Ecuación (2.3) al de pandeo elástico. Su representación geométrica, conocida como curva de pandeo, puede verse en la Figura 2.1.

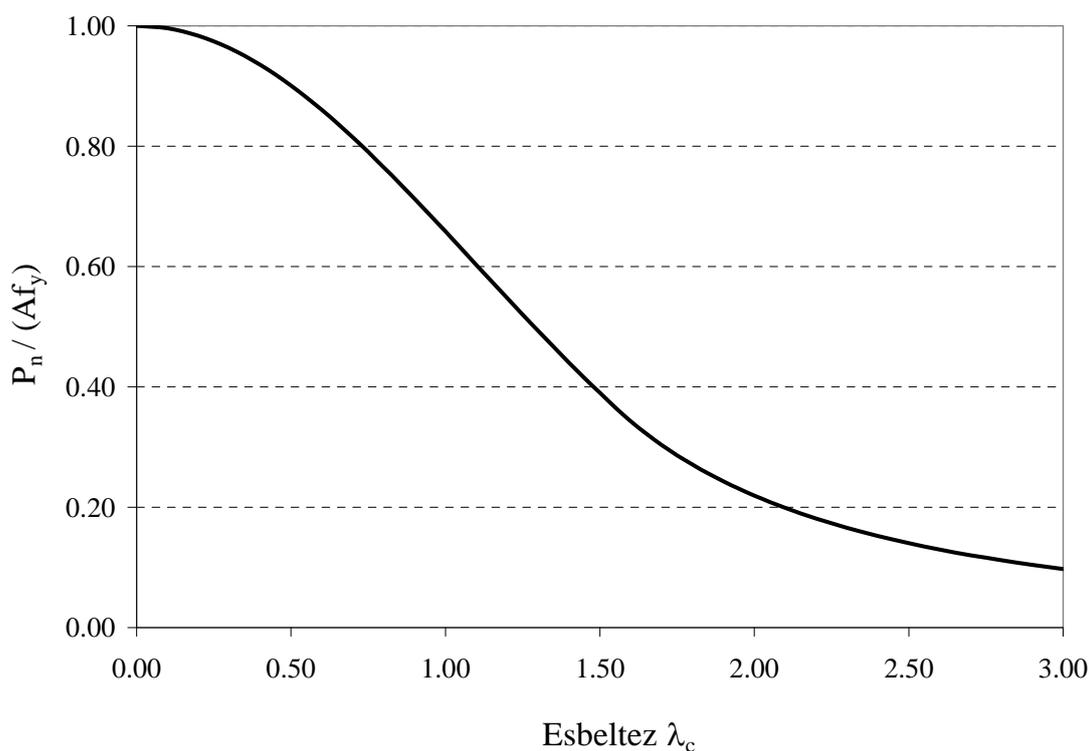


Figura 2-1 Curva de pandeo para elementos sometidos a compresión AISC LRFD 2001

La norma americana no presenta una formulación general de aplicación a elementos de sección variable. Únicamente la Sección F3 del Apéndice F presenta la extensión de la formulación anterior para el supuesto de elementos de doble T con el alma de canto variable linealmente. Para estos supuestos, sustituye la esbeltez λ_c por la esbeltez efectiva λ_{eff} dada por

$$\lambda_{eff} = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{Q f_y}{E}} \quad (2.4)$$

con

$$S = \frac{KL}{r_{0y}} \quad \text{ó} \quad S = \frac{K_y L}{r_{0z}} \quad (2.5)$$

según el pandeo sea respecto del eje débil o respecto del eje fuerte, siendo r_{0y} y r_{0z} el radio de giro de la sección de menor altura respecto del eje y (eje débil) o respecto del eje z (eje fuerte); K el factor de longitud efectiva para el miembro como si fuera prismático; K_y el factor de longitud efectiva para el miembro de

sección variable; Q un factor de reducción que es 1 para secciones compactas y menor que 1 en caso contrario.

En el Capítulo C de sus Comentarios, la AISC LRFD (2001) proporciona un conjunto de métodos, basados en fórmulas y monogramas, que permiten determinar el factor de longitud efectiva K teniendo en cuenta las distintas situaciones de enlace del elemento prismático. Sin embargo, cuando se trata del factor K_γ , que debe tener en cuenta la variación de sección, lo único que se indica es que debe obtenerse “por análisis racional”.

En la AISC Steel Design Guide 25 (2011), que analiza el diseño de pórticos con elementos en los que la altura del alma varía linealmente, se propone la siguiente fórmula para obtener la carga de Euler

$$P_E = \frac{\pi^2 EI'}{L^2} \quad (2.6)$$

donde I' es la inercia correspondiente a la sección situada a una distancia de la sección menor dada por

$$0,5L \left(\frac{I_m}{I_M} \right)^{0,0732} \quad (2.7)$$

donde I_m e I_M son las inercias correspondientes a las secciones menor y mayor, respectivamente.

Utilizando la Ecuación (2.6), el valor de K_γ vendría dado por

$$K_\gamma = \sqrt{\frac{I_0}{I'}} \quad (2.8)$$

La Ecuación (2.8) sólo tendría aplicación para el caso de elementos biarticulados con variación lineal de la altura de alma y esfuerzo axial constante. Para este supuesto, los resultados que presenta la fórmula propuesta ofrecen una aproximación al valor exacto con errores inferiores al 1% (AISC Steel Design Guide 25, 2011).

2.3.2 Elementos sometidos a flexión

La norma americana AISC LRFD (2001) define la resistencia a flexión en el Capítulo F de sus Especificaciones. Uno de los estados límite, lógicamente, corresponde al de pandeo lateral. Para determinar qué estado límite predomina, la norma americana propone el cálculo de las siguientes longitudes, usando el sistema inglés de unidades:

$$L_p = \frac{300 r_z}{\sqrt{f_{yf}}} \quad (2.9)$$

$$L_r = \frac{r_z X_1}{f_L} \sqrt{1 + \sqrt{1 + X_2 f_L^2}} \quad (2.10)$$

con

$$X_1 = \frac{\pi}{W_{el,y}} \sqrt{\frac{E G I_t A}{2}} \quad (2.11)$$

$$X_2 = 4 \frac{I_w}{I_z} \left(\frac{W_{el,y}}{G I_t} \right)^2 \quad (2.12)$$

$$f_L \text{ es el menor valor de } \begin{cases} (f_{yf} - f_r) \\ f_{yw} \end{cases} \quad (2.13)$$

donde L_p es la máxima longitud lateral no arriostrada que, para el caso de una distribución uniforme de momentos, limita la zona en donde se dará la resistencia plástica de toda la sección; L_r es la máxima longitud lateral no arriostrada que limita la zona en donde se dará el pandeo lateral inelástico; r_z es el radio de giro con respecto al eje menor; $W_{el,y}$ es el módulo resistente con respecto al eje mayor; A es el área de la sección recta; I_z es la inercia con respecto al eje menor; I_t es la inercia torsional; I_w es la constante de alabeo; f_{yf} y f_{yw} son las tensiones de fluencia de los aceros del ala y del alma, respectivamente; f_r es la tensión residual de compresión en el ala, y es igual a 10 ksi para perfiles laminados y 16.5 ksi para perfiles soldados; y E y G son los módulos de elasticidad y de cortante del acero, respectivamente ($E= 29000$ ksi y $G=11200$ ksi).

Aparte de las longitudes L_p y L_r , la AISC LRFD (2001) emplea la longitud L_b que es la distancia entre puntos arriostrados contra el desplazamiento lateral del ala comprimida o entre puntos arriostrados para prevenir el giro por torsión de la sección recta; esta longitud es obtenida directamente conociendo las condiciones de contorno de la viga.

Para vigas compactas arriostradas lateralmente con $L_b \leq L_p$, solamente se aplica el estado límite de fluencia. Para vigas compactas no arriostradas lateralmente con $L_b > L_p$, se aplican los estados límites de fluencia y de pandeo lateral. Puesto que el pandeo lateral ocurre en elementos que flectan con respecto al eje mayor de inercia, no se debe aplicar el estado límite de pandeo lateral a elementos sometidos a flexión en el eje menor ni a elementos cuyas secciones son circulares o cuadradas; siendo, para estos casos, aplicable solamente el estado límite de fluencia. Para $L_p < L_b \leq L_r$, el pandeo lateral inelástico controla la resistencia del elemento; mientras que para $L_b > L_r$, es el pandeo lateral elástico.

Para el estado límite de fluencia, la resistencia de un elemento sometido a flexión pura queda determinada por el momento plástico M_p .

Para el estado límite de pandeo lateral elástico, $L_b > L_r$, la resistencia queda definida por el momento crítico, definido como

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L_b} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{\pi E}{L_b}\right)^2 I_y I_w} \quad (2.13)$$

Finalmente, para el pandeo lateral inelástico, se utiliza la siguiente fórmula de interpolación lineal

$$M_n = \left[M_p - (M_p - M_r) \left(\frac{L_b - L_p}{L_r - L_p} \right) \right] \quad (2.14)$$

siendo M_r el momento crítico de pandeo lateral correspondiente a $L_b = L_r$.

La variación del momento flector a lo largo del elemento es tenida en cuenta mediante un coeficiente multiplicador C_b , denominado factor de momento

uniforme equivalente, que multiplica a los momentos resistentes anteriormente calculados. La norma americana da para el factor de momento uniforme equivalente la siguiente expresión propuesta por Kirby y Nethercot (1979)

$$C_b = \frac{12.5M_{\max}}{2.5M_{\max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (2.15)$$

donde M_{\max} es el valor absoluto del máximo momento flector; y M_A , M_B y M_C son los correspondientes valores absolutos de los momentos producidos a un cuarto, a un medio y a tres cuartos de la longitud del elemento.

La expresión (2.13), que se emplea para calcular el momento crítico elástico M_{cr} , asume que la carga está aplicada en el eje centroidal de la viga. Si la carga se aplica en el ala superior no arriostrada (ala comprimida por flexión), se producirá un efecto desestabilizador en el elemento, ocasionando un M_{cr} menor; por el contrario, si la carga actúa en el ala inferior no arriostrada (ala traccionada por flexión), se producirá un efecto estabilizador, dando lugar a un M_{cr} mayor (Galambos 1988). Para la carga aplicada en el ala superior no arriostrada, el AISC LRFD (2001) recomienda, en el Capítulo F de sus Comentarios, usar un valor de X_2 igual a cero para estimar, conservadoramente, el valor reducido del momento crítico elástico.

La Figura 2-2 muestra un esquema gráfico de la variación del momento nominal M_n frente a la longitud L_b , en donde se pueden apreciar, para el caso de una distribución de momento uniforme ($C_b=1$), las tres zonas principales definidas por las longitudes L_p y L_r . La primera zona corresponde a la plastificación de la sección ($M_n=M_p$), y se encuentra demarcada por la longitud L_p ; la segunda zona corresponde al pandeo lateral inelástico, en donde la variación del M_n está representada por una línea recta trazada entre los límites establecidos por L_p y L_r (M_n dado por Ecuación 2.14); y la tercera zona corresponde al pandeo lateral elástico, en donde M_n varía siguiendo la curva del momento crítico elástico ($M_n=M_{cr}$). Para otras distribuciones de momento, M_n es obtenido multiplicando el momento nominal correspondiente a la distribución de momento uniforme, por el factor C_b ; pero con la salvedad de que M_n no debe superar al momento plástico M_p . De esta manera, se permite a M_n llegar al

momento M_p cuando se tienen longitudes L_b mayores a L_p , tal como se indica en la curva trazada con líneas discontinuas para $C_b > 1$.

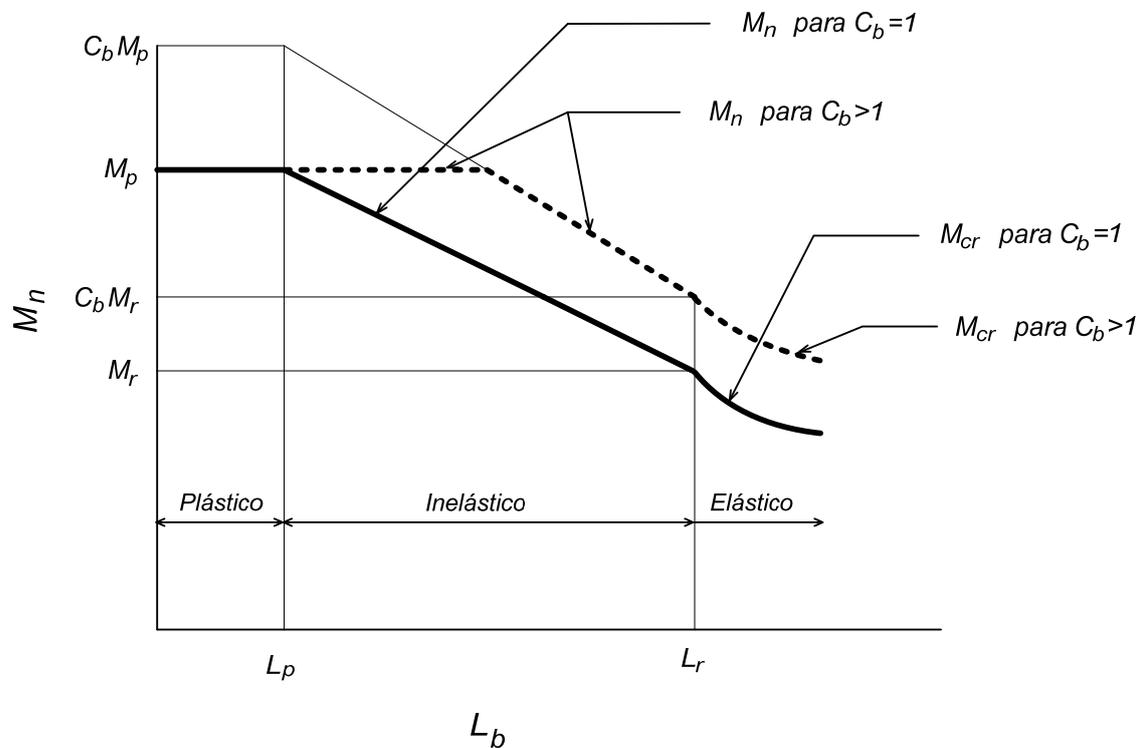


Figura 2-2 Esquema gráfico de la variación del momento nominal M_n en función de la longitud lateral no arriostrada L_b (AISC LRFD 2001)

Para los elementos estructurales de sección variable la norma americana AISC LRFD (2001) recoge la propuesta de Lee et al. (1972), cuyo concepto básico es sustituir el elemento de sección variable por otro prismático equivalente, con una sección igual a la menor del elemento de sección variable y una longitud equivalente distinta a la original. La Figura 2.3 muestra un esquema (Jimenez y Galambos, 2006) del concepto de la longitud equivalente, donde κ es la ratio de los módulos resistentes de las secciones menor y mayor.

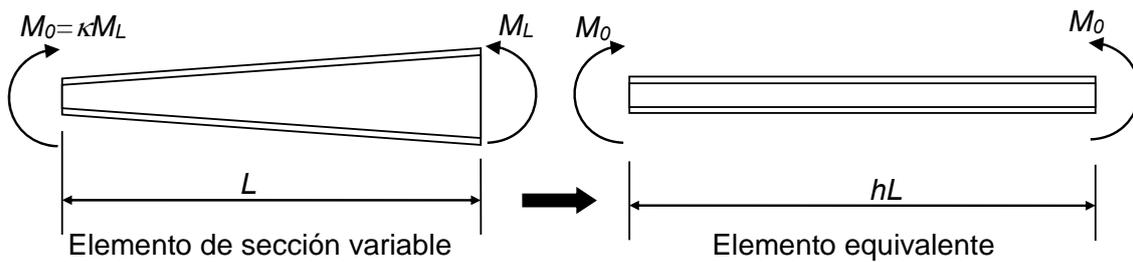


Figura 2-3 Concepto de longitud equivalente

Con un gradiente de variación de canto de la sección γ definido como $(d_L - d_0)/d_0$, donde d_L y d_0 son los cantos mayor y menor, la tensión crítica es definida como

$$F_{cr} = \sqrt{F_{s\gamma}^2 + F_{w\gamma}^2} \quad (2.16)$$

donde $F_{s\gamma}$ y $F_{w\gamma}$ son las tensiones de Saint-Venant y de alabeo, respectivamente.

Estas tensiones vienen dadas por

$$F_{s\gamma} = \frac{5}{3} \times \frac{12 \cdot 10^3}{h_s L d_0 / A_f} \quad (2.17)$$

$$F_{w\gamma} = \frac{5}{3} \times \frac{170 \cdot 10^3}{(h_w L / r_{T0})^2} \quad (2.18)$$

donde A_f es el área del ala comprimida, r_{T0} es el radio de giro de la sección menor considerando sólo el ala comprimida más un tercio del área comprimida del alma respecto de un eje en el plano del alma, y h_s y h_w son los factores de longitud equivalente dados por

$$\begin{aligned} h_s &= 1.0 + 0.0230\gamma\sqrt{Ld_0 / A_f} \\ h_w &= 1.0 + 0.00385\gamma\sqrt{L / r_{T0}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Los valores en las Ecuaciones (2.17) y (2.18) vienen dados en ksi. Puede demostrarse que dichas ecuaciones, para una formulación más general, son equivalentes a

$$F_{s\gamma} = \frac{\pi\sqrt{EI_z GI_T}}{h_s LW_0} \approx \frac{1}{3} \frac{\pi\sqrt{EG}}{h_s L d_0 / A_f} \quad (2.20)$$

$$F_{w\gamma} = \frac{\pi^2 \sqrt{EI_z EI_w}}{(h_w LW_0)^2} \approx \frac{\pi^2 E}{(h_w L / r_{T0})^2} \quad (2.21)$$

donde las tensiones de Saint-Venant y de alabeo son reconocidas más fácilmente.

Cuando la distribución de momentos flectores a lo largo del elemento es la definida en la Figura 2.3, la norma americana propone la introducción de un coeficiente B que multiplica a la tensión crítica de pandeo lateral con distribución uniforme. Los valores de B para los diferentes casos de diagrama son presentados en el Apéndice F Sección F3.4, y distingue cuatro supuestos:

- a) Cuando el momento máximo M_2 en tres segmentos adyacentes de un elemento, de similar longitud de pandeo (luz sin arriostramiento), está situado en el segmento central y M_1 es el mayor momento en un extremo del tramo de tres segmentos del elemento:

$$B = 1,0 + 0,37 \left(1,0 + \frac{M_1}{M_2} \right) + 0,5\gamma \left(1,0 + \frac{M_1}{M_2} \right) \geq 1,0 \quad (2.22a)$$

- b) Cuando la máxima tensión debida a la flexión f_{b2} se presenta en la sección extrema mayor de dos segmentos adyacentes de aproximadamente igual longitud de pandeo y f_{b1} es la tensión en la sección extrema menor del tramo de dos segmentos del elemento:

$$B = 1,0 + 0,58 \left(1,0 + \frac{f_{b1}}{f_{b2}} \right) - 0,7\gamma \left(1,0 + \frac{f_{b1}}{f_{b2}} \right) \geq 1,0 \quad (2.22b)$$

- c) Cuando la máxima tensión debida a la flexión f_{b2} se presenta en la sección extrema menor de dos segmentos adyacentes de aproximadamente igual longitud de pandeo y f_{b1} es la tensión en la sección extrema mayor del tramo de dos segmentos del elemento:

$$B = 1,0 + 0,55 \left(1,0 + \frac{f_{b1}}{f_{b2}} \right) + 2,20\gamma \left(1,0 + \frac{f_{b1}}{f_{b2}} \right) \geq 1,0 \quad (2.22c)$$

d) Cuando la tensión debida a la flexión en la sección menor del elemento de sección variable, o segmento del mismo, es cero:

$$B = \frac{1,75}{1,0 + 0,25\sqrt{\gamma}} \quad (2.22d)$$

donde γ es calculado para la longitud de pandeo del adyacente al punto de tensión nula.

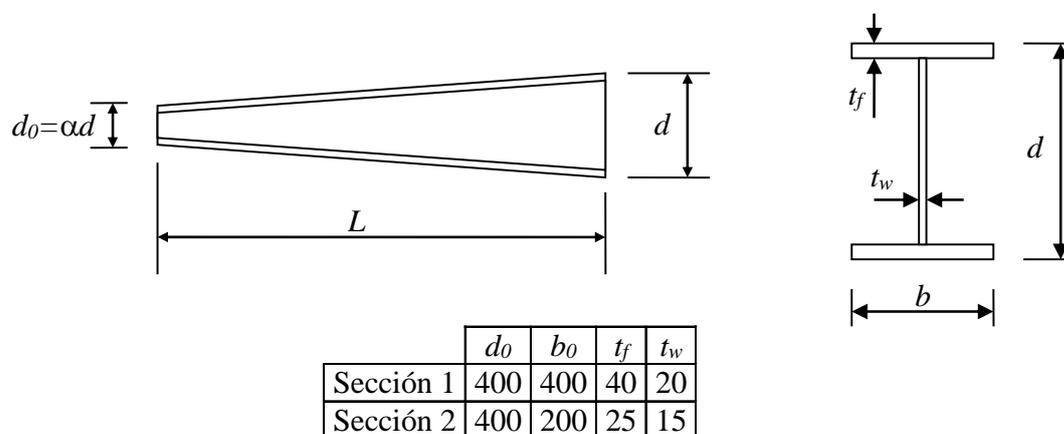


Figura 2-4 Viga de sección variable

Para el caso de la viga de sección variable definida en la Figura 2.4, donde la altura de la sección varía linealmente, la Tabla 2.1 presenta los resultados obtenidos de comparar el momento crítico calculado con la formulación de la norma americana AISC LRFD (2001) y el momento crítico dado por un análisis de elementos finitos. Las distribuciones de momento variable consideradas son dos: la distribución canónica, significada en la Tabla 2.1 con la denominación $M_0 = \kappa M$, en la que el momento flector aplicado en una sección es proporcional a su resistencia a flexión; y la distribución lineal, significada con $M_0 = 0$, en la que el momento en la sección de menor resistencia es 0. Los resultados corresponden a dos secciones específicas, una de ala ancha y otra de ala estrecha, y dos longitudes, 10 metros y 20 metros. Puede observarse que, incluso para variación

de sección y distribución de momentos tan simples, el error máximo se mueve en un $\pm 15\%$ aproximadamente.

α	Sección 1 (L=10m)				Sección 1 (L=20m)				Sección 2 (L=10m)				Sección 2 (L=20m)			
	$M_0=\kappa M$		$M_0=0$		$M_0=\kappa M$		$M_0=0$		$M_0=\kappa M$		$M_0=0$		$M_0=\kappa M$		$M_0=0$	
	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error
1.0	1.00	-11.36	0	-14.30	1.00	-11.47	0	-13.45	1.00	-2.72	0	-5.42	1.00	-2.30	0	-3.95
0.8	0.75	-8.40	0	-9.54	0.75	-10.32	0	-10.44	0.75	-4.79	0	-5.62	0.75	-9.60	0	-8.69
0.6	0.52	-0.53	0	2.13	0.52	-5.18	0	-0.96	0.51	-3.18	0	1.06	0.51	-12.41	0	-7.55
0.4	0.32	6.64	0	15.73	0.32	-0.27	0	9.88	0.29	9.49	0	10.73	0.29	-14.31	0	-4.25

Tabla 2-1 Error (%) de la AISC LRFD con respecto a Elementos Finitos

2.3.3 Elementos sometidos a flexo-compresión

Siguiendo los trabajos de Kanchanalai (1977), que analizó el comportamiento inelástico de 82 elementos sometidos a flexo-compresión, la norma americana AISC LRFD (2001) propone unas sencillas fórmulas de interacción, válidas para secciones con uno o dos ejes de simetría. Las fórmulas propuestas son las siguientes:

$$\text{Para } \frac{P}{\phi_c P_n} \geq 0.2$$

$$\frac{P}{\phi_c P_n} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_y''}{\phi_b M_{n,y}} + \frac{M_z''}{\phi_b M_{n,z}} \right) \leq 1 \quad (2.23)$$

$$\text{Para } \frac{P}{\phi_c P_n} < 0.2$$

$$\frac{P}{2\phi_c P_n} + \left(\frac{M_y''}{\phi_b M_{n,y}} + \frac{M_z''}{\phi_b M_{n,z}} \right) \leq 1 \quad (2.24)$$

donde P es la resistencia requerida a compresión, M_y'' y M_z'' son las resistencias requeridas a flexión, incluyendo los efectos de segundo orden; ϕ_c es el factor de resistencia a compresión, y es igual a 0.85; ϕ_b es el factor de resistencia a flexión, y es igual a 0.90; y P_n y M_n son las resistencias nominales a compresión y flexión respectivamente.

Estas fórmulas de interacción describen una curva bilineal de resistencia (2.5), y toman en cuenta todos los estados límites últimos de un elemento flexo-comprimido, tales como: la resistencia “in-plane” de los elementos que flectan con respecto a su eje fuerte o a su eje débil; la resistencia “out-of-plane” de los elementos que flectan con respecto a su eje fuerte; y la resistencia espacial de los elementos sometidos a una combinación de esfuerzo axial de compresión y flexión biaxial.

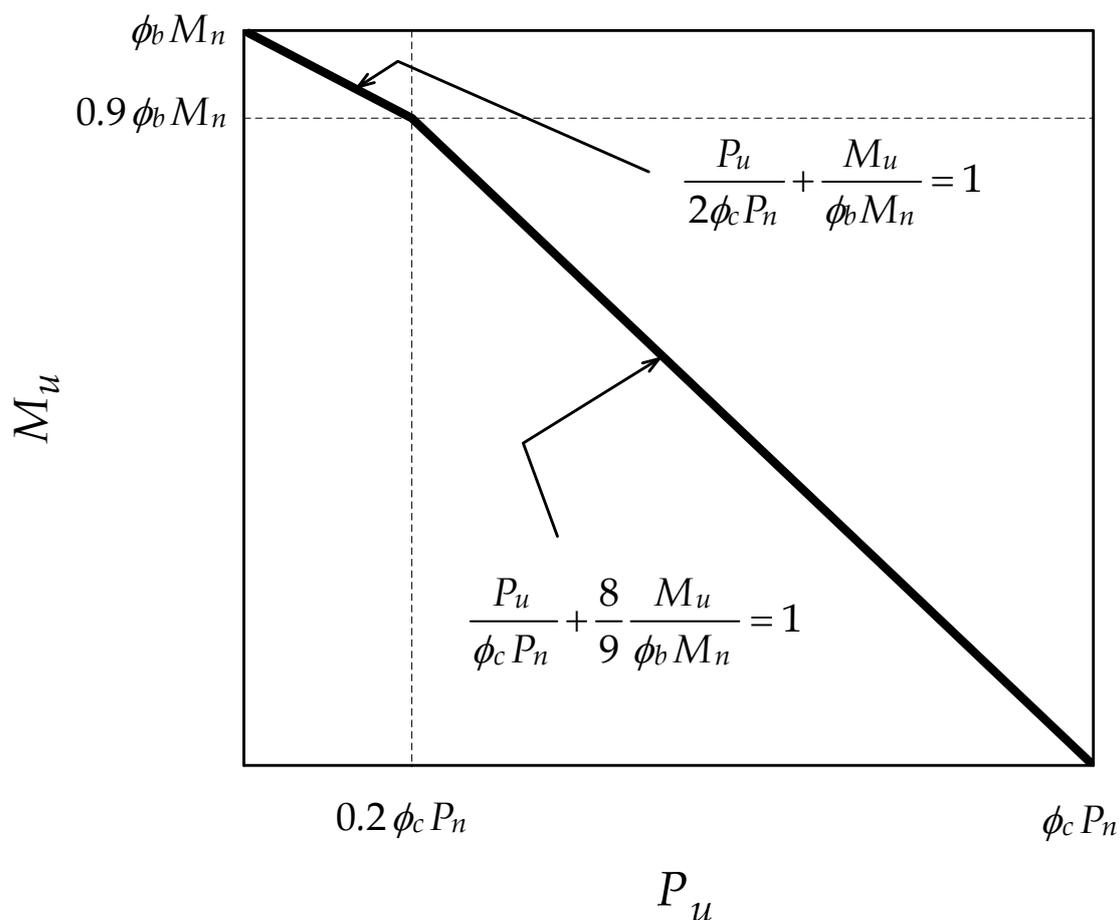


Figura 2-5 Diagrama de interacción entre compresión y flexión (AISC LRFD, 2001)

Para obtener los momentos de segundo orden según la norma americana, el diseñador puede optar por un análisis completo de segundo orden o por un procedimiento simplificado según el cual

$$M'' = B_1 M_{nt} + B_2 M_{tt} \tag{2.25}$$

donde M'' es el momento de segundo orden; M_{nt} es el momento en el elemento, calculado mediante un análisis elástico de primer orden asumiendo que el pórtico es intraslacional; M_{lt} es el momento en el elemento, calculado por un análisis elástico de primer orden asumiendo que el pórtico es traslacional; B_1 y B_2 son los factores de amplificación de momentos que toman en cuenta los efectos $P-\delta$ y $P-\Delta$ de segundo orden, respectivamente, según se indica en la Figura 2.6

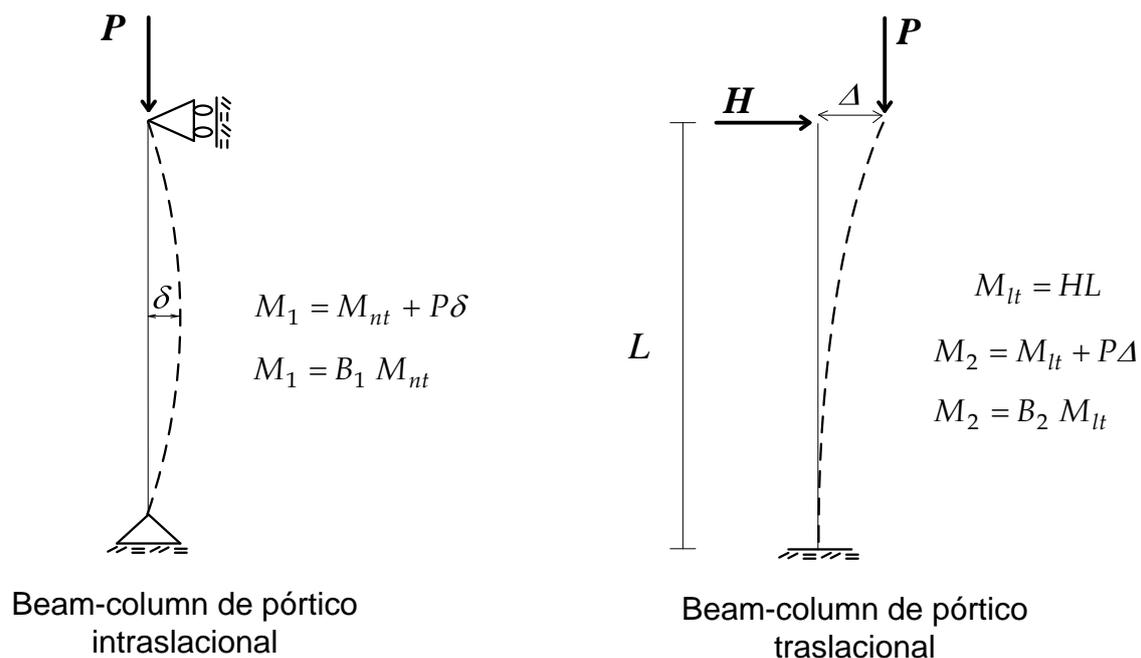


Figura 2-6 Efectos $P-\delta$ y $P-\Delta$ de segundo orden

El factor B_1 es obtenido mediante la siguiente fórmula

$$B_1 = \frac{C_m}{(1 - P/P_{e1})} \geq 1 \quad (2.26)$$

donde P_{e1} es la carga crítica de Euler correspondiente al plano de flexión, y es calculada asumiendo que el elemento forma parte de un pórtico arriostrado lateralmente (pórtico intraslacional). Con esta suposición, la norma AISC LRFD (2001) recomienda que el factor de longitud efectiva de pandeo debe ser igual a la unidad ($K=1$), salvo que el análisis estructural demuestre que un menor valor pueda ser usado.

El factor de momento uniforme equivalente C_m es calculado asumiendo que el pórtico es intraslacional. En ausencia de cargas transversales entre extremos, AISC LRFD (2001) propone la expresión

$$C_m = 0.6 + 0.4\psi \quad (2.27)$$

similar a la propuesta por Austin (1961) pero sin tomar en cuenta la condición $C_m \geq 0.4$, puesto que para valores de ψ comprendidos entre -0,5 y -1 esta condición conduce a resultados muy conservadores con respecto a los resultados numéricos exactos basados en un análisis elástico-plástico (Chen y Zhou, 1987).

Para el caso de existir cargas transversales entre sus apoyos, la norma recomienda realizar un “análisis racional” para determinar los valores de C_m . Por otra parte, si este análisis no es llevado a cabo, se propone usar los siguientes valores: $C_m=0.85$, para elementos cuyos extremos están restringidos (empotrados); y $C_m=1.00$, para elementos cuyos extremos no están restringidos (articulados).

Por su parte, el factor B_2 puede ser obtenido con la siguiente expresión

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P}{\sum H} \left(\frac{\Delta_{0h}}{L} \right)} \quad (2.26)$$

o, alternativamente, la expresión

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P}{\sum P_{e2}}} \quad (2.27)$$

donde $\sum P$ es la suma de la fuerza axial de todas las columnas de la planta considerada; Δ_{0h} es el desplazamiento lateral relativo entre el nivel superior e inferior de la planta considerada, y es determinado por medio de un análisis de primer orden; $\sum H$ es la suma de todas las fuerzas horizontales que producen el desplazamiento Δ_{0h} , y es calculada en el nivel inferior de la planta considerada; L es la altura de la planta considerada; P_{e2} es la carga crítica de Euler correspondiente al plano de flexión, y es calculada asumiendo que el elemento forma parte de un pórtico no arriostrado lateralmente (pórtico traslacional); y, $\sum P_{e2}$ es la suma de los P_{e2} de todas las columnas de la planta considerada.

Al mantener el valor del efecto de segundo orden, B_1 , por encima de la unidad (Ecuación 2.26) se evita la necesidad de evaluar por separado los distintos estados límites últimos, especialmente en los casos en donde el factor C_m es menor a la unidad (Cheong-Siat-Moy y Downs 1980). Otra ventaja de estas fórmulas de interacción es que son aplicables a elementos de pórticos intraslacional y traslacional (Chen y Lui 1987).

Por lo que hace referencia a los elementos de sección variable, con una variación de sección limitada a un cambio lineal de la altura del alma, la AISC LRFD (2001) manifiesta la aplicabilidad de la teoría general, válida para elementos prismáticos, introduciendo algunas modificaciones. Concretamente, la determinación de P_n y P_{ey} debe hacerse usando las propiedades resistentes de la menor sección del elemento de sección variable y, por lo que hace referencia a las longitudes de pandeo, aplicando los correspondientes factores de longitud efectiva. Por otro lado, M_{ny} , M_u y M_{py} deben determinarse para el extremo mayor. Por su parte, los coeficientes de momento uniforme equivalente C_{my} deben ser sustituidos por los C'_m determinados del siguiente modo:

- a) Cuando el elemento está sometido a momentos que producen una deformación con curvatura única y tiene aproximadamente los mismos momentos en los extremos

$$C'_m = 1,0 + 0,1 \left(\frac{P_u}{\phi_b P_{ey}} \right) + 0,3 \left(\frac{P_u}{\phi_b P_{ey}} \right)^2 \quad (2.28)$$

- b) Cuando el momento en el extremo de menor sección es cero

$$C'_m = 1,0 - 0,19 \left(\frac{P_u}{\phi_b P_{ey}} \right) + 0,6 \left(\frac{P_u}{\phi_b P_{ey}} \right)^2 \quad (2.29)$$

Cuando el parámetro de esbeltez efectiva $\lambda_{eff} \geq 1,5$ y la tensión combinada es analizada incrementalmente a lo largo de la luz del elemento, el área real y el módulo resistente total de la sección en estudio puede usarse para determinar la resistencia.

2.4 FILOSOFÍA DE DISEÑO DEL EUROCÓDIGO 3

El Código Técnico Español, al igual que la mayoría de las normas europeas, siguen la filosofía de diseño establecida en el Eurocódigo 3 (EC3, 2005). En este apartado se presentan los elementos fundamentales, relativos a la estabilidad de los elementos sometidos a compresión, a flexión y a flexo-compresión, así como su aplicación a elementos estructurales de sección variable.

2.4.1 Elementos sometidos a compresión

Para determinar la resistencia de los elementos sometidos a compresión el EC3 parte del análisis teórico de barra sometida a compresión con una imperfección inicial $v_0(x)$ dada por la ecuación

$$v_0(x) = e_{o,d} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.30)$$

La Figura 2.7 presenta el elemento estructural con la imperfección inicial y la deformación adicional, $v(x)$, producida por la aplicación de la carga de compresión, N_{Ed} , usando la terminología del EC3.

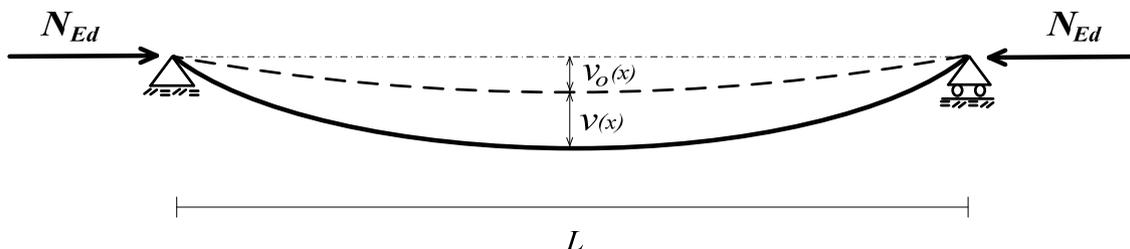


Figura 2-7 Elemento biarticulado con imperfección inicial senoidal

Planteando la ecuación diferencial del equilibrio de la elástica se obtiene

$$v'' + \frac{N_{Ed}}{EI} (v_0 + v) = 0 \quad (2.31)$$

Asumiendo una solución en la forma

$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.32)$$

donde A es una constante que representa el valor máximo de la flecha, que se produce en el centro de la luz.

Sustituyendo las Ecuaciones (2.30) y (2.32) en la Ecuación (2.31) obtenemos el valor del coeficiente A , que viene dado por

$$A = \frac{N_{Ed}}{N_{cr} - N_{Ed}} e_{o,d} \quad (2.33)$$

siendo N_{cr} la carga de pandeo de flexión o carga crítica de Euler. Con este valor del coeficiente A , la máxima flecha en el elemento viene dada por

$$v_{max} = \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{cr}} e_{o,d} \quad (2.34)$$

donde puede apreciarse que v_{max} es proporcional a la amplitud máxima de la imperfección, $e_{o,d}$, y a un factor de amplificación que tiene en cuenta los efectos de segundo orden.

Teniendo en cuenta la deformación de segundo orden, la resistencia de la sección central vendría dada por la condición

$$\frac{N_{Ed}}{A f_y} + \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{cr}} \frac{N_{Ed} e_{o,d}}{W_{el,y} f_y} \leq 1 \quad (2.35)$$

donde f_y es la tensión de fluencia, A el área de la sección recta y $W_{el,y}$ el módulo resistente.

El valor máximo de N_{Ed} , es decir, el valor que proporciona el valor igual a 1 en la Ecuación (2.35), puede expresarse como

$$N_{Ed \max} = \chi A f_y \quad (2.36)$$

siendo χ el factor de reducción por pandeo de flexión. Sustituyendo en la Ecuación (2.35) y utilizando la definición de esbeltez adimensional $\bar{\lambda}$, dada por

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}} \quad (2.37)$$

se obtiene que

$$(1 - \chi)(1 - \chi \bar{\lambda}^2) = e_{o,d} \frac{A}{W_{el,y}} \chi \quad (2.38)$$

denominando η al valor dado por

$$\eta = e_{o,d} \frac{A}{W_{el,y}} \quad (2.39)$$

y utilizando el valor de η propuesto por el Comité Técnico que evalúa la formulación del EC3 (ECCS Technical Committee 8-Stability 2006), que pretende tener en cuenta la imperfección generalizada, es decir, aquella que considera las tensiones residuales, la falta de rectitud del elemento y la excentricidad de las cargas aplicadas, dado por

$$\eta = \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) \quad (2.40)$$

en donde α es un factor de imperfección que depende de la forma de la sección recta, del proceso de fabricación, del plano de pandeo y del tipo de acero. El factor de reducción de pandeo puede expresarse como

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (2.41)$$

con

$$\Phi = 0.5 [1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \quad (2.42)$$

El EC3 considera cinco valores para el factor de imperfección α , lo cual da lugar a cinco curvas de pandeo. La Tabla 2.2 presenta los valores de α para las distintas curvas, y la Figura 2.8 muestra las curvas de pandeo, en donde pueden verse gráficamente los valores del factor de reducción χ en función de la esbeltez adimensional $\bar{\lambda}$. Para una esbeltez adimensional $\bar{\lambda}$ menor o igual a 0,2 no habrá reducción de la resistencia plástica de la sección puesto que las curvas de pandeo del EC3 dan un factor χ igual a 1; en este caso, el pandeo no

se produciría en el elemento, y por lo tanto la resistencia de este elemento quedaría determinada al calcular la resistencia de la sección.

Curva de pandeo	a_0	a	b	c	d
Factor de imperfección α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 2-2 Factores de imperfección para las curvas de pandeo en EC3

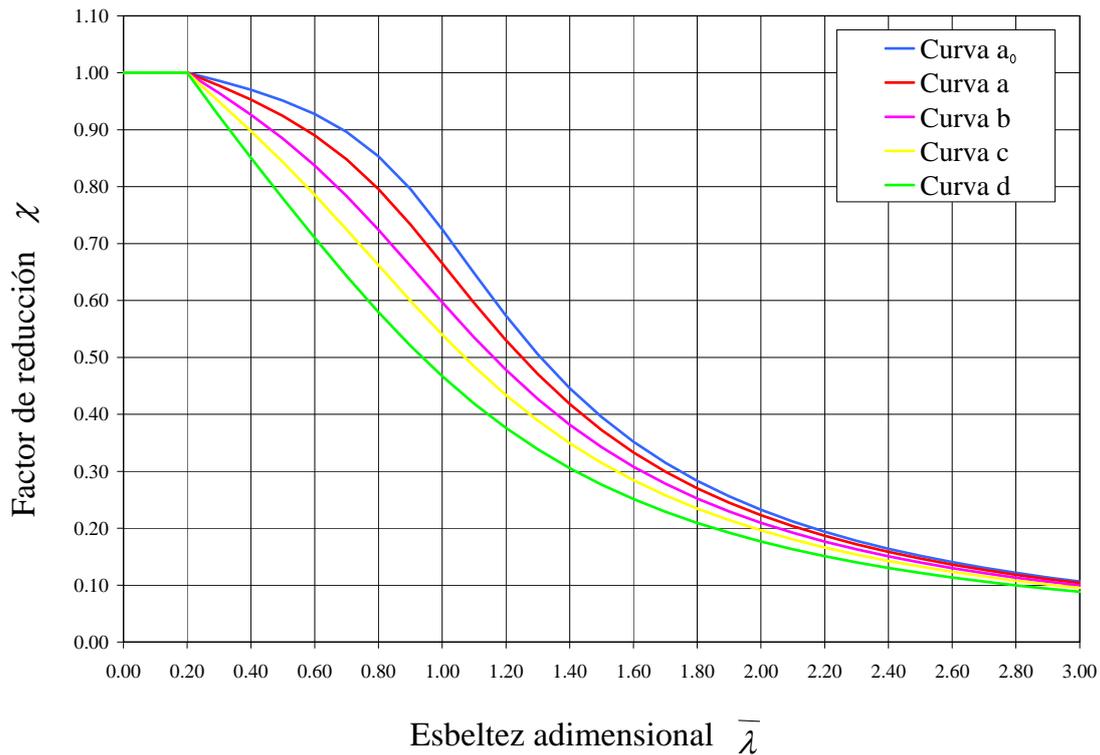


Figura 2-8 Curvas de pandeo del Eurocódigo 3

El EC3 no plantea una metodología específica para el análisis de los elementos de sección variable sometidos a compresión. La Ecuación (2.35) deberá ser verificada en cada sección del elemento, variando por tanto el área A y el módulo resistente $W_{el,y}$. La carga crítica, N_{cr} , en la Ecuación (2.35) corresponde, lógicamente, al elemento estructural y en su obtención deberá considerarse el carácter variable de la sección. No se da, sin embargo, instrucción alguna sobre el modo o el procedimiento a seguir para determinar su valor, dejando al diseñador la tarea de su determinación, bien mediante un análisis de pandeo elástico resolviendo el problema de autovalores, bien mediante una formulación aproximada como la propuesta en esta tesis.

2.4.2 Elementos sometidos a flexión

Partiendo de una imperfección inicial similar a la definida para los elementos sometidos a compresión (Figura 2.6), y asumiendo una distribución de momento flector uniforme de valor $M_{y,Ed}$, el estado límite de pandeo para una sección en I doblemente simétrica viene dado por la siguiente expresión (Kaim 2004)

$$\frac{M_{y,Ed}}{W_{el,y}f_y} + \frac{1}{\left(1 - \frac{M_{y,Ed}^2}{M_{cr}^2}\right)} e_{o,d} \left(\frac{N_{cr,z}}{W_{el,z}f_y} \frac{M_{y,Ed}^2}{M_{cr}^2} + \frac{N_{cr,z}^2}{W_{el,z}f_y} \frac{h}{2} \frac{M_{y,Ed}}{M_{cr}^2} \right) \leq 1 \quad (2.43)$$

donde h es la distancia entre los centroides de las alas del perfil I, y M_{cr} es el momento crítico elástico de pandeo lateral para una viga sometida a momento uniforme. El segundo sumando de la Ecuación (2.43) hace referencia a los efectos de segundo orden desarrollados en el plano lateral. Por su parte, el tercero sumando corresponde a los momentos de segundo orden debidos al alabeo de la sección. Es interesante apreciar que la amplificación del momento debida a los efectos de segundo orden es función del cuadrado de la relación $M_{y,Ed}/M_{cr}$, lo cual la diferencia significativamente respecto de la ampliación en los elementos sometidos a compresión, dada por la Ecuación (2.35).

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para los elementos sometidos a compresión, el máximo momento flector uniforme viene dado por

$$M_{y,Ed \max} = \chi_{LT} W_{el,y} f_y \quad (2.44)$$

donde χ_{LT} es el factor de reducción por pandeo lateral.

Definiendo la esbeltez adimensional a pandeo lateral $\bar{\lambda}_{LT}$ como

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{el,y} f_y}{M_{cr}}} \quad (2.45)$$

sustituyendo la Ecuación (2.44) en la (2.43), con el valor igual a 1, se llega a

$$e_{o,d} = \frac{W_{el,z}}{A} \left(\frac{1}{\chi_{LT}} - 1 \right) \left(1 - \chi_{LT}^2 \bar{\lambda}_{LT}^4 \right) \frac{\bar{\lambda}_z^2}{\bar{\lambda}_{LT}^4} \frac{1}{\chi_{LT} + \frac{A}{W_{el,y}} \frac{h}{2} \frac{1}{\bar{\lambda}_z^2}} \quad (2.46)$$

Que expresa la imperfección inicial como una función de las propiedades geométricas de la sección, las esbelteces a pandeo de flexión y pandeo lateral, y el factor de reducción por pandeo lateral.

La definición de las distintas imperfecciones iniciales utilizadas por el Eurocódigo 3 ha sido objeto de amplios estudios paramétricos realizados por el profesor Greine de la Universidad de Graz y su equipo (Greiner et al, 1998; Salzgeber, 2000a; Greiner y Kaim, 2001; Greiner y Kaim, 2003). El proceso de calibración seguido, en el que se realizaron estudios computacionales considerando tanto las imperfecciones geométricas como la no linealidad material, llevó a la siguiente formulación, recogida por el EC3

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - 0.75 \bar{\lambda}_{LT}^2}} \quad \text{con} \begin{cases} \chi_{LT} \leq 1 \\ \chi_{LT} \leq \frac{1}{\bar{\lambda}_{LT}^2} \end{cases} \quad (2.47)$$

con

$$\Phi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.4) + 0.75 \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (2.48)$$

donde α_{LT} es el factor de imperfección, que depende de las características geométricas de la sección. El EC3 define cuatro valores para el factor de imperfección, dependiendo de la geometría de la sección y de su proceso de fabricación, dando lugar a cuatro curvas de pandeo. Dichas curvas corresponde a los valores de α dados en la Tabla 2.1 exceptuando la curva α_0 .

Como alternativa a las Ecuaciones (2.47) y (2.48), el EC3 propone una expresión más conservadora, que puede ser utilizada con todo tipo de secciones y reduce la resistencia de la sección para valores de $\bar{\lambda}_{LT}$ mayores de 0,2. Las ecuaciones propuestas son

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1 \quad (2.49)$$

con

$$\Phi_{LT} = 0.5 \left[1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right] \quad (2.50)$$

Las curvas de pandeo del EC3 han sido calibradas asumiendo un diagrama de momento flector constante en toda la viga. Para otros diagramas, el valor del factor de reducción χ_{LT} resulta significativamente mayor, ya que se reducen las zonas de plastificación del elemento, lo cual origina una mayor resistencia. Con los resultados obtenidos por Lindner (2000) y Salzgeber (2000b) para varias distribuciones de momentos flectores, el Comité Técnico 8 de la ECCS (ECCS Technical Committee 8 - Stability, 2006) propone un factor de reducción modificado $\chi_{LT,mod}$ que vendría dado por

$$\chi_{LT,mod} = \frac{\chi_{LT}}{f} \leq 1 \quad (2.51)$$

con

$$f = 1 - 0.5(1 - k_c) \left[1 - 2(\bar{\lambda}_{LT} - 0.8)^2 \right] \leq 1 \quad (2.52)$$

siendo k_c un factor de corrección dependiente de la distribución de momentos flectores a lo largo del elemento (Tabla 2.3)

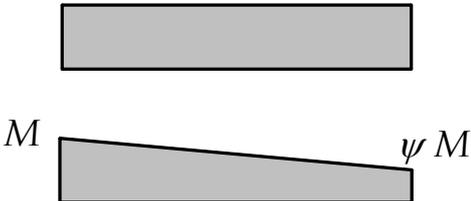
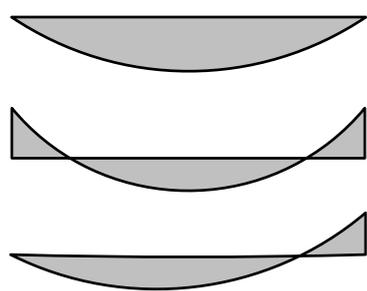
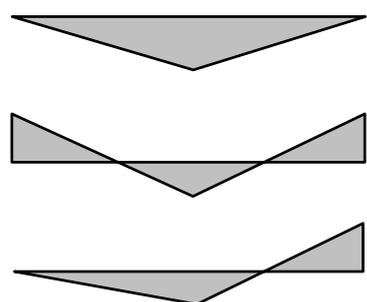
Diagrama de momentos	Valores de k_c
	1.00 $\frac{1}{1.33 - 0.33\psi}$
	0.94 0.90 0.91
	0.86 0.77 0.82

Tabla 2-3 Valores de k_c (EC3, 2005)

Al igual que con los elementos sometidos a compresión, el Eurocódigo no presenta una formulación específica para los elementos de sección variable sometidos a flexión. Queda, por tanto, a criterio del diseñador establecer un procedimiento coherente con la formulación general que tenga en cuenta la variación de resistencia derivada de la sección variable.

2.4.3 Elementos sometidos a flexo-compresión

La estabilidad de los elementos sometidos a flexo-compresión es definida en la Sección 6.3.3 del EC3 (2005). Para secciones de clase 1, 2 ó 3, es decir, secciones que no desarrollan pandeo local, y asumiendo un coeficiente parcial

de seguridad igual a la unidad, los elementos sometidos a flexo-compresión deben verificar las siguientes ecuaciones

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} M_{y,Rk}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rk}} \leq 1$$

(2.53)

donde N_{Ed} , $M_{y,Ed}$ y $M_{z,Ed}$ son los valores de diseño del esfuerzo axial y de los momentos flectores; χ_y y χ_z son los factores de reducción por pandeo de flexión respecto de los ejes y y z de la sección; χ_{LT} es el factor de reducción por pandeo lateral; N_{Rk} , $M_{y,Rk}$ y $M_{z,Rk}$ son las resistencias características correspondientes al esfuerzo axial y los momentos flectores, dependientes de la clase de sección; y K_{yy} , K_{yz} , K_{zy} y K_{zz} son los factores de interacción.

Los Anexos A y B del EC3 presenta dos métodos alternativos para la determinación de los factores de interacción. Ambos métodos han sido desarrollados dentro del ECCS-TC8 (ECCS Technical Committee 8 - Stability 2006), el primero por investigadores belgas y franceses (Bureau et al., 1999; Boissonnade et al., 2002; Boissonnade et al., 2004; Villette et al. 2000; Villette 2004) y el segundo por investigadores austriacos y alemanes (Greiner, 2001; Greiner y Lindner, 2006; Ofner, 1997; Lindner, 2001; Lechner, 2005). Ambos métodos incorporan en su formulación coeficientes que tienen en cuenta la distribución de momentos a lo largo del elemento estructural.

La exactitud de los métodos propuesto por el Eurocódigo fue evaluada estadísticamente con un pequeño número de resultados experimentales (Massonnet 1976; Lindner y Gietzelt 1986) y con un gran número de resultados numéricos usando el programa ABAQUS (Ofner 1997). La conclusión fue que ambos métodos son fiables para ser usados en el diseño. Sin embargo, existen

diferencias al comparar los resultados entre los dos métodos. El Método 1 se basa en la deducción teórica de la formulación que gobierna el comportamiento espacial del pandeo de flexión, proporcionando muy buenos resultados cuando el pandeo se produce según el eje débil. Por otra parte, el Método 2 se basa en la deducción teórica de la fórmula de pandeo en el plano, por lo cual este método aborda mejor el pandeo según el eje fuerte. Para el caso del pandeo lateral, ambos métodos han extendido sus formulaciones deducidas a partir del pandeo de flexión; y sus factores de interacción correspondientes fueron calibrados en base a los resultados de las simulaciones numéricas considerando un comportamiento elástico-plástico. Con respecto a los formatos de las fórmulas de interacción, se puede decir que el Método 2 proporciona un formato sencillo, en donde se emplean factores compactos que toman en cuenta los efectos de la inestabilidad. En cambio, el Método 1 brinda un formato más complejo, que posee un gran número de factores específicos en su formulación.

Finalmente, el Eurocódigo no proporciona instrucciones sobre el modo de extender su formulación para el caso de elementos de sección variable, dejando al diseñador la definición de un procedimiento razonable de aplicación.

2.5 FILOSOFÍA DE DISEÑO DE LA NORMA BRITÁNICA

La norma británica BS 5950 (2000) sigue una filosofía de diseño similar a la del Eurocódigo en el sentido de utilizar distintas curvas de pandeo según el tipo de sección y aplicar la fórmula Perry-Roberton para determinar el factor de reducción de resistencia por pandeo (Galambos y Surovek, 2008). En lo que sigue se detallan los elementos esenciales de los procedimientos seguidos para determinar la resistencia de los elementos sometidos a compresión, a flexión y a flexo-compresión, con referencia a su aplicación a los casos de sección variable.

2.5.1 Elementos sometidos a compresión

Los procedimientos a seguir para determinar la resistencia de los elementos sometidos a compresión son descritos en el apartado 7 de la Sección 4 de la norma británica. Refiriéndonos a secciones compactas o semi-compactas, la resistencia viene dada por

$$P_c = A_g p_c \quad (2.54)$$

donde P_c es el esfuerzo resistente a compresión, A_g es el área de la sección recta y p_c es la tensión resistente a compresión.

El valor de la tensión resistente a compresión, p_c , viene dada en el Anexo C de la norma por la expresión

$$p_c = \frac{p_E p_y}{\phi + \sqrt{\phi^2 - p_E p_y}} \quad (2.55)$$

con

$$p_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (2.56)$$

y

$$\phi = \frac{p_y + (\eta + 1) p_E}{2} \quad (2.57)$$

siendo p_y la tensión de fluencia y λ la esbeltez correspondiente al pandeo de flexión determinante.

El factor de Perry viene dado por

$$\eta = \alpha(\lambda - \lambda_0)/1000 \quad \eta \geq 0 \quad (2.58)$$

con

$$\lambda_0 = 0,2 \sqrt{\frac{\pi^2 E}{p_y}} \quad (2.59)$$

y la constante de Robertson, α , tomando los siguientes valores según la curva de pandeo

Curva de pandeo	a	b	c	d
Constante de Robertson α	2,0	3,5	5,5	8,0

Tabla 2-4 Constante de Robertson para las curvas de pandeo en BS 5950

La norma británica no presenta una formulación específica para columnas de sección variable ni para la determinación de p_E en el supuesto de esfuerzo axial variable.

2.5.2 Elementos sometidos a flexión

La resistencia de los elementos sometidos a flexión es definida en el apartado 3 de la Sección 4 de la norma británica. El momento flector máximo en el elemento según el eje mayor, M_z , debe cumplir las condiciones de resistencia de la sección y de resistencia al pandeo lateral, es decir

$$\begin{aligned} M_z &\leq p_y S_z \\ M_z &\leq \frac{p_b S_z}{m_{LT}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

siendo S_z el módulo resistente de la sección (plástico o elástico según la sección sea compacta o semi-compacta), p_b la tensión resistente a pandeo lateral y m_{LT} el factor de momento uniforme equivalente para el pandeo lateral.

La norma BS 5950 propone la siguiente expresión general para el factor de momento uniforme equivalente

$$m_{LT} = 0,2 + \frac{0,15M_A + 0,5M_B + 0,15M_C}{M_{max}} \quad (2.61)$$

donde M_{max} es el momento flector máximo, y M_A , M_B y M_C son los momentos a un cuarto, un medio y tres cuartos de la luz, siempre tomados como positivos.

El Anexo B de la norma define el valor de la tensión resistente a pandeo lateral, que viene dada por

$$p_b = \frac{p_E p_y}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - p_E p_y}} \quad (2.62)$$

donde

$$p_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{LT}^2} \quad (2.63)$$

y

$$\phi_{LT} = \frac{\rho_y + \eta_{LT} + 1}{2} \rho_E \quad (2.64)$$

Por su parte, la esbeltez equivalente a pandeo lateral (λ_{LT}) para secciones en I y H viene dada por

$$\lambda_{LT} = uv\lambda\sqrt{\beta_w} \quad (2.65)$$

con β_w igual a la unidad para las secciones compactas o igual al inverso del factor de forma para secciones semi-compactas, y

$$\lambda = \frac{L_E}{r_y} \quad (2.66)$$

siendo L_E la longitud efectiva de pandeo lateral y r_y el radio de giro de la sección respecto del eje menor. Por su parte, el parámetro de pandeo, u , y el factor de esbeltez, v , son definidos por las expresiones

$$u = \left(\frac{4S_y^2 \gamma}{A^2 h_s^2} \right)^{0.25} \quad (2.67)$$

y

$$v = \left[1 + 0.05(\lambda/x)^2 \right]^{0.25} \quad (2.68)$$

siendo

$$\gamma = \left(1 - \frac{I_z}{I_y} \right) \quad (2.69)$$

y

$$x = 0.566 h_s \sqrt{A/J} \quad (2.70)$$

donde h_s es la distancia entre los centros de cortante de las alas y J es la constante de torsión de la sección.

El factor de Perry de la Ecuación (2.64) viene dado por la expresión

$$\eta_{LT} = \alpha_{LT}(\lambda_{LT} - \lambda_{L0})/1000 \quad \eta_{LT} \geq 0 \quad (2.71)$$

donde la constante de Robertson α_{LT} se toma igual a 7,0 y λ_{L0} viene dado por

$$\lambda_{L0} = 0,4 \sqrt{\frac{\pi^2 E}{p_y}} \quad (2.72)$$

El apartado 2.5 del Anexo B del BS 5950 trata de los elementos de sección variable, proponiendo una formulación específica para elementos de sección en I, H o canal, con canto variable. La norma británica establece para estos casos una esbeltez equivalente modificada, que viene dada por

$$\lambda_{LT} = nuv\lambda\sqrt{\beta_w} \quad (2.73)$$

con

$$n = (1.5 - 0.5R_f) \geq 1.0 \quad (2.74)$$

Siendo R_f la ratio del área de las alas en la sección con menor momento respecto de la sección con mayor momento. El valor de la ratio R_f debe tomarse como el menor de los valores que se obtienen usando bien el área total, bien el área del ala comprimida sólo.

Dado que la sección es variable, la norma indica que se debe utilizar un valor constante para p_b (Ecuación 2.62) basado en las propiedades de la sección con el máximo momento en el segmento en consideración. Por lo que hace referencia al factor de momento uniforme equivalente (m_{LT}) la BS 5950 indica, de forma conservadora, que se debe tomar el valor unidad.

Para los mismos casos presentados en la Figura 2.4 y considerando la distribución canónica de momentos flectores, la normativa británica presenta unos resultados significativamente menos precisos que la normativa americana. Como puede verse en la Tabla 2.5, la comparación con los resultados proporcionado por un análisis con elementos finitos produce en este caso errores de un $\pm 28\%$, superiores, incluso, a los de la normativa americana.

α	Sección 1 (L=10m)		Sección 1 (L=20m)		Sección 2 (L=10m)		Sección 2 (L=20m)	
	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error	ψ	Error
1	1	27.83%	1	27.75%	1	3.73%	1	3.63%
0.8	0.75	1.09%	0.75	-0.24%	0.75	-10.02%	0.75	-11.18%
0.6	0.52	-11.70%	0.52	-15.57%	0.51	-18.66%	0.51	-20.51%
0.4	0.32	-19.17%	0.32	-26.66%	0.29	-17.54%	0.29	-28.88%

Tabla 2-5 Error (%) de la BS 5950 con respecto a Elementos Finitos

2.5.3 Elementos sometidos a flexo-compresión

La resistencia de los elementos sometidos a una combinación de esfuerzo axial y momento flector es definida en el apartado 4 de la Sección 8. Para el caso de elementos sometidos a compresión y flexión, la norma británica propone dos métodos, uno simplificado y otro más exacto, para determinar la resistencia a pandeo.

El método simplificado establece que deben cumplirse las dos siguientes condiciones

$$\frac{F_c}{P_c} + \frac{m_z M_z}{\rho_y Z_z} + \frac{m_y M_y}{\rho_y Z_y} \leq 1 \tag{2.75}$$

$$\frac{F_c}{P_{cy}} + \frac{m_{LT} M_{LT}}{M_b} + \frac{m_y M_y}{\rho_y Z_y} \leq 1$$

donde F_c es la compresión axial, M_b es el momento resistente a pandeo, M_{LT} es el máximo momento gobernando el pandeo lateral, M_z es el máximo momento gobernando el pandeo respecto del eje mayor, M_y es el máximo momento gobernando el pandeo respecto del eje menor, P_c es el menor de los valores P_{cz} y P_{cy} , P_{cz} es la resistencia a compresión considerando el pandeo respecto del eje mayor, P_{cy} es la resistencia a compresión considerando el pandeo respecto del eje menor, Z_z es el módulo resistente de la sección respecto del eje mayor, y Z_y es el módulo resistente de la sección respecto del eje menor. Para el caso general, el factor de momento uniforme equivalente de pandeo lateral, m_{LT} , viene dado por la Ecuación (2.61). Para los factores m_z y m_y , correspondiente al pandeo de flexión, la norma da un valor ligeramente diferente, según la ecuación

$$m_{LT} = 0,2 + \frac{0,1M_A + 0,6M_B + 0,11M_C}{M_{\max}} \quad m \geq \frac{0,8M_{24}}{M_{\max}} \quad (2.76)$$

siendo M_{24} el valor máximo en la mitad central del elemento.

El método más exacto, para el caso de secciones en I o H de alas iguales, viene dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{F_c}{P_{cz}} + \frac{m_z M_z}{M_{cz}} \left(1 + 0,5 \frac{F_c}{P_{cz}} \right) + 0,5 \frac{m_{yz} M_y}{M_{cz}} &\leq 1 \\ \frac{F_c}{P_{cy}} + \frac{m_{LT} M_{LT}}{M_b} + \frac{m_y M_y}{M_{cy}} \left(1 + \frac{F_c}{P_{cy}} \right) &\leq 1 \quad (2.77) \\ \frac{m_z M_z \left(1 + 0,5 \frac{F_c}{P_{cz}} \right)}{M_{cz} \left(1 - \frac{F_c}{P_{cz}} \right)} + \frac{m_y M_y \left(1 + 0,5 \frac{F_c}{P_{cy}} \right)}{M_{cy} \left(1 - \frac{F_c}{P_{cy}} \right)} &\leq 1 \end{aligned}$$

donde M_{cz} y M_{cy} son los momentos resistentes respecto de los ejes mayor y menor, respectivamente. Por lo que se refiere al factor de momento uniforme equivalente m_{yz} , su valor, según la cláusula 4.8.3.3.4 del BS 5950 (2000), resulta igual al de m_z . Al igual que con otras normas, la BS 5950 no presenta una generalización de las Ecuaciones (2.75) y (2.77) para el caso de elementos de sección variable.

3 PANDEO POR FLEXIÓN DE ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A AXILES NO UNIFORMES

3.1 INTRODUCCIÓN

Presentamos en este capítulo las aportaciones principales de la tesis en lo que hace referencia al pandeo por flexión de elementos de sección variable sometidos a una distribución no uniforme de esfuerzo axial.

La resistencia al pandeo de elementos estructurales de sección variable sometidos a compresión ha sido objeto de estudio intensivo en la segunda mitad del siglo pasado y continúa siendo un campo actual de investigación. La formulación del problema y la solución para casos simples ha sido presentada en Timoshenko y Gere (1961) y en Gere y Carter (1962). En la búsqueda de soluciones analíticas al problema de compresión no uniforme en elementos de sección variable, un conjunto de investigadores han trabajado con el concepto de distribución de rigidez. Así, Ermopoulos (1986) ha presentado resultados para elementos sometidos a leyes de esfuerzos axiales escalonados con variaciones de rigidez definidas por polinomios de segundo orden, y ha usado la misma aproximación para obtener la longitud de pandeo equivalente para miembros de sección variable (Ermopoulos, 1997) y para estudiar el efecto de imperfecciones iniciales en su estabilidad (Raftoyiannis, 2005). Una distribución de rigidez similar ha sido utilizada por Elishakoff (2001) y Elishakoff y Rollot (1999) para encontrar la expresión analítica correspondiente a la carga de pandeo en barras de sección variable biarticuladas. Con posterioridad, el uso de polinomios de mayor orden para definir la variación de la rigidez ha sido investigado por Elishakoff y Guede (2001). En la misma línea, Siginer (1992) ha estudiado el pandeo de elementos con una variación monótona continua de la rigidez a flexión, utilizando para ello funciones de Bessel.

Una aproximación más general, basada en series de potencia, ha sido estudiada por Al-Sadder (2004) para obtener expresiones analíticas de las funciones de estabilidad de barras no prismáticas sometidas a esfuerzos axiales; sin embargo, su trabajo está limitado a distribuciones uniformes de carga. Otra solución para elementos con rigidez variable de forma general, usando también

funciones de Bessel, ha sido propuesta por Li (2001a, 2001b). En sus trabajos, la expresión que define la distribución de rigidez a flexión es arbitraria, pero la ley de distribución de cargas axiales debe ser expresada como una relación funcional de la rigidez a flexión. Más recientemente, Coskun y Atay (2009) han usado un método iterativo variacional para obtener la carga de pandeo de elementos de sección variable sometidos a carga axil constante.

Otro grupo de investigadores han dirigido sus investigaciones al objetivo de definir procedimientos simples y eficientes para obtener la carga de pandeo en el caso general de sección variable y distribución de cargas no uniforme. Así, Saffari et al (2008) han presentado un sencillo método para estimar el coeficiente de longitud efectiva de los postes en pórticos constituidos por elementos con sección linealmente variable. Su trabajo está orientado a la elaboración de tablas de diseño de uso simple y directo. De modo análogo, Bazeos y Karabalis (2006) han publicado un método aproximado para el cálculo rápido de la carga crítica de miembros de sección variable; su método está basado en un conjunto de gráficos adimensionales que pueden usarse para variaciones lineales de sección.

A continuación, en el presente capítulo, se desarrolla un nuevo procedimiento que puede enmarcarse en el grupo de los métodos aproximados de aplicación sencilla y eficiente. La metodología propuesta puede ser aplicada a elementos con una variación genérica de la rigidez a flexión, sometidos a una distribución no uniforme de carga axial. En primer lugar se analiza el supuesto de elementos con sección uniforme sometidos a carga no uniforme y se define el coeficiente de carga uniforme equivalente. A continuación se consideran los elementos de sección variable sometidos a carga uniforme y se presente el método de carga equivalente. Finalmente, el capítulo presenta la combinación de ambos métodos para generar un procedimiento general que puede aplicarse a un caso general de sección y carga variables.

3.2 COEFICIENTE DE CARGA UNIFORME EQUIVALENTE PARA ELEMENTOS DE SECCIÓN CONSTANTE

Consideremos en primer lugar el caso de un elemento de sección constante sometido a una distribución de carga axial no uniforme, tal y como se representa en la Figura 3.1, donde los dos extremos se encuentran articulados.

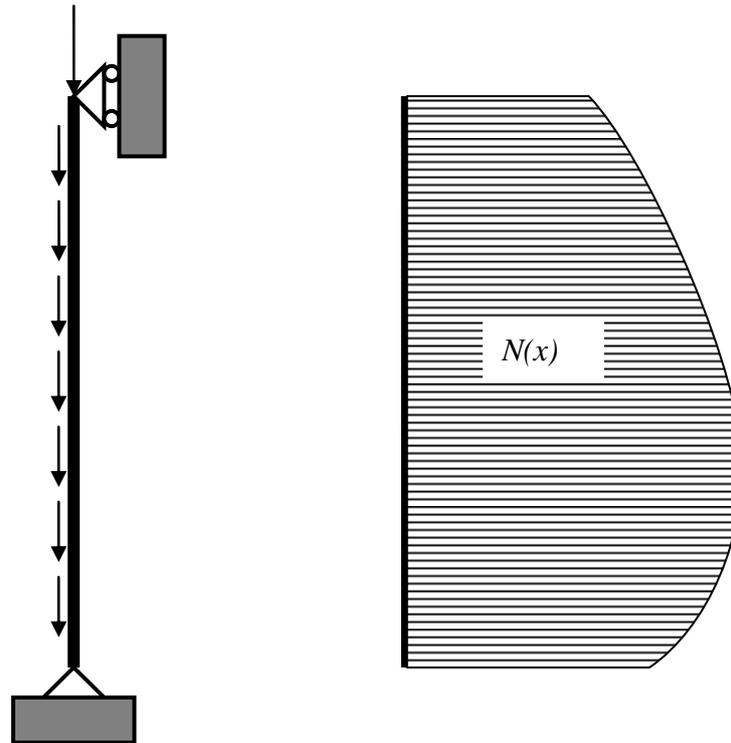


Figura 3-1 Distribución de carga axial no uniforme

Siguiendo una metodología similar a la presentada por Serna et al (2006) para el pandeo lateral de vigas de sección variable, la carga de pandeo elástico de flexión puede ser expresada como

$$P_{cr} = CP_E \quad (3.1)$$

donde P_{cr} corresponde al máximo valor en la ley de carga axial no uniforme, C es el coeficiente de carga uniforme equivalente y P_E es la carga crítica de Euler del elemento dada por

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.2)$$

siendo E el Módulo de Elasticidad, I el momento de inercia de la sección y L la longitud del elemento. El coeficiente de carga uniforme equivalente C es igual a 1 para una distribución uniforme y mayor que 1 para cualquier otra distribución.

Aunque Duan y Wang (2008) han presentado recientemente una solución exacta para el pandeo de columnas incluyendo el peso propio, no existe una solución general para el problema planteado. Con el objetivo de definir una expresión analítica para calcular el coeficiente C , se han obtenido numéricamente las cargas de pandeo correspondientes a un conjunto de casos de distribución no uniforme de carga axial. La solución numérica se ha obtenido haciendo uso de la rutina que para obtener autovalores proporciona el programa MATLAB.

La Figura 3.2 muestra las distintas distribuciones consideradas en el análisis:

- a) Distribución lineal con valor máximo en un extremo de la barra
- b) Distribución lineal con valor máximo en el centro de la luz
- c) Distribución parabólica con valor máximo en un extremo de la barra
- d) Distribución parabólica con valor máximo en el centro de la luz

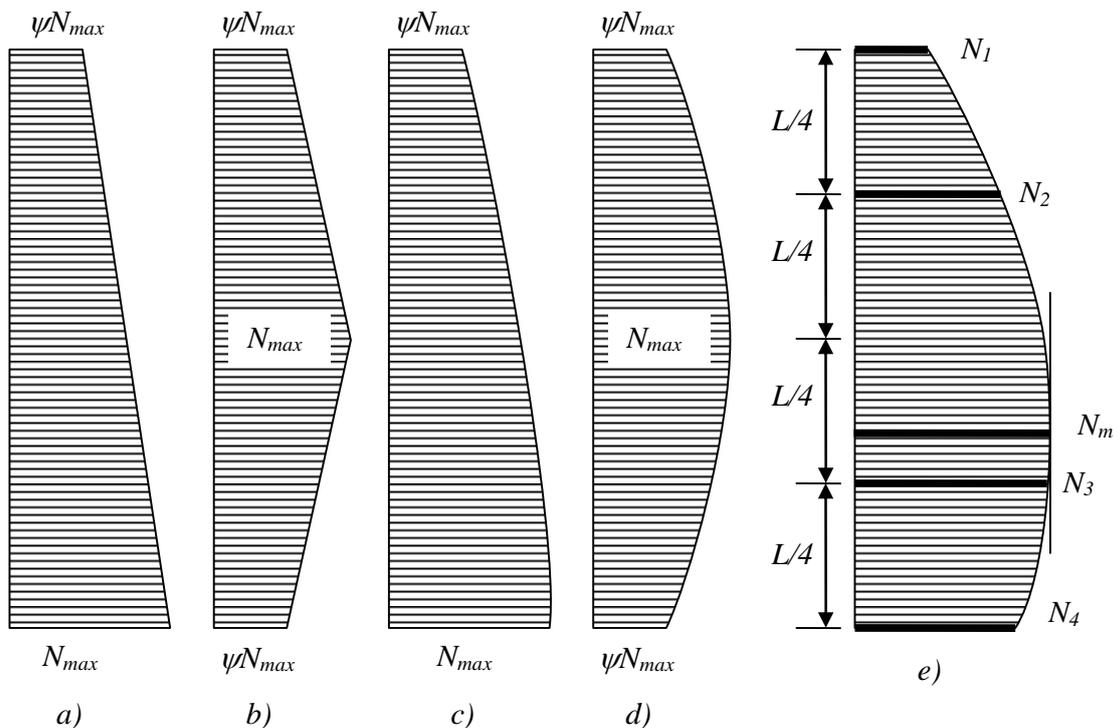


Figura 3-2 Casos de distribución no uniforme de carga

El objetivo buscado en la investigación descrita en el presente apartado es la definición de una expresión analítica que permita obtener, de forma aproximada pero rápida, el valor del coeficiente C , utilizando para ello técnicas de ajuste basadas en un estudio paramétrico o de casos del problema. La expresión general de la que parte el estudio paramétrico viene definida por

$$C = \frac{N_M \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i \right)}{N_M + \sum_{i=1}^n c_i N_i} \quad (3.3)$$

donde N_M es el esfuerzo axial máximo actuando en el elemento, N_i es el esfuerzo axial correspondiente al punto i , y c_i es un coeficiente de ponderación.

Usando los resultados numéricos correspondientes a los casos de carga definidos en la Figura 3.2, y tratando de mantener los resultados obtenidos con la expresión analítica por debajo de los valores exactos, se consigue una buena aproximación con el siguiente caso particular de la Ecuación (3.3)

$$C = \frac{21N_M}{4(N_1 + N_4) + 6(N_2 + N_3) + N_M} \quad (3.4)$$

donde, como se muestra en la Figura 3.2e), N_1 y N_4 son los esfuerzos axiales en los extremos del elemento; y N_2 y N_3 son los esfuerzos correspondientes a $L/4$ y $3L/4$.

La Tabla 3.1 y la Figura 3.3 muestran los valores exactos y aproximados del coeficiente de carga uniforme equivalente C para el caso de distribución lineal de esfuerzos (Figura 3.2 caso a). Los valores exactos son los obtenidos numéricamente resolviendo el problema de autovalores; los valores aproximados son los valores obtenidos mediante la fórmula dada por la Ecuación 3.3. Puede observarse que la aproximación de la fórmula da los valores con un error en el entorno o inferior al 1%. En las leyendas de las figuras "ME" hace referencia a "Máximo en el Extremo"; para las distribuciones de esfuerzos con valores máximos en el centro se emplea la leyenda "MM".

ψ	Distribución Lineal		
	Exacto	Fórmula	Error (%)
1,00	1,000	1,000	0,00%
0,80	1,111	1,105	0,50%
0,60	1,246	1,235	0,89%
0,40	1,414	1,400	1,01%
0,20	1,625	1,615	0,56%
0,00	1,890	1,909	-1,02%

Tabla 3-1 Valores de C para la distribución lineal de esfuerzos

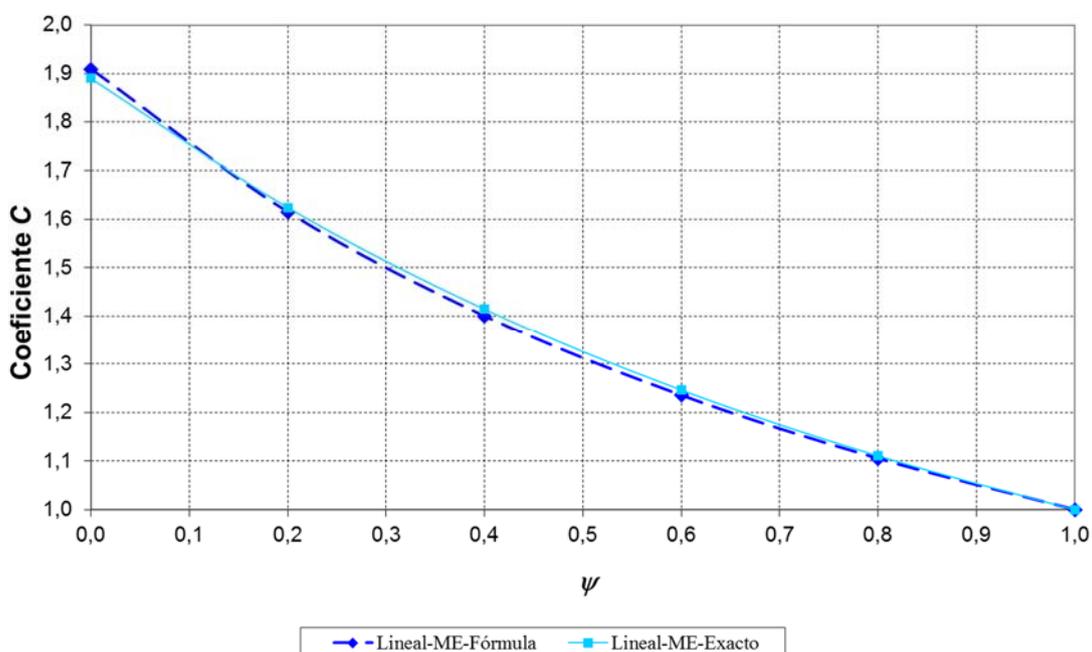


Figura 3-3 Variación de los valores de C para distribución lineal de esfuerzos

De forma análoga, la Tabla 3.2 y la Figura 3.4 corresponde a los valores de C para la distribución de esfuerzos bilineal (Figura 3.2 caso b). En este caso el error máximo, que corresponde al caso de ψ igual a cero, es próximo al 7%.

ψ	Distribución Bilineal		
	Exacto	Fórmula	Error (%)
1,00	1,000	1,000	0,00%
0,80	1,164	1,154	0,89%
0,60	1,391	1,364	2,03%
0,40	1,725	1,667	3,51%
0,20	2,258	2,143	5,36%
0,00	3,208	3,000	6,94%

Tabla 3-2 Valores de C para la distribución bilineal de esfuerzos

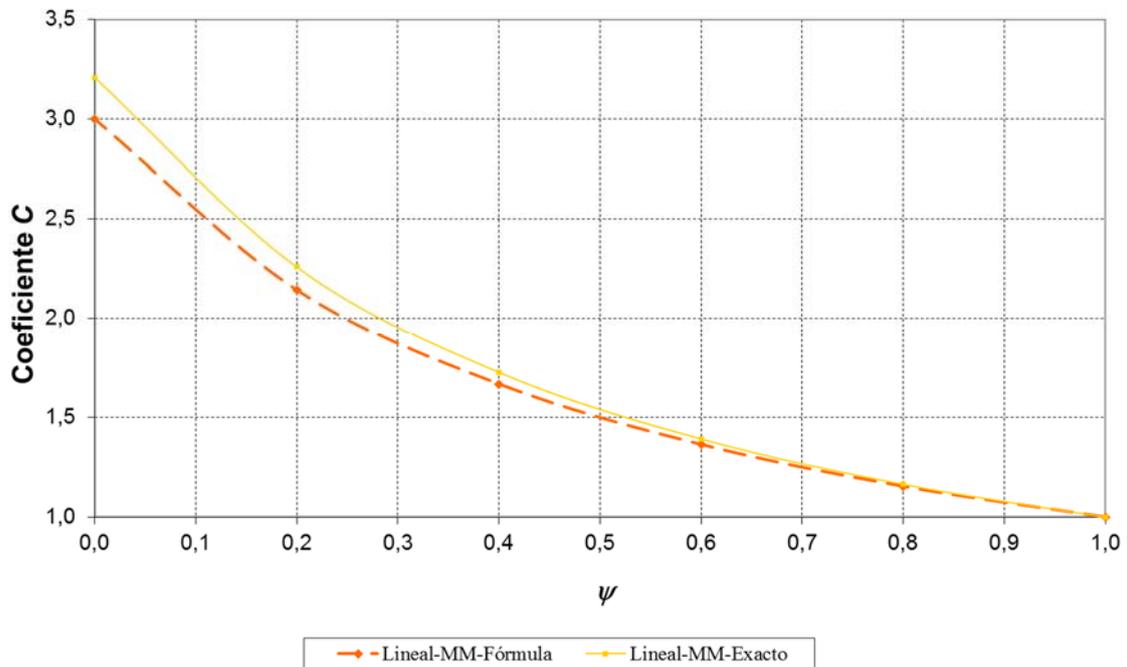


Figura 3-4 Variación de los valores de C para distribución bilineal de esfuerzos

Finalmente, las Tablas 3.3 y 3.4 y las Figuras 3.5 y 3.6 presentan los resultados, exactos y aproximados, para los casos de leyes parabólicas de esfuerzos axiales. La Tabla 3.3 y la Figura 3.5 corresponden a la distribución con valor máximo en el extremo, y la Tabla 3.4 y la Figura 3.6 corresponden a la distribución con valor máximo en el centro. Puede observarse que el valor máximo del error es, para ambos casos, del orden del 1%.

ψ	Distribución Parabólica - Extremo		
	Exacto	Fórmula	Error (%)
1,00	1,000	1,000	0,00%
0,80	1,083	1,080	0,34%
0,60	1,180	1,173	0,55%
0,40	1,291	1,284	0,50%
0,20	1,419	1,419	0,03%
0,00	1,567	1,585	-1,11%

Tabla 3-3 Valores de C para distribución parabólica ME

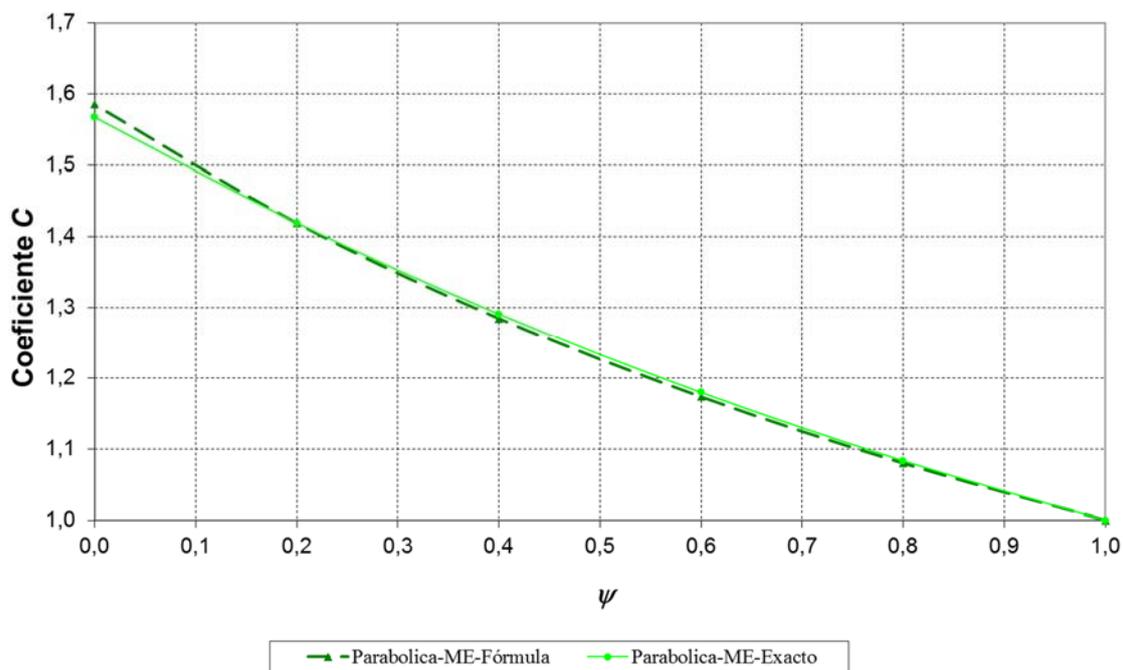


Figura 3-5 Variación de los valores de C para distribución parabólica ME

ψ	Distribución Parabólica - Centro		
	Exacto	Fórmula	Error (%)
1,00	1,000	1,000	0,00%
0,80	1,121	1,117	0,38%
0,60	1,275	1,265	0,75%
0,40	1,473	1,458	1,03%
0,20	1,739	1,721	1,00%
0,00	2,104	2,100	0,19%

Tabla 3-4 Valores de C para distribución parabólica MM

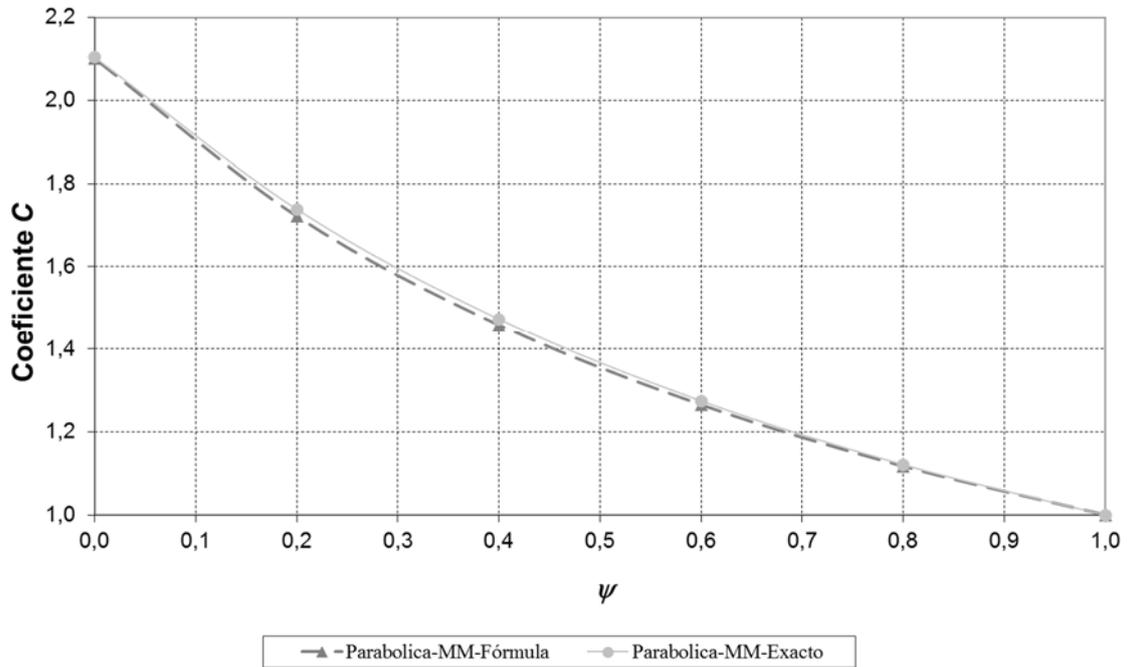


Figura 3-6 Variación de los valores de C para distribución parabólica de MM

Una visión global de los cuatros casos analizados puede verse en la Figura 3.7. Los peores resultados de la fórmula propuesta (Ecuación 3.4) se obtienen para el caso de distribución lineal de esfuerzos con máximo en el centro del elemento.

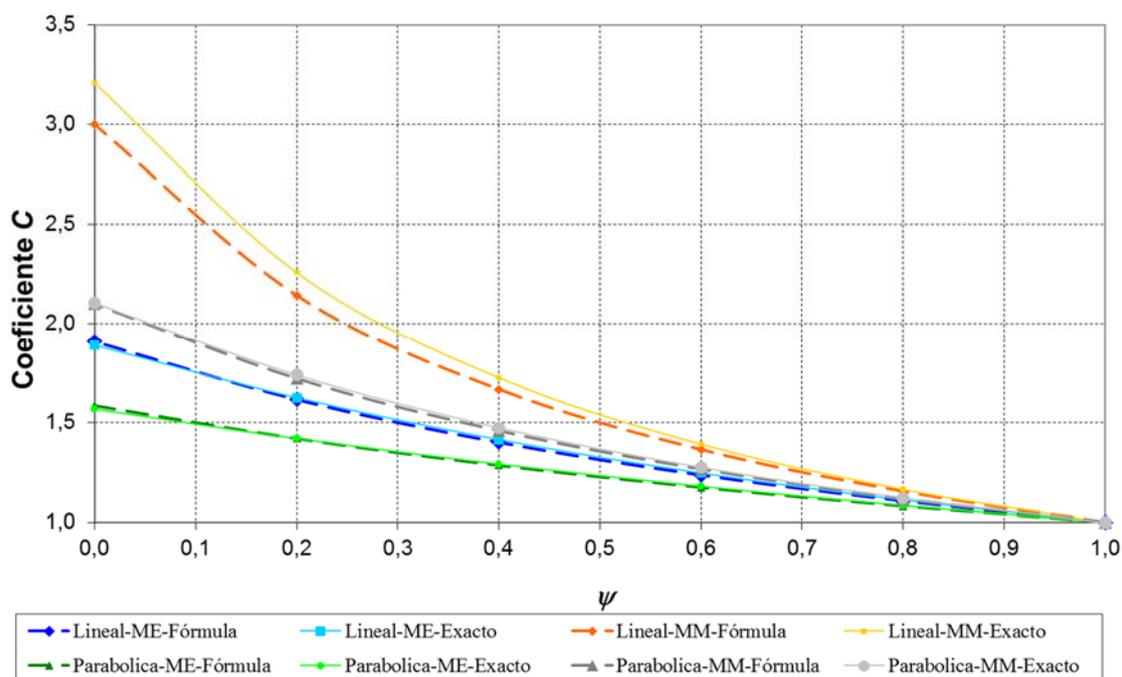


Figura 3-7 Variación de los valores de C para distribución parabólica MM

La Ecuación 3.4 sólo utiliza los esfuerzos en 5 puntos del elemento para, a partir de ellos, obtener un valor aproximado para el coeficiente C. Aunque una mayor exactitud podría encontrarse incrementando el número de esfuerzos a tener en cuenta en la expresión del coeficiente C, los estudios realizados durante la investigación permiten afirmar que la disminución del error no es paralela al incremento de la complejidad en los cálculos. Por otra parte, la Figura 3.7 muestra que la aproximación propuesta es suficientemente buena para todos los casos, y en muchos de ellos extraordinaria.

3.3 MÉTODO DE LA CARGA EQUIVALENTE PARA ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE

Considérese a continuación el supuesto de un elemento de sección variable, sometido a una carga de compresión no uniforme, tal y como se indica en la Figura 3.8.

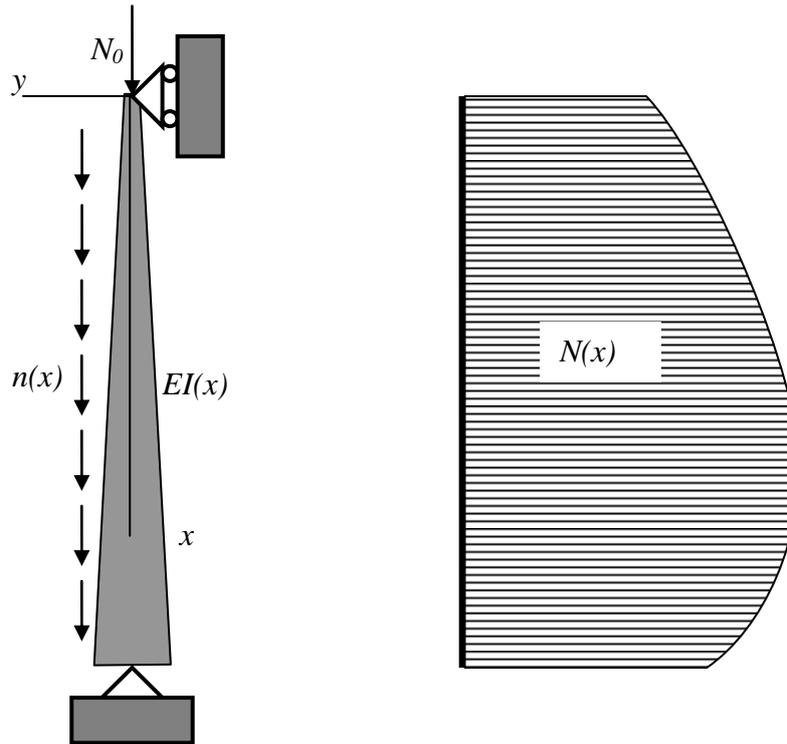


Figura 3-8 Elemento de sección variable y ley de esfuerzos no uniforme

La ecuación diferencial general correspondiente al pandeo elástico de flexión viene dada por la siguiente expresión

$$EI(x)v''(x) + N_0v(x) + R_Hx + \int_0^x n(\eta)[v(x) - v(\eta)]d\eta = 0 \quad (3.5)$$

con

$$R_H = \frac{1}{L} \int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta = 0 \quad (3.6)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.5) se obtiene

$$EI(x)v''(x) + N(x)v(x) + \frac{x}{L} \int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta - \int_0^x n(\eta)v(\eta)d\eta = 0 \quad (3.7)$$

con

$$N(x) = N_0 + \int_0^x n(\eta)d\eta \quad (3.8)$$

y

$$n(x) = \frac{dN(x)}{dx} \quad (3.9)$$

Integrando por partes se obtiene

$$\int_0^x n(\eta)v(\eta)d\eta \equiv \int_0^x \frac{dN(\eta)}{d\eta}v(\eta)d\eta = N(x)v(x) - \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta \quad (3.10)$$

y

$$\int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta \equiv \int_0^L \frac{dN(\eta)}{d\eta}v(\eta)d\eta = -\int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta \quad (3.11)$$

Introduciendo ahora (3.10) y (3.11) en (3.7) se llega a

$$EI(x)v''(x) - \frac{x}{L} \int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta + \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta = 0 \quad (3.12)$$

Multiplicando por $I_m/I(x)$, donde I_m representa la inercia mínima a lo largo del elemento, se obtiene

$$EI_m v''(x) - \frac{I_m}{I(x)} \frac{x}{L} \int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta + \frac{I_m}{I(x)} \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta = 0 \quad (3.13)$$

Consideremos a continuación el caso de un elemento de sección constante con rigidez a flexión igual a EI_m sometido a una carga axial no uniforme definida \hat{N}_0 y $\hat{n}(x)$. La ecuación correspondiente vendría dada

$$EI_m v''(x) - \frac{x}{L} \int_0^L \hat{N}(\eta)v'(\eta)d\eta + \int_0^x \hat{N}(\eta)v'(\eta)d\eta = 0 \quad (3.14)$$

Supongamos que existiera una ley de esfuerzos $\hat{N}(x)$, función de $N(x)$ e $I(x)$, tal que las Ecuaciones (3.13) y (3.14) resultaran idénticas. Para obtener la carga crítica de pandeo elástico correspondiente al elemento de sección variable bastaría con obtener la carga de pandeo elástico del elemento de sección constante sometido a la ley de esfuerzos equivalente. Este método de carga equivalente se resume en la Figura 3.9.

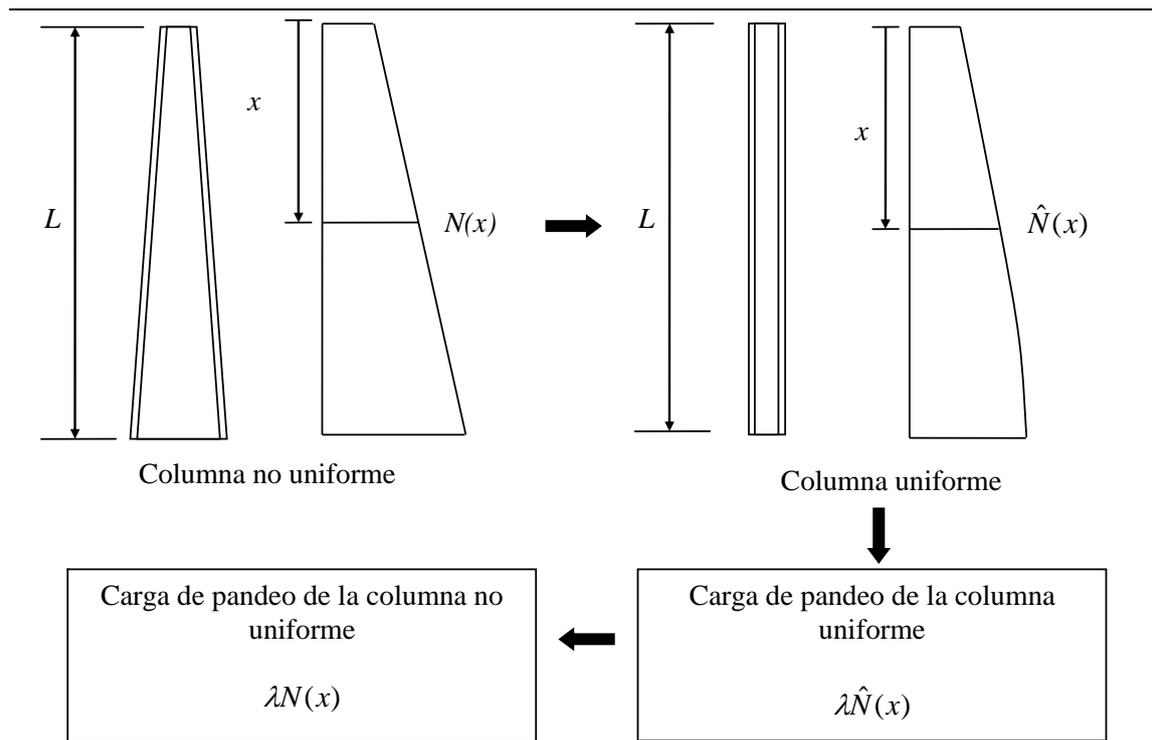


Figura 3-9 Esquema del Método de la Carga Equivalente

Ni en la revisión bibliográfica, ni en los estudios propios, ha sido posible encontrar una solución analítica exacta para la ley de esfuerzos $\hat{N}(x)$ como función de $N(x)$ e $I(x)$. Sin embargo, considerando el significado físico de los términos de las Ecuaciones (3.13) y (3.14), en los trabajos de investigación de la tesis se ha buscado una solución aproximada usando la siguiente expresión general

$$\hat{N}(x) = N(x) \frac{I_m^\chi}{I(x)^\chi} \frac{I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\beta}{I_M^{(2\beta+\gamma)}} \tag{3.15}$$

donde I_1 , I_2 e I_3 son los momentos de inercia correspondientes a x igual 0 , $L/2$ y L , respectivamente; I_M es el valor máximo del momento de inercia a lo largo de la columna, y χ , β y γ son un conjunto de coeficientes a determinar en un proceso de ajuste paramétrico.

Es decir

$$\hat{N}(x) = N(x) \varphi(x) \tag{3.16}$$

con

$$C(\alpha) = \frac{I_m^\chi I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\beta}{I(\alpha) I_M^{2\beta+\gamma}} \quad (3.17)$$

Con el objeto de evaluar la calidad de la aproximación definida por la Ecuación (3.15) y de disponer de datos suficientes para ajustar sus parámetros, se han analizado un conjunto de casos, que se presentan a continuación. En estos casos las columnas han sido modelizadas usando elementos finitos y se ha resuelto el correspondiente problema de autovalores con las rutinas del programa MATLAB.

En lo que sigue se presentan los resultados exactos y los aproximados para el conjunto de casos analizados. Los exactos corresponden a los obtenidos numéricamente con MATLAB, y los aproximados corresponden a los dados por el método de la carga equivalente, usando los valores $\chi=0.30$; $\beta=0.30$; y $\gamma=0.15$ como coeficientes en la Ecuación (3.15). Los resultados se presentan dando, para cada caso, el coeficiente C que relaciona su carga de pandeo elástico de flexión con la carga crítica de Euler correspondiente a la columna uniforme con una rigidez a flexión igual a la menor de la columna no uniforme. Es decir

$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} \quad (3.18)$$

3.3.1 Resultados para columnas con variación lineal de la altura del alma

El primer grupo de casos analizados en el trabajo doctoral corresponde a elementos con sección en doble T con una variación lineal de la altura del alma (en adelante será denominado caso A). Dichos casos son los que se corresponden al combinar los supuestos de distribución de esfuerzos presentados en la Figura 3.2 con la geometría definidos en la Figura 3.10 para tres valores de variación relativa de altura ($\alpha=0.4, 0.6, 0.8$). Con ello se cubre un rango representativo de columnas en lo que a geometría y esbeltez se refiere.

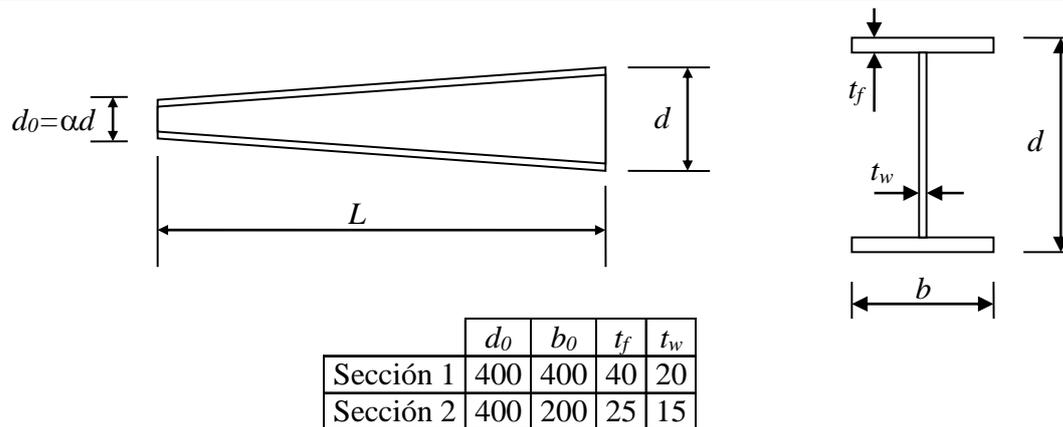


Figura 3-10 Columnas con variación lineal de altura de alma (Caso A)

Los resultados obtenidos, tanto los aproximados, como los obtenidos con el método de la carga equivalente, son presentados y comentados a continuación. Se han estudiado los distintos casos de distribución de esfuerzos definidos en la Figura 3.2. Como se ha indicado anteriormente, en las tablas y gráficos la expresión “ME” corresponde a máximo esfuerzo en el extremo del elemento, y la expresión “MM” corresponde a máximo a la mitad del elemento.

La tabla 3.5 presenta los resultados correspondientes a una distribución lineal de esfuerzo axial con máximo en el extremos (Figura 3.2.a). Como se indica en el encabezamiento de la tabla, los resultados corresponden a la Sección 1 (Figura 3.10). Puede observarse que el error mayor es del 9,73% y corresponde al caso de una distribución triangular de esfuerzos ($\psi=0$) y variación de sección dada por $\alpha=0,40$. Un variación de sección de $\alpha=0,40$ implica que la altura de la sección varía de 400mm a 1000mm, lo que equivale, para la sección 1, a que la inercia de la sección mayor es 7,92 veces la inercia de la sección menor.

	Sección 1-Caso A - Distribución Lineal ME								
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,81	2,87	-0,45%	1,23%	7,65%
0,80	1,45	2,07	3,51	1,46	2,04	3,26	-0,40%	1,34%	7,86%
0,60	1,64	2,36	4,07	1,64	2,33	3,76	-0,35%	1,48%	8,15%
0,40	1,88	2,74	4,81	1,88	2,70	4,43	-0,27%	1,65%	8,52%
0,20	2,18	3,24	5,83	2,19	3,18	5,34	-0,17%	1,89%	9,02%
0,00	2,58	3,90	7,25	2,58	3,82	6,60	-0,05%	2,21%	9,73%

Tabla 3-5 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal ME

La Tabla 3.6 corresponde a una distribución de esfuerzo lineal con máximo en el centro del elemento. El máximo error es de 8,72% y se presenta para $\alpha=0,40$ con una distribución de esfuerzos triangular.

Sección 1-Caso A - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,81	2,87	-0,45%	1,23%	7,65%
0,80	1,51	2,14	3,60	1,52	2,11	3,34	-0,44%	1,26%	7,74%
0,60	1,81	2,56	4,33	1,81	2,53	4,01	-0,44%	1,30%	7,87%
0,40	2,24	3,18	5,40	2,25	3,14	5,00	-0,42%	1,35%	8,06%
0,20	2,93	4,18	7,14	2,94	4,12	6,59	-0,41%	1,43%	8,32%
0,00	4,17	5,97	10,31	4,19	5,88	9,49	-0,39%	1,54%	8,72%

Tabla 3-6 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal MM

Las Tablas 3.7 y 3.8 presentan los resultados para las distribuciones parabólicas, con máximos en el extremo y en el centro, respectivamente. Los máximos errores del método de la carga equivalente corresponden de nuevo a $\alpha=0,40$ y $\psi=0$, es decir, máxima variación de sección y distribuciones parabólicas con mínimo valor igual a cero.

Sección 1-Caso A - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,81	2,87	-0,45%	1,23%	7,65%
0,80	1,41	2,02	3,43	1,42	1,99	3,18	-0,40%	1,36%	7,92%
0,60	1,55	2,23	3,85	1,56	2,20	3,55	-0,35%	1,49%	8,23%
0,40	1,71	2,49	4,36	1,71	2,45	4,02	-0,29%	1,65%	8,61%
0,20	1,90	2,80	5,01	1,90	2,75	4,59	-0,22%	1,84%	9,05%
0,00	2,12	3,17	5,81	2,12	3,11	5,30	-0,13%	2,06%	9,57%

Tabla 3-7 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso A - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,81	2,87	-0,45%	1,23%	7,65%
0,80	1,45	2,06	3,48	1,46	2,04	3,22	-0,43%	1,31%	7,89%
0,60	1,65	2,35	3,98	1,66	2,32	3,68	-0,42%	1,39%	8,18%
0,40	1,91	2,72	4,64	1,92	2,68	4,27	-0,40%	1,51%	8,54%
0,20	2,26	3,23	5,53	2,27	3,17	5,08	-0,37%	1,63%	8,99%
0,00	2,74	3,92	6,78	2,74	3,85	6,19	-0,34%	1,78%	9,51%

Tabla 3-8 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica MM

Las Figuras 3.11 a 3.13 muestran, para el caso A y sección 1, la comparación de los resultados exactos y los del método de la carga equivalente para los distintos diagramas de distribución de esfuerzos analizados. Puede observarse que para $\alpha=0,80$ (variación de inercia de 166%) y $\alpha=0,60$ (variación de inercia de 318%) el método de la carga equivalente proporciona unos resultados aproximados de gran calidad. Resultados que siguen siendo aceptables incluso para $\alpha=0,40$ (variación de inercia de 792%).

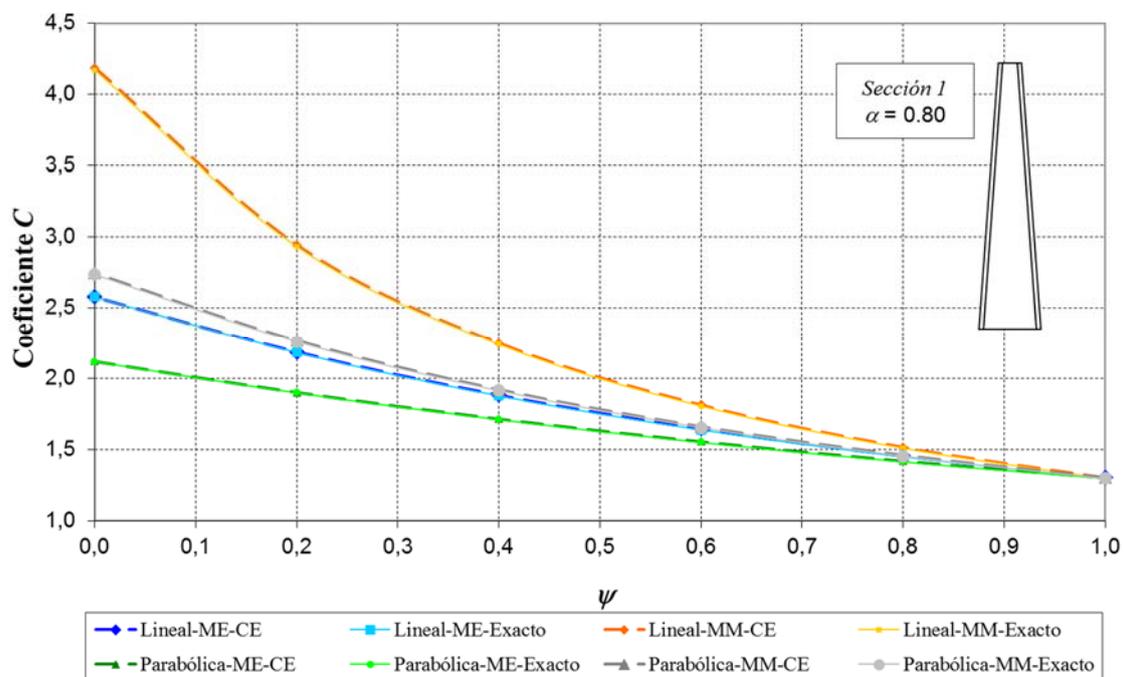


Figura 3-11 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso A y $\alpha=0,80$

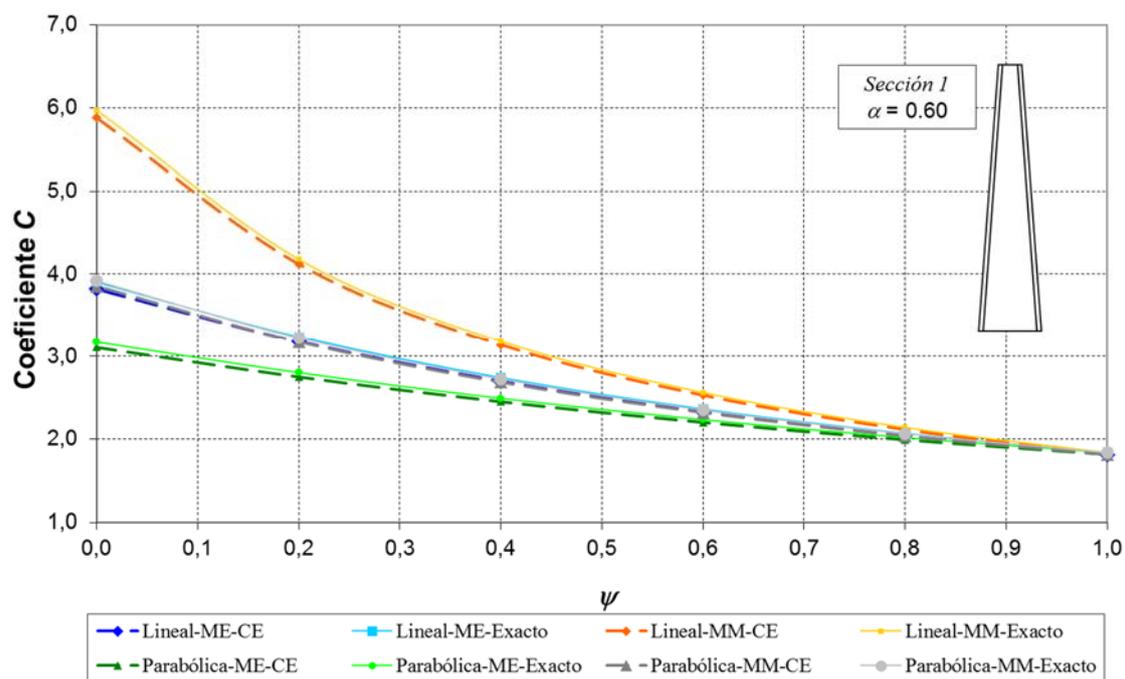


Figura 3-12 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso A y $\alpha=0,60$

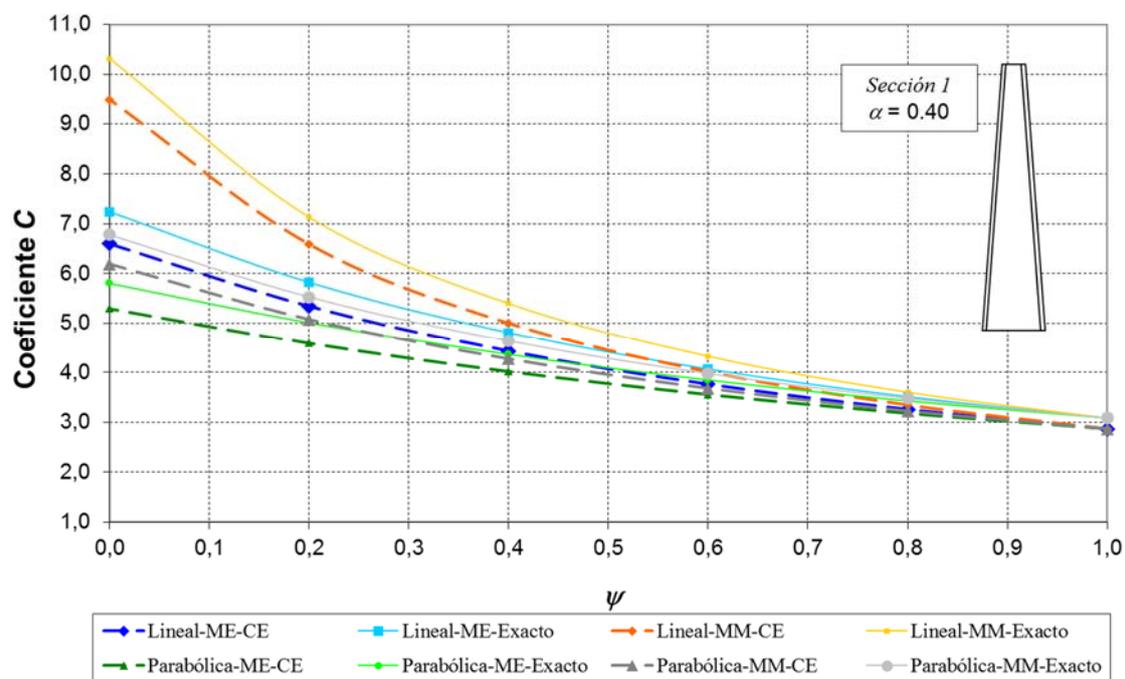


Figura 3-13 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso A y $\alpha=0,40$

Las Tablas 3.9 a 3.12 presentan los resultados para un elemento estructural con la sección 2 (Figura 3.10) y caso A. Es decir, una sección cuya

anchura es la mitad que el supuesto anterior (sección 1) con menores espesores de alas y alma, y una variación lineal de la altura total de la sección.

Sección 2-Caso A - Distribución Lineal ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,31	1,85	3,00	-0,57%	0,64%	5,89%
0,80	1,45	2,10	3,63	1,46	2,08	3,42	-0,53%	0,75%	6,12%
0,60	1,64	2,39	4,21	1,65	2,37	3,95	-0,47%	0,89%	6,41%
0,40	1,88	2,78	4,98	1,89	2,75	4,67	-0,40%	1,07%	6,80%
0,20	2,19	3,29	6,06	2,20	3,25	5,64	-0,30%	1,31%	7,34%
0,00	2,59	3,97	7,56	2,59	3,90	7,00	-0,17%	1,65%	8,11%

Tabla 3-9 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal ME

Sección 2-Caso A - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,31	1,85	3,00	-0,57%	0,64%	5,89%
0,80	1,52	2,17	3,72	1,52	2,15	3,51	-0,57%	0,67%	5,99%
0,60	1,81	2,59	4,46	1,82	2,58	4,20	-0,56%	0,71%	6,13%
0,40	2,25	3,22	5,57	2,26	3,20	5,24	-0,55%	0,76%	6,33%
0,20	2,94	4,23	7,37	2,96	4,20	6,91	-0,54%	0,84%	6,62%
0,00	4,19	6,05	10,66	4,21	5,99	9,96	-0,51%	0,96%	7,08%

Tabla 3-10 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal MM

Sección 2-Caso A - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,31	1,85	3,00	-0,57%	0,64%	5,89%
0,80	1,42	2,04	3,54	1,43	2,03	3,33	-0,53%	0,76%	6,17%
0,60	1,56	2,26	3,98	1,56	2,24	3,74	-0,47%	0,90%	6,51%
0,40	1,72	2,53	4,52	1,72	2,50	4,23	-0,41%	1,08%	6,91%
0,20	1,91	2,84	5,20	1,91	2,81	4,84	-0,33%	1,27%	7,38%
0,00	2,13	3,22	6,05	2,13	3,18	5,60	-0,25%	1,50%	7,94%

Tabla 3-11 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso A - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,31	1,85	3,00	-0,57%	0,64%	5,89%
0,80	1,46	2,09	3,59	1,47	2,07	3,38	-0,56%	0,72%	6,15%
0,60	1,66	2,38	4,11	1,67	2,36	3,86	-0,54%	0,81%	6,47%
0,40	1,92	2,76	4,79	1,93	2,73	4,48	-0,52%	0,92%	6,86%
0,20	2,27	3,27	5,71	2,28	3,23	5,32	-0,49%	1,06%	7,35%
0,00	2,75	3,97	7,01	2,76	3,92	6,50	-0,47%	1,23%	7,93%

Tabla 3-12 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica MM

El error máximo de los valores proporcionados por el Método de la Carga Equivalente son del 8,11% para la distribución de esfuerzos Lineal ME, del 7,08% para la distribución Lineal MM, del 7,94% para la distribución Parabólica ME y del 7,93% para la distribución Parabólica MM. En todos los casos corresponden a máxima variación de sección ($\alpha=0,40$) y máxima variación de esfuerzo ($\psi=0$).

Las Figuras 3.14 a 3.16 muestran, para el caso A y sección 2, la comparación de los resultados exactos y los del método de la carga equivalente para los distintos diagramas de distribución de esfuerzos analizados. Puede observarse que, al igual que ocurría para sección 1, para $\alpha=0,80$ (variación de inercia de 168%) y $\alpha=0,60$ (variación de inercia de 329%) el método de la carga equivalente proporciona unos resultados aproximados de gran calidad. Resultados que siguen siendo aceptables incluso para $\alpha=0,40$ (variación de inercia de 871%).

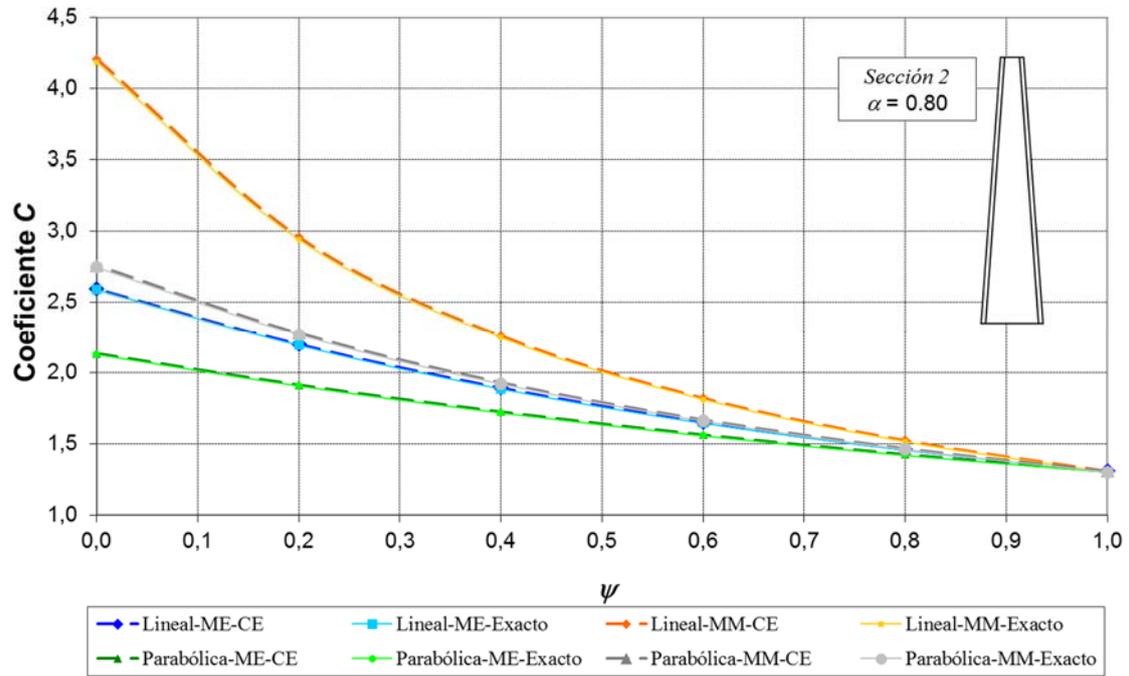


Figura 3-14 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,80$

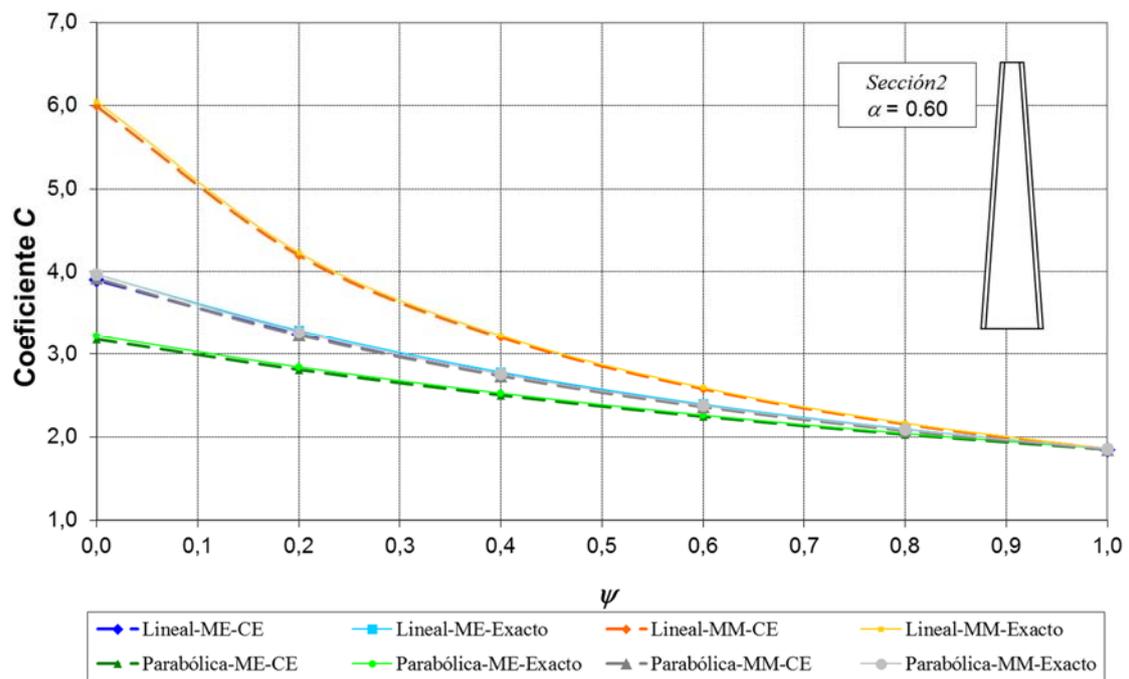


Figura 3-15 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,60$

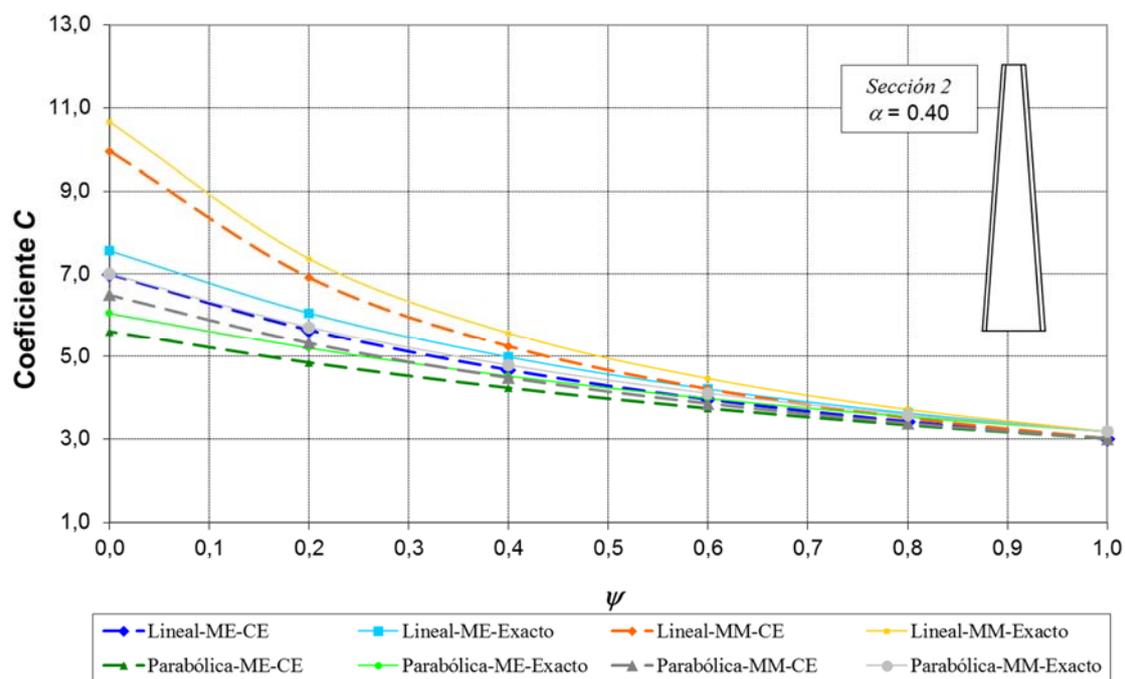


Figura 3-16 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,40$

En términos generales, puede afirmarse que el Método de la Carga Equivalente proporciona resultados altamente satisfactorios para elementos con variación lineal de altura de sección.

3.3.2 Resultados para columnas con doble variación lineal de altura de alma

El segundo caso analizado corresponde a una variación lineal de altura de la sección con máximo en el centro, tal y como indica la Figura 3.17. A efectos de gráficos y tablas, este elemento será designado como Caso B y se utilizarán las mismas dos secciones estudiadas anteriormente, cuyos valores vienen dados también en la Figura 3.17.

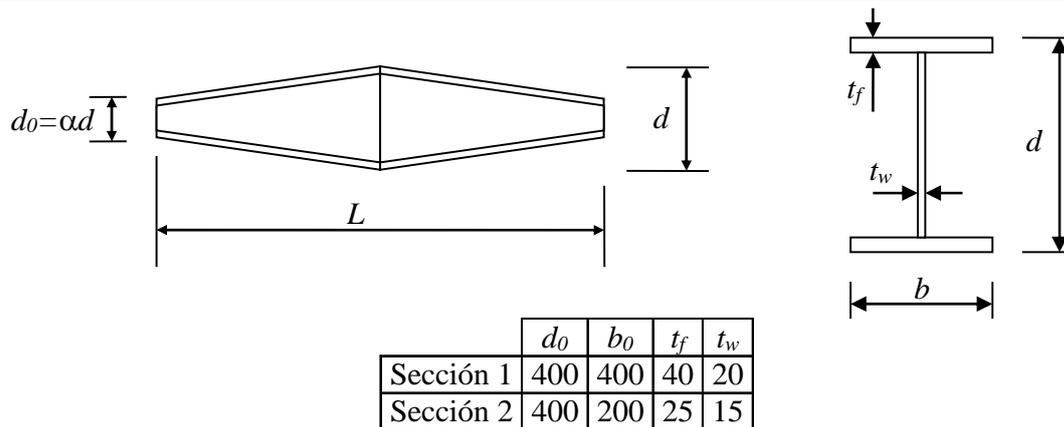


Figura 3-17 Columnas con doble variación lineal de altura de alma (Caso B)

La tabla 3.13 presenta los resultados correspondientes a una distribución lineal de esfuerzo axial con máximo en el extremos (Figura 3.2.a). Como se indica en el encabezamiento de la tabla, los resultados corresponden a la Sección 1 (Figura 3.10). Puede observarse que el error mayor es del 4,08% y corresponde al caso de una distribución uniforme de esfuerzos ($\psi=1$) y variación de sección dada por $\alpha=0,40$.

Sección 1-Caso B - Distribución Lineal ME										
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)			
	α			α			α			
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,25	4,33	0,90%	2,19%	4,08%	
0,80	1,59	2,55	5,00	1,58	2,50	4,81	0,87%	2,13%	3,94%	
0,60	1,79	2,85	5,59	1,77	2,80	5,40	0,81%	1,94%	3,50%	
0,40	2,02	3,22	6,27	2,01	3,18	6,12	0,65%	1,51%	2,57%	
0,20	2,32	3,67	7,07	2,31	3,64	7,00	0,35%	0,74%	0,94%	
0,00	2,68	4,20	7,96	2,68	4,22	8,09	-0,17%	-0,53%	-1,57%	

Tabla 3-13 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal ME

Las Tablas 3.14 a 3.16 presentan los resultados para el resto de distribuciones de esfuerzos. Los valores máximos de error se dan para las distribuciones con máximos esfuerzos en el centro del elemento: 12,66% para la distribución Lineal MM y 11,12% para la distribución Parabólica MM. En ambos casos corresponde a $\alpha=0,40$ y $\psi=0$. Por lo que hace referencia a la distribución Parabólica ME, el máximo error es de 4,16% y se produce para $\alpha=0,40$ y $\psi=0,8$.

Sección 1-Caso B - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,25	4,33	0,90%	2,19%	4,08%
0,80	1,68	2,70	5,33	1,66	2,63	5,08	1,08%	2,60%	4,82%
0,60	2,01	3,26	6,51	1,99	3,16	6,15	1,32%	3,15%	5,84%
0,40	2,52	4,11	8,33	2,48	3,96	7,76	1,65%	3,94%	7,34%
0,20	3,33	5,53	11,46	3,26	5,26	10,46	2,11%	5,08%	9,61%
0,00	4,82	8,21	17,70	4,69	7,70	15,71	2,71%	6,57%	12,66%

Tabla 3-14 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal MM

Sección 1-Caso B - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,25	4,33	0,90%	2,19%	4,08%
0,80	1,56	2,49	4,90	1,54	2,44	4,71	0,93%	2,25%	4,16%
0,60	1,70	2,72	5,34	1,68	2,66	5,14	0,92%	2,21%	4,02%
0,40	1,86	2,97	5,83	1,84	2,91	5,63	0,86%	2,02%	3,53%
0,20	2,04	3,26	6,36	2,02	3,21	6,20	0,72%	1,61%	2,57%
0,00	2,24	3,57	6,92	2,23	3,54	6,85	0,46%	0,92%	1,06%

Tabla 3-15 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso B - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,25	4,33	0,90%	2,19%	4,08%
0,80	1,62	2,60	5,15	1,60	2,53	4,91	1,11%	2,68%	5,00%
0,60	1,85	3,00	6,00	1,82	2,90	5,65	1,35%	3,27%	6,14%
0,40	2,15	3,52	7,16	2,12	3,39	6,65	1,65%	3,99%	7,57%
0,20	2,56	4,25	8,80	2,51	4,05	8,05	1,99%	4,85%	9,31%
0,00	3,13	5,28	11,22	3,06	4,99	10,09	2,34%	5,72%	11,12%

Tabla 3-16 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica MM

Las Figuras 3.18 a 3.20 muestran de forma gráfica la comparación entre los valores exactos y los obtenidos con el Método de la Carga Equivalente. Al igual que ocurría con el caso A, la aproximación obtenida es de gran calidad, a pesar de que el gradiente de variación de altura es el doble que en el caso anterior.

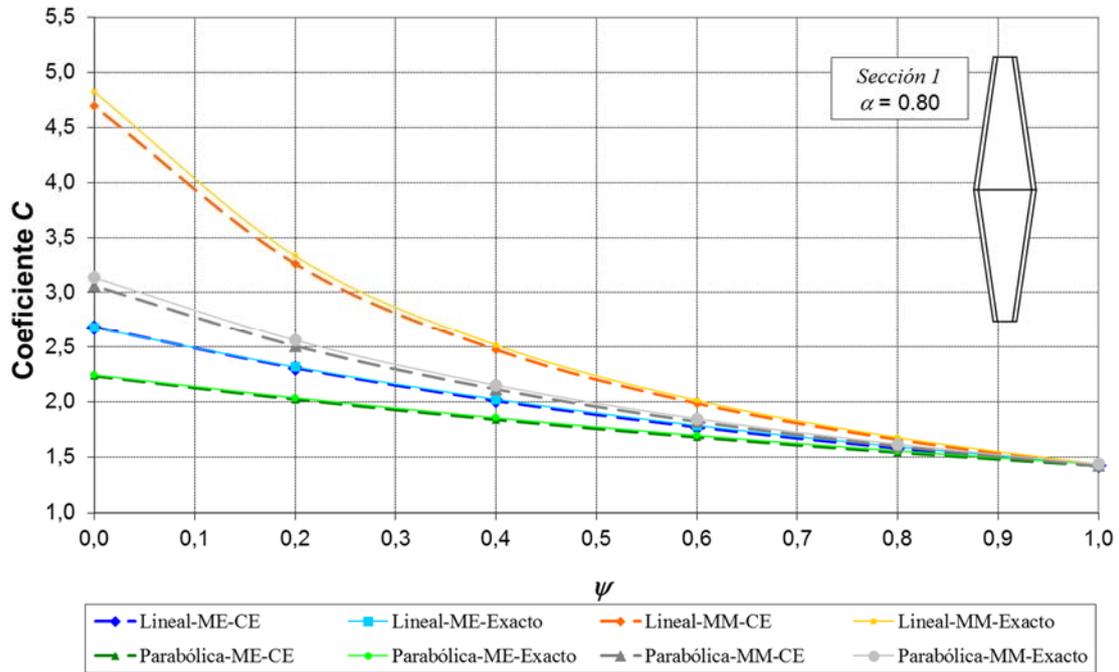


Figura 3-18 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,80$

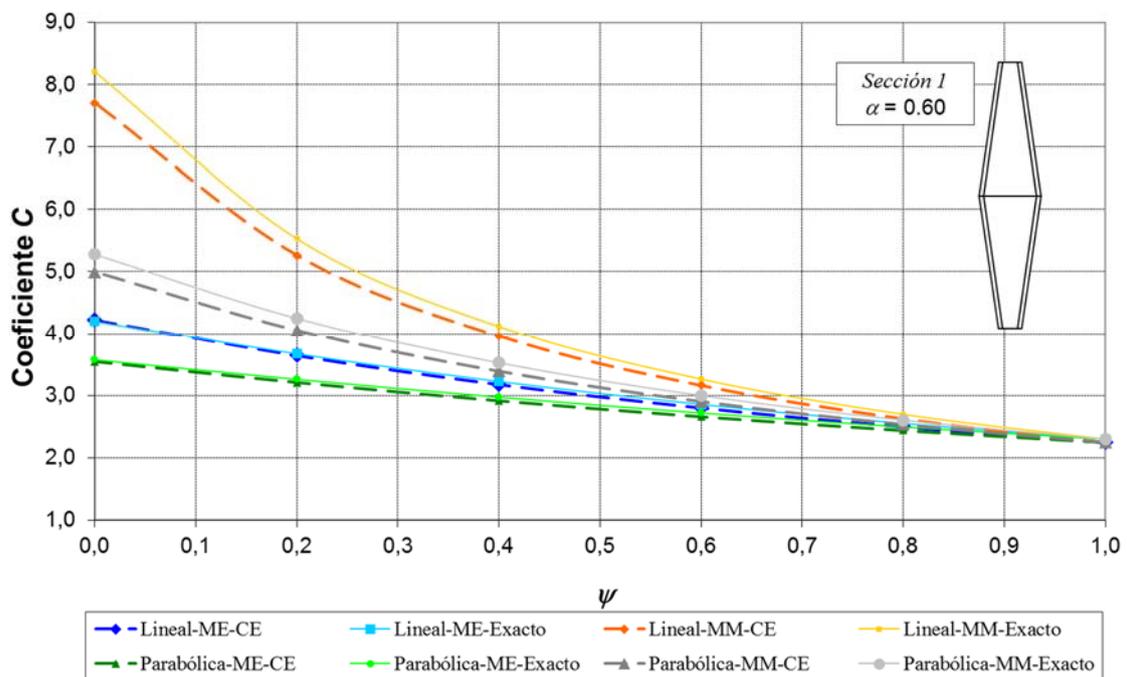


Figura 3-19 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,60$

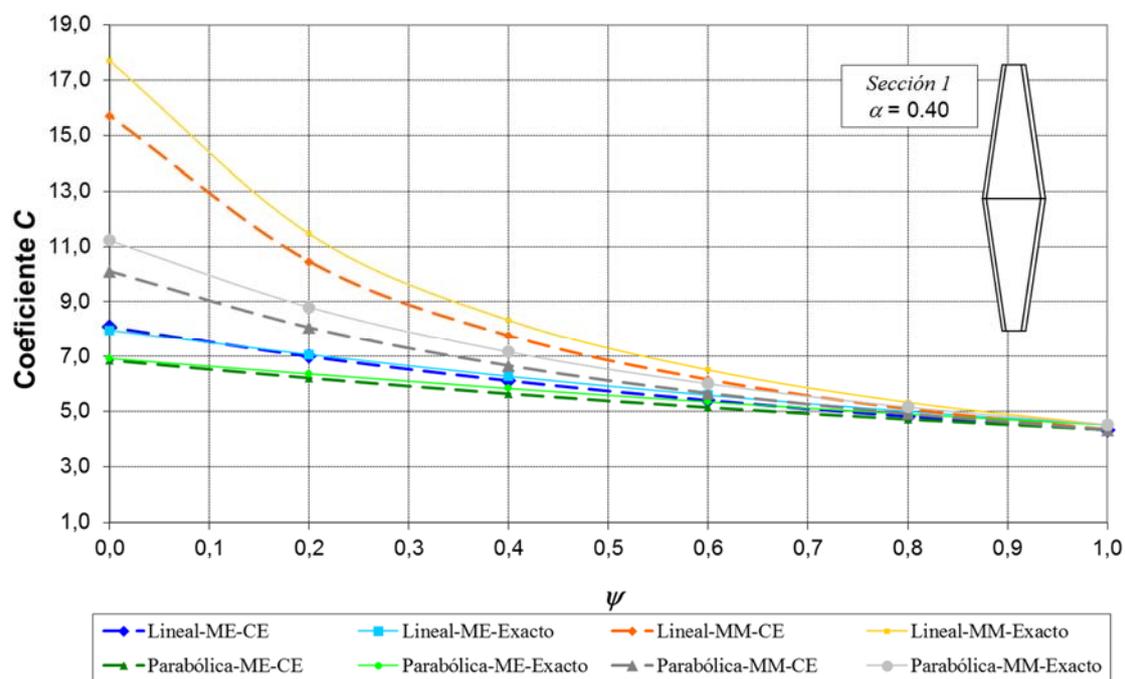


Figura 3-20 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso B y $\alpha=0,40$

Similares resultados se obtienen cuando el análisis se realiza para la sección 2, es decir, para el caso de sección con ala estrecha. Las Tablas 3.17 a 3.20 muestran los resultados. Puede observarse que los máximos errores vuelven a producirse para las distribuciones con valores máximos de esfuerzo en el centro del elemento y son de 12,40% para la distribución lineal y 10,69% para la distribución parabólica. En las distribuciones con esfuerzos máximos en los extremos los errores máximos son de 3,21% para la lineal y de 2,93% para la parabólica.

Sección 2-Caso B - Distribución Lineal ME									
ψ	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,30	4,62	0,85%	1,86%	2,84%
0,80	1,60	2,60	5,27	1,59	2,56	5,13	0,82%	1,79%	2,69%
0,60	1,80	2,91	5,88	1,78	2,87	5,75	0,75%	1,59%	2,21%
0,40	2,04	3,29	6,59	2,02	3,25	6,52	0,59%	1,15%	1,21%
0,20	2,33	3,74	7,42	2,32	3,73	7,46	0,28%	0,34%	-0,54%
0,00	2,69	4,28	8,34	2,70	4,32	8,61	-0,24%	-0,99%	-3,21%

Tabla 3-17 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal ME

Sección 2-Caso B - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,30	4,62	0,85%	1,86%	2,84%
0,80	1,69	2,75	5,62	1,67	2,69	5,42	1,03%	2,29%	3,64%
0,60	2,03	3,33	6,87	2,00	3,24	6,55	1,27%	2,87%	4,75%
0,40	2,53	4,20	8,81	2,49	4,05	8,28	1,61%	3,70%	6,38%
0,20	3,35	5,66	12,16	3,28	5,39	11,17	2,10%	4,91%	8,90%
0,00	4,86	8,42	18,91	4,73	7,90	16,82	2,72%	6,52%	12,40%

Tabla 3-18 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal MM

Sección 2-Caso B - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,30	4,62	0,85%	1,86%	2,84%
0,80	1,57	2,54	5,16	1,55	2,50	5,02	0,88%	1,92%	2,93%
0,60	1,71	2,77	5,63	1,69	2,72	5,47	0,87%	1,88%	2,78%
0,40	1,87	3,03	6,14	1,85	2,98	6,00	0,80%	1,68%	2,24%
0,20	2,05	3,32	6,69	2,04	3,28	6,61	0,66%	1,25%	1,21%
0,00	2,26	3,64	7,27	2,25	3,62	7,30	0,39%	0,53%	-0,42%

Tabla 3-19 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso B - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,30	4,62	0,85%	1,86%	2,84%
0,80	1,63	2,66	5,43	1,61	2,60	5,23	1,06%	2,37%	3,83%
0,60	1,86	3,06	6,34	1,84	2,97	6,03	1,31%	2,99%	5,08%
0,40	2,16	3,60	7,57	2,13	3,47	7,10	1,62%	3,76%	6,66%
0,20	2,58	4,34	9,34	2,53	4,15	8,60	1,97%	4,67%	8,60%
0,00	3,16	5,41	11,95	3,08	5,12	10,80	2,34%	5,62%	10,69%

Tabla 3-20 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica MM

Las Figuras 3.21 a 3.23 comparan gráficamente los resultados obtenidos. Puede observarse que, en términos generales, el Método de la Carga Equivalente proporciona resultados inferiores a los valores exactos. Esta característica ha sido buscada en el proceso de ajuste de los coeficientes α , β y

γ de la fórmula que relaciona la distribución de esfuerzos equivalente, a aplicar al elemento con sección constante igual a la sección mínima, con la distribución de esfuerzos original (Ecuación 3.17).

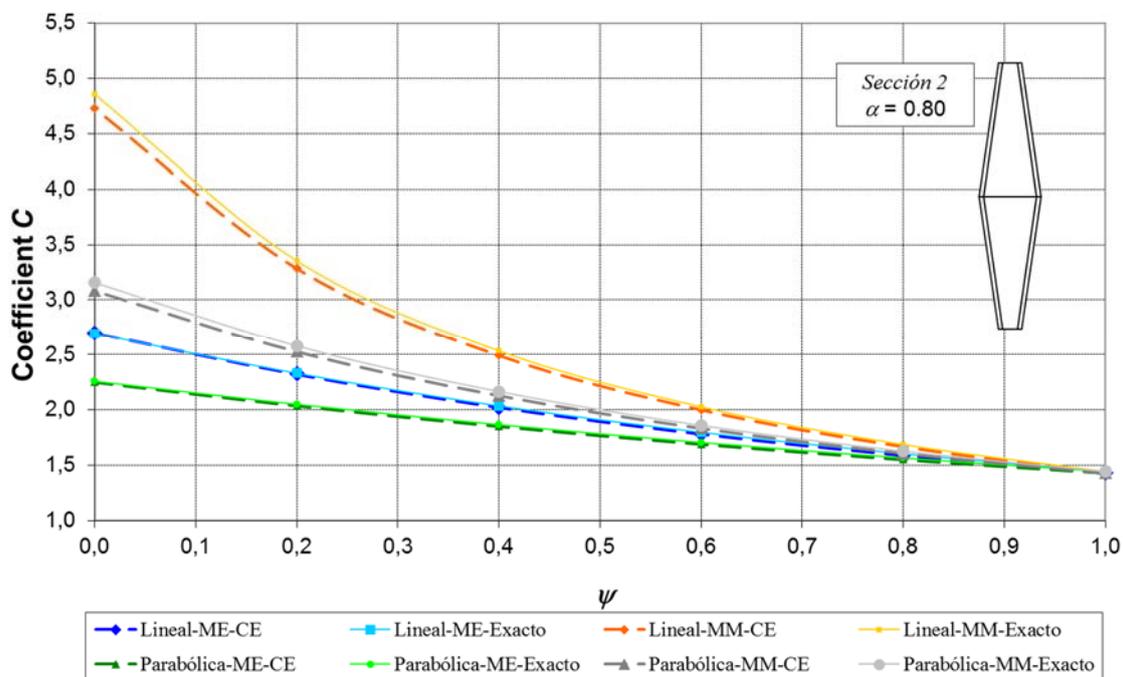


Figura 3-21 Método CE. Coeficiente C para sección 2 - caso B y $\alpha=0,80$

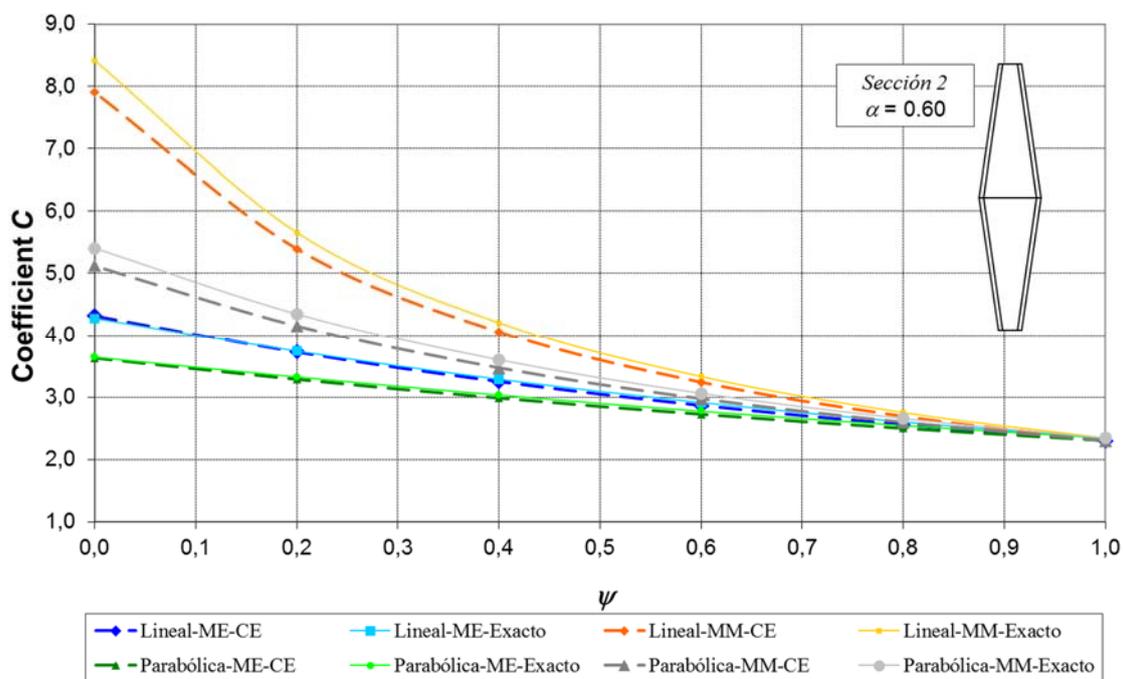


Figura 3-22 Método CE. Coeficiente C para sección 2 – caso B y $\alpha=0,60$

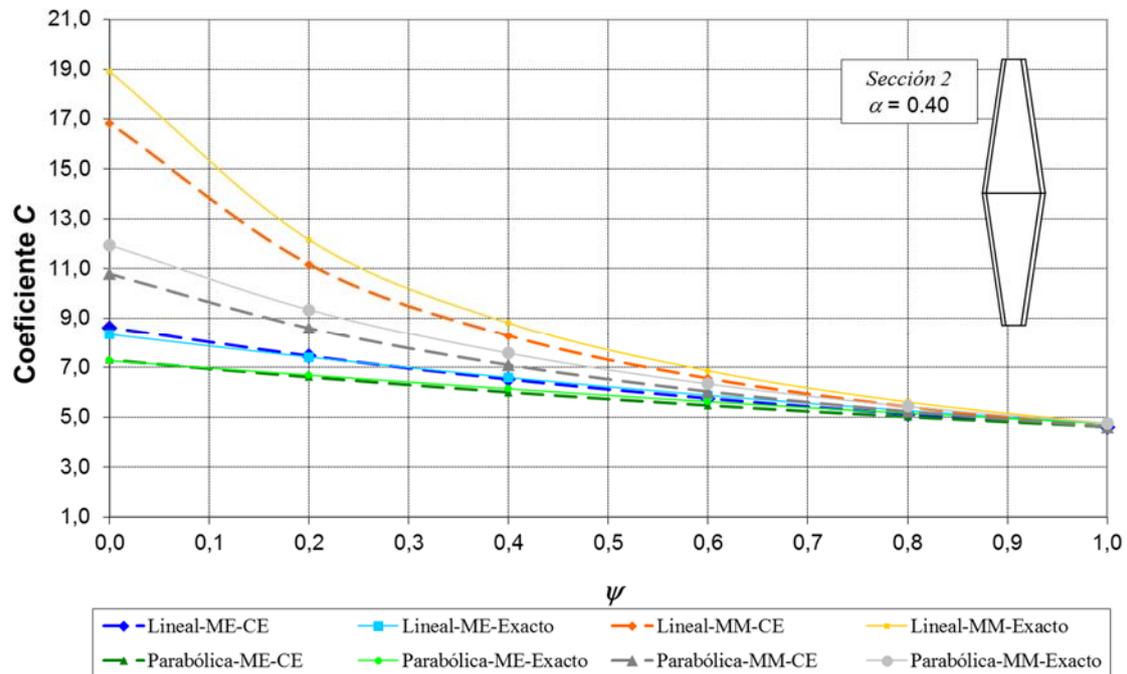


Figura 3-23 Método CE. Coeficiente C para sección 2 - caso B y $\alpha=0,40$

Al igual que ocurría con el caso A, los resultados obtenidos por el Método de la Carga Equivalente para las distintas distribuciones de esfuerzo son más que satisfactorios. A pesar de que en el presente caso (caso B) el gradiente de variación de altura de sección, y con ello de inercia, es el doble que en el caso anterior, los errores máximos se mantienen dentro de un margen aceptable para un procedimiento aproximado como el presentado.

3.3.3 Resultados para columnas con variación lineal de alma y alas

El tercer y último caso de elemento considerado es el mostrado en la Figura 3.24. Se trata de un supuesto en el que la altura y la anchura de la sección varían linealmente, estado la variación definida por el mismo coeficiente α . Al igual que en los casos anteriores, el estudio comparativo se realiza para dos secciones: una con ratio altura/anchura igual a 1, la otra con ratio 0,5 y menores espesores, tal y como se muestra en la Figura 3.24. Este supuesto de elemento es denominado, a efectos de tablas, Caso C.

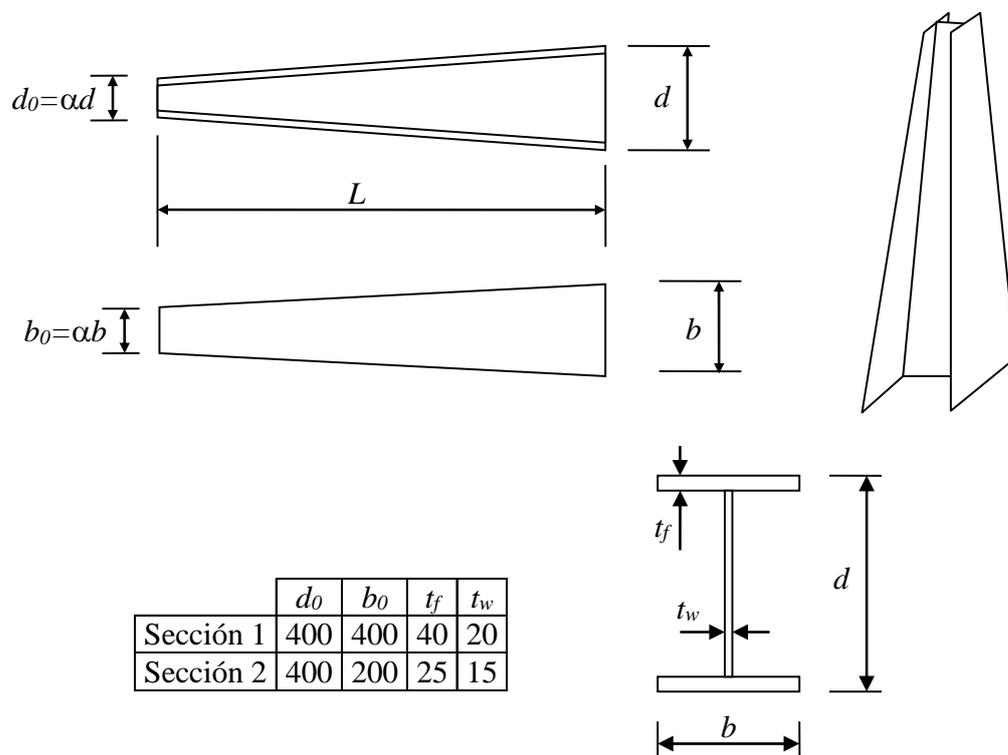


Figura 3-24 Columnas con variación lineal de altura de alma y alas (Caso C)

	Sección 1-Caso C - Distribución Lineal ME								
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,31	4,57	1,45	2,30	4,28	-0,90%	0,45%	6,82%
0,80	1,61	2,62	5,26	1,62	2,60	4,91	-0,82%	0,60%	7,16%
0,60	1,83	3,01	6,17	1,84	2,99	5,73	-0,75%	0,80%	7,60%
0,40	2,10	3,53	7,43	2,12	3,49	6,86	-0,65%	1,06%	8,21%
0,20	2,46	4,22	9,23	2,47	4,16	8,47	-0,50%	1,42%	9,07%
0,00	2,92	5,18	11,90	2,93	5,08	10,78	-0,31%	1,94%	10,37%

Tabla 3-21 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal ME

Sección 1-Caso C - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,31	4,57	1,45	2,30	4,28	-0,90%	0,45%	6,82%
0,80	1,67	2,70	5,35	1,69	2,68	5,00	-0,88%	0,50%	7,01%
0,60	2,00	3,23	6,45	2,02	3,21	6,01	-0,87%	0,57%	7,28%
0,40	2,48	4,02	8,09	2,51	3,99	7,52	-0,85%	0,67%	7,65%
0,20	3,26	5,29	10,79	3,28	5,25	9,97	-0,82%	0,83%	8,24%
0,00	4,63	7,59	15,81	4,67	7,51	14,48	-0,78%	1,08%	9,18%

Tabla 3-22 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal MM

Sección 1-Caso C - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,31	4,57	1,45	2,30	4,28	-0,90%	0,45%	6,82%
0,80	1,57	2,55	5,14	1,58	2,54	4,79	-0,82%	0,63%	7,26%
0,60	1,73	2,85	5,84	1,74	2,82	5,42	-0,75%	0,85%	7,79%
0,40	1,91	3,20	6,74	1,93	3,17	6,21	-0,65%	1,10%	8,45%
0,20	2,13	3,64	7,90	2,14	3,59	7,23	-0,55%	1,40%	9,27%
0,00	2,39	4,17	9,39	2,40	4,10	8,52	-0,42%	1,76%	10,25%

Tabla 3-23 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso C - Distribución Parabólica MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Carga Equivalente</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,31	4,57	1,45	2,30	4,28	-0,90%	0,45%	6,82%
0,80	1,61	2,60	5,18	1,63	2,58	4,82	-0,87%	0,58%	7,28%
0,60	1,84	2,97	5,95	1,85	2,94	5,52	-0,83%	0,76%	7,86%
0,40	2,12	3,44	6,99	2,14	3,41	6,43	-0,79%	0,97%	8,59%
0,20	2,51	4,09	8,41	2,53	4,04	7,68	-0,74%	1,24%	9,51%
0,00	3,04	4,99	10,43	3,06	4,91	9,43	-0,68%	1,56%	10,64%

Tabla 3-24 Método CE. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica MM

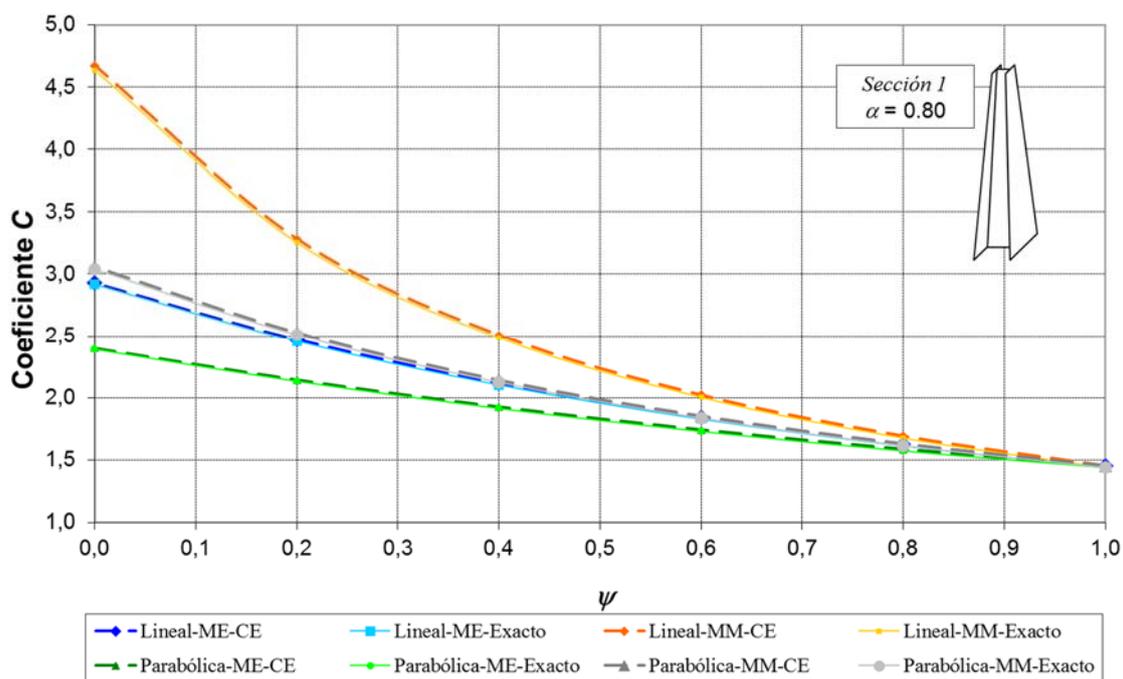


Figura 3-25 Método CE. Coeficiente C para seção 1–caso C y $\alpha=0,80$

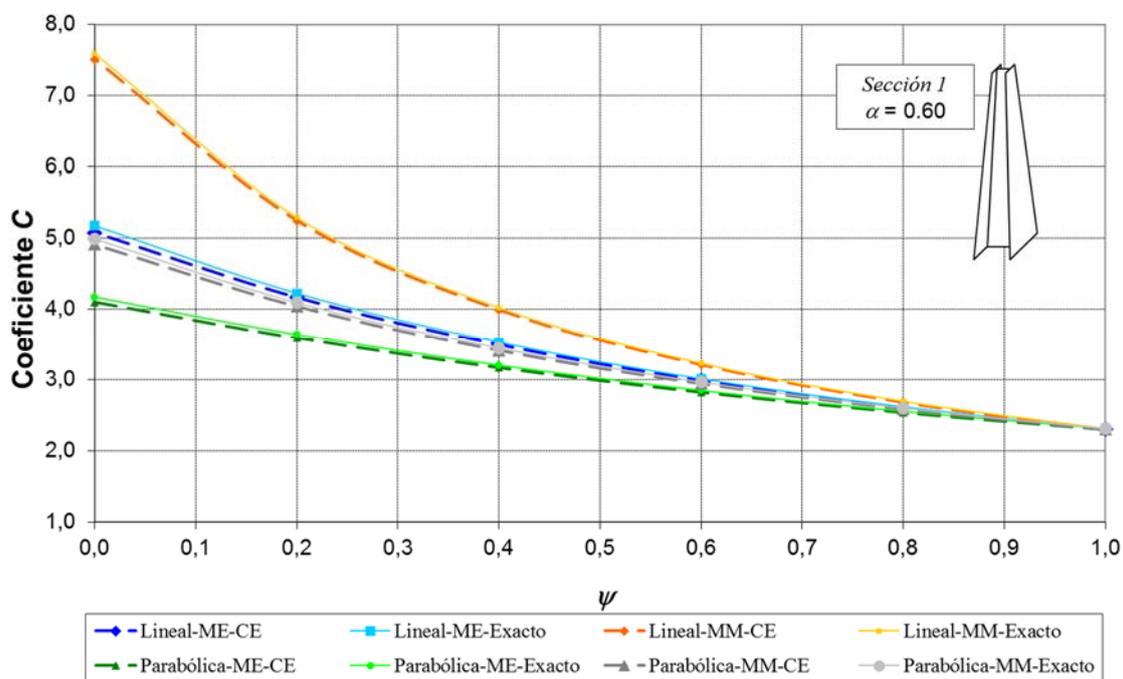


Figura 3-26 Método CE. Coeficiente C para seção 1–caso C y $\alpha=0,60$

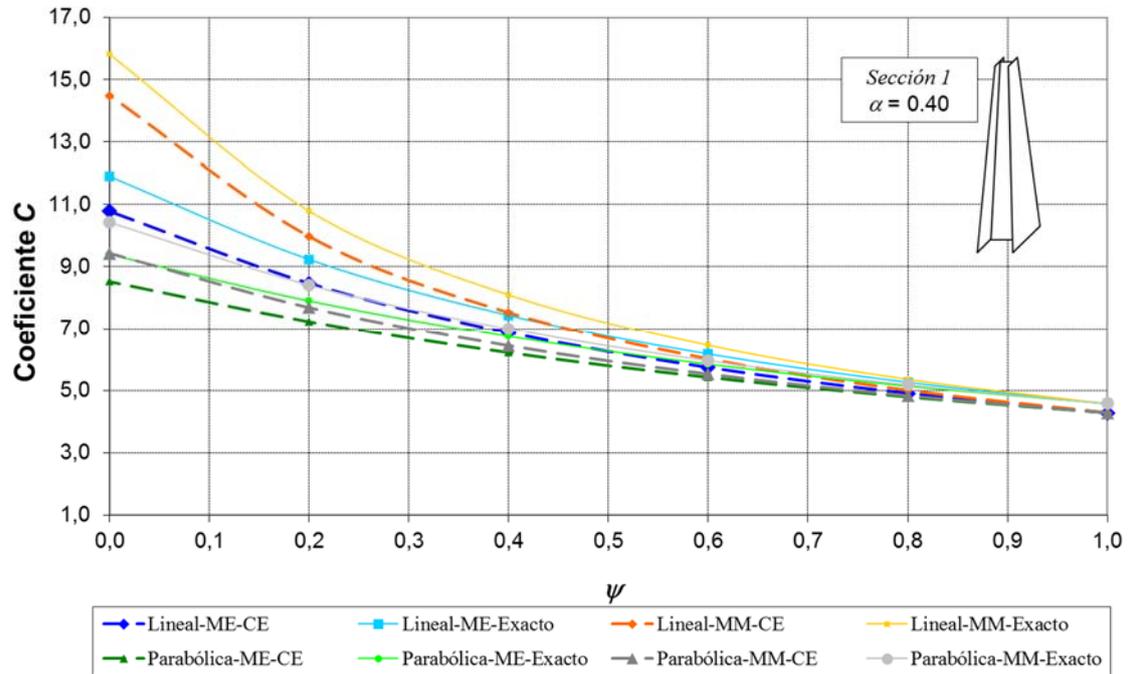


Figura 3-27 Método CE. Coeficiente C para sección 1–caso C y $\alpha=0,40$

Sección 2-Caso C - Distribución Lineal ME									
ψ	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,44	2,26	4,16	-0,89%	0,34%	6,44%
0,80	1,59	2,56	5,09	1,61	2,55	4,77	-0,83%	0,49%	6,76%
0,60	1,81	2,95	5,97	1,82	2,93	5,57	-0,75%	0,69%	7,19%
0,40	2,08	3,45	7,18	2,09	3,42	6,66	-0,65%	0,94%	7,78%
0,20	2,43	4,13	8,91	2,44	4,07	8,20	-0,51%	1,29%	8,61%
0,00	2,88	5,05	11,45	2,89	4,96	10,42	-0,32%	1,79%	9,86%

Tabla 3-25 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal ME

Sección 2-Caso C - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,44	2,26	4,16	-0,89%	0,34%	6,44%
0,80	1,66	2,64	5,19	1,67	2,63	4,86	-0,88%	0,40%	6,62%
0,60	1,98	3,16	6,25	2,00	3,15	5,85	-0,87%	0,46%	6,87%
0,40	2,46	3,94	7,83	2,48	3,91	7,31	-0,85%	0,56%	7,23%
0,20	3,22	5,18	10,44	3,25	5,14	9,68	-0,82%	0,71%	7,78%
0,00	4,59	7,43	15,28	4,62	7,36	14,06	-0,78%	0,94%	8,68%

Tabla 3-26 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal MM

Sección 2-Caso C - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,44	2,26	4,16	-0,89%	0,34%	6,44%
0,80	1,56	2,50	4,97	1,57	2,49	4,65	-0,82%	0,52%	6,86%
0,60	1,71	2,79	5,65	1,72	2,77	5,26	-0,75%	0,73%	7,38%
0,40	1,89	3,13	6,51	1,91	3,10	6,03	-0,66%	0,98%	8,01%
0,20	2,11	3,56	7,62	2,12	3,51	7,00	-0,56%	1,27%	8,79%
0,00	2,36	4,07	9,05	2,37	4,01	8,24	-0,43%	1,62%	9,74%

Tabla 3-27 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso C - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Carga Equivalente			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,44	2,26	4,16	-0,89%	0,34%	6,44%
0,80	1,60	2,55	5,01	1,61	2,53	4,69	-0,86%	0,48%	6,88%
0,60	1,82	2,91	5,76	1,83	2,89	5,37	-0,83%	0,64%	7,43%
0,40	2,10	3,37	6,76	2,12	3,35	6,25	-0,79%	0,85%	8,12%
0,20	2,48	4,00	8,13	2,50	3,96	7,46	-0,75%	1,10%	9,01%
0,00	3,01	4,88	10,07	3,03	4,81	9,15	-0,69%	1,40%	10,09%

Tabla 3-28 Método CE. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica MM

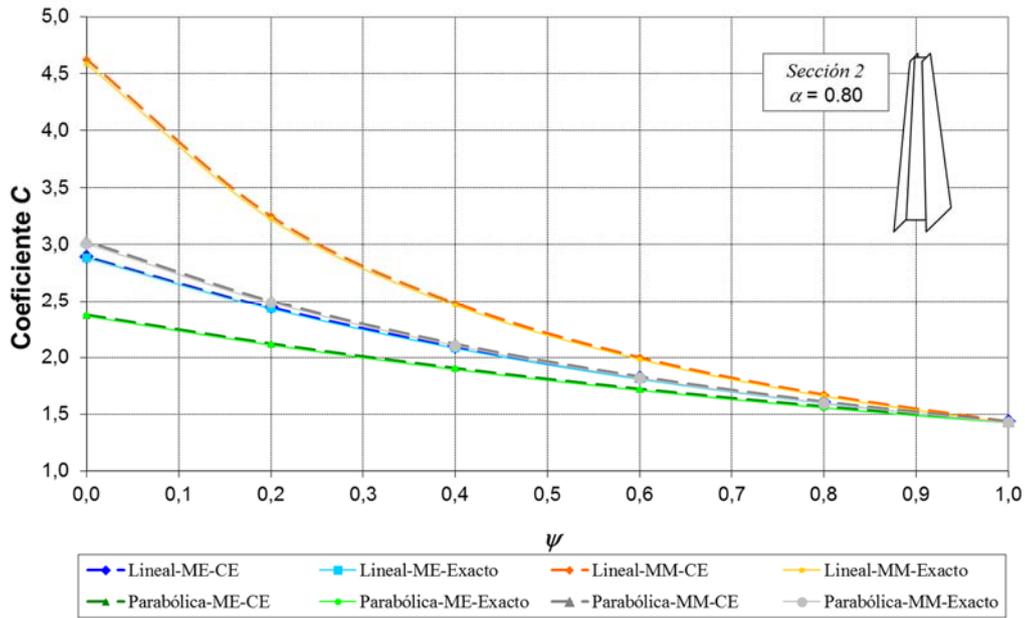


Figura 3-28 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,80$

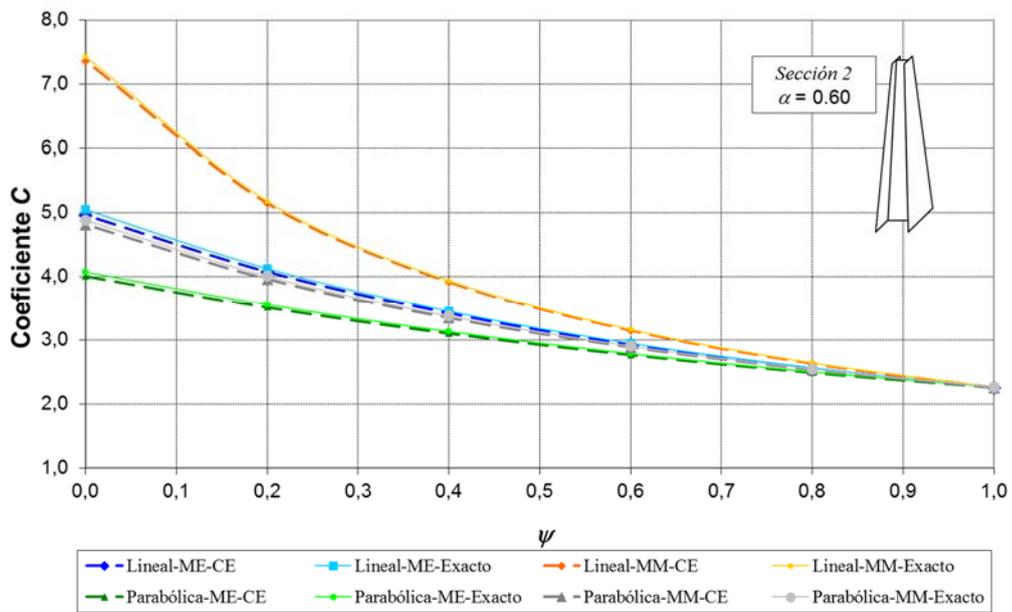


Figura 3-29 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,60$

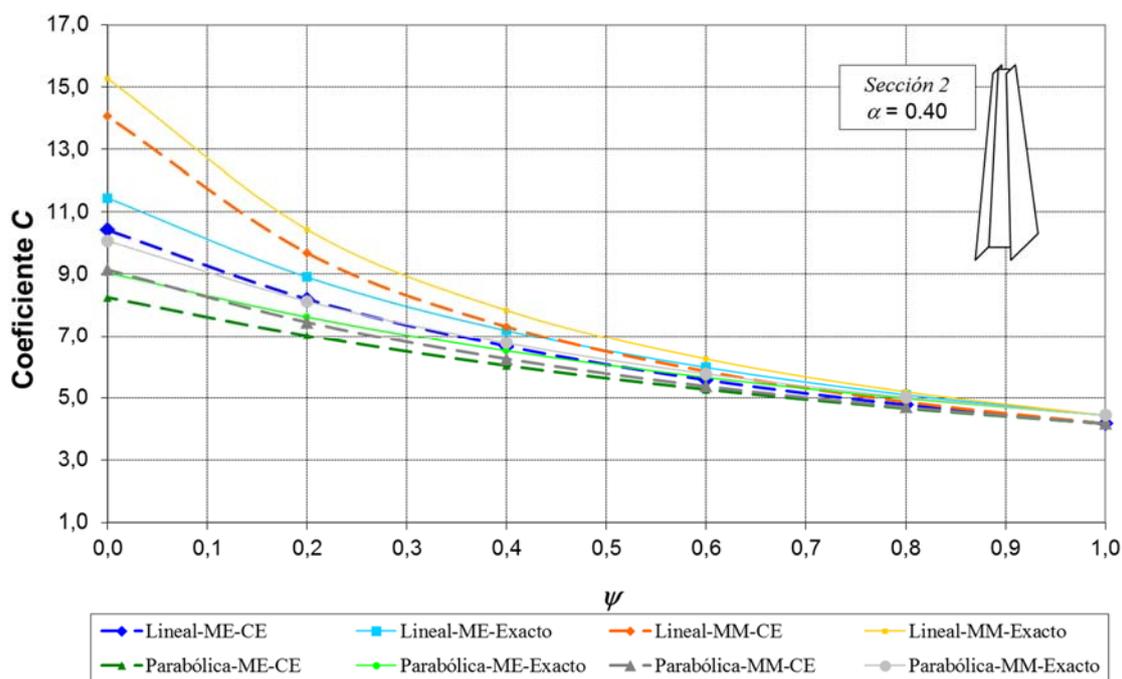


Figura 3-30 Método CE. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,40$

También se puede comprobar que en el caso C, al igual que los casos A y B, los resultados obtenidos mantienen un margen de error aceptable.

3.4 MÉTODO COMBINADO DE COEFICIENTE Y CARGA EQUIVALENTES

En el Apartado 2 del presente capítulo se ha presentado el método del coeficiente de carga uniforme equivalente, que permite sustituir una ley de esfuerzos no uniforme actuando en una columna de sección constante, por una ley uniforme equivalente. Según este método, la carga constante equivalente se obtendría multiplicando el valor máximo del esfuerzo en la distribución variable por el coeficiente de carga uniforme equivalente, siempre mayor que 1, dado por la Ecuación 2.4.

Por otra parte, en el Apartado 3 se ha propuesto el método de la carga equivalente, que es aplicable a elementos de sección variable. Este segundo método permite la sustitución de un elemento de sección variable por otro de sección constante, igual a la de menor rigidez del elemento variable, sujeto a una ley de esfuerzos equivalente. Para ello, el esfuerzo axial actuando en una sección concreta es multiplicado por un coeficiente, en este caso menor que uno, función de la inercia de la sección y las inercias máxima, mínima y en puntos intermedios, según la Ecuación 3.17.

Combinando ambos métodos se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{N_{cr}}{N_M} &= \frac{\hat{N}_{cr}}{\hat{N}_M} = \frac{21}{4(\hat{N}_1 + \hat{N}_4) + 6(\hat{N}_2 + \hat{N}_3) + \hat{N}_M} \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} \\ &= \frac{21}{4(c_1 N_1 + c_4 N_4) + 6(c_2 N_2 + c_3 N_3) + c_M N_M} \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde

$$c(x) = \frac{I_m^\chi I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\beta}{I_M^{2\beta+\gamma}} \quad (3.19)$$

Con el objeto de validar este “Método Combinado”, su formulación se ha aplicado a todos y cada uno de los casos analizados anteriormente. En lo que sigue en este apartado, con la terminología ya expuesta, se presenta en forma de tablas y gráficos los valores obtenidos. Con una simple vista de las gráficas, puede observarse que el “Método Combinado” proporciona unas aproximaciones excelentes para todos los casos, derivadas lógicamente de las buenas aproximaciones proporcionadas por los dos métodos en los que se origina. Los resultados presentados corresponde a una particularización de la Ecuación (3.19) con los valores $\chi=0,30$; $\beta=0,30$; y $\gamma=0,15$.

Las Tablas 3.29 a 3.32, y las Figuras 3.31 a 3.33 muestran los resultados para la variación de sección correspondiente al caso A (Figura 3.10) con la sección de ala ancha (sección 1). Los resultados para el mismo caso A y sección de ala estrecha (sección 2) son presentados en las Tablas 3.33 a 3.36, y en las Figuras 3.34 a 3.36. Puede verse que para este caso A el error máximo es del 14,67% y corresponde al caso de distribución de esfuerzos triangular con máximo en el centro de la luz (distribución lineal MM) y máximo gradiente de sección ($\alpha=0,4$).

Sección 1-Caso A - Distribución Lineal ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,80	2,83	-0,12%	1,97%	9,07%
0,80	1,45	2,07	3,51	1,45	2,03	3,22	-0,21%	1,70%	9,02%
0,60	1,64	2,36	4,07	1,63	2,32	3,74	0,34%	1,89%	8,67%
0,40	1,88	2,74	4,81	1,86	2,68	4,40	0,67%	2,49%	9,18%
0,20	2,18	3,24	5,83	2,17	3,16	5,31	0,42%	2,53%	9,72%
0,00	2,58	3,90	7,25	2,60	3,86	6,68	-1,08%	1,13%	8,45%

Tabla 3-29 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal ME

Sección 1-Caso A - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,80	2,83	-0,12%	1,97%	9,07%
0,80	1,51	2,14	3,60	1,50	2,10	3,31	0,38%	1,86%	8,80%
0,60	1,81	2,56	4,33	1,78	2,49	3,96	1,52%	3,04%	9,14%
0,40	2,24	3,18	5,40	2,17	3,05	4,87	3,00%	4,57%	10,83%
0,20	2,93	4,18	7,14	2,80	3,93	6,32	4,85%	6,48%	12,95%
0,00	4,17	5,97	10,31	3,92	5,52	9,00	6,42%	8,09%	14,67%

Tabla 3-30 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución lineal MM

Sección 1-Caso A - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,80	2,83	-0,12%	1,97%	9,07%
0,80	1,41	2,02	3,43	1,42	1,99	3,15	-0,25%	1,55%	8,86%
0,60	1,55	2,23	3,85	1,55	2,20	3,55	0,04%	1,76%	8,51%
0,40	1,71	2,49	4,36	1,71	2,44	4,01	0,10%	2,05%	8,92%
0,20	1,90	2,80	5,01	1,90	2,75	4,59	-0,23%	1,85%	9,05%
0,00	2,12	3,17	5,81	2,15	3,15	5,37	-1,32%	0,74%	8,04%

Tabla 3-31 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso A - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,84	3,08	1,30	1,80	2,83	-0,12%	1,97%	9,07%
0,80	1,45	2,06	3,48	1,46	2,03	3,21	-0,12%	1,60%	8,34%
0,60	1,65	2,35	3,98	1,65	2,31	3,67	0,26%	1,82%	8,37%
0,40	1,91	2,72	4,64	1,90	2,67	4,27	0,54%	2,16%	8,51%
0,20	2,26	3,23	5,53	2,25	3,16	5,09	0,53%	2,20%	8,68%
0,00	2,74	3,92	6,78	2,74	3,87	6,29	-0,27%	1,40%	7,85%

Tabla 3-32 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A con distribución parabólica MM

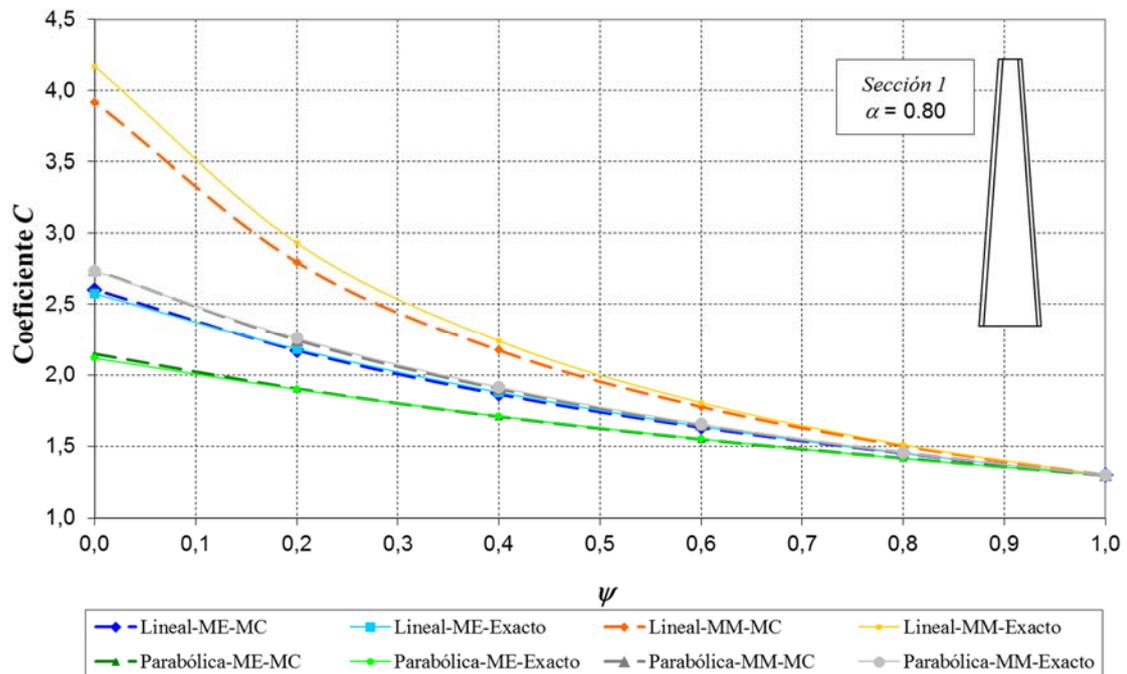


Figura 3-31 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso A y $\alpha=0,80$

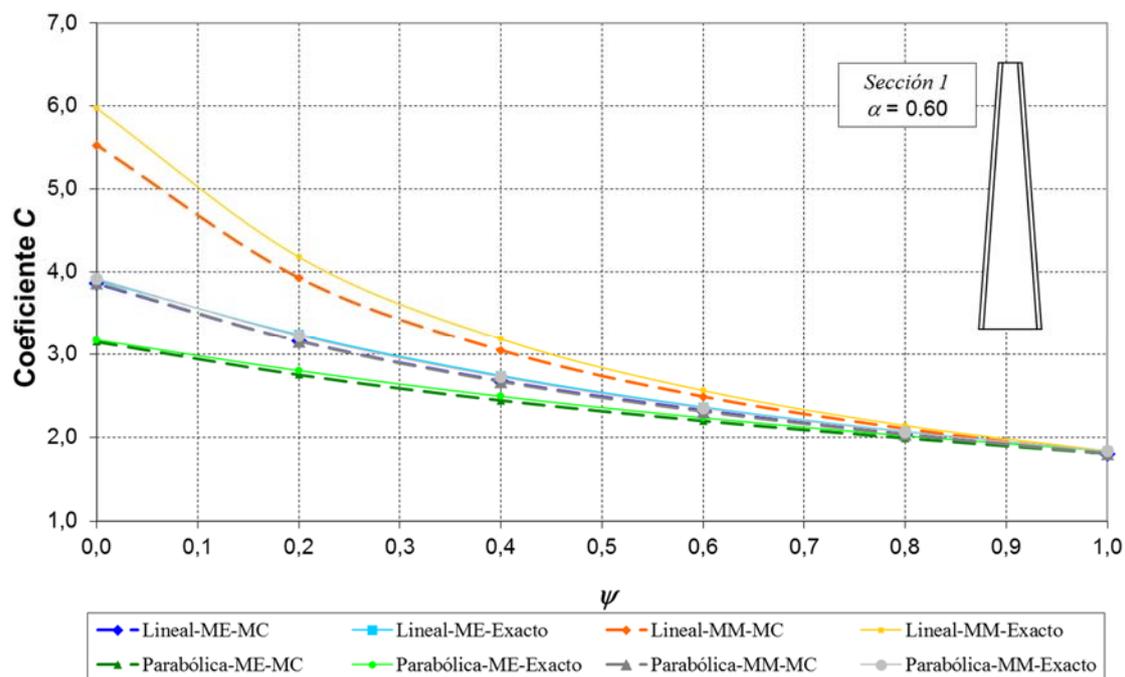


Figura 3-32 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso A y $\alpha=0,60$

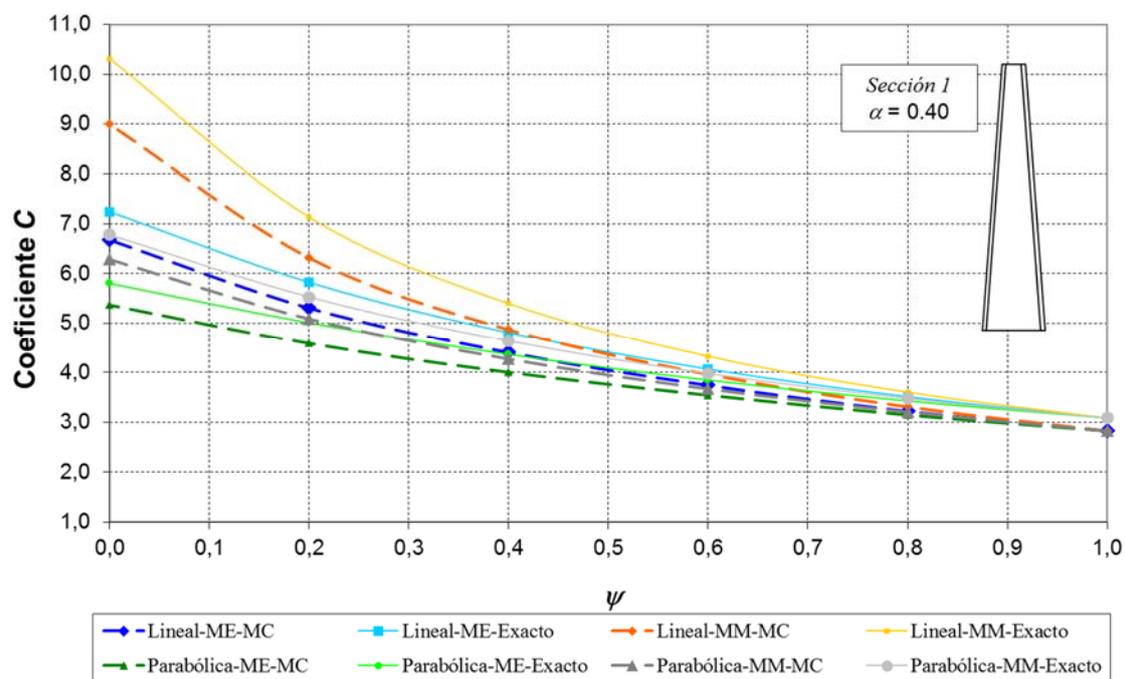


Figura 3-33 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso A y $\alpha=0,40$

Sección 2-Caso A - Distribución Lineal ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,32	1,88	3,09	-1,46%	-1,24%	2,79%
0,80	1,45	2,10	3,63	1,48	2,13	3,53	-1,56%	-1,49%	2,77%
0,60	1,64	2,39	4,21	1,66	2,43	4,10	-1,01%	-1,35%	2,48%
0,40	1,88	2,78	4,98	1,90	2,80	4,84	-0,69%	-0,75%	2,88%
0,20	2,19	3,29	6,06	2,21	3,31	5,85	-0,92%	-0,69%	3,47%
0,00	2,59	3,97	7,56	2,65	4,05	7,39	-2,40%	-2,03%	2,35%

Tabla 3-33 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal ME

Sección 2-Caso A - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,32	1,88	3,09	-1,46%	-1,24%	2,79%
0,80	1,52	2,17	3,72	1,53	2,20	3,62	-0,98%	-1,37%	2,55%
0,60	1,81	2,59	4,46	1,81	2,60	4,34	0,15%	-0,23%	2,81%
0,40	2,25	3,22	5,57	2,21	3,18	5,34	1,61%	1,26%	4,42%
0,20	2,94	4,23	7,37	2,84	4,10	6,92	3,44%	3,12%	6,46%
0,00	4,19	6,05	10,66	3,99	5,78	9,86	4,99%	4,70%	8,16%

Tabla 3-34 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución lineal MM

Sección 2-Caso A - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,32	1,88	3,09	-1,46%	-1,24%	2,79%
0,80	1,42	2,04	3,54	1,44	2,08	3,45	-1,59%	-1,64%	2,62%
0,60	1,56	2,26	3,98	1,58	2,30	3,89	-1,29%	-1,44%	2,31%
0,40	1,72	2,53	4,52	1,74	2,56	4,40	-1,24%	-1,15%	2,73%
0,20	1,91	2,84	5,20	1,94	2,88	5,05	-1,57%	-1,33%	2,88%
0,00	2,13	3,22	6,05	2,18	3,30	5,93	-2,64%	-2,39%	1,98%

Tabla 3-35 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso A - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,30	1,86	3,18	1,32	1,88	3,09	-1,46%	-1,24%	2,79%
0,80	1,46	2,09	3,59	1,48	2,12	3,51	-1,46%	-1,60%	2,12%
0,60	1,66	2,38	4,11	1,68	2,41	4,02	-1,08%	-1,40%	2,16%
0,40	1,92	2,76	4,79	1,94	2,79	4,68	-0,81%	-1,06%	2,33%
0,20	2,27	3,27	5,71	2,29	3,30	5,58	-0,82%	-1,01%	2,49%
0,00	2,75	3,97	7,01	2,79	4,04	6,89	-1,61%	-1,77%	1,78%

Tabla 3-36 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A con distribución parabólica MM

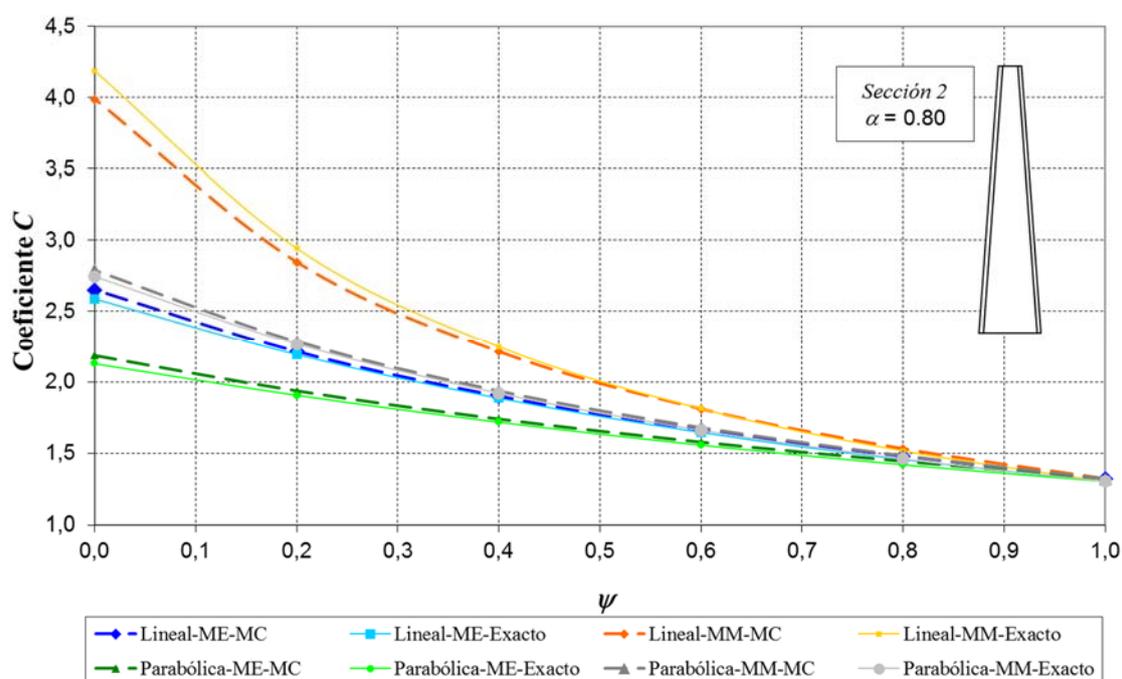


Figura 3-34 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso A y $\alpha=0,80$

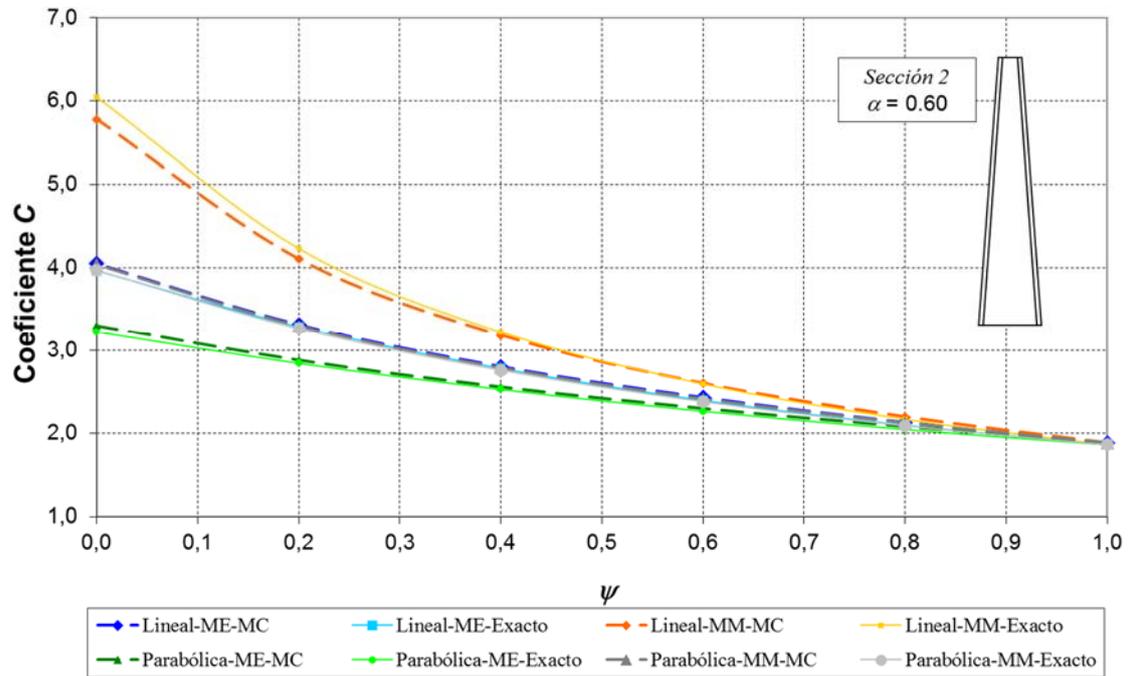


Figura 3-35 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,60$

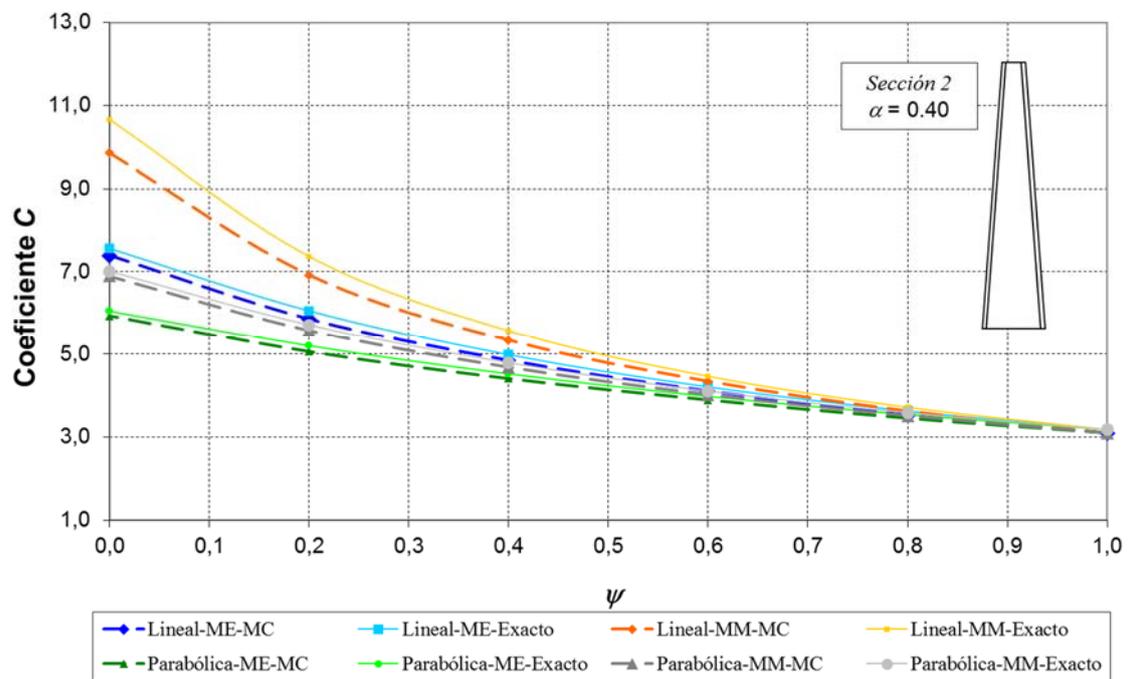


Figura 3-36 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso A y $\alpha=0,40$

Las Tablas 3.37 a 3.40, y las Figuras 3.37 a 3.39 muestran los resultados para la variación de sección correspondiente al caso B (Figura 3.17) con la

sección de ala ancha (sección 1). Los resultados para el mismo caso B y sección de ala estrecha (sección 2) son presentados en las Tablas 3.41 a 3.44, y en las Figuras 3.40 a 3.42. Puede verse que para este caso B el error máximo es del 13,02% y corresponde al mismo supuesto que en el caso A (distribución lineal MM y $\alpha=0,4$).

Sección 1-Caso B - Distribución Lineal ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,23	4,22	1,17%	3,09%	6,78%
0,80	1,59	2,55	5,00	1,57	2,46	4,66	1,67%	3,61%	7,31%
0,60	1,79	2,85	5,59	1,75	2,75	5,20	2,02%	3,86%	7,37%
0,40	2,02	3,22	6,27	1,98	3,11	5,89	1,98%	3,57%	6,57%
0,20	2,32	3,67	7,07	2,29	3,59	6,78	1,20%	2,26%	4,28%
0,00	2,68	4,20	7,96	2,70	4,23	7,98	-0,99%	-0,83%	-0,28%

Tabla 3-37 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal ME

Sección 1-Caso B - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,23	4,22	1,17%	3,09%	6,78%
0,80	1,68	2,70	5,33	1,65	2,61	4,98	1,43%	3,15%	6,98%
0,60	2,01	3,26	6,51	1,96	3,14	6,07	2,69%	3,94%	7,14%
0,40	2,52	4,11	8,33	2,41	3,89	7,66	4,36%	5,81%	8,66%
0,20	3,33	5,53	11,46	3,13	5,11	10,29	6,47%	8,23%	11,38%
0,00	4,82	8,21	17,70	4,45	7,45	15,66	8,26%	10,13%	13,02%

Tabla 3-38 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución lineal MM

Sección 1-Caso B - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,23	4,22	1,17%	3,09%	6,78%
0,80	1,56	2,49	4,90	1,53	2,41	4,57	1,55%	3,51%	7,23%
0,60	1,70	2,72	5,34	1,67	2,62	4,98	1,74%	3,65%	7,22%
0,40	1,86	2,97	5,83	1,83	2,88	5,48	1,59%	3,32%	6,48%
0,20	2,04	3,26	6,36	2,02	3,18	6,08	0,91%	2,27%	4,67%
0,00	2,24	3,57	6,92	2,26	3,57	6,83	-0,60%	0,13%	1,38%

Tabla 3-39 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso B - Distribución Parabólica MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,30	4,51	1,42	2,23	4,22	1,17%	3,09%	6,78%
0,80	1,62	2,60	5,15	1,60	2,54	4,85	1,02%	2,60%	6,36%
0,60	1,85	3,00	6,00	1,82	2,92	5,68	1,38%	2,80%	5,74%
0,40	2,15	3,52	7,16	2,11	3,42	6,76	1,74%	3,00%	5,97%
0,20	2,56	4,25	8,80	2,52	4,12	8,34	1,77%	3,03%	5,51%
0,00	3,13	5,28	11,22	3,11	5,19	10,86	0,85%	1,80%	3,32%

Tabla 3-40 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso B con distribución parabólica MM

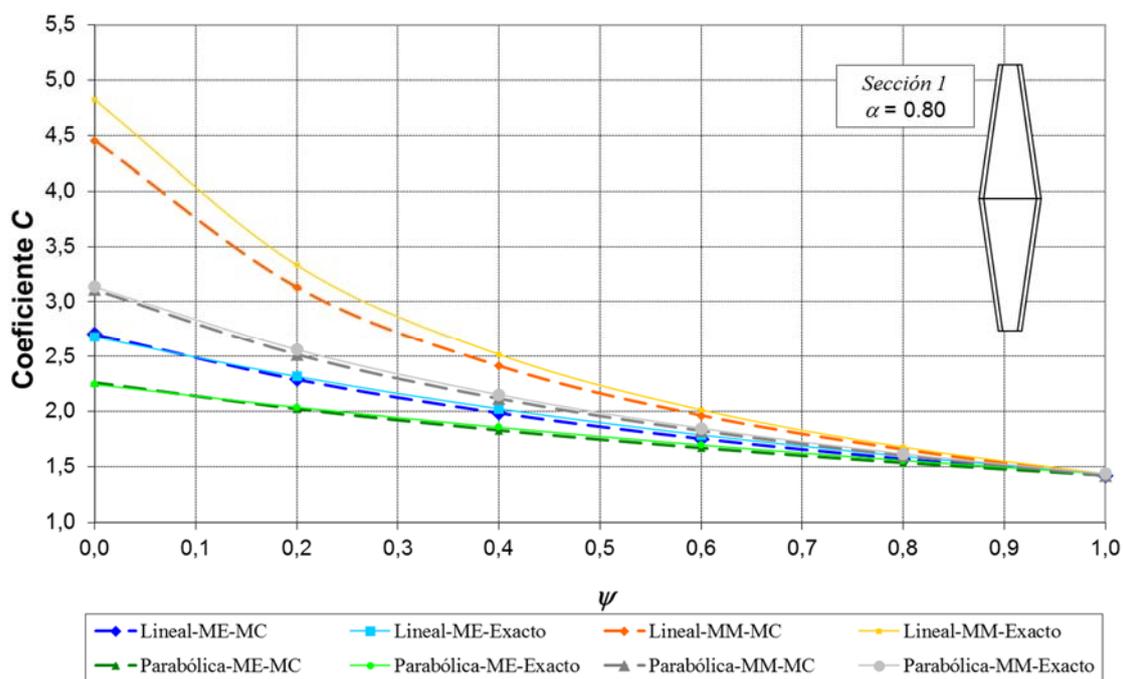


Figura 3-37 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso B y $\alpha=0,80$

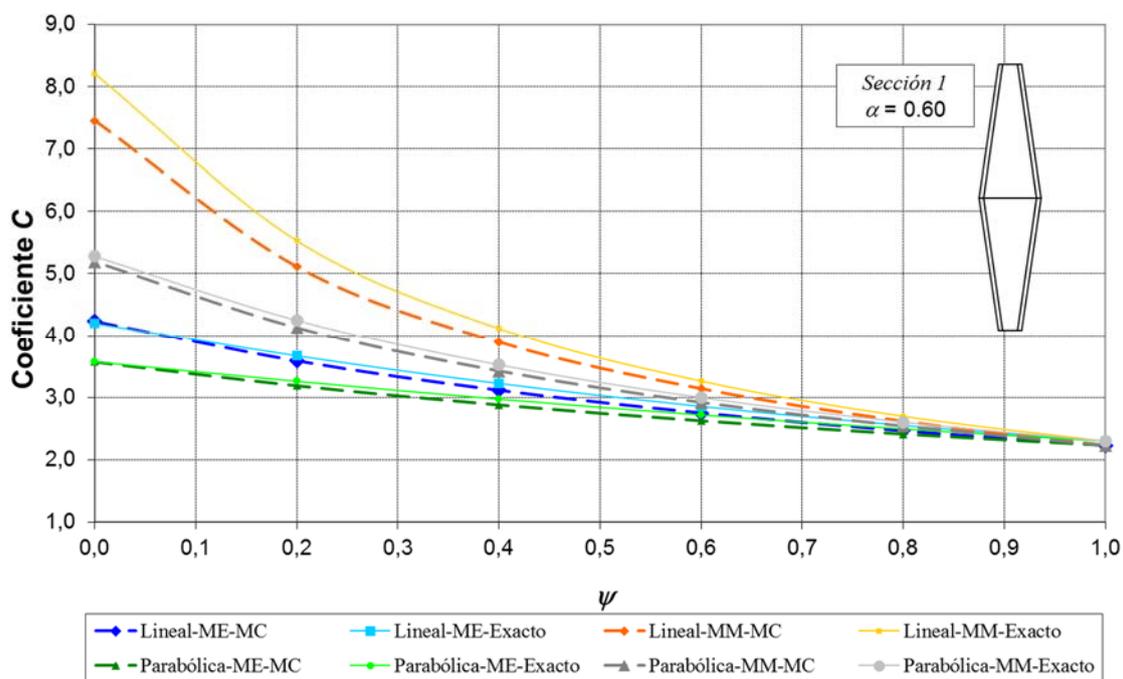


Figura 3-38 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso B y $\alpha=0,60$

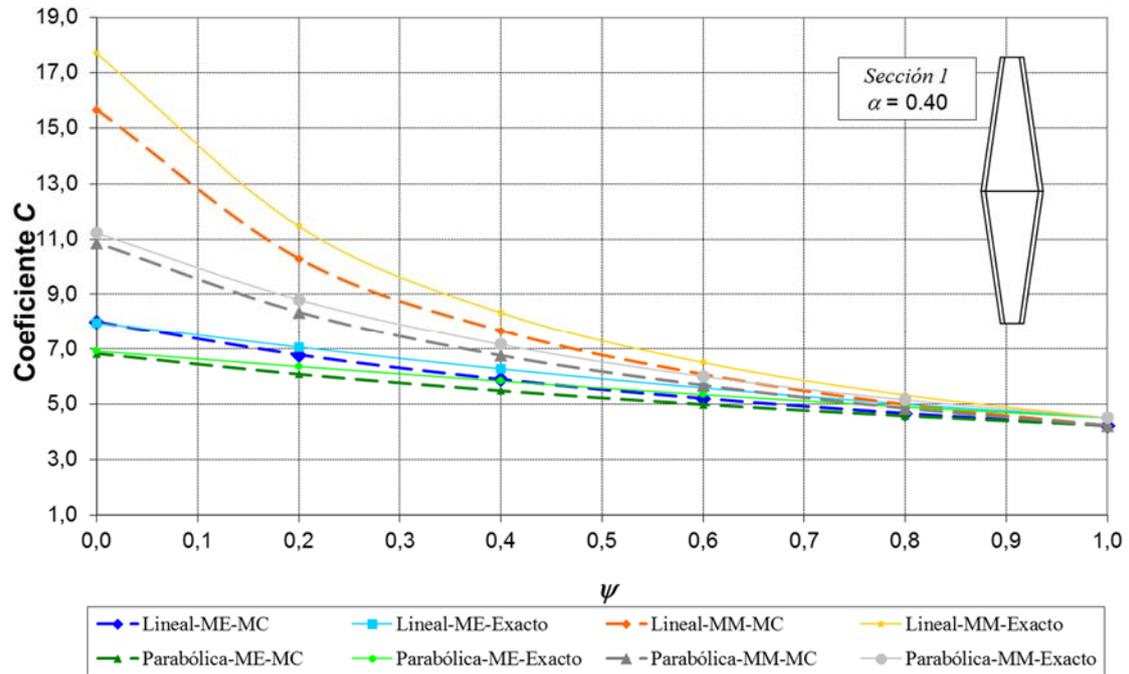


Figura 3-39 Método MC. Coeficiente C para sección 1 – caso B y $\alpha=0,40$

Sección 2-Caso B - Distribución Lineal ME									
ψ	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,28	4,50	1,11%	2,75%	5,51%
0,80	1,60	2,60	5,27	1,58	2,52	4,97	1,62%	3,26%	6,02%
0,60	1,80	2,91	5,88	1,76	2,81	5,54	1,96%	3,51%	6,05%
0,40	2,04	3,29	6,59	2,00	3,19	6,27	1,92%	3,19%	5,16%
0,20	2,33	3,74	7,42	2,30	3,67	7,22	1,13%	1,84%	2,75%
0,00	2,69	4,28	8,34	2,72	4,33	8,50	-1,07%	-1,30%	-1,96%

Tabla 3-41 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal ME

Sección 2-Caso B - Distribución Lineal MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,28	4,50	1,11%	2,75%	5,51%
0,80	1,69	2,75	5,62	1,66	2,68	5,31	1,37%	2,83%	5,77%
0,60	2,03	3,33	6,87	1,98	3,21	6,48	2,64%	3,60%	6,02%
0,40	2,53	4,20	8,81	2,43	3,99	8,19	4,31%	5,50%	7,50%
0,20	3,35	5,66	12,16	3,15	5,24	11,02	6,43%	7,97%	10,41%
0,00	4,86	8,42	18,91	4,49	7,65	16,82	8,24%	9,96%	12,39%

Tabla 3-42 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución lineal MM

Sección 2-Caso B - Distribución Parabólica ME									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,28	4,50	1,11%	2,75%	5,51%
0,80	1,57	2,54	5,16	1,54	2,47	4,87	1,50%	3,17%	5,96%
0,60	1,71	2,77	5,63	1,68	2,68	5,31	1,69%	3,31%	5,94%
0,40	1,87	3,03	6,14	1,84	2,95	5,84	1,54%	2,97%	5,16%
0,20	2,05	3,32	6,69	2,03	3,26	6,48	0,85%	1,90%	3,26%
0,00	2,26	3,64	7,27	2,27	3,65	7,28	-0,67%	-0,27%	-0,14%

Tabla 3-43 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso B - Distribución Parabólica MM									
	<i>Exacto</i>			<i>Metodo Combinado</i>			<i>Error (%)</i>		
	α			α			α		
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,44	2,34	4,75	1,43	2,28	4,50	1,11%	2,75%	5,51%
0,80	1,63	2,66	5,43	1,61	2,60	5,17	0,97%	2,29%	5,17%
0,60	1,86	3,06	6,34	1,84	2,99	6,06	1,32%	2,49%	4,58%
0,40	2,16	3,60	7,57	2,13	3,51	7,22	1,69%	2,69%	4,95%
0,20	2,58	4,34	9,34	2,53	4,23	8,92	1,73%	2,77%	4,66%
0,00	3,16	5,41	11,95	3,13	5,32	11,66	0,81%	1,59%	2,54%

Tabla 3-44 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso B con distribución parabólica MM

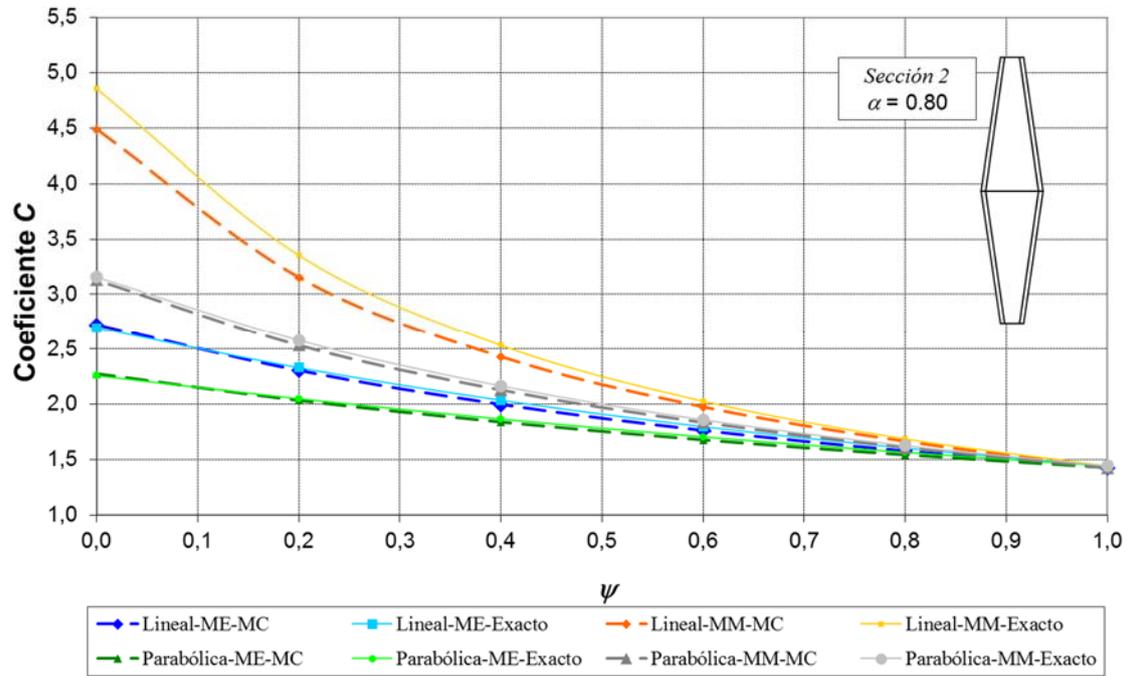


Figura 3-40 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso B y $\alpha=0,80$

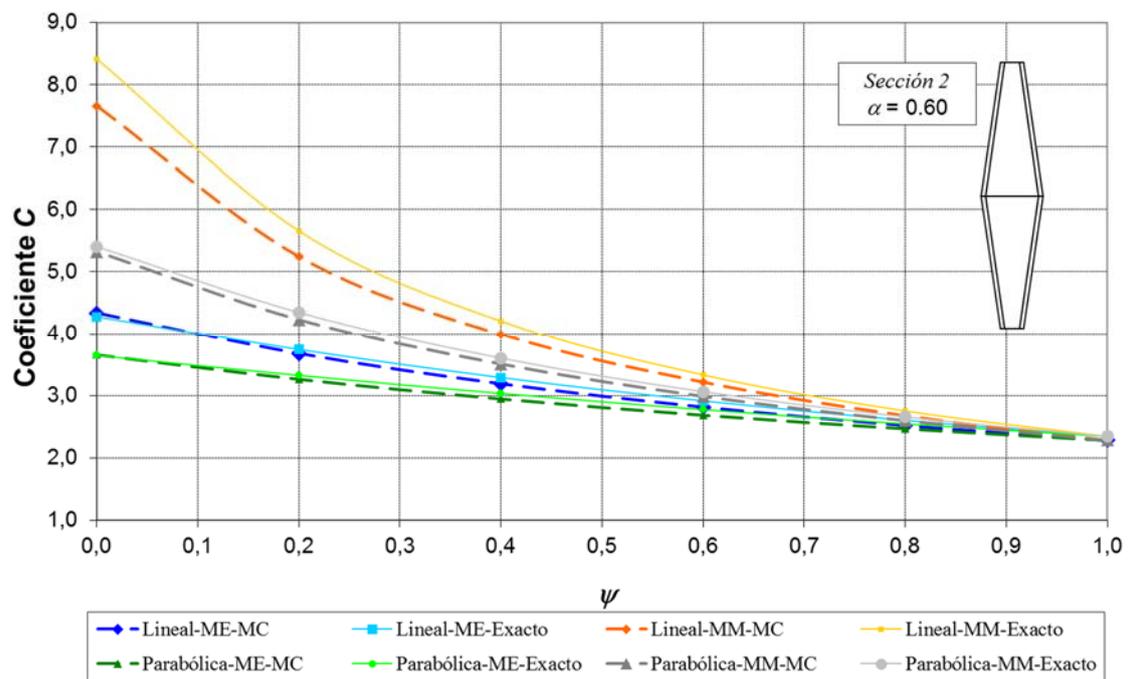


Figura 3-41 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso B y $\alpha=0,60$

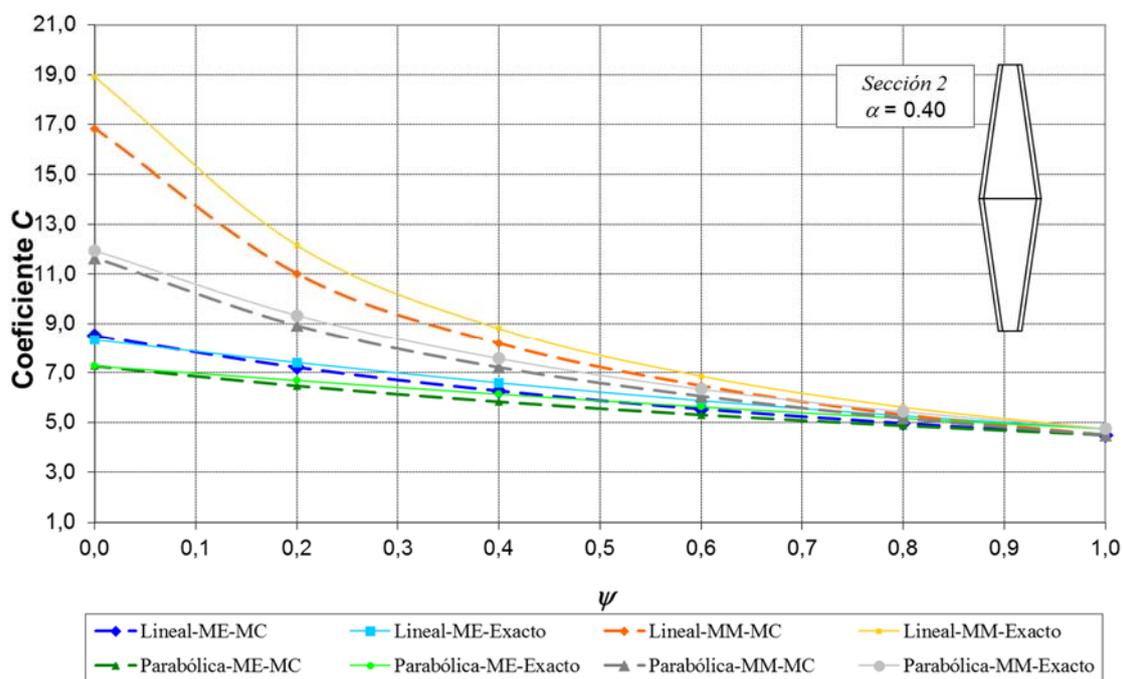


Figura 3-42 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso B y $\alpha=0,40$

Las Tablas 3.45 a 3.48, y las Figuras 3.43 a 3.45 muestran los resultados para la variación de sección correspondiente al caso C (Figura 3.24) con la sección de ala ancha (sección 1). Los resultados para el mismo caso C y sección de ala estrecha (sección 2) son presentados en las Tablas 3.49 a 3.52, y en las Figuras 3.46 a 3.48. Puede verse que para este caso C el error máximo es del 7,92% y corresponde al mismo supuesto que en los casos A y B (distribución lineal MM y $\alpha=0,4$).

	Sección 1-Caso C - Distribución Lineal ME								
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,31	4,57	1,47	2,36	4,45	-2,11%	-2,11%	2,75%
0,80	1,61	2,62	5,26	1,65	2,68	5,11	-2,44%	-2,26%	2,92%
0,60	1,83	3,01	6,17	1,86	3,09	6,00	-1,83%	-2,58%	2,90%
0,40	2,10	3,53	7,43	2,13	3,59	7,24	-1,43%	-1,78%	2,60%
0,20	2,46	4,22	9,23	2,50	4,29	8,90	-1,58%	-1,48%	3,72%
0,00	2,92	5,18	11,90	3,01	5,32	11,55	-3,00%	-2,66%	3,01%

Tabla 3-45 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal ME

Sección 1-Caso C - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,31	4,57	1,47	2,36	4,45	-2,11%	-2,11%	2,75%
0,80	1,67	2,70	5,35	1,71	2,76	5,22	-1,80%	-2,35%	2,55%
0,60	2,00	3,23	6,45	2,02	3,28	6,31	-0,67%	-1,49%	2,16%
0,40	2,48	4,02	8,09	2,47	4,02	7,80	0,79%	0,02%	3,75%
0,20	3,26	5,29	10,79	3,17	5,19	10,18	2,61%	1,92%	5,98%
0,00	4,63	7,59	15,81	4,45	7,33	14,65	4,17%	3,56%	7,92%

Tabla 3-46 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución lineal MM

Sección 1-Caso C - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,31	4,57	1,47	2,36	4,45	-2,11%	-2,11%	2,75%
0,80	1,57	2,55	5,14	1,61	2,62	5,00	-2,35%	-2,40%	2,79%
0,60	1,73	2,85	5,84	1,76	2,92	5,69	-2,05%	-2,40%	2,56%
0,40	1,91	3,20	6,74	1,95	3,27	6,55	-1,93%	-2,07%	2,83%
0,20	2,13	3,64	7,90	2,18	3,72	7,65	-2,26%	-2,05%	3,27%
0,00	2,39	4,17	9,39	2,47	4,30	9,15	-3,29%	-2,98%	2,63%

Tabla 3-47 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica ME

Sección 1-Caso C - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60
1,00	1,44	2,31	4,57	1,47	2,36	4,45	-2,11%	-2,11%	2,75%
0,80	1,61	2,60	5,18	1,65	2,67	5,06	-2,25%	-2,66%	2,19%
0,60	1,84	2,97	5,95	1,87	3,04	5,84	-1,89%	-2,44%	1,90%
0,40	2,12	3,44	6,99	2,16	3,52	6,83	-1,59%	-2,16%	2,35%
0,20	2,51	4,09	8,41	2,55	4,17	8,21	-1,58%	-2,02%	2,42%
0,00	3,04	4,99	10,43	3,11	5,13	10,24	-2,35%	-2,70%	1,88%

Tabla 3-48 Método MC. Coeficiente C para sección 1-caso C con distribución parabólica MM

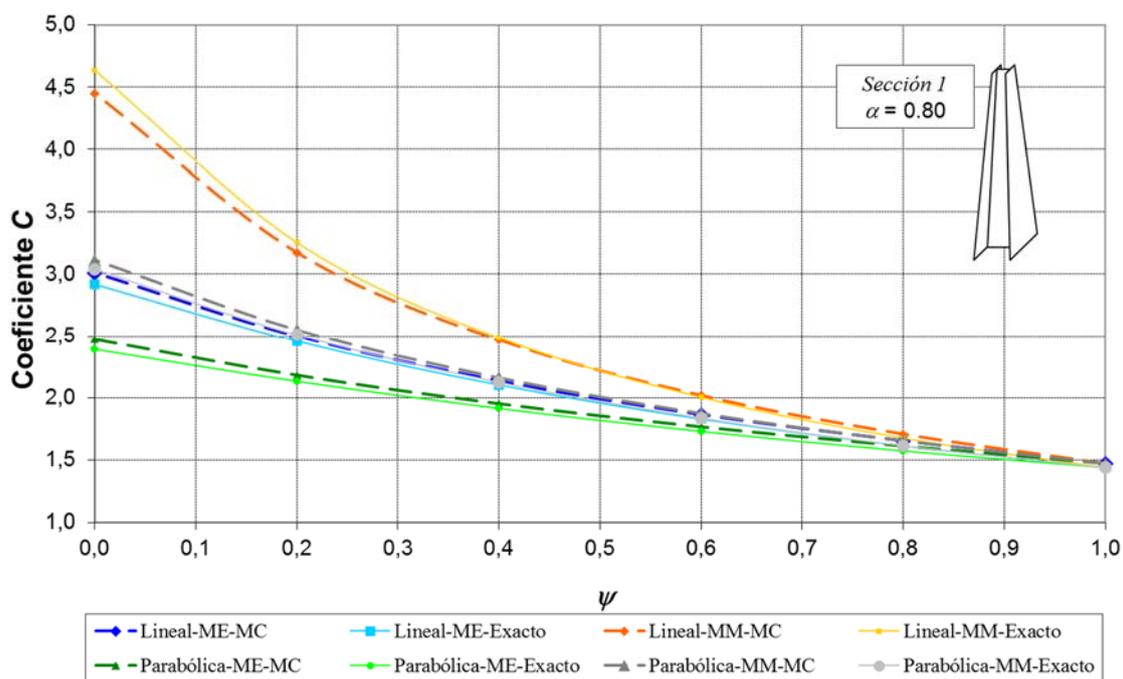


Figura 3-43 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso C y $\alpha=0,80$

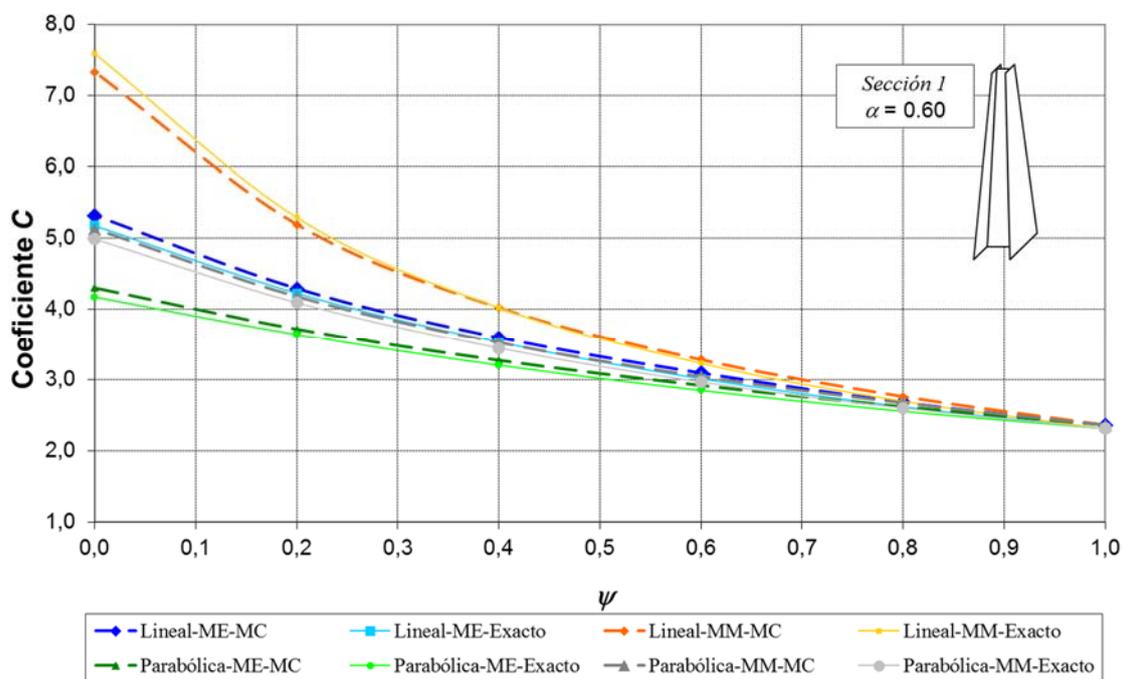


Figura 3-44 Método MC. Coeficiente C para seção 1–caso C y $\alpha=0,60$

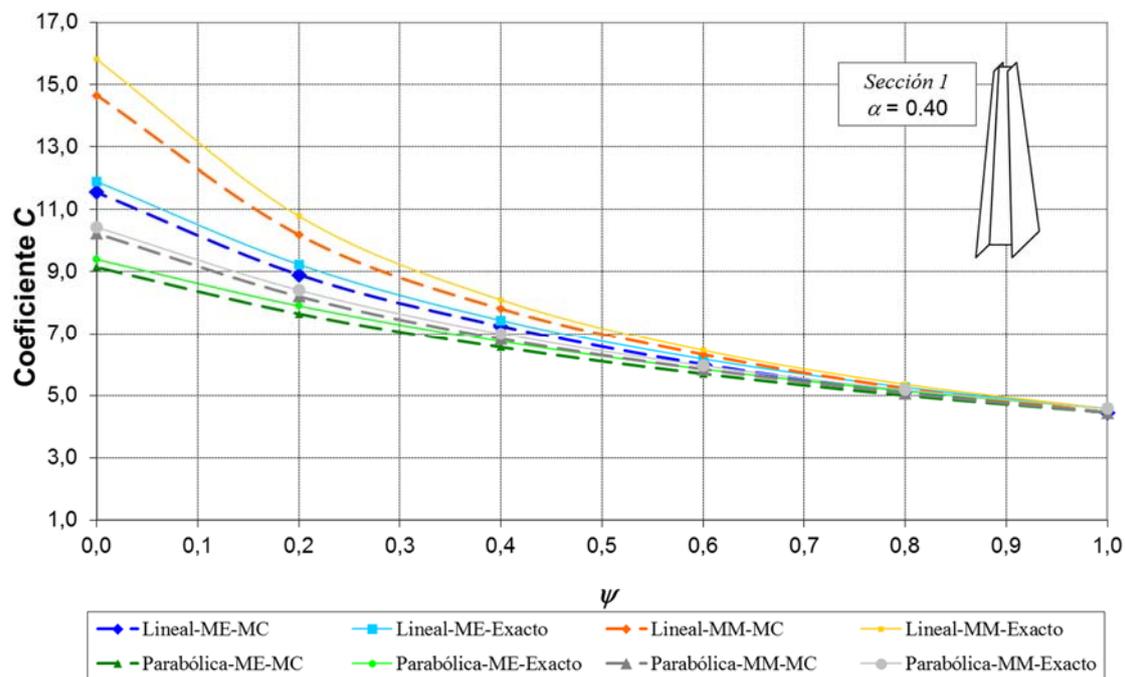


Figura 3-45 Método MC. Coeficiente C para sección 1–caso C y $\alpha=0,40$

Sección 2-Caso C - Distribución Lineal ME									
ψ	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,45	2,31	4,33	-2,08%	-2,17%	2,42%
0,80	1,59	2,56	5,09	1,63	2,62	4,96	-2,39%	-2,31%	2,58%
0,60	1,81	2,95	5,97	1,84	3,03	5,82	-1,78%	-2,60%	2,54%
0,40	2,08	3,45	7,18	2,11	3,51	7,02	-1,39%	-1,82%	2,29%
0,20	2,43	4,13	8,91	2,47	4,19	8,61	-1,54%	-1,54%	3,37%
0,00	2,88	5,05	11,45	2,97	5,19	11,15	-2,97%	-2,73%	2,63%

Tabla 3-49 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal ME

Sección 2-Caso C - Distribución Lineal MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,45	2,31	4,33	-2,08%	-2,17%	2,42%
0,80	1,66	2,64	5,19	1,69	2,71	5,07	-1,74%	-2,40%	2,22%
0,60	1,98	3,16	6,25	1,99	3,21	6,13	-0,62%	-1,50%	1,83%
0,40	2,46	3,94	7,83	2,44	3,94	7,57	0,84%	0,00%	3,47%
0,20	3,22	5,18	10,44	3,14	5,08	9,88	2,66%	1,90%	5,69%
0,00	4,59	7,43	15,28	4,40	7,18	14,20	4,22%	3,53%	7,61%

Tabla 3-50 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución lineal MM

Sección 2-Caso C - Distribución Parabólica ME									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,45	2,31	4,33	-2,08%	-2,17%	2,42%
0,80	1,56	2,50	4,97	1,59	2,56	4,85	-2,30%	-2,46%	2,45%
0,60	1,71	2,79	5,65	1,75	2,86	5,53	-2,00%	-2,44%	2,20%
0,40	1,89	3,13	6,51	1,93	3,20	6,35	-1,89%	-2,11%	2,51%
0,20	2,11	3,56	7,62	2,16	3,63	7,40	-2,22%	-2,11%	2,90%
0,00	2,36	4,07	9,05	2,44	4,20	8,85	-3,26%	-3,05%	2,26%

Tabla 3-51 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica ME

Sección 2-Caso C - Distribución Parabólica MM									
	Exacto			Metodo Combinado			Error (%)		
	α			α			α		
	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
ψ	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40	0,80	0,60	0,40
1,00	1,42	2,26	4,43	1,45	2,31	4,33	-2,08%	-2,17%	2,42%
0,80	1,60	2,55	5,01	1,63	2,62	4,92	-2,20%	-2,69%	1,86%
0,60	1,82	2,91	5,76	1,85	2,98	5,67	-1,84%	-2,48%	1,60%
0,40	2,10	3,37	6,76	2,14	3,45	6,63	-1,54%	-2,18%	2,03%
0,20	2,48	4,00	8,13	2,52	4,09	7,96	-1,54%	-2,06%	2,07%
0,00	3,01	4,88	10,07	3,08	5,02	9,92	-2,31%	-2,74%	1,57%

Tabla 3-52 Método MC. Coeficiente C para sección 2-caso C con distribución parabólica MM

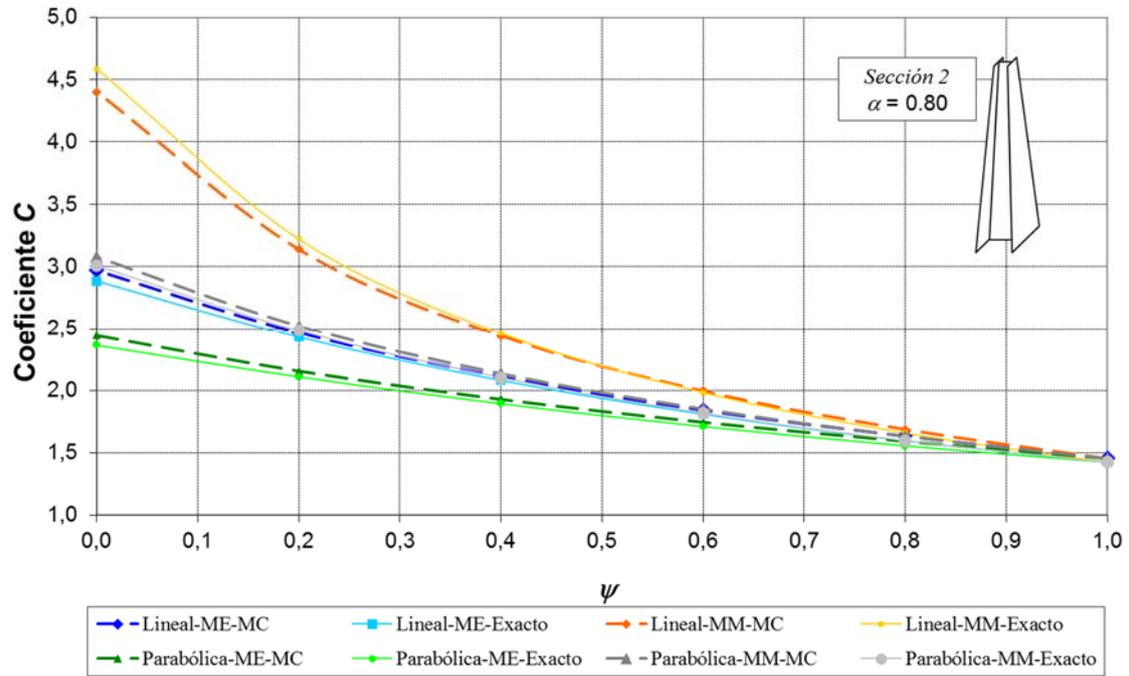


Figura 3-46 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,80$

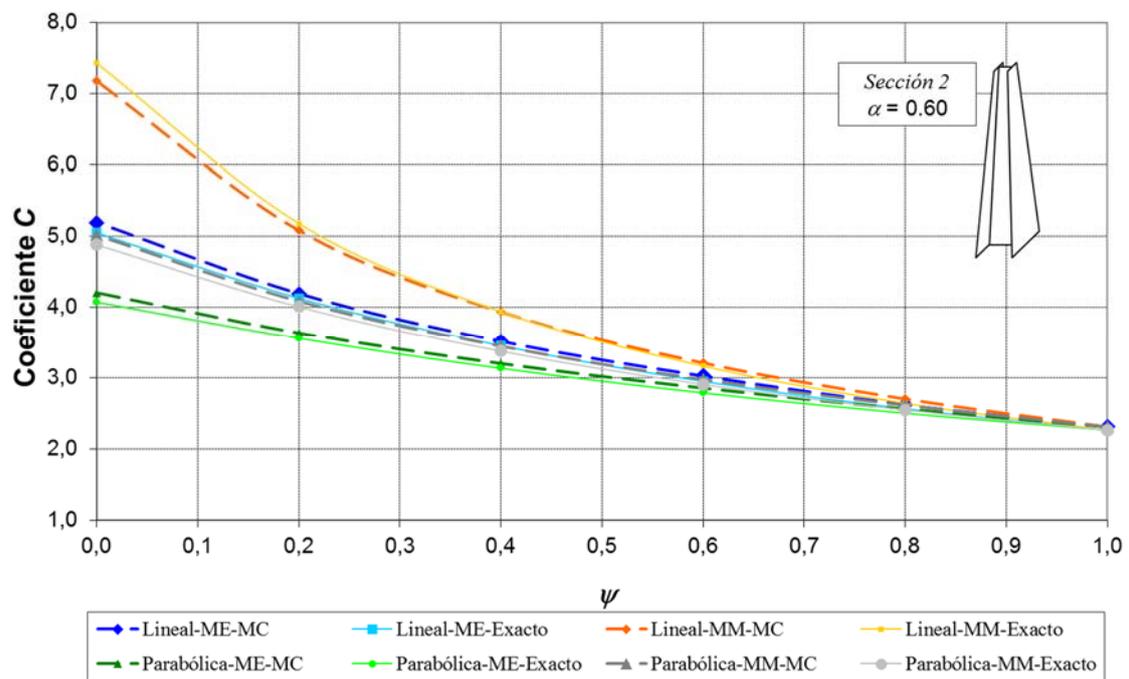


Figura 3-47 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,60$

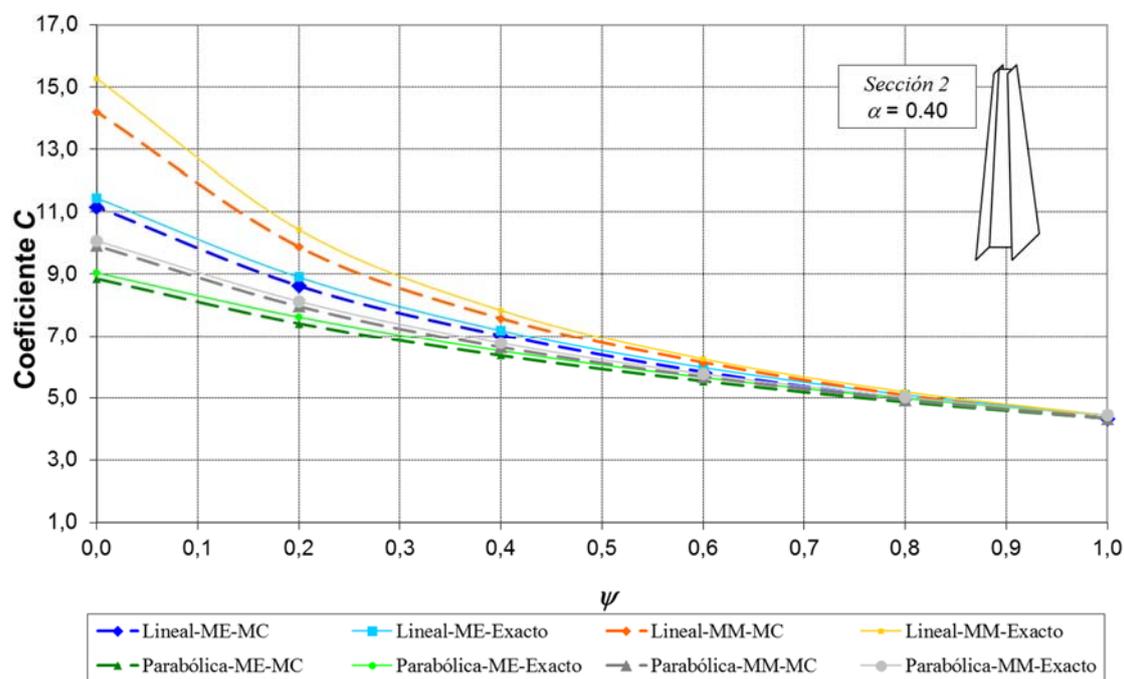


Figura 3-48 Método MC. Coeficiente C para sección 2–caso C y $\alpha=0,40$

Los resultados presentados en este apartado han mostrado que el “Método Combinado” proporciona aproximaciones de gran calidad para la mayoría de los casos y suficientemente satisfactorias (error inferior al 15%) para los casos de máximo gradiente de variación de esfuerzos y máximo gradiente de variación de sección.

3.5 EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL MÉTODO COMBINADO

El presente apartado muestra la aplicación del “Método Combinado” propuesto en esta tesis a un caso de estructura real. Los datos son obtenidos del trabajo de Li (2001) y corresponden al estudio del pandeo elástico de flexión de una estructura en ménsula de 210 m de altura localizada en Wuhan (R.P. China). La Figura 3.49 muestra un esquema de la estructura, con la distribución de esfuerzos axiles y la distribución de rigidez a flexión.

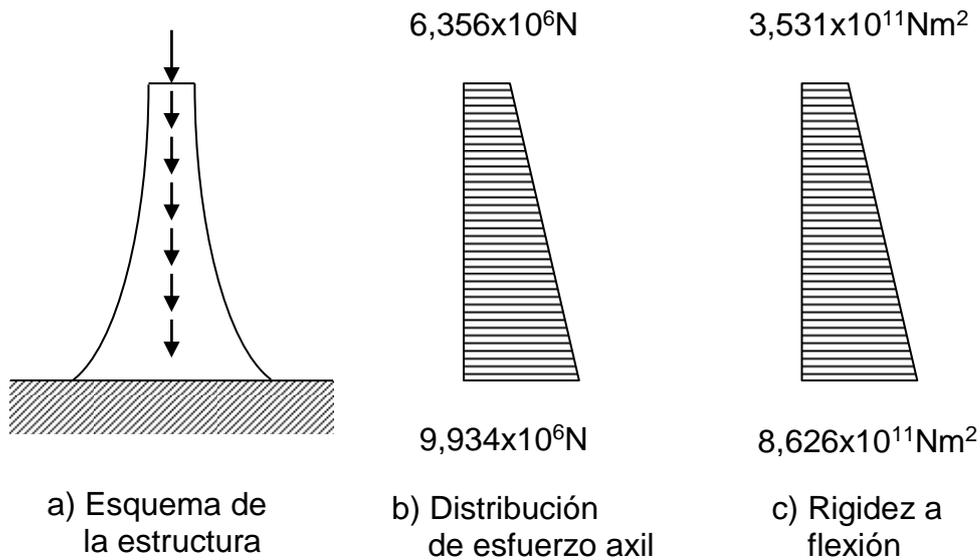


Figura 3-49 Estructura en Wuhan (China) con rigidez variable (Li, 2001)

De acuerdo con el procedimiento descrito en el presente capítulo, el “Método Combinado” contempla los tres siguientes pasos:

1. La estructura de rigidez variable es sustituida por una estructura de rigidez uniforme usando el “Método de la Carga Equivalente” definido por la Ecuación (3.15).
2. La Carga Equivalente variable es transformada a una carga uniforme mediante el “Coeficiente de Carga Uniforme” definido en la Ecuación (3.4).
3. Se determina el factor de carga dividiendo la carga crítica de Euler por la carga uniforme equivalente obtenida.

El primer paso se muestra esquemáticamente en la Figura 3.50, donde la estructura en ménsula ha sido sustituida por su equivalente biarticulada a efectos de determinación de la carga crítica de Euler.

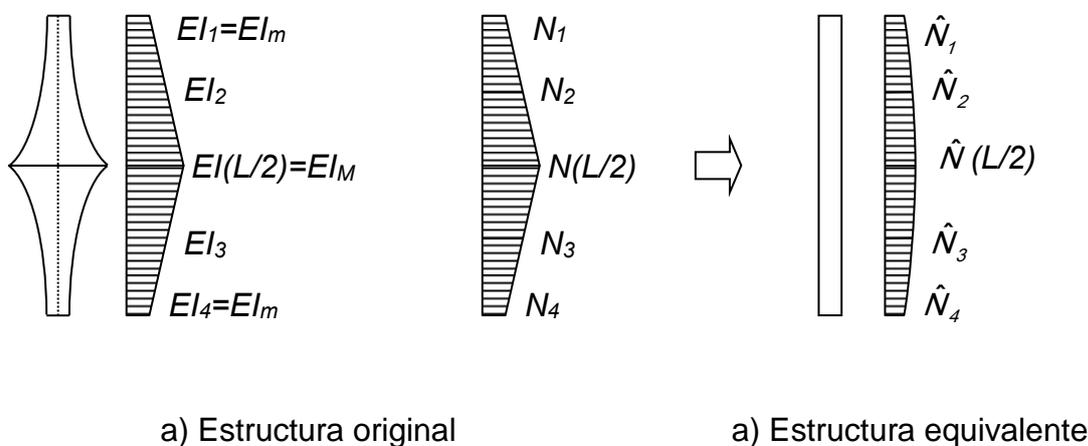


Figura 3-50 Estructura original y estructura uniforme equivalente

De acuerdo con la Ecuación (3.15), los esfuerzos axiles en la estructura uniforme vienen dados por

$$\hat{N}(x) = \frac{N(x)}{(EI(x))^x} (EI_m)^x \frac{I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\beta}{I_M^{2\beta+\gamma}} = 1704.6 \frac{N(x)}{(EI(x))^x} \tag{3.20}$$

Consecuentemente, para el caso que nos ocupa

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 = \hat{N}_4 &= 3.719.093N \\ \hat{N}_2 = \hat{N}_3 &= 4.049.250N \\ \hat{N}(L/2) = \hat{N}_M &= 4.446.351N \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para obtener la carga crítica de pandeo de la estructura uniforme equivalente, que tiene una carga distribuida variable, aplicamos las Ecuaciones (3.1) y (3.4), es decir

$$\begin{aligned} \hat{N}_{cr} &= C \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} = \\ &= \frac{21 \hat{N}_M}{4(\hat{N}_1 + \hat{N}_4) + 6(\hat{N}_2 + \hat{N}_3) + \hat{N}_M} \frac{\pi^2 (3,531 \times 10^{11})}{420^2} = \\ &= 22.280.810N \end{aligned} \tag{3.22}$$

Con ello, el factor de carga necesario para alcanzar la carga crítica será

$$\frac{\hat{N}_{cr}}{\hat{N}_M} = \frac{22.280.810}{\hat{N}_M} = 5,011 \quad (3.23)$$

El factor de carga es usado ahora para obtener la carga crítica de la estructura no uniforme, que vendrá dada por

$$N_{cr} = 5,011 \cdot 9,934 \cdot 10^6 = 49,779 \cdot 10^6 N \quad (3.24)$$

Este valor representa la carga máxima correspondiente a la sección empotrada, donde el esfuerzo axil es máximo.

De acuerdo con el trabajo de Li (2001), el valor exacto del factor de carga es 5,374. El valor obtenido por el “Método Combinado” ha sido de 5,011, lo que representa un error de 6,75%, inferior al valor exacto.

3.6 APLICACIÓN A LA NORMA AMERICANA “AISC LRFD”

Uno de los objetivos del trabajo de investigación presentado en esta tesis doctoral ha sido el proporcionar métodos sencillos complementarios a los descritos por las normas de diseño vigentes en los distintos países donde los ingenieros españoles desarrollan su actividad, como es el caso de la norma americana AISC LRFD (2010).

De acuerdo con las especificaciones de AISC LRFD (2010), la resistencia nominal de diseño P_n en elementos estructurales con secciones compactas, es decir, con ratios anchura-espesor de chapa que prevengan el pandeo local o abolladura, viene dada por

$$P_n = AF_{cr} \quad (3.25)$$

Donde A es el área de la sección recta y F_{cr} es la tensión crítica. La tensión crítica es función de la esbeltez del elemento y viene dada por

$$\lambda = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (3.26)$$

donde L es la distancia entre puntos arriostrados, r es el radio de giro de la sección recta, F_y es la tensión de fluencia del acero, E es el módulo de elasticidad y K es el factor de longitud efectiva.

La Sección F3 del Apéndice F de la norma trata de los elementos con sección variable. Siguiendo los trabajos de investigación de Prawel et al. (1974) y Lee et al. (1972), la resistencia de los elementos de sección variable es obtenida mediante la formulación general teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

1. La sección de menor área es tomada como referencia para determinar la resistencia.
2. Se ha de utilizar una esbeltez efectiva.

La esbeltez efectiva λ_{eff} es definida por la ecuación

$$\lambda_{eff} = \frac{K_{\gamma} L}{r_0 \pi} \sqrt{\frac{F_{\gamma}}{E}} \quad (3.27)$$

Donde r_0 es el radio de giro correspondiente a la menor sección y K_{γ} es el factor de longitud efectiva correspondiente al elemento de sección variable.

Para el cálculo del factor de longitud efectiva, la norma americana indica que deberá obtenerse mediante un “análisis racional”, pero no da indicaciones sobre el modo de realizar dicho análisis.

Dado que el “Método Combinado” presentado en esta tesis tiene la capacidad de determinar la carga crítica de pandeo, y dado que la carga crítica de pandeo está directamente relacionada con la esbeltez de la columna, el nuevo método puede ser utilizado para obtener el valor de K_{γ} y, consecuentemente, determinar la resistencia a compresión del elemento siguiendo las especificaciones de AISC LRFD (2010). En efecto, de la Ecuación (3.18) se tiene que

$$N_{cr} = \frac{21 N_M}{4(c_1 N_1 + c_4 N_4) + 6(c_2 N_2 + c_3 N_3) + c_M N_M} \frac{\pi^2 E I_m}{L^2} = C \frac{\pi^2 E I_m}{L^2} \quad (3.28)$$

Donde C es el coeficiente de equivalencia global, que tiene en cuenta tanto la variación de sección como la distribución no uniforme de carga.

La Ecuación (3.28) indica que la carga crítica de la columna de sección variable es igual a la carga crítica de un elemento de longitud

$$L_{eff} = \frac{L}{\sqrt{C}} \quad (3.29)$$

Por tanto, el método propuesto en la presente tesis tiene aplicación directa en la norma americana tomando para K_γ el valor

$$K_\gamma = \sqrt{\frac{1}{C}} \quad (3.30)$$

con

$$C = \frac{21 N_M}{4(c_1 N_1 + c_4 N_4) + 6(c_2 N_2 + c_3 N_3) + c_M N_M} \quad (3.31)$$

4 PANDEO DE ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A FLEXIÓN NO UNIFORME

4.1 INTRODUCCIÓN

Las curvas de pandeo lateral del Eurocódigo 3 definen los factores de reducción de pandeo como una función adimensional de la esbeltez de un elemento estructural. Por otra parte, según el “Método General” EC3, estas curvas también pueden usarse para elementos no uniformes siempre y cuando se calcule la esbeltez apropiada. En este contexto, se presentará un nuevo procedimiento para el cálculo del momento crítico elástico de elementos de canto variable, juntamente con expresiones analíticas de cálculo.

Es bien sabido que el momento crítico elástico depende muy directamente tanto del diagrama de momentos flectores como de las restricciones de los apoyos en los extremos. Para elementos uniformes, los momentos críticos elásticos pueden ser calculados por procedimientos simples donde la distribución del momento flector se representa por un factor de momento uniforme equivalente (EUMF), y las restricciones de apoyos de los extremos por la longitud de pandeo lateral. Los valores de EUMF para diferentes distribuciones de momento se pueden encontrar en Boissonnade et al. o se pueden calcular utilizando expresiones de forma closed como las que proporcionan códigos tales como AISC LRFD y BS 5950-1:200, o las contenidas en Serna et al. y López et al. Desafortunadamente, estos procedimientos no han sido ampliados al estudio de vigas de sección variable. En consecuencia, el momento crítico elástico de este tipo de vigas se tiene que obtener utilizando programas informáticos basados en elementos finitos u otras técnicas numéricas.

En los primeros trabajos de Lee et al., se presentaba un procedimiento basado en el concepto de factores de longitud efectivos. Este procedimiento, que fue adoptado por AISC LRFD y ofrece un valor de tensión de pandeo lateral, se basa en una distribución de momento lineal que considera el módulo de sección de la viga. Polyzois y Raftoyiannis han presentado una ampliación del enfoque de AISC LRFD a más diagramas de momento. Sin embargo, según Li, la fórmula

del AISC LRFD sobreestima los momentos de pandeo lateral cuando se comparan con los resultados numéricos.

Se pueden encontrar aproximaciones teóricas clásicas al problema torsional-lateral elástico en vigas de canto variable en Kitipornchai et al. (1972), Brown (1981) y Yang et al. (1987). En los últimos años, se ha realizado abundante investigación usando los elementos finitos para obtener nuevos resultados numéricos para vigas de sección variable (Gupta et al., Kim et al.) y se continúa trabajando por la calidad de los resultados que depende del elemento usado en la discretización de elementos finitos (Andrade y Camotin, Andrade et al.). En Challamel et al. se pueden encontrar algunos resultados analíticos para vigas en voladizo linealmente variable.

Más estrechamente relacionados con el enfoque presentado en este trabajo están el método de diseño desarrollado por Braham y Hanikenne y el procedimiento analítico desarrollado por Li. Este trabajo ofrece un nuevo procedimiento para obtener el momento crítico elástico de las vigas de sección variable. Tras describir el factor equivalente de viga uniforme – momento uniforme, el informe presenta el enfoque del momento equivalente que tiene en cuenta la sustitución de una viga de sección variable por una viga uniforme con un momento crítico elástico aproximadamente igual. Para validar el presente procedimiento, se compararon los resultados obtenidos para algunos problemas de referencia con resultados anteriores. Finalmente, las expresiones analíticas desarrolladas previamente para vigas uniformes se amplían para contemplar la viga de sección variable.

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Mediante el programa de elementos finitos ANSYS en su versión 11.0, se han realizado distintos modelos de viga de sección variable doblemente simétrica, sometidos a distintas situaciones de carga que producen un estado de flexión y apoyadas en los extremos mediante vínculos que simulan el típico apoyo en horquilla donde se permite el giro de flexión y el alabeo y se impiden los giros de torsión y los desplazamientos. De esta forma se pretende tener valores fiables del momento crítico en esas situaciones concretas, para

posteriormente compararlas con los métodos simplificados aproximados que se proponen en esta tesis.

En el modelo de estudio, y con el fin de validarlo, se ha tomado inicialmente una viga de sección constante sometida a distintos estados de carga que la hacen flexionar y se han comparado los resultados de valores críticos obtenidos con ANSYS en un modelo de elementos tipo shell con el mismo programa y elementos tipo beam y los que se obtienen a partir del programa LTBeam v1.0.7 de Yvan Galéa (CTICM-2002), obteniéndose como resultados valores concordantes que mostraremos más adelante.

Una vez validado el modelo se ha pasado a obtener el resultado numérico mediante ANSYS con elementos tipo beam de los diferentes tipos de vigas de sección variable con distintas leyes de fletores, soluciones que consideramos correctas y que compararemos con los métodos simplificados propuestos.

4.3 VALIDACIÓN DE LOS MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS GENERADOS EN ANSYS

Como ya se ha comentado, el primer acercamiento numérico al problema lo realizamos con dos programas ANSYS y LTBeam:

El programa comercial ANSYS en su versión 11.0 universitaria nos permite realizar un acercamiento al problema mediante dos tipos de elementos:

- El elemento beam con dos posibilidades:
 - a) Beam 188, elemento 3D basado en la teoría de vigas de Timoshenko con deformación de cortante incluida. Se trata de un elemento lineal de 2 nudos con seis grados de libertad en cada nudo (los tres desplazamientos y giros) a los que se les puede unir, mediante una opción, un séptimo grado de libertad de alabeo (warping). Este elemento tiene una librería de secciones entre las que se encuentra la sección doble T, que a su vez pueden ser variables en su longitud (tapered beam section).
 - b) Beam 189, similar al anterior en todo salvo que se trata de un elemento cuadrático (tres nudos por elemento) que permite por tanto la utilización de

funciones de forma más complejas (segundo grado) para definir el campo de desplazamientos dentro del propio elemento.

- El elemento Shell, que nos ha permitido realizar un modelo más complejo de elementos bidimensionales (Shell 63), pero que tiene la contrapartida de detectar inestabilidades locales (abolladuras en las alas y alma) que no son el fin de nuestro estudio. Esta posibilidad hace que el modelo tenga un rango de validez para nosotros que depende de la esbeltez de alas y alma de la pieza. No obstante, dentro de ciertos rangos, nos ha permitido contrastar la fiabilidad de los otros modelos.

Por otro lado, el programa LTBeam v1.0.7 de Yvan Galéa (CTICM-2002) que hemos utilizado trabaja también con elementos tipo beam y está desarrollado específicamente para el análisis de inestabilidad por flexión de vigas.

Para la validación de los modelos, lo primero que hemos realizado es una comparación de los resultados obtenidos con estos programas de análisis numérico por elementos finitos sobre dos modelos de viga doble T y el resultado teórico.

Primer modelo: Se trata de comparar los resultados obtenidos en vigas con distintos anchos de ala (entre 20mm y 400mm) de 5m de longitud, con una sección de 400mm de canto con espesores de chapa de 10mm. En este caso el tipo de carga elegida ha sido la actuación de una carga puntual en centro de luz.

Modelo 1:

- longitud 5m
- canto 400mm
- ancho ala 20/400mm
- espesor 10mm
- carga 0-1-0

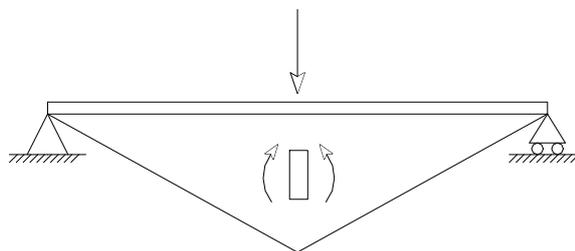


Figura 4-1 Distribución de momentos para carga 0-1-0

Obteniéndose los siguientes resultados del factor que define la carga crítica de pandeo por flexión:

b	LTBeam	ANSYS(Shell)	ANSYS(Beam 189)
20	0.7109	0.7616	0.7102
50	1.8018	1.8260	1.8080
100	5.9482	5.9260	5.9780
120	8.6480	8.5390	8.6870
140	12.1440	11.8560	12.1890
160	16.5860	15.9610	16.6280
180	22.1220	20.9210	22.1530
200	28.9000	26.7750	28.9080
220	37.0700	33.5330	37.0370
240	46.7740	41.1740	46.6840
260	58.1600	49.6240	57.9870
280	71.3680	58.7120	71.0860
300	86.5480	67.9357	86.1170
400	196.9600		194.9620

Tabla 4-1 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 1

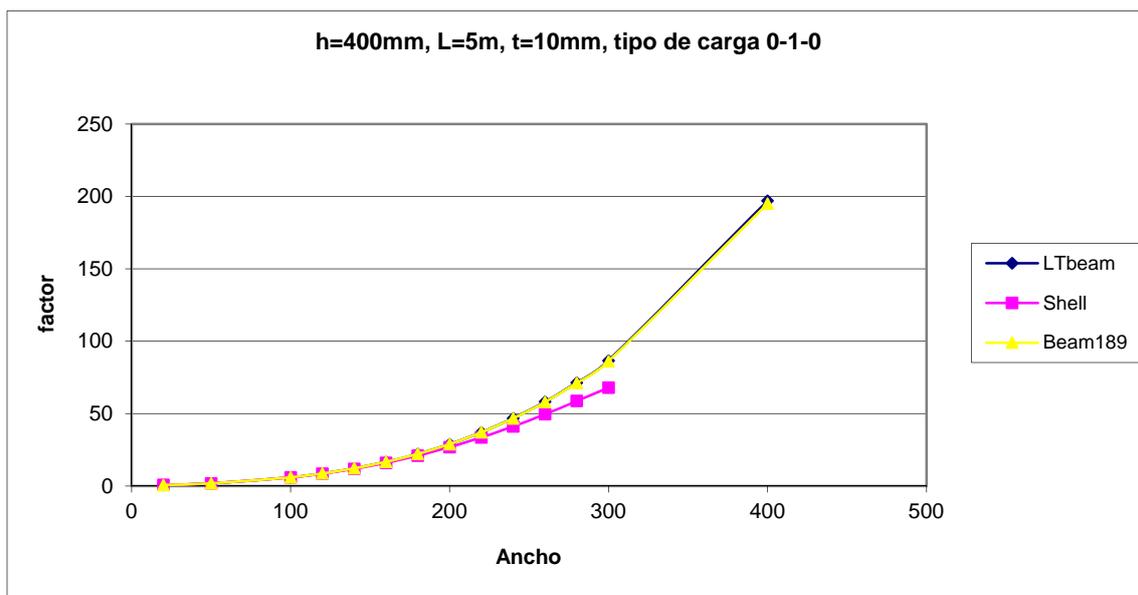


Figura 4-2 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 1

A la vista de estos resultados recogidos en la tabla 4-1 y representados en la gráfica de la figura 4-2, se detecta claramente en el modelo 1 (viga con alas muy esbeltas, que para un ancho de 180mm se aproxima a un IPE 400) cómo el modelo shell va separándose de los otros modelos a medida que aumenta el ancho de la pieza (aumento de la esbeltez) ya que se van acoplando fenómenos de inestabilidad local (abolladura) que los otros modelos no detectan. También se comprueba cómo los modelos tipo Beam, tanto de ANSYS como de LTBeam, son bastante coincidentes en el rango de estudio.

Segundo modelo: En este caso se ha considerado un espesor de chapa de 30mm y la carga aplicada corresponde a dos momentos iguales y opuestos en los extremos de la viga (figura 4-3), y dado que conocemos la solución teórica del problema, hemos comparado no sólo los métodos de análisis numérico entre sí, sino que también hemos introducido la solución teórica y el error en tanto por ciento cometido entre el modelo ANSYS Shell frente a esta solución.

Sabemos que el momento crítico teórico para el caso de una viga biapoyada, con giro de torsión impedido en los extremos (apoyo en horquilla) y giro de flexión y alabeo libre en los extremos se obtiene por la expresión:

$$M_{CR} = \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} E \cdot I_y \cdot G \cdot J + \frac{\pi^4}{L^4} E \cdot I_y \cdot E \cdot I_w} \quad (4.1)$$

siendo:

L Longitud de la viga

E Módulo de Young

G Módulo transversal $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

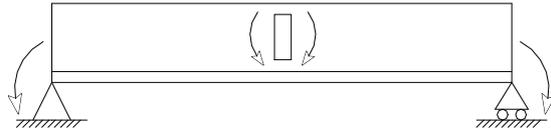
I_y Momento principal de inercia menor de la sección

J Momento de inercia de torsión

I_w Módulo de alabeo de la sección $I_w = \frac{I_y \cdot h^2}{4}$ en secciones I

Modelo 2:longitud $L=5\text{m}$ canto $h=400\text{mm}$ ancho ala $60/380\text{mm}$ espesor $t=30\text{mm}$

carga 1-1

**Figura 4-3** Distribución de momentos para carga 1-1

En la tabla 4-2 se recogen los resultados del factor que define la carga crítica de pandeo por flexión y que se representan en la gráfica de la figura 4-4:

b	LTBeam	ANSYS (Shell)	ANSYS (Beam 189)	%error	Mcr
60	2.4606	2.5700	2.4430	7.249	2.396
80	3.4216	3.4970	-	4.771	3.338
100	4.6838	4.6940	4.6950	2.558	4.577
120	6.2347	6.1600	-	0.931	6.103
140	8.0792	7.9060	8.1140	-0.202	7.922
160	10.2330	9.9460	-	-1.032	10.050
180	12.7170	12.3020	-	-1.661	12.510
200	15.5620	15.0000	15.6480	-2.158	15.331
220	18.8000	18.0690	-	-2.565	18.545
240	22.4660	21.5400	-	-2.913	22.186
260	26.5930	25.4450	-	-3.221	26.292
300	36.3890	34.6870	36.5350	-3.776	36.048
380	63.2630	59.7190	63.3530	-4.979	62.848

Tabla 4-2 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 2

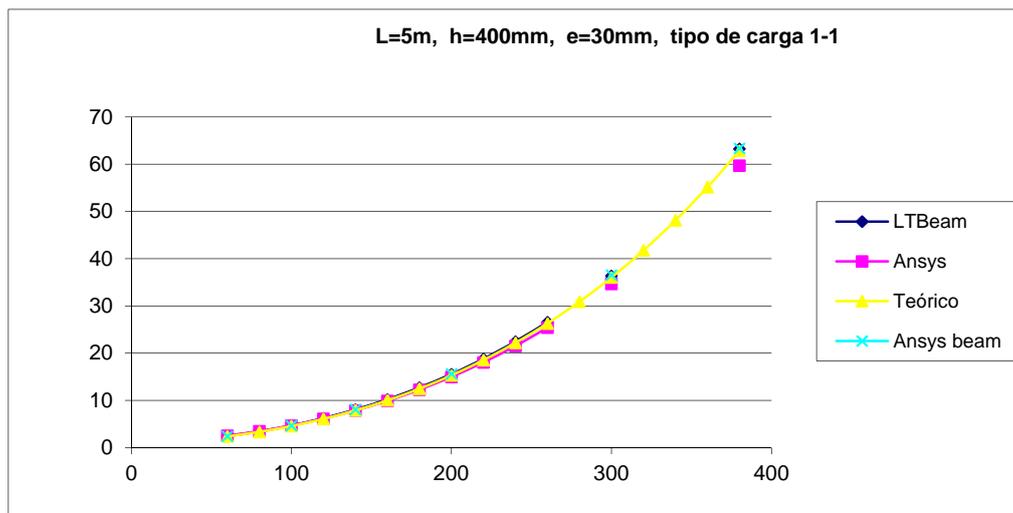


Figura 4-4 Factor que define la carga crítica de pandeo por flexión. Modelo 2

En cuanto a este segundo modelo, el efecto de esbeltez está mitigado (para un ancho de 300mm viene a aproximarse a un perfil HEM 400) ya que los espesores son tres veces mayores de los del modelo 1 y por tanto los resultados son mucho más coincidentes.

4.4 ESTUDIO DE VIGAS DE CANTO VARIABLE SOMETIDAS A DIVERSOS ESTADOS DE FLEXIÓN

Una vez contrastados los distintos métodos numéricos para la obtención del momento crítico de pandeo lateral en vigas doble T se pasó a valorar distintas situaciones de carga en vigas de canto variable.

En principio se plantearon dos geometrías de la sección, una que llamaremos viga 1 y que podría encuadrarse en un perfil de ala ancha (mayores espesores y relación ancho canto semejante en su sección de menor inercia) y otra (viga 2) que se aproximaría más al concepto de ala estrecha.

Tomando como sección de referencia la de mínima inercia, las características geométricas de estas vigas son:

	d_0 (mm)	b_0 (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)
Viga 1	400	400	40	20
Viga 2	400	200	25	15

Tabla 4-3 Valores geométricos de las vigas estudiadas

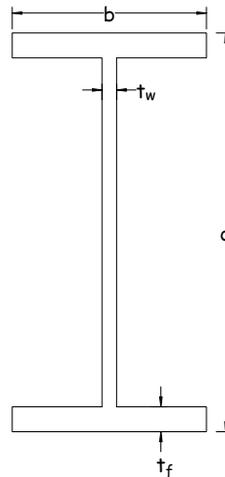


Figura 4-5 Geometría de la sección

Además, y dado que el fin de este trabajo es valorar vigas de sección variable, se han estudiado diversas geometrías de canto linealmente variable, con cantos máximo y mínimo en los extremos de la viga. Como elemento de referencia para esta variación del canto se ha establecido un parámetro denominado α que representa el cociente entre el canto mínimo y el máximo

$$\alpha = \frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{d_0}{d_{\max}} \quad (4.2)$$

Los casos estudiados responden a los siguientes valores de α .

Valores de α	0,4	0,6	0,8	1,0
---------------------	-----	-----	-----	-----

Tabla 4-4 Valores de α estudiados

El caso de $\alpha=1$ responde a la viga de canto constante con $d=400\text{mm}$. Además, en uno de los casos se ha estudiado una viga con canto máximo en centro de luz y mínimo en apoyos.

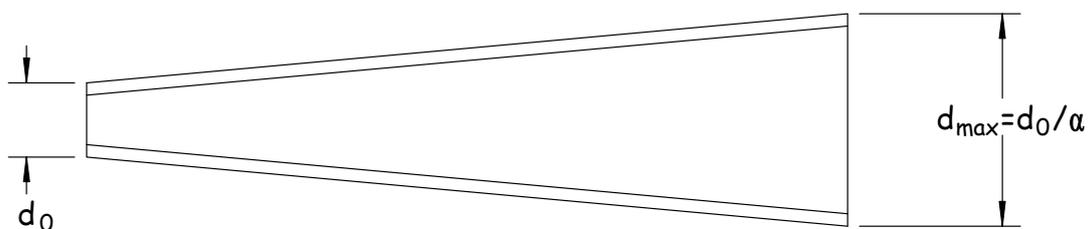


Figura 4-6 Geometría de la viga estudiada

En todos los casos además se ha trabajado con dos longitudes de viga, una de 20m y otra de 10m y así podremos detectar la sensibilidad del estudio ante las distintas esbelteces no ya de la sección, sino de la pieza.

En cuanto a las cargas aplicadas sobre las vigas, se han estudiado aquellos casos que se pueden considerar más representativos:

- Caso de una ley de flectores lineal a lo largo de la viga que se corresponde con la actuación de dos momentos en los extremos de la viga; en este caso, para referenciar la situación se introduce el parámetro ψ que representa la relación entre los momentos en los extremos, de forma que cuando su valor es negativo indica que el momento flector cambia de signo a lo largo de la viga (Figura 4-7). Así los casos estudiados han sido tres con cambio de signo en la ley de flectores y otros tres con la ley de un solo signo ($\psi=-1$, $\psi=-0.75$, $\psi=-0.5$, $\psi=0$, $\psi=0.5$, $\psi=1$)

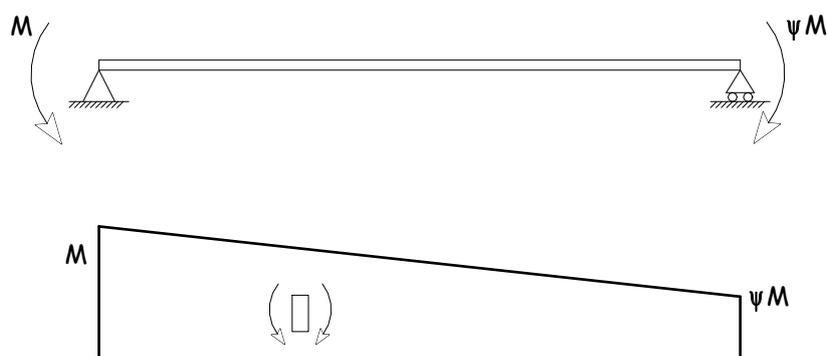


Figura 4-7 Ley de flectores con variación lineal

- Caso de ley de flectores bilineal derivada de una viga con momentos iguales en los extremos y una carga puntual en el centro de luz (figura 4-8). En este caso será el parámetro λ el que define la ley de esfuerzos (flectores) que actúan sobre la viga. Este parámetro relaciona el momento en el extremo de la viga con la diferencia entre los momentos de centro de luz y de apoyos, de forma que cuando λ es negativa el flector en centro de luz debido a los momentos actuantes en los extremos es de signo contrario al que en ese mismo punto produce la carga puntual (figura 4-9).

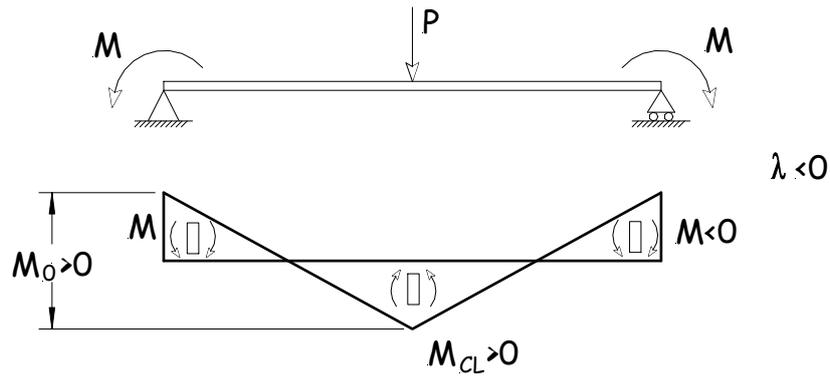


Figura 4-8 Estado de carga con ley de flectores bilineal

$$\lambda = \frac{M}{M_{CL} - M} = \frac{M}{M_0} \tag{4.3}$$

El estudio se ha realizado con valores de λ comprendidos entre -2 y 2

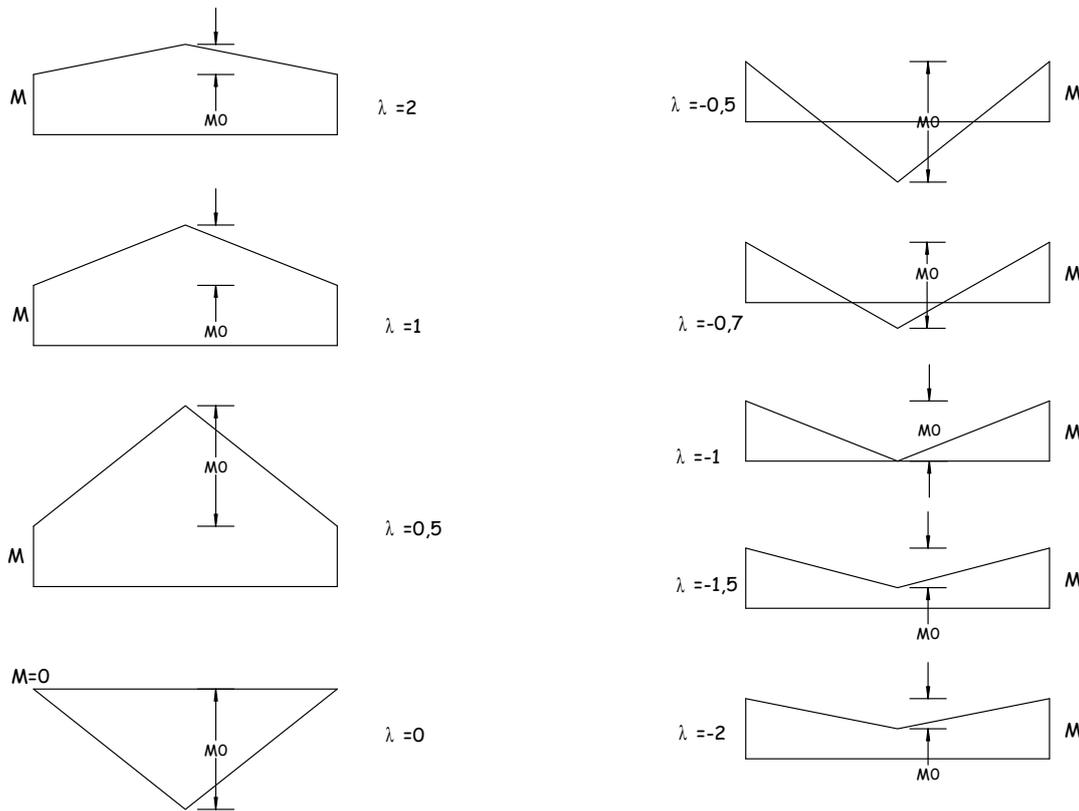


Figura 4-9 Relación entre el parámetro λ y la ley de flectores en la viga con ley bilineal

- Caso de ley de flectores parabólica, fruto de aplicar dos momentos iguales y de sentidos opuestos en los extremos de la viga y una distribución de carga repartida uniforme extendida a toda la longitud de la viga (figura 4-10). Para identificar los distintos casos se utiliza el parámetro β , que representa la relación

entre el momento de empotramiento perfecto de la viga biempotrada sometida a una carga uniforme y el momento realmente aplicado en el extremo de la viga. Este parámetro se le ha hecho variar entre 0 y 75.

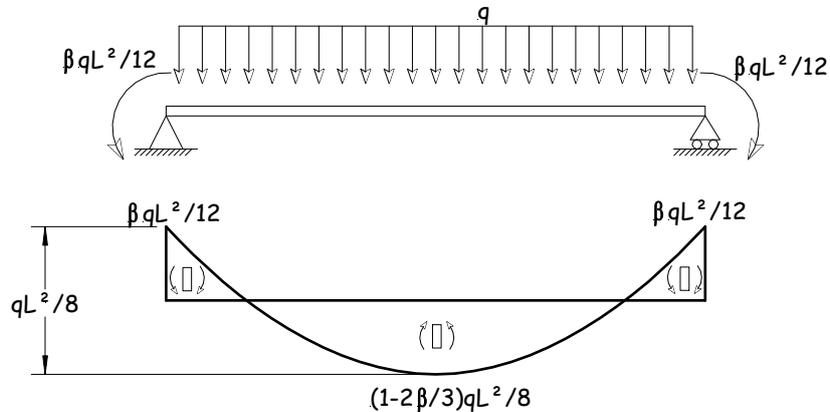


Figura 4-10 Distribución de momentos flectores en el caso de ley parabólica

Además de estos casos de carga aplicados sobre una viga de canto linealmente variable máximo y mínimo en los extremos, se han realizado tres casos más de carga.

- Viga con canto máximo en centro de luz y mínimo en apoyos y distribución de flectores de tipo bilineal, similar al segundo tipo de carga comentado anteriormente (Figura 4-11). Como en los casos anteriores la relación entre el canto menor y el máximo viene dado por el parámetro α y los distintos casos de carga por el parámetro λ .

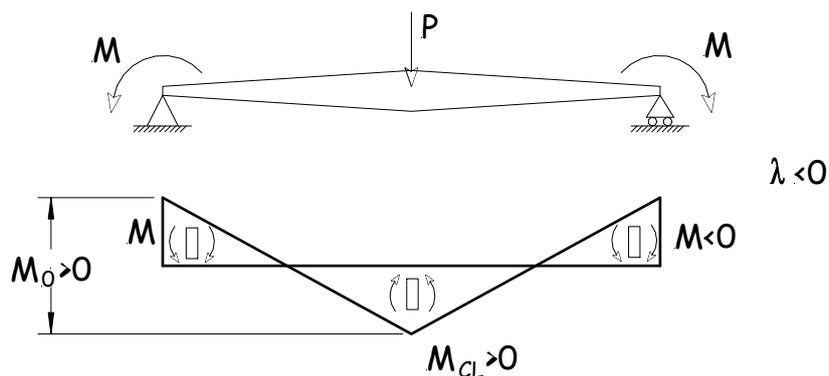


Figura 4-11 Geometría y distribución de flectores en el caso de viga con canto máximo en centro de luz y ley de flectores bilineal

- Vigas sometidas a leyes lineales de esfuerzos y donde la variación de la sección no es debida únicamente a una variación lineal de canto, sino que al tiempo experimentan una variación afín en el ancho de la sección (Figura 4-12).

La medida se realiza mediante el parámetro α ya comentado, que representa al mismo tiempo la relación entre el canto mínimo y el máximo y entre la anchura mínima y la máxima:

$$\alpha = \frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{b_{\min}}{b_{\max}} \quad (4.4)$$

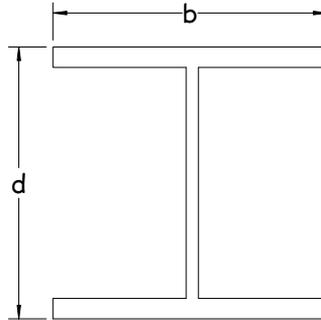


Figura 4-12 Geometría en vigas de ancho y canto variable

4.4.1 Resultados de la primera tanda. Ley de flectores lineal

Como ya se ha comentado, se han analizado en una primera tanda dos tipos de vigas, una de ala estrecha y otra de ala ancha, con variación lineal del canto entre las secciones extremas, y sometidas a leyes de momentos flectores que varían linealmente a lo largo de la longitud.

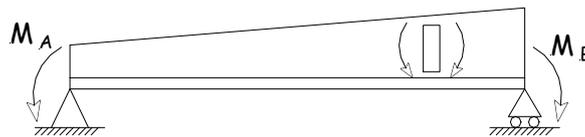


Figura 4-13 Definición de la carga para ley lineal de flectores

$$\psi = \frac{M_A}{M_B} \quad (4.5)$$

Indicar que el caso de $\alpha=1$ responde a la viga de sección constante y $\psi=1$ representa la situación de ley de flectores constante en toda la longitud de la viga. Ambas situaciones deben dar como resultado el caso que se toma como referencia, cuya expresión analítica es conocida y que comentamos con anterioridad.

Los resultados obtenidos para el momento crítico, se han comparado con los del modelo de referencia (viga de canto constante, de sección coincidente con la sección mínima y sometida a una ley de momentos constante en su

longitud), dicha relación se denomina C_1 en las tablas de resultados (tablas 4-5 y 4-6). Estos valores están representados en las gráficas 4-14 y 4-15 para el caso de viga 1 (ala ancha) y 4-16 y 4-17 en el caso de la viga 2 (ala estrecha).

a) Viga 1 (ala ancha)

		Viga 1 L=10m						Viga 1 L=20m					
		ψ						ψ					
		-1	-0.75	-0.5	0	0.5	1	-1	-0.75	-0.5	0	0.5	1
α	1	2.660	2.725	2.461	1.809	1.316	1.000	2.610	2.643	2.385	1.786	1.314	1.000
	0,8	2.741	2.854	2.582	1.880	1.357	1.027	2.648	2.708	2.442	1.817	1.331	1.011
	0,6	2.870	3.064	2.787	2.002	1.429	1.075	2.710	2.818	2.543	1.873	1.361	1.030
	0,4	3.125	3.469	3.199	2.256	1.581	1.179	2.825	3.036	2.752	1.992	1.427	1.073

Tabla 4-5 Valores de C_1 para viga 1 con longitudes de 10m y 20m

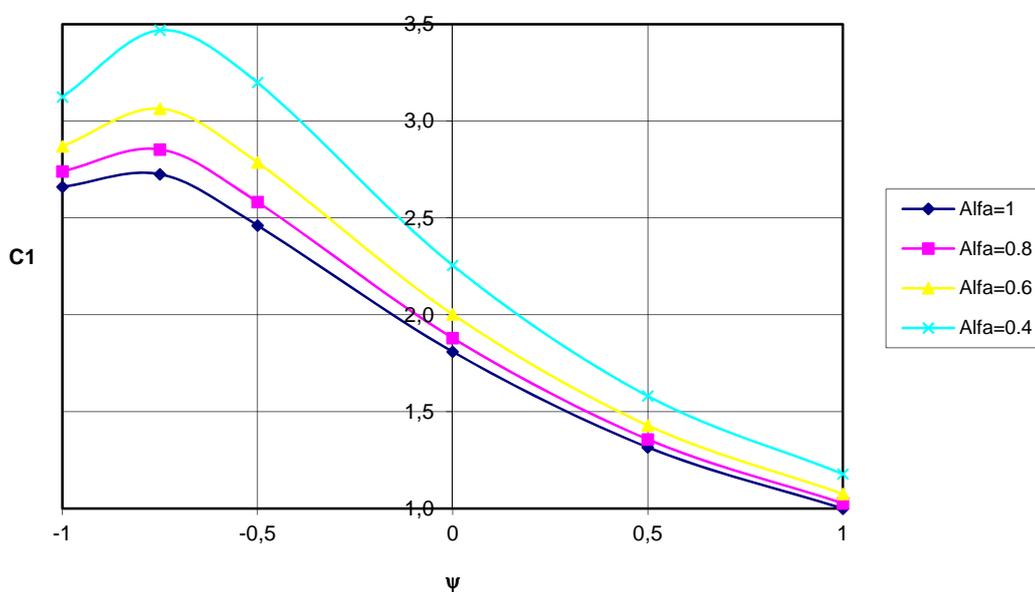


Figura 4-14 Variación de C_1 en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores lineal

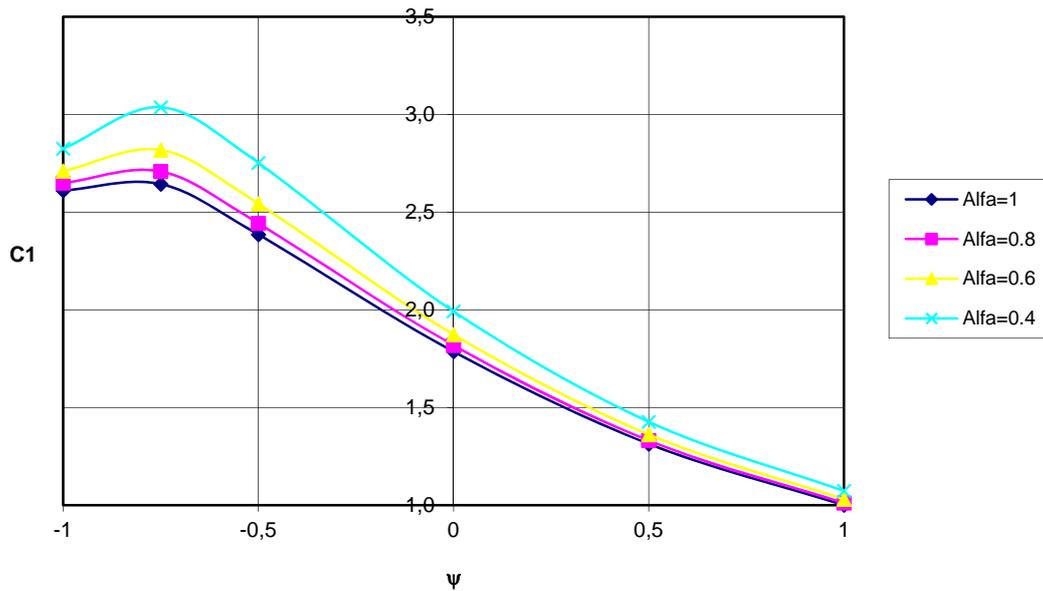


Figura 4-15 Variación de C_1 en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores lineal

b) Viga 2 (ala estrecha)

		Viga 2 L=10m						Viga 2 L=20m					
		ψ						ψ					
		-1	-0.75	-0.5	0	0.5	1	-1	-0.75	-0.5	0	0.5	1
α	1	2.649	2.698	2.433	1.800	1.315	1.000	2.595	2.622	2.368	1.781	1.313	1.000
	0,8	2.724	2.818	2.543	1.866	1.353	1.025	2.642	2.696	2.434	1.821	1.337	1.016
	0,6	2.841	3.012	2.727	1.975	1.418	1.068	2.714	2.819	2.546	1.888	1.376	1.041
	0,4	3.058	3.376	3.091	2.196	1.549	1.156	2.844	3.055	2.767	2.020	1.453	1.092

Tabla 4-6 Valores de C_1 para viga 2 con longitudes de 10m y 20m

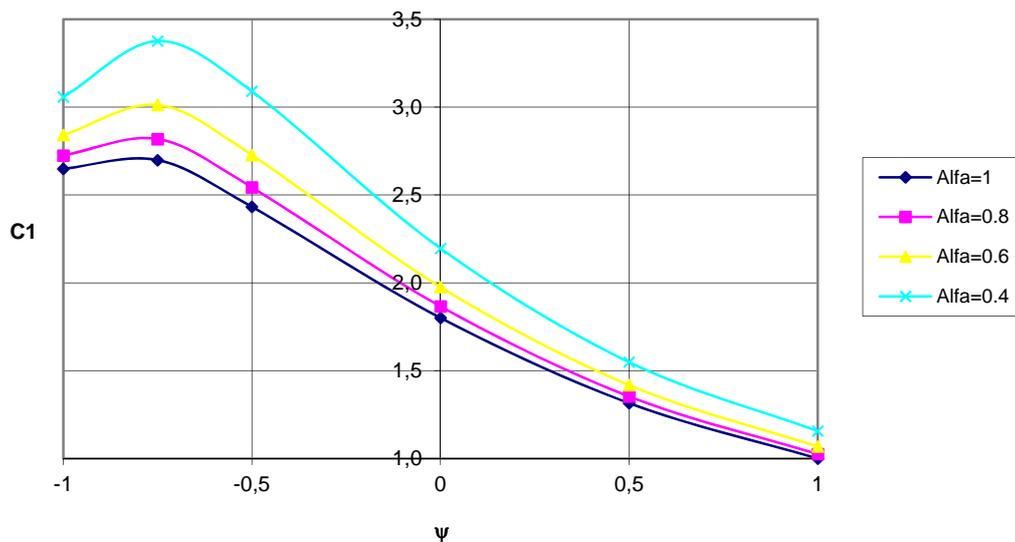


Figura 4-16 Variación de C_1 en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores lineal

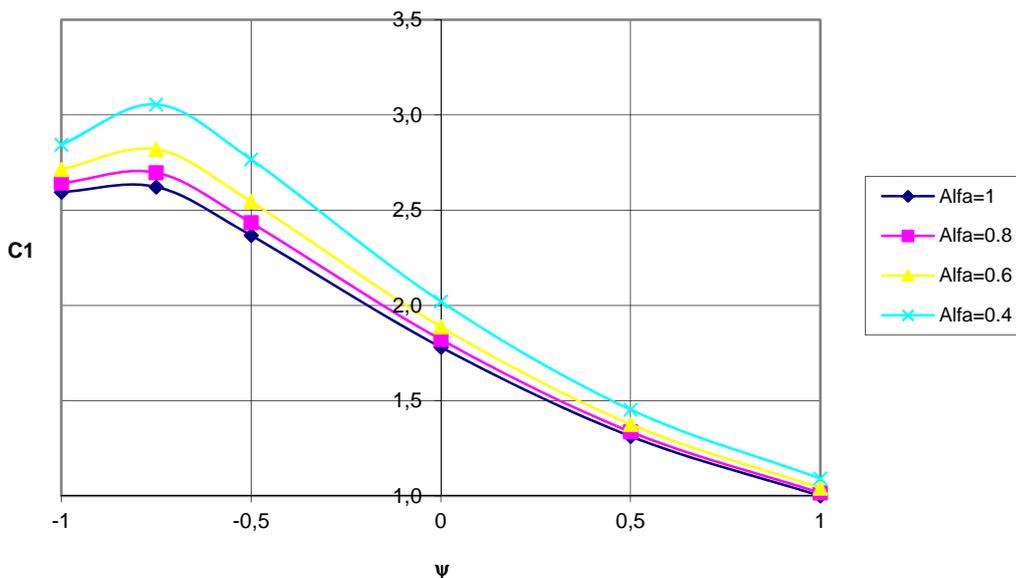


Figura 4-17 Variación de C₁ en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores lineal

4.4.2 Segunda tanda. Ley de flectores bilineal

En una segunda tanda se han analizado los dos tipos de viga (ala estrecha y ala ancha) con la variación lineal de canto definida por el parámetro α comentado anteriormente, sometidas a diferentes leyes de flectores de tipo bilineal (viga con una carga puntual en centro de luz y dos momentos iguales en los extremos); así, para caracterizar los distintos casos de carga se ha utilizado un parámetro λ que varía entre 2 y -2 y que representa la relación entre el momento M en los extremos de la viga y la diferencia de momentos $M_{CL}-M$ (M_{CL} es el momento flector en centro de luz de la viga).

$$\lambda = \frac{M}{M_{CL} - M} = \frac{M}{M_0} \tag{4.6}$$

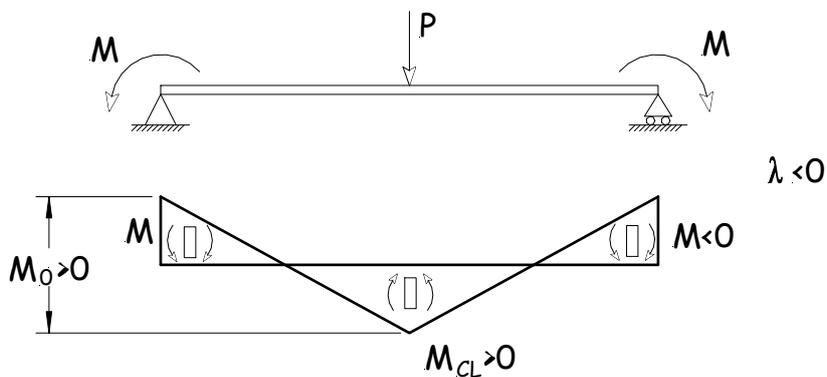


Figura 4-18 Cargas y leyes de flectores para el segundo caso de estudio

Al igual que en la tanda anterior, los resultados de los momentos críticos obtenidos se han comparado con el momento crítico de una viga de sección constante igual a la sección menor de nuestra viga y sometida a una ley de flectores constante en su longitud, obteniéndose así un nuevo valor C_1

$$C_1 = \frac{M_{cr}}{M_{cte}} \quad (4.7)$$

Los valores del parámetro C_1 se representan en las tablas 4-7 (viga 1 en sus dos longitudes) y 4-8 (viga 2) y se representan en las gráficas 4-19 a 4-22

λ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
2	1.3060	1.1900	1.1363	1.1061	1.1871	1.1396	1.1180	1.1058
1	1.3762	1.2531	1.1963	1.1643	1.2500	1.1995	1.1765	1.1635
0.5	1.4506	1.3199	1.2596	1.2258	1.3164	1.2626	1.2381	1.2243
0	1.6092	1.4619	1.3942	1.3563	1.4576	1.3962	1.3683	1.3525
-0.5	2.0206	1.8330	1.7465	1.6979	1.8348	1.7541	1.7169	1.6957
-0.6	3.0289	2.7590	2.6332	2.5620	2.7772	2.6627	2.6091	2.5782
-0.7	3.8547	3.5372	3.3801	3.2856	3.5309	3.3926	3.3202	3.2750
-1	3.1244	2.8700	2.7403	2.6601	2.8244	2.7095	2.6481	2.6100
-1.5	2.1222	1.9429	1.8568	1.8067	1.9318	1.8566	1.8202	1.7991
-2	1.7844	1.6316	1.5592	1.5178	1.6253	1.5621	1.5324	1.5153

Tabla 4-7 Valores de C_1 para viga 1 y longitudes de 10m y 20m

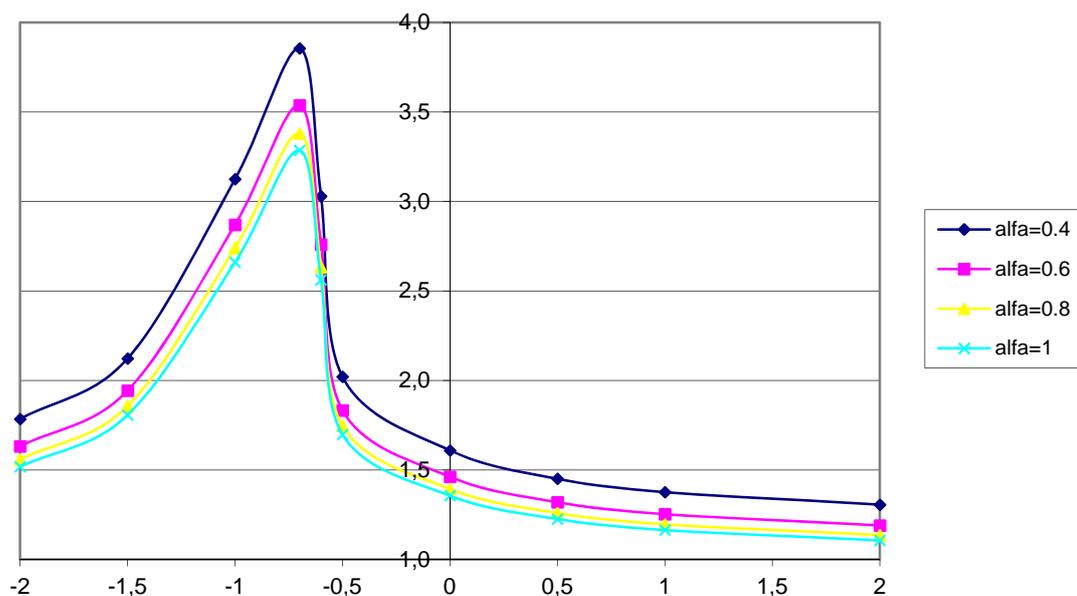


Figura 4-19 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores bilineal

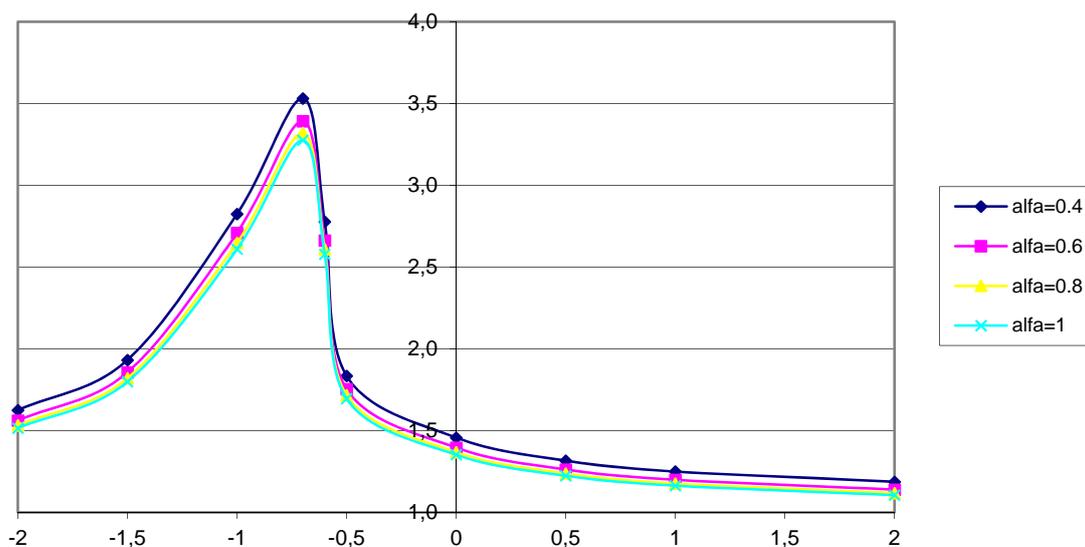


Figura 4-20 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores bilineal

Como puede apreciarse en la gráfica y era previsible, los valores máximos de C_1 se obtienen para aquellas situaciones donde la ley de flectores cambia de signo o el momento de centro de luz es menor que el de apoyos.

λ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
2	1.2809	1.1820	1.1341	1.1060	1.2085	1.1515	1.1229	1.1057
1	1.3496	1.2446	1.1939	1.1642	1.2723	1.2118	1.1815	1.1633
0.5	1.4224	1.3108	1.2570	1.2256	1.3396	1.2752	1.2431	1.2238
0	1.5778	1.4518	1.3912	1.3559	1.4822	1.4093	1.3730	1.3513
-0.5	1.9909	1.8288	1.7506	1.7050	1.8650	1.7699	1.7225	1.6941
-0.6	3.0014	2.7682	2.6542	2.5871	2.8294	2.6923	2.6226	2.5802
-0.7	3.8156	3.5441	3.4015	3.3116	3.5732	3.4131	3.3236	3.2656
-1	3.0578	2.8411	2.7242	2.6491	2.8433	2.7141	2.6414	2.5946
-1.5	2.0811	1.9286	1.8517	1.8051	1.9613	1.8722	1.8255	1.7967
-2	1.7503	1.6204	1.5558	1.5173	1.6526	1.5772	1.5384	1.5146

Tabla 4-8 Valores de C_1 para viga 2 y longitudes de 10m y 20m

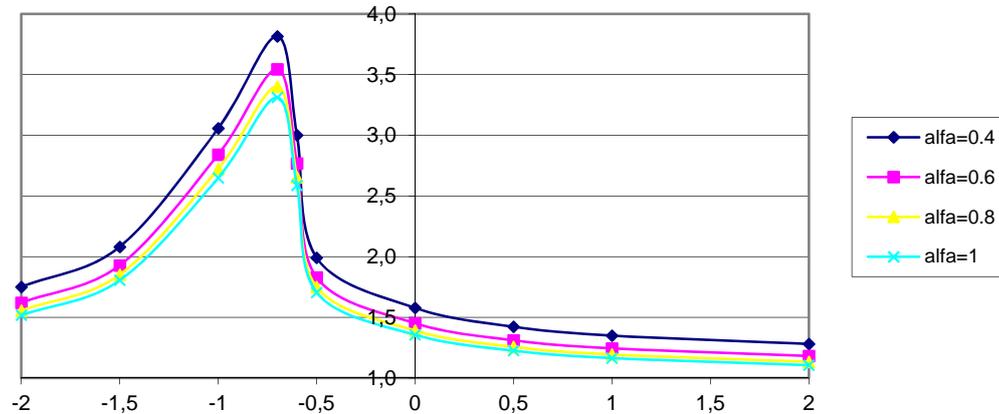


Figura 4-21 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores bilineal

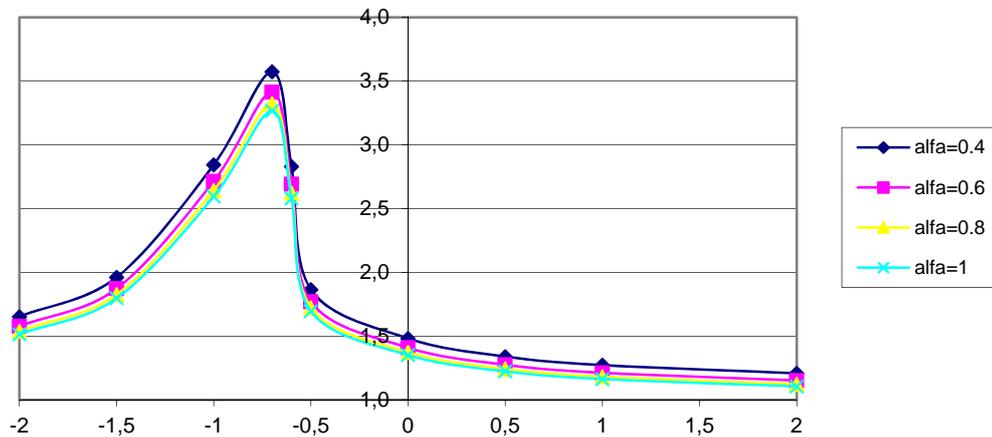


Figura 4-22 Variación de $C_1(\lambda)$ en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores bilineal

4.4.3 Tercera tanda. Ley de flectores parabólica

Este caso responde a la viga en cualquiera de sus cuatro geometrías (luces de 10 y 20 metros en ala estrecha y ala ancha) con una ley de flectores de tipo parabólica que equivale a la aplicación de dos momentos iguales y opuestos en los extremos y una ley de cargas repartidas uniforme de valor q .

La variación del canto sigue reflejándose mediante el valor de α ya definido y los distintos estados de carga se determinan mediante el valor del coeficiente β , que define el momento en los apoyos (si $\beta=0$ el momento en los extremos es nulo y si $\beta=1,5$ el momento en los extremos es $qL^2/8$ y por tanto el momento en centro de luz es nulo). En este caso hemos dado 11 valores distintos

al coeficiente β comprendidos entre 0 y 75 obteniéndose los siguientes resultados:

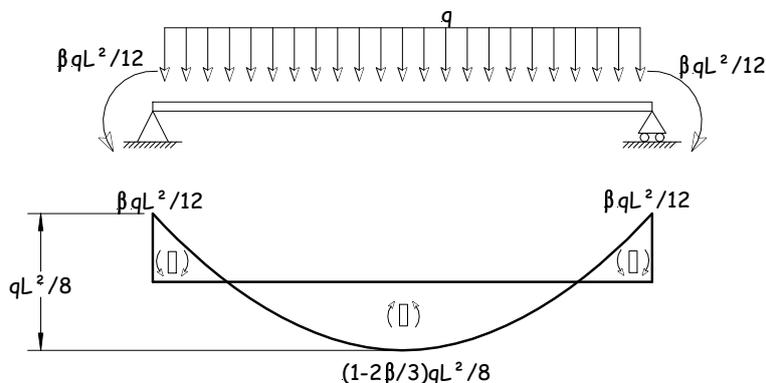


Figura 4-23 Cargas y ley de flectores para la tercera tanda de estudio

En las tablas 4-9 y 4-10 se dan los valores de C_1 para las vigas 1 y 2 respectivamente, valores que se representan en las figuras 4-24 a 4-27.

		L=10m				L=20m			
		$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
β	0.00	1.3364	1.2160	1.1606	1.1295	1.2129	1.1634	1.1409	1.1282
	0.50	1.4086	1.2803	1.2214	1.1883	1.2769	1.2238	1.1996	1.1860
	0.75	1.4692	1.3346	1.2727	1.2380	1.3314	1.2753	1.2497	1.2352
	0.90	2.2684	2.0604	1.9647	1.9111	2.0577	1.9705	1.9307	1.9082
	1.00	3.0636	2.7847	2.6562	2.5840	2.7861	2.6690	2.6154	2.5851
	1.05	3.5692	3.2474	3.0985	3.0148	3.2534	3.1184	3.0564	3.0212
	1.20	5.3932	4.9431	4.7239	4.5939	4.9379	4.7456	4.6472	4.5859
	1.35	6.0831	5.6168	5.3578	5.1807	5.4027	5.1829	5.0449	4.9461
	1.50	5.3112	4.8990	4.6717	4.5182	4.7152	4.5195	4.4004	4.3183
	2.00	3.1481	2.8867	2.7587	2.6825	2.8596	2.7478	2.6916	2.6579
	75.00	1.1996	1.0943	1.0453	1.0177	1.0916	1.0486	1.0289	1.0177

Tabla 4-9 Valores de C_1 para la viga 1 y longitudes de 10m y 20m, carga repartida y dos momentos

		L=10m				L=20m			
		$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
β	0.00	1.3104	1.2077	1.1582	1.1293	1.2343	1.1751	1.1456	1.1278
	0.50	1.3813	1.2717	1.2190	1.1882	1.2989	1.2357	1.2042	1.1853
	0.75	1.4416	1.3262	1.2708	1.2385	1.3540	1.2873	1.2542	1.2343
	0.90	2.2283	2.0498	1.9639	1.9138	2.0928	1.9893	1.9378	1.9070
	1.00	3.0151	2.7752	2.6596	2.5921	2.8351	2.6958	2.6262	2.5845
	1.05	3.5180	3.2409	3.1069	3.0285	3.3121	3.1510	3.0702	3.0215
	1.20	5.3344	4.9491	4.7508	4.6276	5.0037	4.7786	4.6542	4.5736
	1.35	5.9301	5.5375	5.3035	5.1360	5.3506	5.1237	4.9758	4.8683
	1.50	5.1625	4.8147	4.6099	4.4662	4.6804	4.4763	4.3477	4.2575
	2.00	3.0842	2.8621	2.7474	2.6764	2.8950	2.7647	2.6943	2.6500
	75.00	1.1766	1.0870	1.0434	1.0177	1.1113	1.0596	1.0335	1.0177

Tabla 4-10 Valores de C_1 para la viga 2 y longitudes de 10m y 20m, carga repartida y dos momentos

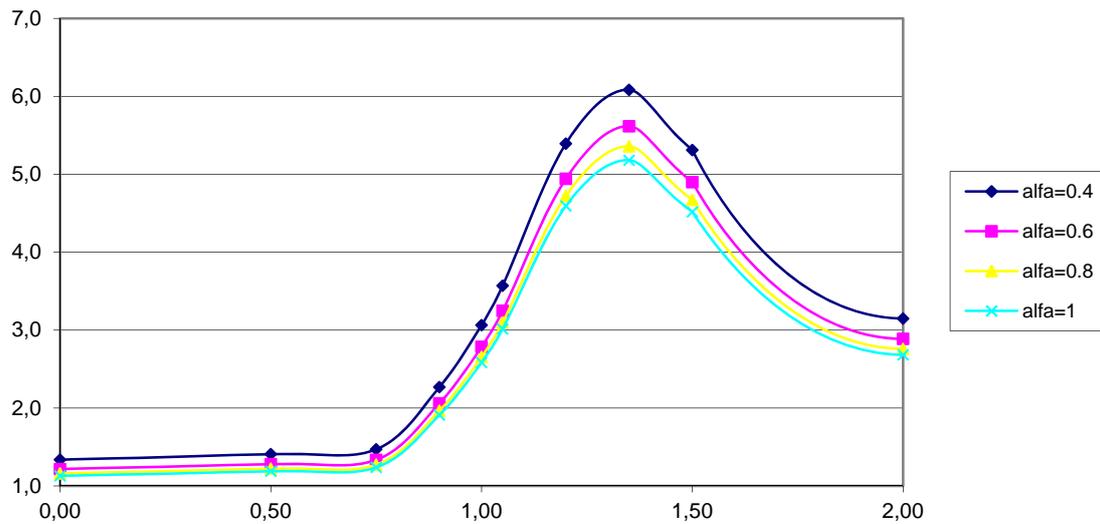


Figura 4-24 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 1 de 10m de longitud. Ley de flectores parabólica

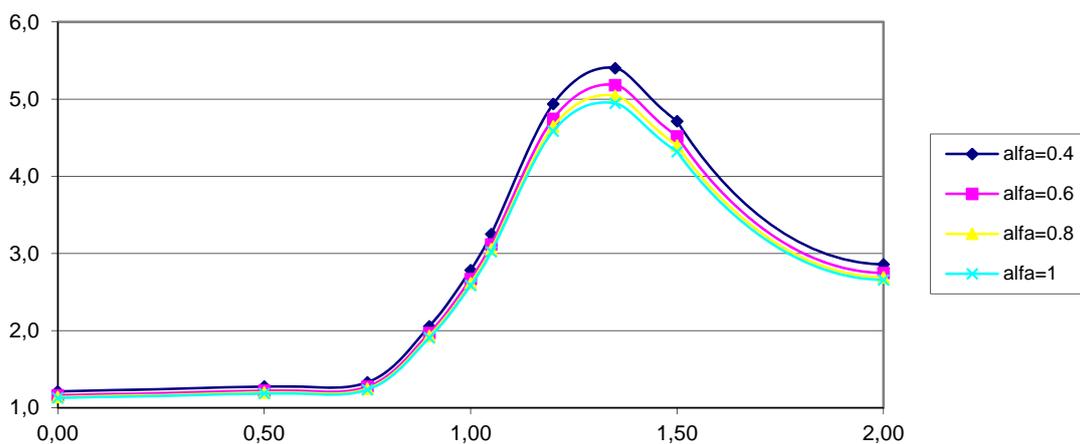


Figura 4-25 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 1 de 20m de longitud. Ley de flectores parabólica

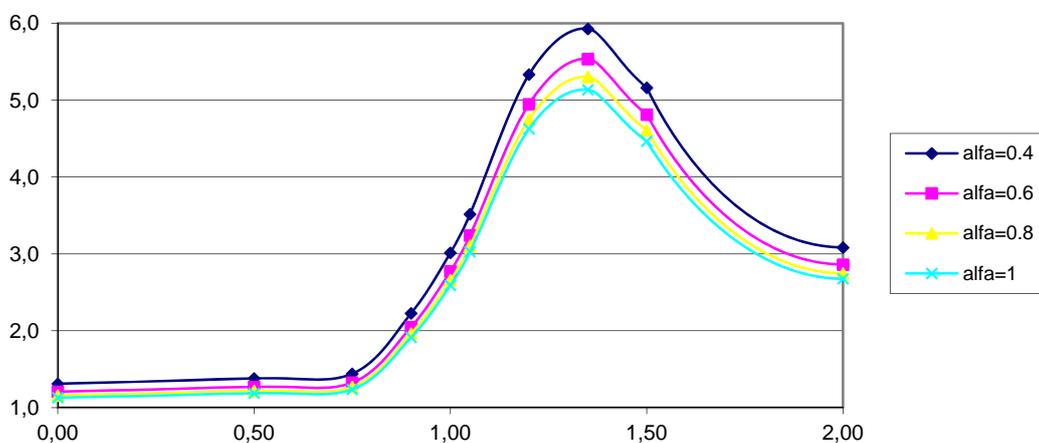


Figura 4-26 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 2 de 10m de longitud. Ley de flectores parabólica

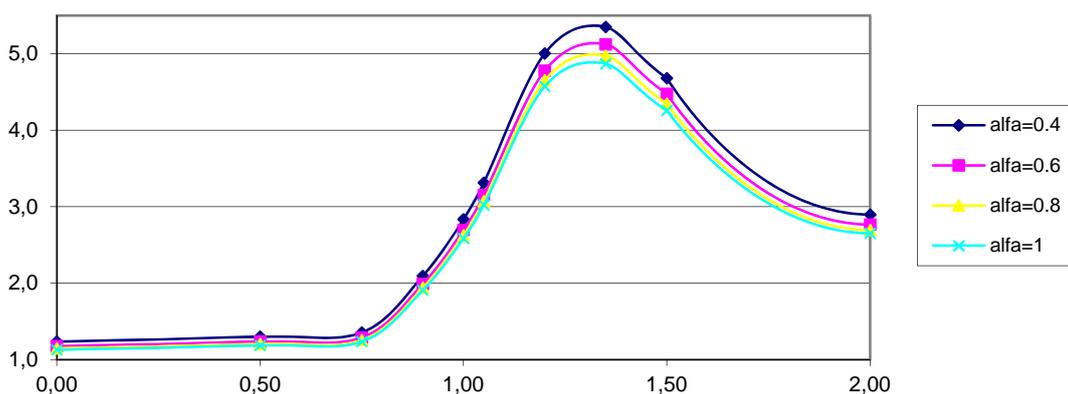


Figura 4-27 Variación de $C_1(\beta)$ en viga 2 de 20m de longitud. Ley de flectores parabólica

4.4.4 Cuarta tanda. Ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz

En este caso la ley de flectores responde a una ley bilineal con momentos iguales en los extremos (similar a la ya vista en la segunda tanda) que responde a la aplicación de una carga puntual en centro de luz y a dos momentos de sentidos opuestos en sus extremos, actuando sobre una viga con canto linealmente variable máximo en centro de luz y mínimo en ambos extremos. En este caso los valores del coeficiente C_1 vienen dados en función de λ (ya definido en la tanda 2) y el valor de α que refleja la variación del canto (cociente entre el canto en el extremo y el canto máximo)

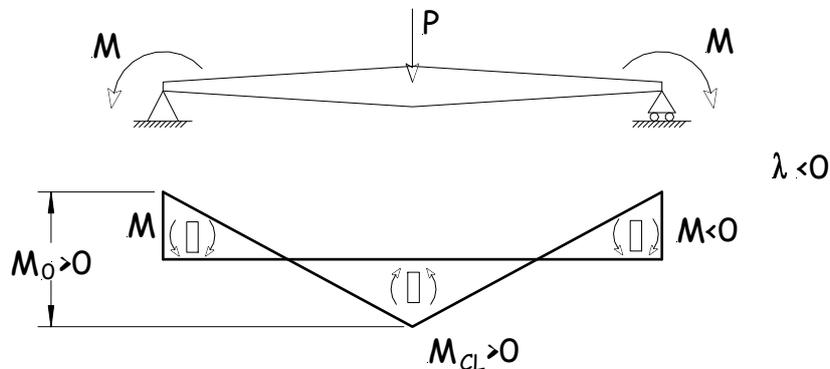


Figura 4-28 Geometría, cargas y ley de flectores estudiados en la cuarta tanda

$$\lambda = \frac{M}{M_{CL} - M} = \frac{M}{M_0} \quad (4.8)$$

De esta forma llegamos a los siguientes resultados:

λ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
2	1.3060	1.1900	1.1363	1.1061	1.2115	1.1477	1.1203	1.1058
1	1.3762	1.2531	1.1963	1.1643	1.2783	1.2092	1.1794	1.1635
0.5	1.4506	1.3199	1.2596	1.2258	1.3492	1.2742	1.2417	1.2243
0	1.6092	1.4619	1.3942	1.3563	1.5005	1.4123	1.3735	1.3525
-0.5	2.0206	1.8330	1.7465	1.6979	1.8977	1.7796	1.7257	1.6957
-0.6	3.0289	2.7590	2.6332	2.5620	2.8377	2.6855	2.6166	2.5782
-0.7	3.8547	3.5372	3.3801	3.2856	3.5166	3.3710	3.3087	3.2750
-1	3.1244	2.8700	2.7403	2.6601	2.8021	2.6865	2.6370	2.6100
-1.5	2.1222	1.9429	1.8568	1.8067	1.9393	1.8537	1.8179	1.7991
-2	1.7844	1.6316	1.5592	1.5178	1.6390	1.5635	1.5319	1.5153

Tabla 4-11 Valores de C_1 para viga 1 con ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz

λ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
2	1.3223	1.1954	1.1379	1.1060	1.2040	1.1473	1.1208	1.1057
1	1.3966	1.2605	1.1986	1.1642	1.2703	1.2088	1.1799	1.1633
0.5	1.4756	1.3295	1.2628	1.2256	1.3404	1.2735	1.2419	1.2238
0	1.6453	1.4769	1.3995	1.3559	1.4822	1.4093	1.3730	1.3513
-0.5	2.0852	1.8664	1.7638	1.7050	1.8650	1.7699	1.7225	1.6941
-0.6	3.0989	2.8029	2.6655	2.5871	2.8294	2.6923	2.6226	2.5802
-0.7	3.8361	3.5256	3.3875	3.3116	3.5732	3.4131	3.3236	3.2656
-1	3.0593	2.8157	2.7081	2.6491	2.8433	2.7141	2.6414	2.5946
-1.5	2.1091	1.9284	1.8486	1.8051	1.9613	1.8722	1.8255	1.7967
-2	1.7829	1.6255	1.5555	1.5173	1.6526	1.5772	1.5384	1.5146

Tabla 4-12 Valores de C1 para viga 2 con ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz

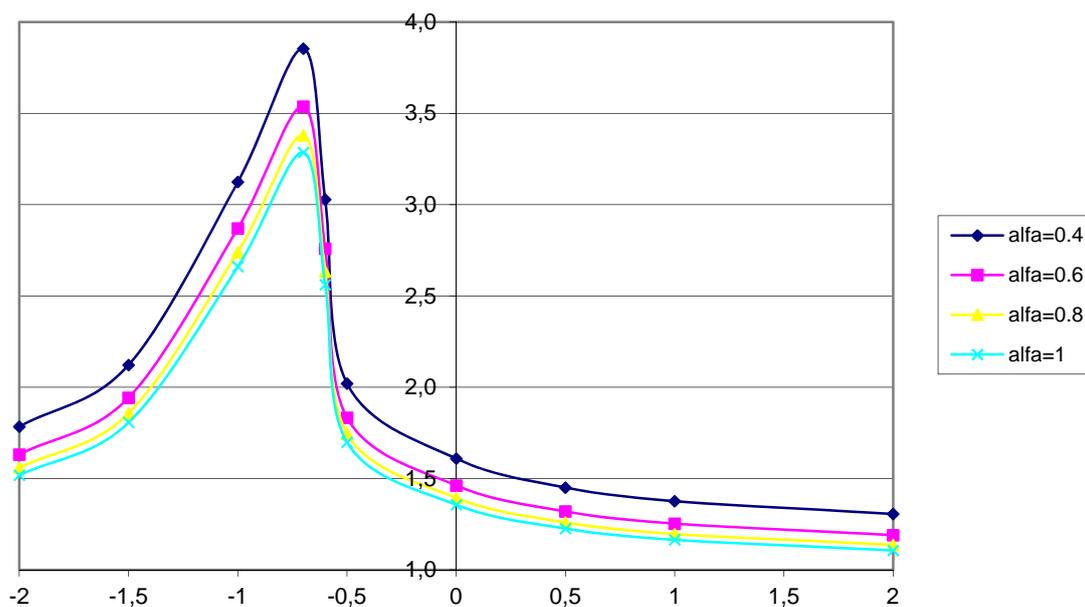


Figura 4-29 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 1 y longitud de 10m

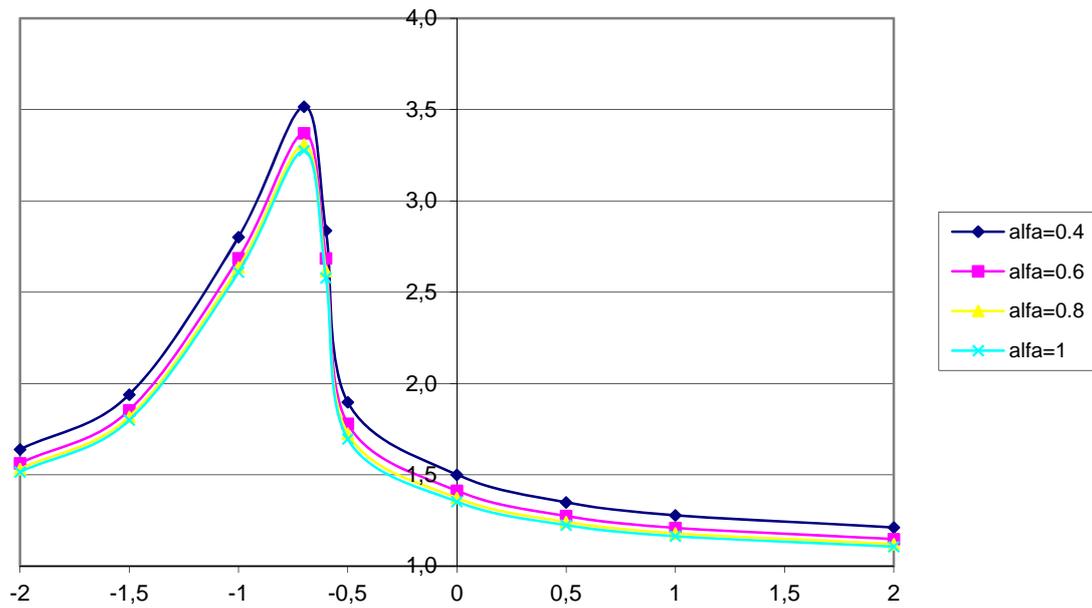


Figura 4-30 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 1 y longitud de 20m

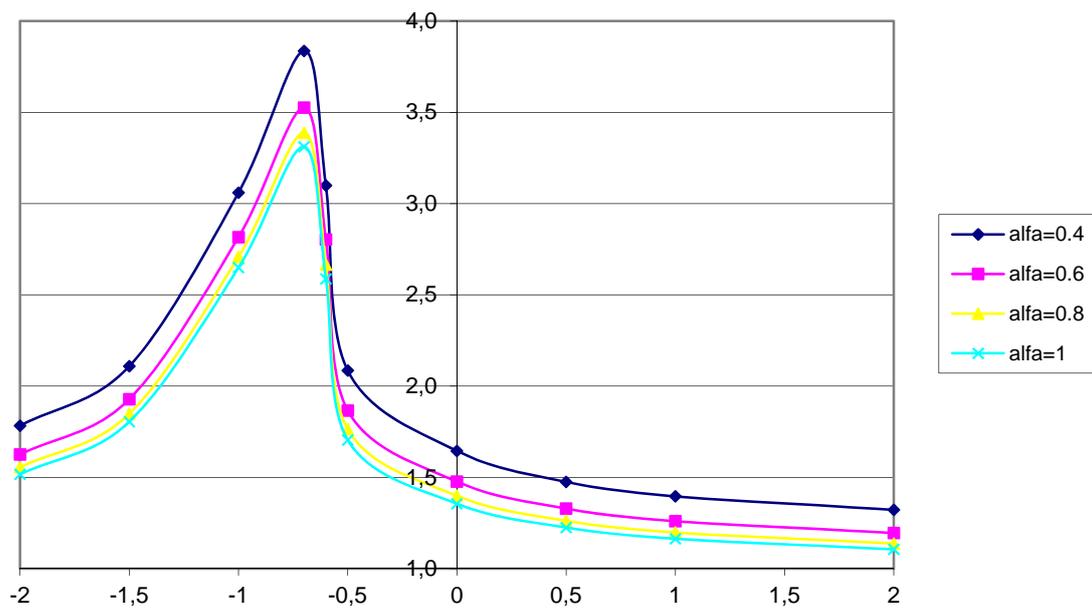


Figura 4-31 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 2 con canto máximo en centro de luz, carga bilineal y longitud de 10m

Viga real ley de momentos real L=20m y ala estrecha

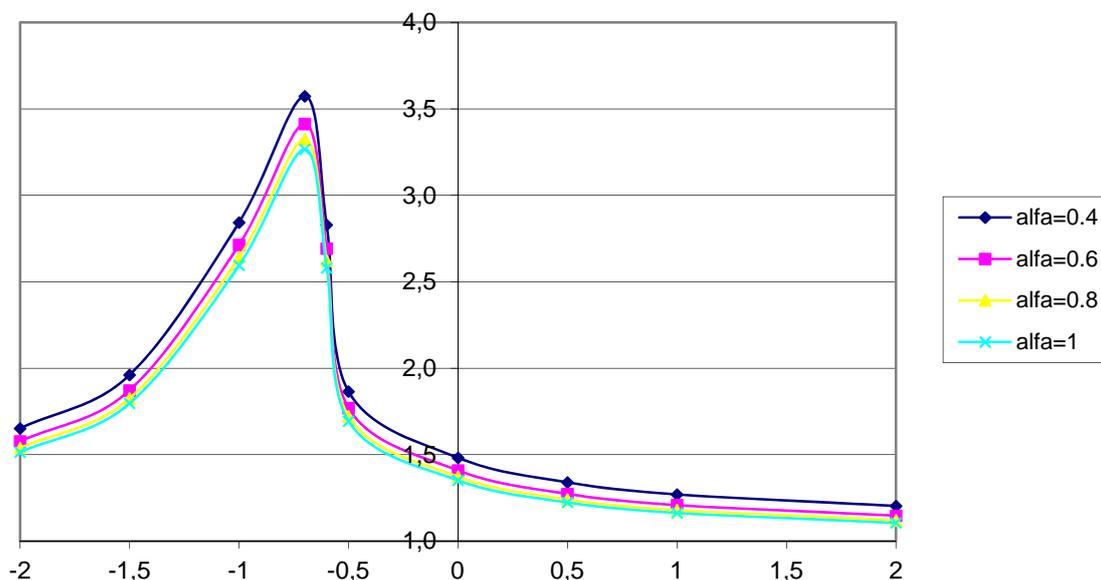


Figura 4-32 Valores de $C_1(\lambda)$ para viga 2 con canto máximo en centro de luz, carga bilineal y longitud de 20m

4.4.5 Quinta tanda. Ley de flectores lineal en viga con variación lineal de canto y ancho

En la última de las tandas se ha querido valorar la carga crítica de pandeo lateral en vigas donde la variación de la sección no es debida únicamente a una variación lineal de canto, sino que al tiempo experimentan una variación afín en el ancho de la sección. La medida se realiza mediante el parámetro α ya comentado que representa al mismo tiempo la relación entre el canto mínimo y el máximo y entre la anchura mínima y la máxima:

$$\alpha = \frac{d_{\min}}{d_{\max}} = \frac{b_{\min}}{b_{\max}} \tag{4.9}$$

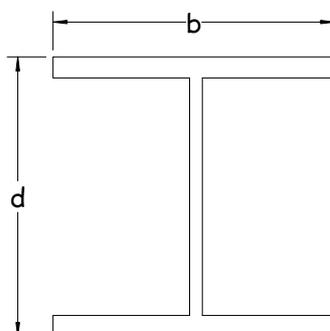


Figura 4-33 Geometría de la sección transversal para canto y ancho variable

La ley de flectores aplicada sobre la viga responde a una ley de tipo lineal, similar a la aplicada en la primera tanda y que queda definida, como ya se comentó, por el parámetro ψ , que es el cociente entre los momentos en los extremos de la pieza. Al igual que en los casos anteriores se han analizado vigas de 10 y 20 metros de luz y secciones de ala ancha y ala estrecha, obteniéndose los siguientes valores de C_1 .

ψ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
-1.00	6.8270	4.4577	3.3831	2.6601	5.4398	3.9554	3.2002	2.6100
-0.75	9.6856	5.9423	3.9439	2.7252	7.7666	5.3589	3.7308	2.6428
-0.50	13.4945	6.3675	3.6876	2.4611	10.9818	5.6358	3.4423	2.3850
0.00	9.1632	4.2297	2.5822	1.8094	7.3658	3.8002	2.4624	1.7859
0.50	5.1536	2.6986	1.7808	1.3162	4.1917	2.4604	1.7211	1.3135
1.00	3.4431	1.9072	1.3109	1.0000	2.7986	1.7398	1.2690	1.0000

Tabla 4-13 Valores de C_1 para viga1 con variación de ancho y canto y ley de flectores lineal

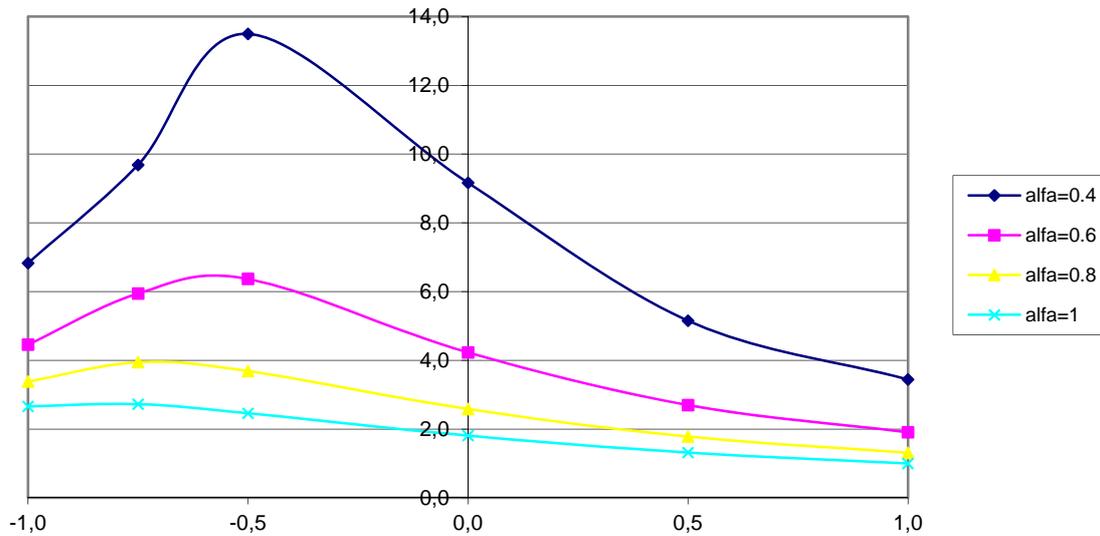


Figura 4-34 Valores de $C_1(\Psi)$ para viga 1 de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal

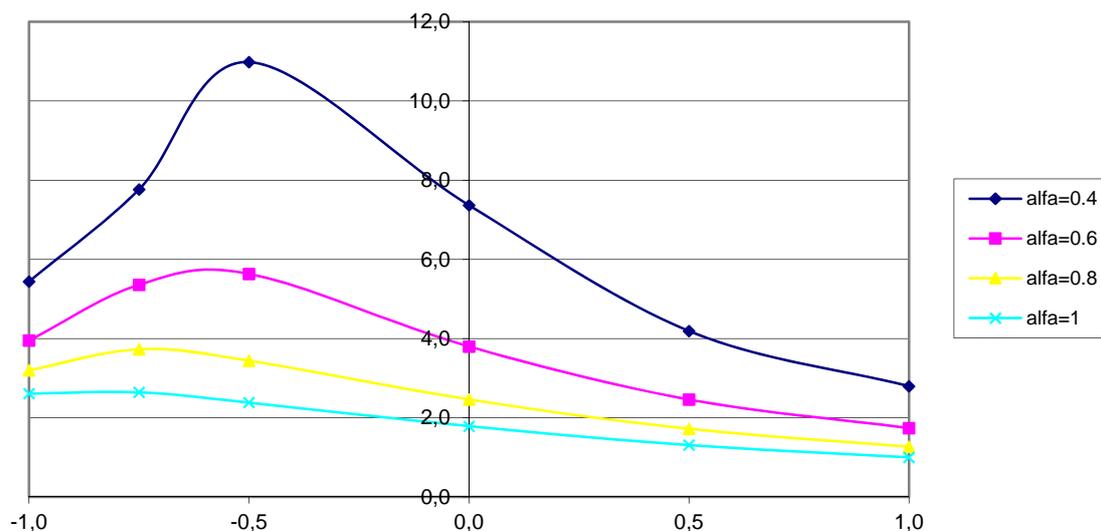


Figura 4-35 Valores de $C_1(\Psi)$ para viga 1, de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal

ψ	L=10m				L=20m			
	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
-1.00	6.2045	4.2412	3.3132	2.6491	5.1542	3.8496	3.1576	2.5946
-0.75	8.8369	5.6923	3.8617	2.6981	7.3713	5.2365	3.6786	2.6218
-0.50	12.3708	6.0451	3.5839	2.4324	10.4680	5.4690	3.3871	2.3676
0.00	8.2990	4.0228	2.5263	1.8002	7.0049	3.7172	2.4392	1.7807
0.50	4.6830	2.5792	1.7509	1.3152	4.0151	2.4201	1.7113	1.3129
1.00	3.1296	1.8235	1.2897	1.0000	2.6803	1.7118	1.2623	1.0000

Tabla 4-14 Valores de C_1 para viga 2 con variación de ancho y canto y ley de flectores lineal

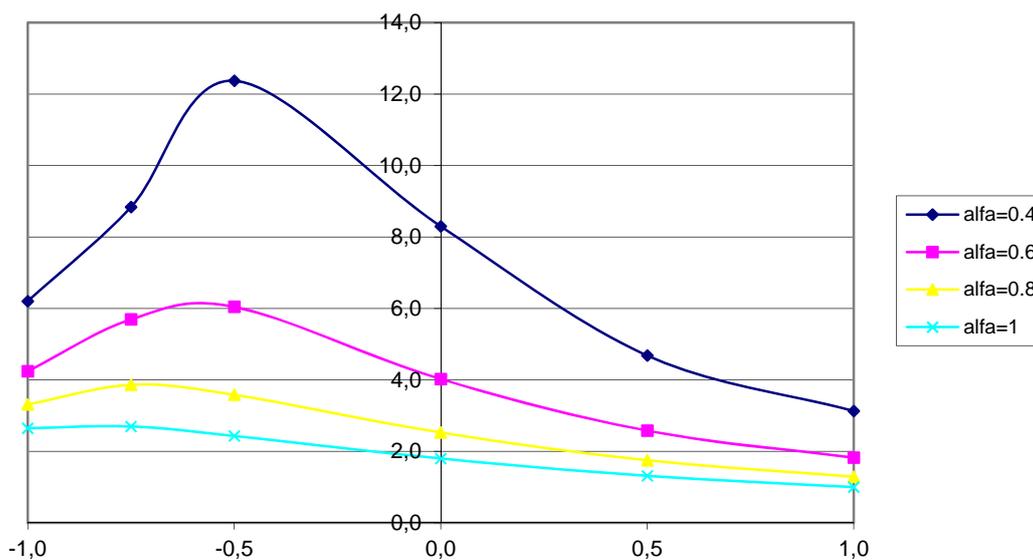


Figura 4-36 Valores de $C_1(\Psi)$ para viga 2, de 10m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal

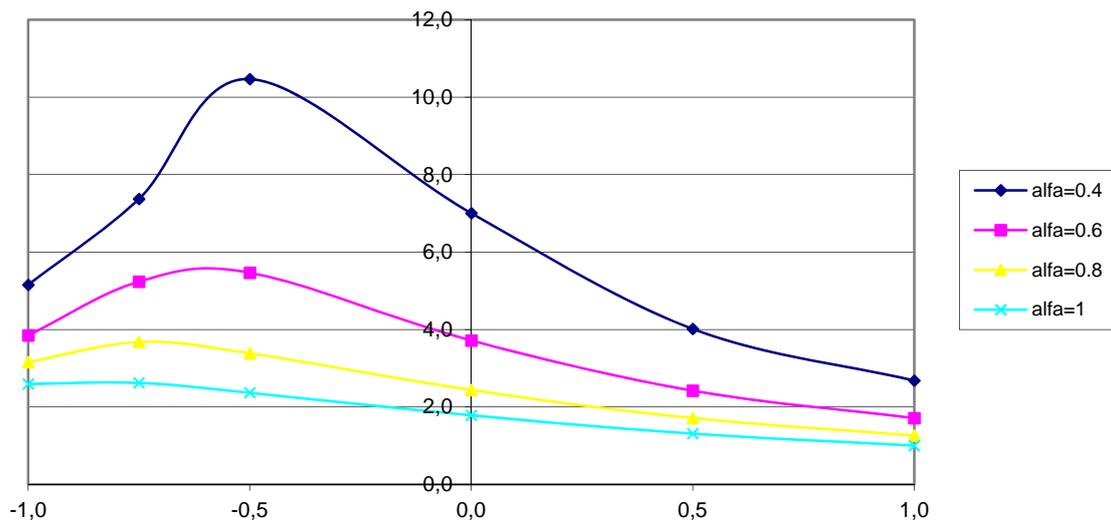


Figura 4-37 Valores de $C_1(\Psi)$ para viga 2, de 20m de longitud con variación de canto y ancho y ley de flectores lineal

4.4.6 Sexta tanda. Ley de flectores lineal en viga con variación lineal de canto y sección con sólo un eje de simetría.

Hasta ahora hemos analizado vigas con doble simetría en la sección (doble T). En este apartado nos centramos en una sección con un solo eje de simetría (ancho de las alas superior e inferior distinto) con el fin de ver si el método propuesto es extensible a otro tipo de secciones. En la figura 4-38 y en la tabla 4-15 se recogen las características geométricas de la sección estudiada

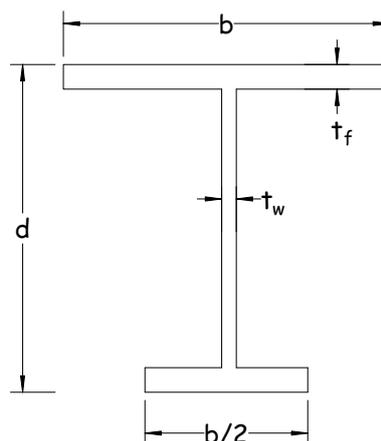


Figura 4-38 Geometría de la sección con un solo eje de simetría

	d_0 (mm)	b_0 (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)
Viga 1	400	400	40	20
Viga 2	400	200	25	15

Tabla 4-15 Dimensiones de la sección

Se han obtenido los resultados siguientes (Tabla 4-16 y figuras 4-39 y 4-40 para el caso de la Viga 1):

		Viga 1 L=10m				Viga 1 L=20m			
		α				α			
		0,4	0,6	0,8	1	0,4	0,6	0,8	1
ψ	-1	3,125	2,870	2,741	2,660	2,825	2,710	2,648	2,610
	-0,75	3,469	3,064	2,854	2,725	3,036	2,818	2,708	2,643
	-0,5	3,199	2,787	2,582	2,461	2,752	2,543	2,442	2,385
	0	2,256	2,002	1,880	1,809	1,992	1,873	1,817	1,786
	0,5	1,581	1,429	1,357	1,316	1,427	1,361	1,331	1,314
	1	1,179	1,075	1,027	1,000	1,073	1,030	1,011	1,000

Tabla 4-16 Valores de C_1 para viga 1 sin simetría horizontal con variación canto y ley de flectores lineal

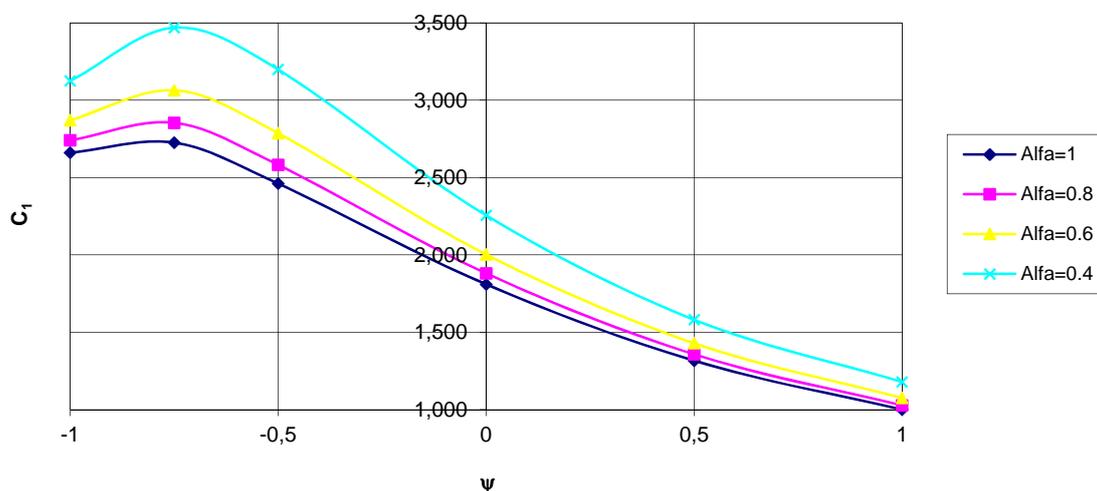


Figura 4-39 Valores de C_1 para viga 1, de 10m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal

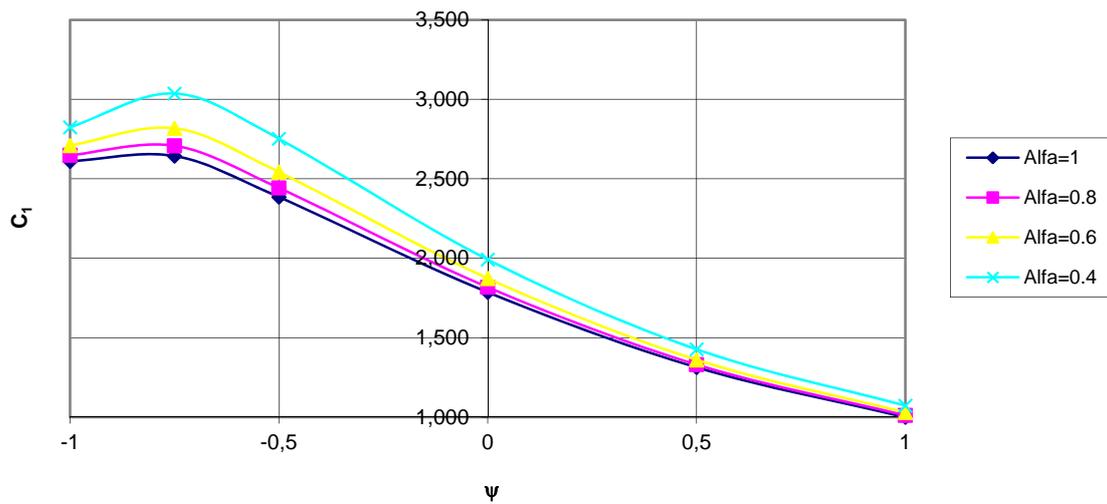


Figura 4-40 Valores de C_1 para viga 1, de 20m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal

		Viga 2 L=10m				Viga 2 L=20m			
		α				α			
		0,4	0,6	0,8	1	0,4	0,6	0,8	1
ψ	-1	3,058	2,841	2,724	2,649	2,844	2,714	2,642	2,595
	-0,75	3,376	3,012	2,818	2,698	3,055	2,819	2,696	2,622
	-0,5	3,091	2,727	2,543	2,433	2,767	2,546	2,434	2,368
	0	2,196	1,975	1,866	1,800	2,020	1,888	1,821	1,781
	0,5	1,549	1,418	1,353	1,315	1,453	1,376	1,337	1,313
	1	1,156	1,068	1,025	1,000	1,092	1,041	1,016	1,000

Tabla 4-17 Valores de C_1 para viga 2 sin simetría horizontal con variación canto y ley de flectores lineal

En el caso de la viga 2, asimilable a una viga de ala estrecha con menores espesores de alas y alma, los resultados obtenidos se recogen en la tabla 4-17 y en las gráficas de las figuras 4-41 y 4-42

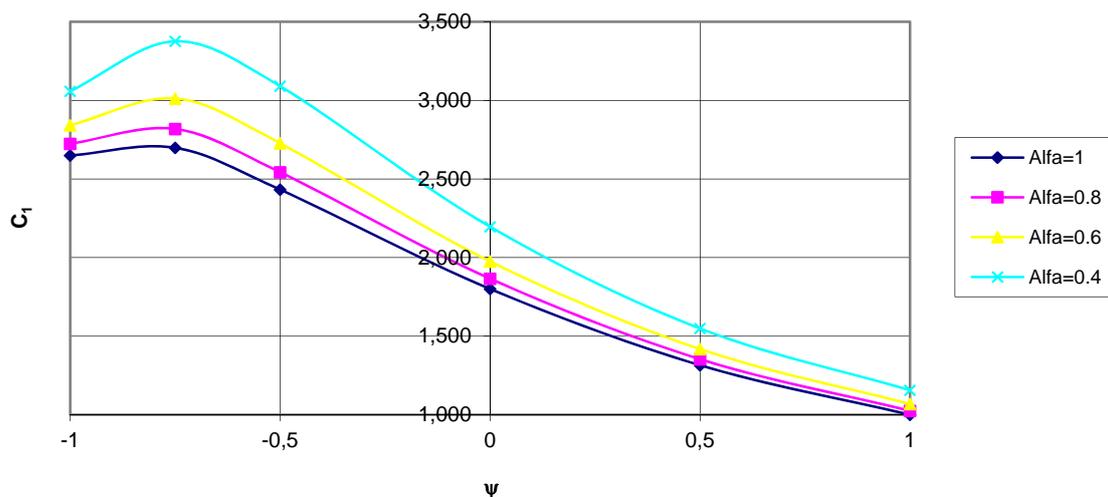


Figura 4-41 Valores de C_1 para viga 2, de 10m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal

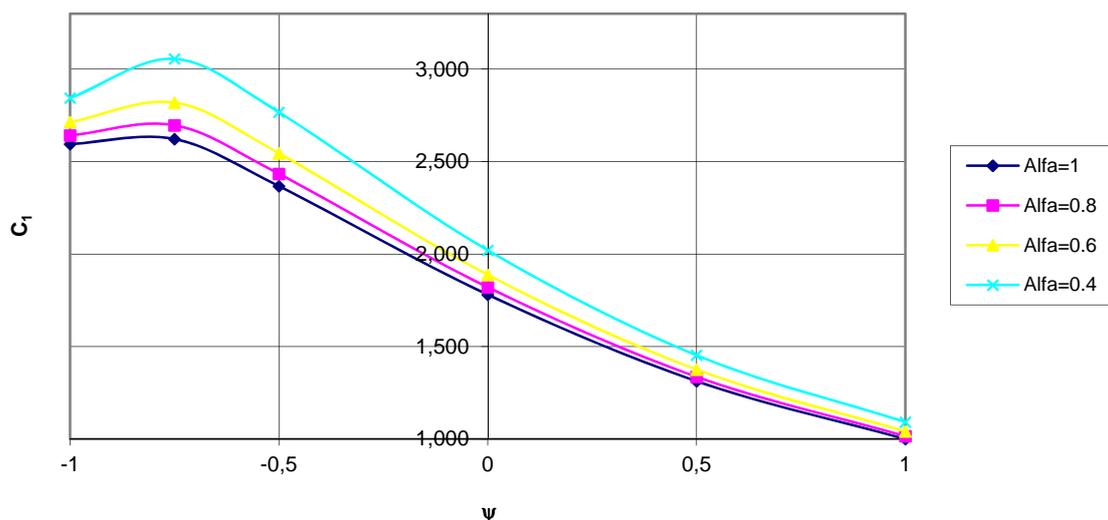


Figura 4-42 Valores de C_1 para viga 2, de 20m de longitud, anchos de ala distintos con variación de canto y ley de flectores lineal

4.5 MÉTODO DEL MOMENTO EQUIVALENTE (MME)

Tanto en el EC3 como en otros códigos, para calcular la estabilidad de vigas se precisa conocer del momento crítico elástico. En vigas de sección uniforme existen distintas expresiones que permiten determinar el momento crítico para situaciones de carga diversa. No ocurre lo mismo cuando la sección de la viga es variable, donde los estudios son muy escasos. Lee et al. (1972) plantea un procedimiento basado en la obtención del momento crítico a través

de una viga equivalente de sección constante pero variando la longitud por una longitud efectiva.

En el presente estudio se pretende establecer un método de cálculo del momento crítico de inestabilidad por pandeo lateral para vigas con sección variable y sometidas a diversos estados de carga mediante la aplicación de una formulación sencilla que permita aproximaciones fiables, sin tener que recurrir a métodos de cálculo complejos. Para ello, el primer paso consiste en sustituir nuestra viga de sección variable por otra de igual longitud con sección constante igual a la sección menor de la viga original y someterla a una ley de cargas tal que su momento crítico coincida con el de la viga original. Esta carga equivalente intentará compensar la menor rigidez de la nueva viga respecto a la original y se obtendrá multiplicando la ley de flectores real por un coeficiente reductor función de punto. Dicho coeficiente será el cociente entre el momento crítico de la sección de referencia (menor sección) y el momento crítico de esa sección.

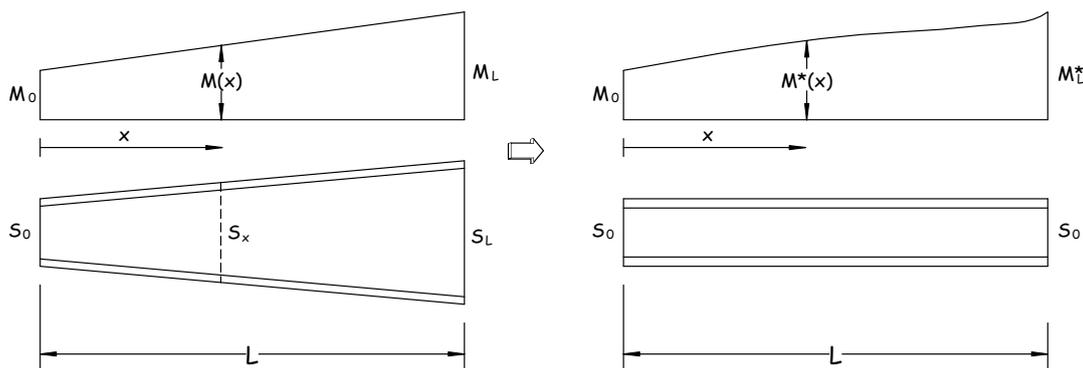


Figura 4-43 Esquema de transformación de la viga de sección variable a la equivalente de sección constante sometida al momento equivalente

$$M^*(x) = M(x) \cdot m(x) = M(x) \frac{M_{cr}^{S_0}}{M_{cr}^{S_x}} \quad (4.10)$$

siendo

$M(x)$ el momento flector en la sección x de la viga real

$M_{cr}^{S_x}$ el momento crítico de una viga de longitud L y sección constante S_x sometida a una ley de flectores constante en su longitud

$$M_{cr}^{S_x} = \frac{\pi^2 EI_{zx}}{L^2} \sqrt{I_{wx} + \frac{L^2 GI_{tx}}{\pi^2 EI_{zx}}} \quad (4.11)$$

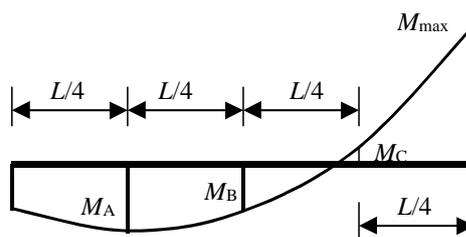
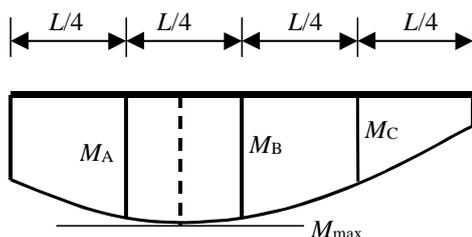
$M_{cr}^{S_0}$ el momento crítico de una viga de longitud L y sección constante S_0 sometida a una ley de flectores constante en su longitud

$$M_{cr}^{S_0} = \frac{\pi^2 EI_{z0}}{L^2} \sqrt{I_{w0} + \frac{L^2 GI_{t0}}{\pi^2 EI_{z0}}} \quad (4.12)$$

$M^*(x)$ el momento flector fruto de la carga equivalente.

Para determinar el Momento Equivalente de Pandeo Lateral tenemos que sustituir nuestra ley de flectores variable por una ley uniforme de flectores, ya que pretendemos que este se obtenga a partir de los valores críticos de la viga equivalente sometida a la ley de flectores uniforme equivalente.

Para ello la norma americana (AISC LRFD) y la británica (British Standard BS 5950) proponen las siguientes expresiones que nos dan el valor del Momento Uniforme Equivalente a partir del momento máximo y de los momentos en tres secciones intermedias (las situadas a cuartos de luz y la de centro de luz) y que difieren solo en los pesos que se les da a los momentos considerados:



$$C_1 = \frac{12.5M_{\max}}{2.5M_{\max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C}$$

Para la norma AISC LRFD

$$C_1 = \frac{12.5M_{\max}}{2.5M_{\max} + 1.875M_A + 6.25M_B + 1.875M_C}$$

Para la British Standard BS 5950

En este trabajo se propone una expresión distinta apoyándonos en los trabajos de Serna et al. (2006) y López et al. (2006) que rinde mejores resultados que las dos anteriores, según se ha demostrado

$$C_{LT} = \sqrt{\frac{21M_{\max}^2}{M_{\max}^2 + 5M_1^2 + 10M_2^2 + 5M_3^2}} \quad (4-13)$$

Combinando los coeficientes comentados, debidos a la variación de la sección y a la variación de la ley de flectores, obtengo el valor que me permite obtener el Momento Equivalente de Pandeo Lateral M_b , que se obtendrá

dividiendo el máximo flector de la ley modificada entre el coeficiente corrector \hat{C}_{LT} definido de la siguiente forma

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21m_M^2 M_{\max}^2}{m_M^2 M_{\max}^2 + 5m_1^2 M_1^2 + 10m_2^2 M_2^2 + 5m_3^2 M_3^2}} \quad (4-14)$$

$$M_b = \frac{M_M^*}{\hat{C}_{LT}} = \frac{(mM)_M}{\hat{C}_{LT}} \quad (4-15)$$

La viga así obtenida deberá tener un momento crítico similar al de la viga original y por lo tanto un comportamiento frente al pandeo lateral también similar.

Para realizar el cálculo se ha recurrido nuevamente al programa de elementos finitos ANSYS con el elemento ya definido Beam 189. Ahora la viga responde a una geometría de sección constante igual a la menor sección de la viga original y la ley de flectores equivalente se obtiene mediante dos momentos en los extremos y una ley de cargas repartidas. En nuestro análisis la ley de cargas repartidas se ha sustituido por una serie de fuerzas puntuales que conforman una ley de flectores poligonal que se aproxima a la ley de flectores modificada (bajo la aplicación de las cargas, el momento flector coincide con el que se quiere simular).

Actuando de esta forma se han obtenido, para los casos ya comentados en el apartado anterior, unos nuevos valores del coeficiente C_1 (relación entre el momento crítico en las vigas de sección constante con la ley modificada y el momento crítico de la misma viga sometida a una flexión uniforme)

4.5.1 Resultados numéricos de vigas de canto variable sometidas a diversos estados de flexión aplicando el Método del Momento Equivalente (MME).

En el apartado 4.1.3 se han estudiado las soluciones reales a distintos tipos de vigas de sección variable sometidas a distintos tipos de carga. En este apartado obtendremos nuevos resultados de C_1 aplicando ahora el método propuesto de momento equivalente (MME) sobre vigas que manteniendo su longitud son de sección constante (igual a la menor sección de la viga real) en los mismos casos tratados anteriormente. Los resultados obtenidos se recogen en las tablas y se representan en las gráficas comparados con los ya obtenidos anteriormente.

4.5.1.1 Resultados de la primera tanda con el MME. Ley de flectores lineal

Como ya hemos comentado, recogemos en la Tabla 4-18 los resultados obtenidos para el valor de C_1 (cociente entre el momento crítico de la viga y el de referencia) para el caso de la aplicación del método propuesto en esta tesis (MCE) a vigas de canto variable (viga 1 y viga 2) sometidas a una ley de flectores que varía linealmente. Dado que para $\alpha=1$ (canto constante) el resultado es el mismo en la viga real y en la viga equivalente, se ha omitido dicho valor en las tablas.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8
ψ	-1	3,102	2,855	2,731	2,792	2,686	2,637	3,035	2,825	2,715	2,819	2,697	2,634
	-0,75	3,463	3,023	2,829	2,940	2,759	2,683	3,340	2,967	2,795	2,986	2,780	2,680
	-0,5	3,178	2,743	2,558	2,661	2,492	2,422	3,045	2,685	2,522	2,732	2,513	2,421
	0	2,269	1,993	1,873	1,966	1,857	1,811	2,199	1,966	1,860	2,023	1,878	1,817
	0,5	1,595	1,429	1,356	1,424	1,358	1,329	1,559	1,418	1,352	1,453	1,374	1,336
	1	1,185	1,076	1,027	1,073	1,029	1,010	1,162	1,069	1,025	1,093	1,041	1,015

Tabla 4-18 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución lineal de momentos

Planteado de esta forma, el error que se comete en la obtención del valor de C_1 respecto a la solución real expuesta y detallada en el apartado 4.4.1 de este capítulo se recoge en la Tabla 4-19. Como puede verse, el mayor error positivo (valor exacto más grande que el valor aproximado) es de 3.30 %, mientras que la mayor diferencia negativa corresponde a -0.86%. Estos valores límite del error marcan claramente lo ajustado de la aproximación.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8	0,4	0,6	0,8
ψ	-1	0,73%	0,54%	0,35%	1,15%	0,87%	0,42%	0,74%	0,59%	0,35%	0,87%	0,62%	0,30%
	-0,75	0,17%	1,32%	0,87%	3,18%	2,08%	0,90%	1,05%	1,47%	0,83%	2,25%	1,40%	0,60%
	-0,5	0,67%	1,55%	0,93%	3,30%	1,98%	0,83%	1,47%	1,57%	0,82%	1,27%	1,27%	0,53%
	0	-0,61%	0,48%	0,38%	1,26%	0,86%	0,37%	-0,11%	0,49%	0,32%	-0,15%	0,50%	0,23%
	0,5	-0,86%	-0,02%	0,10%	0,20%	0,25%	0,13%	-0,67%	-0,02%	0,07%	-0,03%	0,11%	0,07%
	1	-0,49%	-0,03%	0,04%	-0,01%	0,10%	0,06%	-0,50%	-0,07%	0,02%	-0,14%	0,03%	0,03%

Tabla 4-19 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución lineal de momentos

Las figuras 4-44 a 4-47 muestran la comparación entre los valores exactos recogidos en el apartado 4.4.1 (líneas continuas) y los valores obtenidos usando

el Método del Momento Equivalente propuesto (líneas de puntos) para las distintas secciones y longitudes estudiadas. La curva más baja corresponde a α igual a 1 (viga uniforme) y la curva superior a α igual a 0.4 (la viga de más variación de canto)

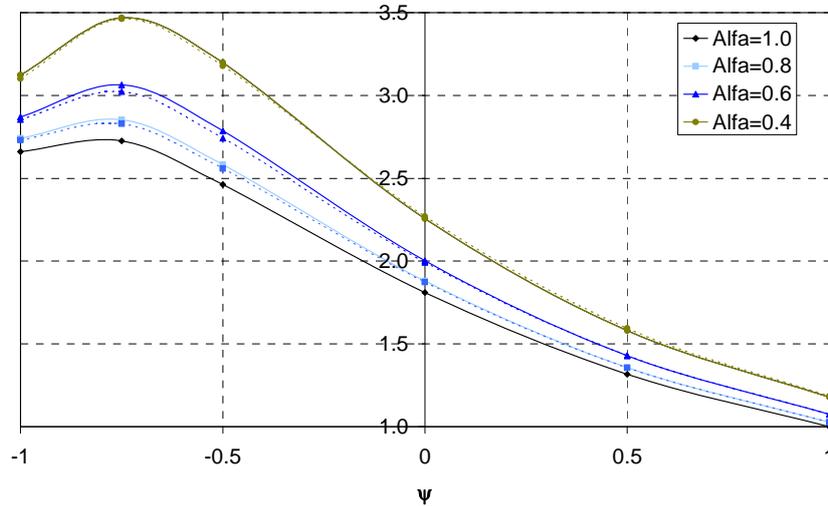


Figura 4-44 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=10m y distribución lineal de momentos

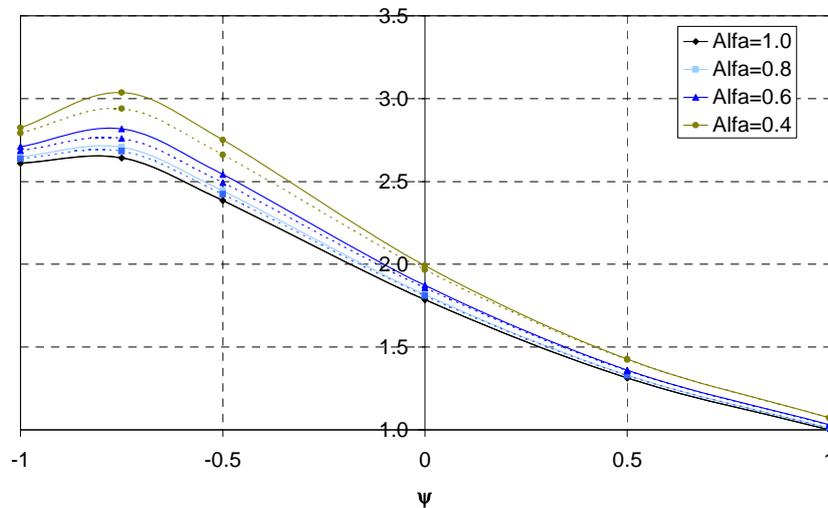


Figura 4-45 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=20m y distribución lineal de momentos

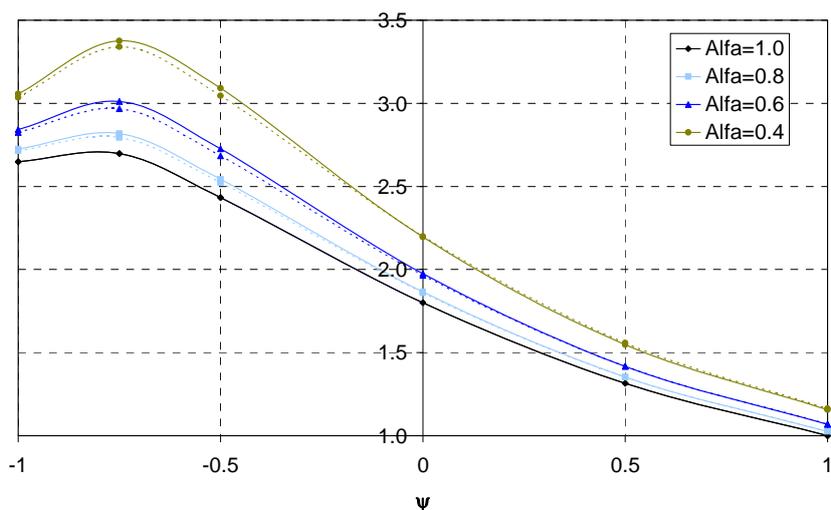


Figura 4-46 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=10\text{m}$ y distribución lineal de momentos

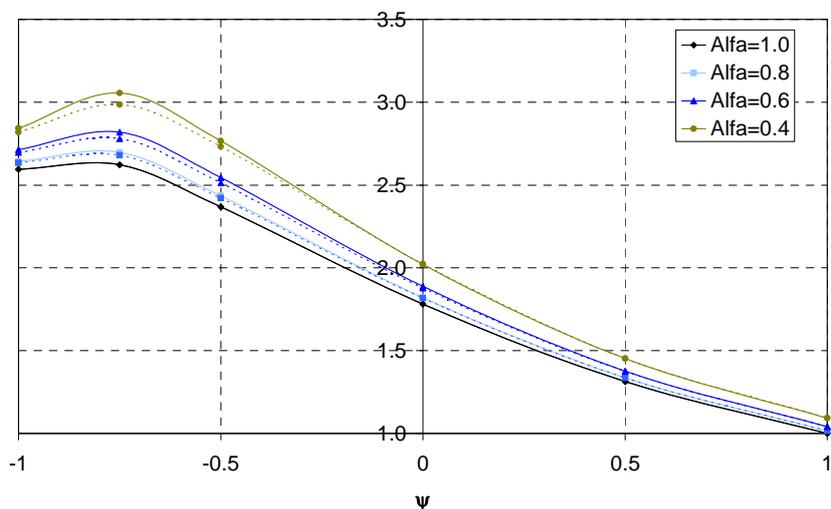


Figura 4-47 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=20\text{m}$ y distribución lineal de momentos

4.5.1.2 Resultados de la segunda tanda con el MME. Ley de flectores bilineal

En este caso recogemos en la Tabla 4-20 los valores de C_1 obtenidos al aplicar el Método del Momento Equivalente al caso de vigas de sección variable (viga 1 y 2 ya definidas con luces de 10 y 20m) cuando están sometidas a una ley de flectores bilineal (fruto de la aplicación sobre la viga de una carga puntual en centro de luz y dos momentos iguales en los extremos)

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
λ	2	1,253	1,167	1,128	1,163	1,129	1,114	1,237	1,162	1,126	1,182	1,139	1,118
	1	1,324	1,230	1,188	1,225	1,189	1,173	1,306	1,224	1,186	1,246	1,199	1,177
	0,5	1,399	1,296	1,251	1,291	1,252	1,234	1,379	1,291	1,249	1,313	1,263	1,238
	0	1,559	1,439	1,385	1,430	1,384	1,364	1,535	1,431	1,383	1,455	1,396	1,368
	-0,5	1,967	1,807	1,737	1,800	1,738	1,711	1,944	1,806	1,741	1,832	1,754	1,716
	-0,6	2,921	2,710	2,615	2,719	2,636	2,599	2,909	2,724	2,637	2,767	2,662	2,611
	-0,7	3,596	3,417	3,333	3,389	3,323	3,292	3,585	3,431	3,356	3,416	3,333	3,291
	-1	2,863	2,746	2,691	2,685	2,642	2,622	2,831	2,728	2,678	2,697	2,640	2,612
	-1,5	1,990	1,883	1,834	1,869	1,828	1,810	1,969	1,876	1,831	1,891	1,838	1,812
	-2	1,686	1,588	1,543	1,580	1,542	1,525	1,668	1,582	1,541	1,602	1,553	1,529

Tabla 4-20 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución bilineal de momentos

La tabla 4-21 muestra los errores del método propuesto, para este caso de carga, respecto a la solución real recogida en el apartado 4.4.2. Todos los errores son positivos y el mayor valor es de 8.36 %. Las figuras 4-48 a 4-51 muestran la comparación entre los valores C_1 exactos (líneas continuas) y los valores obtenidos usando la Aproximación del Momento Equivalente (líneas de puntos).

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
λ	2	4,02%	1,97%	0,76%	2,05%	0,92%	0,34%	3,40%	1,71%	0,68%	2,18%	1,08%	0,43%
	1	3,79%	1,87%	0,72%	1,98%	0,89%	0,33%	3,21%	1,62%	0,65%	2,08%	1,03%	0,41%
	0,5	3,57%	1,77%	0,69%	1,93%	0,87%	0,33%	3,03%	1,54%	0,61%	1,98%	0,99%	0,39%
	0	3,14%	1,60%	0,63%	1,87%	0,86%	0,33%	2,70%	1,40%	0,56%	1,84%	0,92%	0,37%
	-0,5	2,65%	1,42%	0,57%	1,91%	0,92%	0,36%	2,35%	1,27%	0,52%	1,79%	0,91%	0,36%
	-0,6	3,58%	1,79%	0,71%	2,09%	1,01%	0,39%	3,09%	1,60%	0,65%	2,21%	1,13%	0,46%
	-0,7	6,70%	3,39%	1,39%	4,01%	2,05%	0,84%	6,03%	3,19%	1,34%	4,39%	2,36%	0,99%
	-1	8,36%	4,33%	1,79%	4,94%	2,51%	1,01%	7,41%	3,99%	1,69%	5,14%	2,74%	1,13%
	-1,5	6,21%	3,07%	1,21%	3,25%	1,53%	0,59%	5,37%	2,75%	1,12%	3,56%	1,81%	0,73%
	-2	5,52%	2,70%	1,05%	2,79%	1,28%	0,48%	4,72%	2,39%	0,96%	3,08%	1,55%	0,62%

Tabla 4-21 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución bilineal de momentos

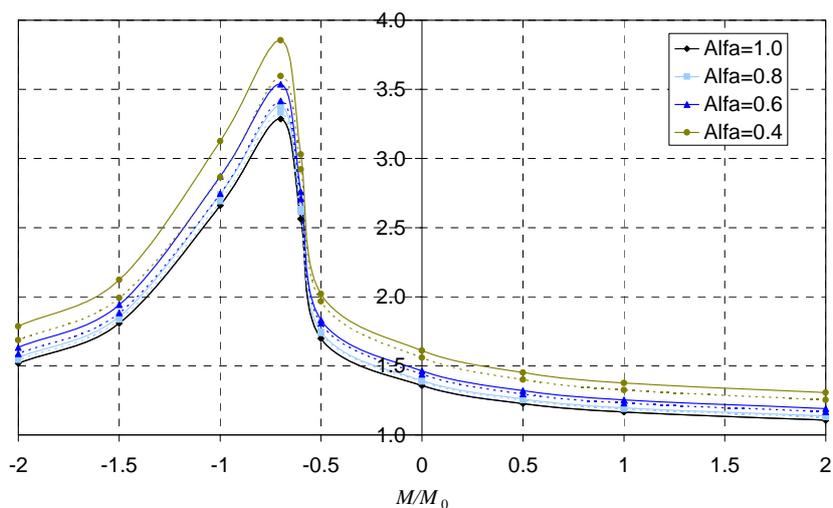


Figura 4-48 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos

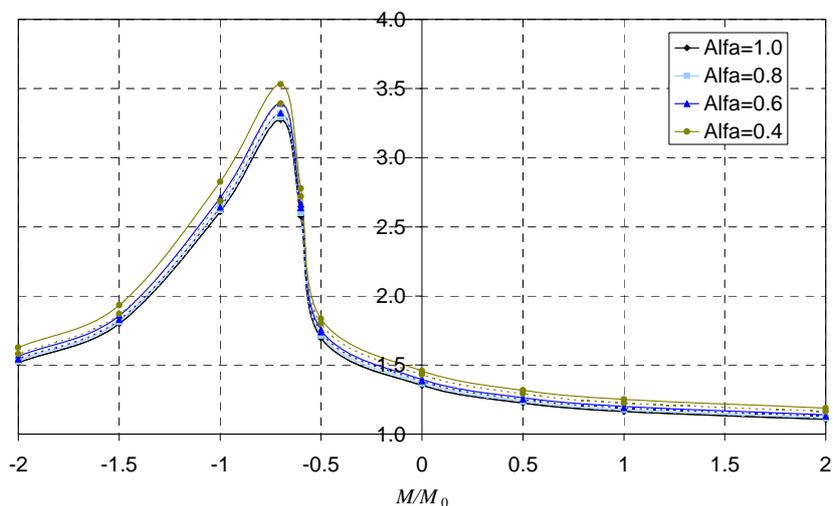


Figura 4-49 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, $L=20\text{m}$ y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos.

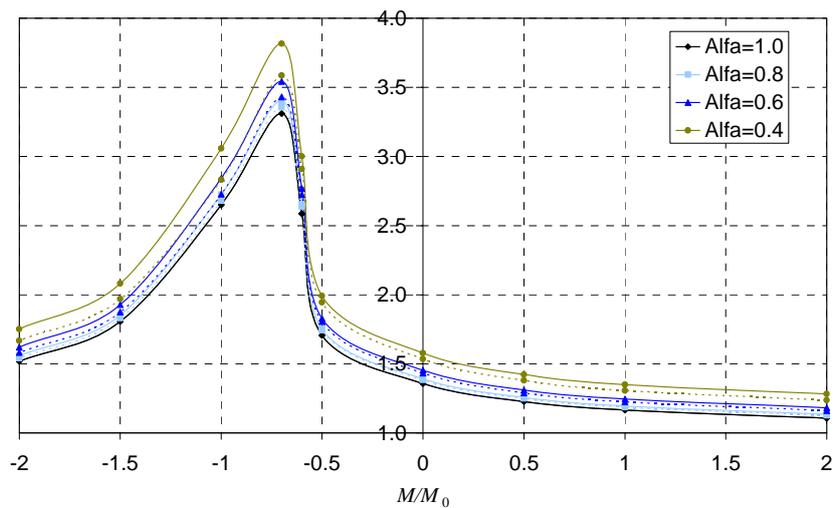


Figura 4-50 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos

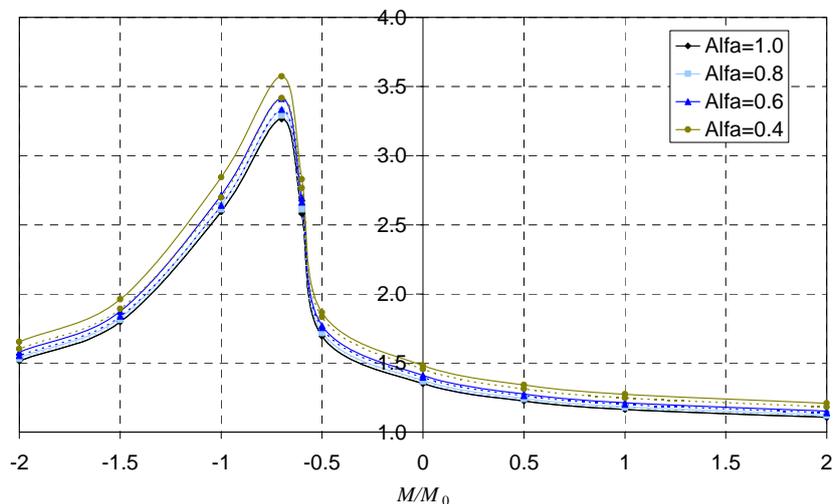


Figura 4-51 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=20\text{m}$ y sometida a una carga concentrada y dos momentos en los extremos

4.5.1.3 Resultados de la tercera tanda con el MME. Ley de flectores parabólica.

En este caso aplicamos el MME a una viga sometida a dos momentos iguales y opuestos en los extremos y a una carga repartida uniforme que darán lugar a leyes parabólicas de flectores. La solución correcta fue comentada en el apartado 4.4.3 y ahora estudiaremos la viga de sección constante sometida a una ley de flectores equivalente. En la tabla 4-22 se recogen los valores de C_1 bajo la aplicación del MME

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
β	0	1,287	1,194	1,152	1,189	1,153	1,137	1,270	1,189	1,151	1,209	1,163	1,141
	0,5	1,361	1,259	1,213	1,252	1,213	1,196	1,342	1,253	1,212	1,274	1,224	1,200
	0,75	1,422	1,313	1,265	1,306	1,264	1,246	1,402	1,307	1,264	1,329	1,275	1,250
	0,9	2,197	2,027	1,952	2,019	1,953	1,924	2,168	2,021	1,953	2,054	1,971	1,931
	1	2,963	2,739	2,639	2,733	2,645	2,607	2,931	2,735	2,644	2,781	2,670	2,616
	1,05	3,445	3,191	3,077	3,190	3,090	3,046	3,414	3,192	3,088	3,246	3,119	3,058
	1,2	5,065	4,793	4,665	4,763	4,659	4,612	5,049	4,811	4,695	4,805	4,676	4,612
	1,35	5,462	5,301	5,224	5,042	4,986	4,960	5,386	5,244	5,175	4,999	4,925	4,889
	1,5	4,765	4,623	4,556	4,405	4,355	4,331	4,688	4,562	4,501	4,378	4,310	4,276
	2	2,930	2,786	2,720	2,750	2,696	2,672	2,897	2,772	2,711	2,775	2,705	2,670
75	1,146	1,070	1,037	1,067	1,038	1,025	1,132	1,066	1,035	1,084	1,047	1,029	

Tabla 4-22 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución parabólica de momentos

En la tabla 4-23 se muestran los errores para el caso de carga distribuida y momentos en los extremos. Todos los errores son positivos y el mayor valor es de 10.28 %. Las gráficas siguientes (4-52 a 4-55) muestran la comparación entre los valores C_1 exactos (líneas continuas) y los valores obtenidos usando el Método del Momento Equivalente (líneas de puntos) para esta distribución de momento.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
β	0,00	3,66%	1,81%	0,70%	1,96%	0,88%	0,33%	3,10%	1,57%	0,63%	2,02%	1,00%	0,40%
	0,50	3,37%	1,70%	0,66%	1,91%	0,87%	0,33%	2,87%	1,47%	0,59%	1,92%	0,95%	0,38%
	0,75	3,20%	1,62%	0,63%	1,90%	0,87%	0,33%	2,74%	1,41%	0,57%	1,86%	0,93%	0,37%
	0,90	3,15%	1,61%	0,63%	1,90%	0,88%	0,33%	2,69%	1,40%	0,56%	1,85%	0,92%	0,36%
	1,00	3,28%	1,66%	0,65%	1,91%	0,89%	0,33%	2,78%	1,44%	0,57%	1,90%	0,95%	0,38%
	1,05	3,48%	1,74%	0,68%	1,96%	0,91%	0,35%	2,95%	1,51%	0,60%	2,00%	1,00%	0,40%
	1,20	6,08%	3,05%	1,24%	3,54%	1,82%	0,76%	5,35%	2,79%	1,17%	3,97%	2,15%	0,92%
	1,35	10,20%	5,63%	2,50%	6,67%	3,80%	1,69%	9,18%	5,29%	2,42%	6,58%	3,88%	1,75%
	1,50	10,28%	5,64%	2,48%	6,57%	3,65%	1,58%	9,19%	5,25%	2,37%	6,47%	3,72%	1,65%
	2,00	6,94%	3,49%	1,41%	3,82%	1,87%	0,74%	6,06%	3,16%	1,32%	4,14%	2,16%	0,89%
75,00	4,48%	2,18%	0,84%	2,23%	1,01%	0,38%	3,79%	1,90%	0,76%	2,43%	1,21%	0,48%	

Tabla 4-23 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable y distribución parabólica de momentos

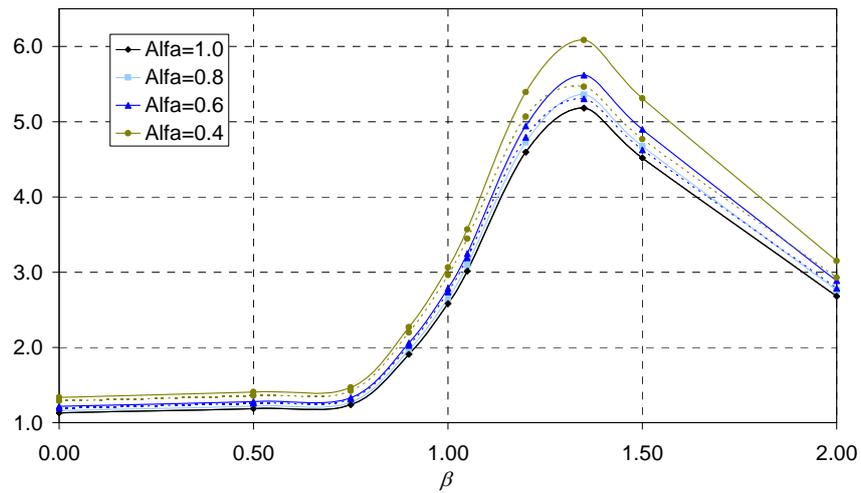


Figura 4-52 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=10m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos

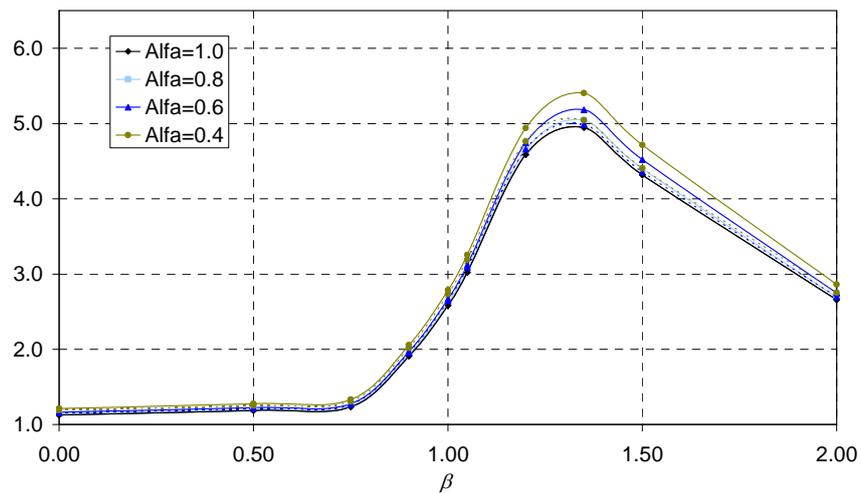


Figura 4-53 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 1, L=20m y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos

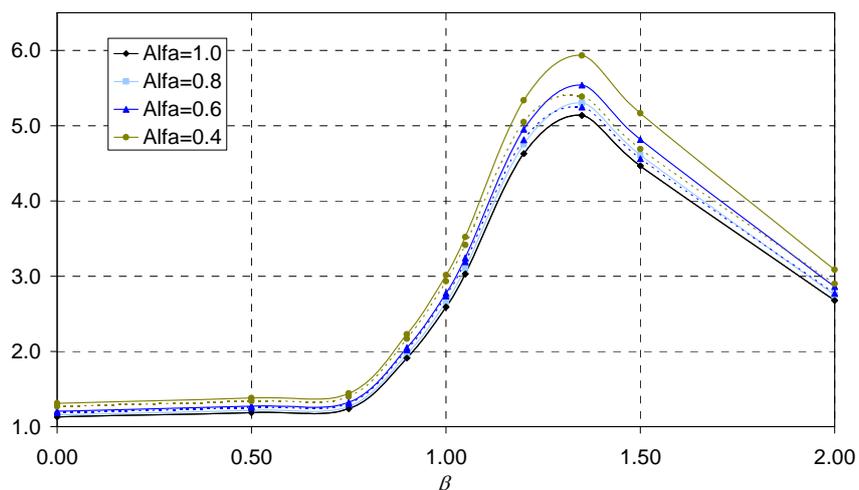


Figura 4-54 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos

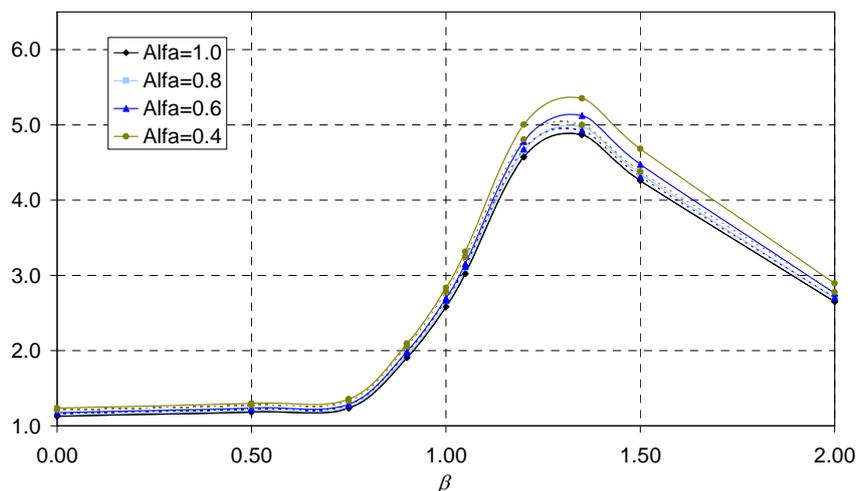


Figura 4-55 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma variable: Viga 2, $L=20\text{m}$ y sometida a una carga distribuida y momentos en los extremos

4.5.1.4 Resultados de la cuarta tanda con el MME. Ley de flectores bilineal y canto máximo en centro de luz.

Siguiendo la secuencia del apartado 4.4 tratamos ahora el caso de una viga de canto variable con inercia máxima en centro de luz y sometida a una ley de flectores bilineal consecuencia de la actuación de dos momentos de igual valor en los extremos y una carga puntual en centro de luz (Figura 4-9). Los valores reales de C_1 se recogieron en el apartado 4.4.4 y ahora presentamos en la tabla 4-24 los obtenidos mediante el Método del Momento Equivalente sobre

la viga de sección constante igual a la sección de menor inercia (extremos de la viga).

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
λ	2	1,4315	1,2353	1,1505	1,1628	1,1291	1,1141	1,3853	1,2218	1,1474	1,2628	1,1734	1,1306
	1	1,5179	1,3042	1,2124	1,2252	1,1888	1,1726	1,4671	1,2894	1,2089	1,3334	1,2365	1,1902
	0,5	1,6102	1,3773	1,2777	1,2910	1,2515	1,2340	1,5543	1,3610	1,2738	1,4078	1,3028	1,2528
	0	1,8090	1,5333	1,4167	1,4303	1,3842	1,3638	1,7413	1,5138	1,4119	1,4549	1,3963	1,3680
	-0,5	2,2999	1,9333	1,7779	1,7997	1,7379	1,7108	2,2192	1,9154	1,7795	1,8316	1,7538	1,7162
	-0,6	3,3399	2,8766	2,6705	2,7192	2,6358	2,5988	3,2615	2,8707	2,6887	2,7668	2,6619	2,6106
	-0,7	3,9333	3,5596	3,3830	3,3894	3,3229	3,2924	3,8675	3,5543	3,4007	3,4163	3,3325	3,2908
	-1	3,0947	2,8390	2,7236	2,6849	2,6416	2,6215	3,0267	2,8102	2,7078	2,6971	2,6398	2,6115
	-1,5	2,2031	1,9681	1,8633	1,8690	1,8282	1,8096	2,1485	1,9503	1,8576	1,8914	1,8383	1,8122
-2	1,8826	1,6654	1,5692	1,5799	1,5421	1,5250	1,8328	1,6501	1,5651	1,6018	1,5528	1,5288	

Tabla 4-24 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable con canto máximo en centro de luz y distribución bilineal de momentos

En la tabla 4-25 y en las figuras 4-56 a 4-59 se presentan los resultados obtenidos para esta tipología de viga. El mayor error positivo (valor exacto más grande que valor aproximado) es de 5.17%, mientras que la mayor diferencia negativa es de -13.82 %.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
λ	2	-9,6%	-3,8%	-1,3%	4,02%	1,62%	0,55%	-4,77%	-2,21%	-0,83%	-4,89%	-2,27%	-0,87%
	1	-10,3%	-4,1%	-1,3%	4,15%	1,69%	0,58%	-5,05%	-2,29%	-0,85%	-4,97%	-2,29%	-0,88%
	0,5	-11,0%	-4,4%	-1,4%	4,31%	1,78%	0,62%	-5,33%	-2,37%	-0,87%	-5,03%	-2,30%	-0,88%
	0	-12,4%	-4,9%	-1,6%	4,68%	1,99%	0,71%	-5,84%	-2,49%	-0,89%	1,84%	0,92%	0,37%
	-0,5	-13,8%	-5,5%	-1,8%	5,17%	2,34%	0,87%	-6,43%	-2,63%	-0,89%	1,79%	0,91%	0,36%
	-0,6	-10,3%	-4,3%	-1,4%	4,18%	1,85%	0,68%	-5,25%	-2,42%	-0,87%	2,21%	1,13%	0,46%
	-0,7	-2,0%	-0,6%	-0,1%	3,62%	1,42%	0,49%	-0,82%	-0,82%	-0,39%	4,39%	2,36%	0,99%
	-1	1,0%	1,1%	0,6%	4,19%	1,67%	0,59%	1,06%	0,20%	0,01%	5,14%	2,74%	1,13%
	-1,5	-3,8%	-1,3%	-0,3%	3,62%	1,38%	0,46%	-1,87%	-1,13%	-0,49%	3,56%	1,81%	0,73%
-2	-5,5%	-2,1%	-0,6%	3,61%	1,37%	0,46%	-2,80%	-1,51%	-0,62%	3,08%	1,55%	0,62%	

Tabla 4-25 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto variable (máximo en centro de luz) y distribución bilineal de momentos

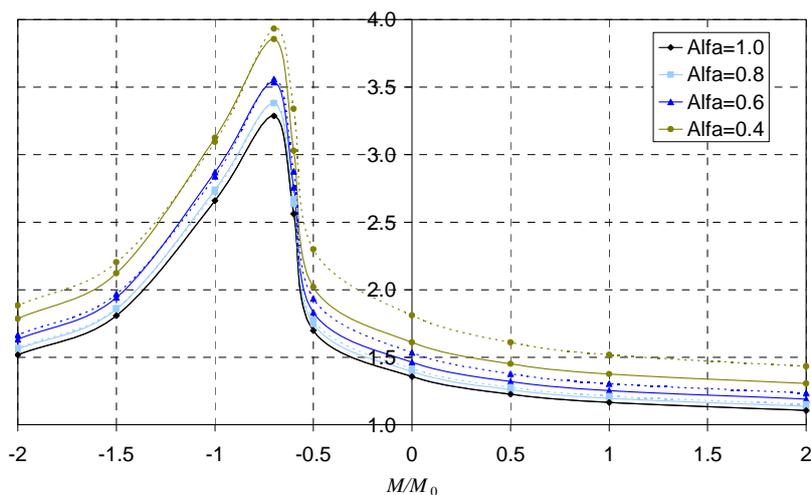


Figura 4-56 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 1, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos

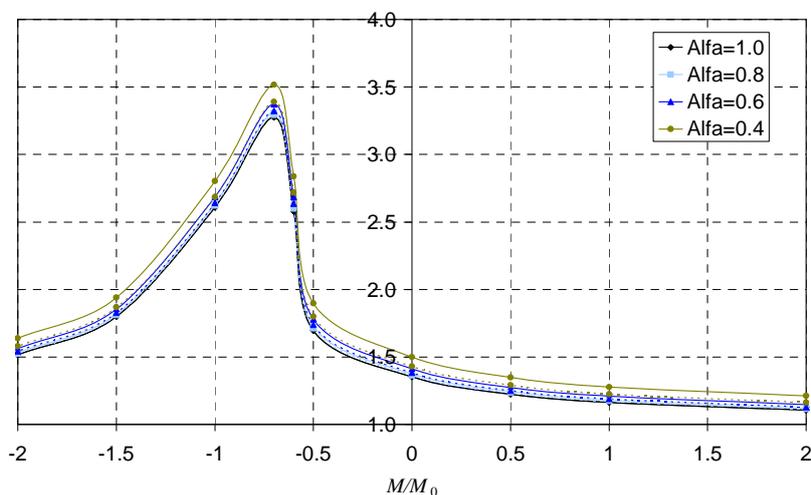


Figura 4-57 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 1, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos

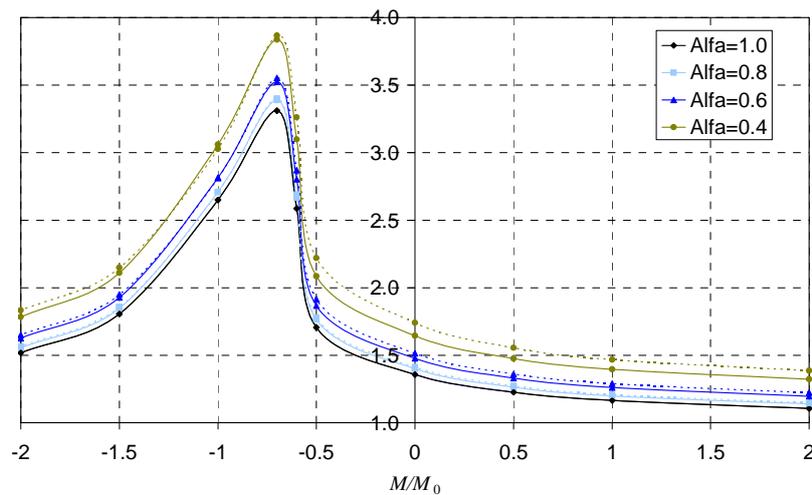


Figura 4-58 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 2, $L=10\text{m}$ y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos

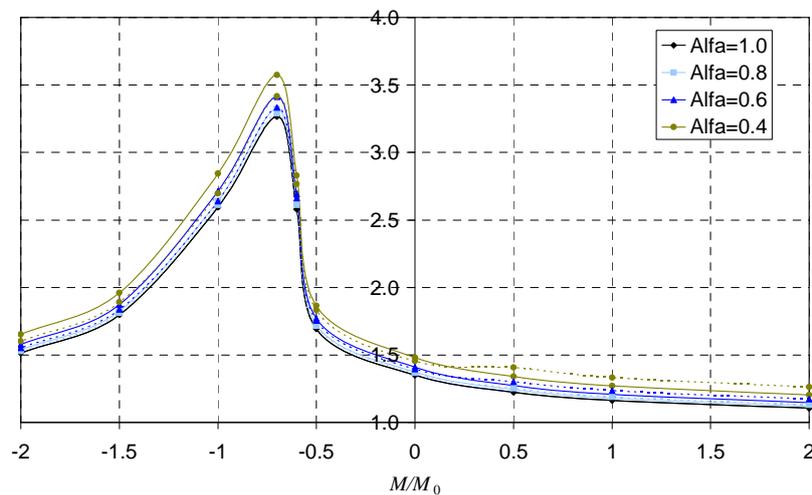


Figura 4-59 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma doblemente variable: Viga 2, $L=20\text{m}$ y sometida a una carga puntual y momentos en los extremos

4.5.1.5 Resultados de la quinta tanda con el MME. Ley de flectores lineal en viga con variación lineal de ancho y canto.

En correlación a lo desarrollado en el apartado 4.4, planteamos aquí el caso de una viga doble T con variación lineal tanto en el ancho de alas como en su canto, sometida a una ley de flectores de tipo lineal resultado de aplicar dos momentos en sus extremos. La solución correcta se recoge en el apartado 4.4.5 tanto en sus valores numéricos como en la representación gráfica de estos. Ahora presentamos en la tabla 4-26 la solución obtenida (valores de C_1) al aplicar la ley de flectores equivalente sobre la viga de referencia de sección constante.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
ψ	-1	5,981	4,281	3,358	5,107	3,878	3,182	5,603	4,112	3,291	4,937	3,797	3,144
	-0,75	8,662	5,93	3,942	7,379	5,329	3,697	8,123	5,678	3,840	7,118	5,207	3,649
	-0,5	13,98	6,612	3,679	11,45	5,611	3,406	12,953	6,150	3,556	10,799	5,425	3,358
	0	10,14	4,372	2,59	7,802	3,828	2,455	9,046	4,111	2,526	7,308	3,732	2,433
	0,5	5,172	2,736	1,786	4,264	2,477	1,721	4,745	2,611	1,754	4,086	2,433	1,711
	1	3,324	1,907	1,312	2,786	1,743	1,269	3,071	1,827	1,291	2,685	1,715	1,262

Tabla 4-26 Valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto y ancho variable y distribución lineal de momentos

En la tabla 4-27 y en las figuras 4-60 a 4-63 se presentan los resultados obtenidos para esta tipología de viga. El mayor error positivo (valor exacto más grande que valor aproximado) es de 12.39%, mientras que la mayor diferencia negativa es de -10.66 %.

		Viga 1 L=10m			Viga 1 L=20m			Viga 2 L=10m			Viga 2 L=20m		
		α			α			α			α		
		0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8	0.4	0.6	0.8
ψ	-1,00	12,39%	3,96%	0,73%	6,12%	1,97%	0,57%	9,69%	3,05%	0,68%	4,21%	1,37%	0,44%
	-0,75	10,57%	0,20%	0,04%	4,99%	0,55%	0,89%	8,08%	0,25%	0,55%	3,44%	0,57%	0,79%
	-0,50	-3,57%	-3,85%	0,24%	-4,25%	0,43%	1,04%	-4,71%	-1,73%	0,79%	-3,16%	0,81%	0,86%
	0,00	-10,66%	-3,36%	-0,31%	-5,93%	-0,73%	0,28%	-9,00%	-2,19%	0,01%	-4,32%	-0,39%	0,24%
	0,50	-0,36%	-1,38%	-0,30%	-1,72%	-0,66%	0,00%	-1,32%	-1,21%	-0,20%	-1,76%	-0,52%	0,01%
	1,00	3,47%	0,04%	-0,05%	0,46%	-0,16%	0,03%	1,87%	-0,22%	-0,07%	-0,17%	-0,21%	0,02%

Tabla 4-27 Errores en tanto por ciento en los valores de C_1 obtenidos con MME para vigas de canto y ancho variable y distribución lineal de momentos

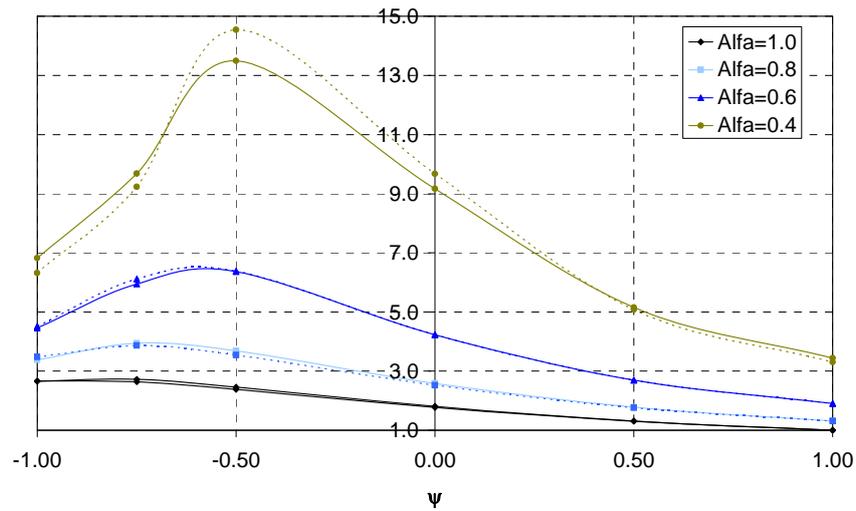


Figura 4-60 Valores de C_1 exactos frente a MME para viga de alma y ala variable: Viga 1, $L=10m$ y con una distribución lineal de flectores

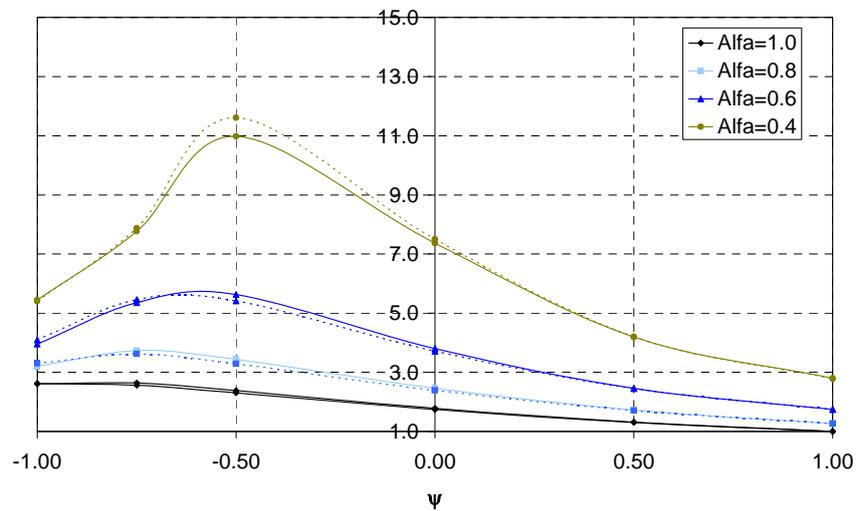


Figura 4-61 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 1, $L=20m$ y con una distribución lineal de flectores

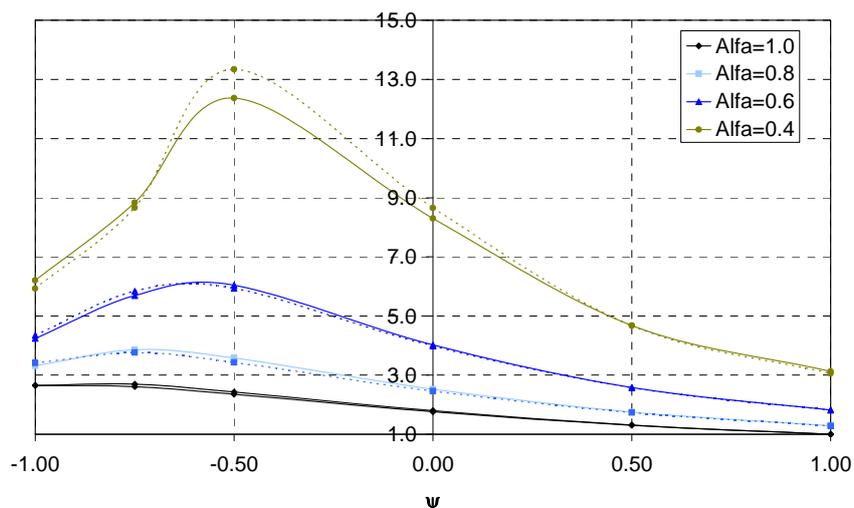


Figura 4-62 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 2, L=10m y con una distribución lineal de flectores

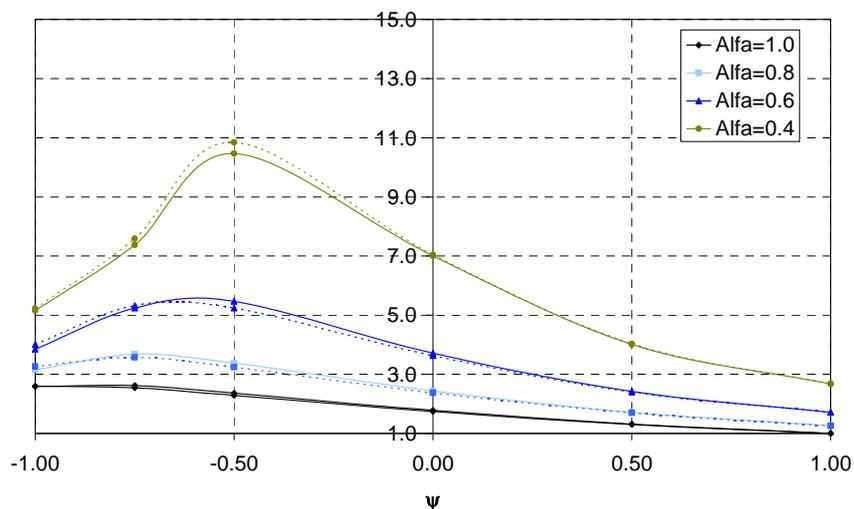


Figura 4-63 Valores de C_1 exactos frente a EMA para viga de alma y ala variable: Viga 2, L=20m y con una distribución lineal de flectores

Las figuras 4-64 y 4-65 muestran la comparación entre los valores exactos (líneas continuas) y los valores obtenidos usando la expresión analítica dada (líneas discontinuas) para Viga 1 y Viga 2 con longitud de viga igual a 10 metros, y distribuciones de momento lineal. Se puede apreciar que la aproximación obtenida con la Eq. (4-14), que requiere muy pocos cálculos, es bastante aceptable. Se obtienen resultados similares para otros diagramas de momento.

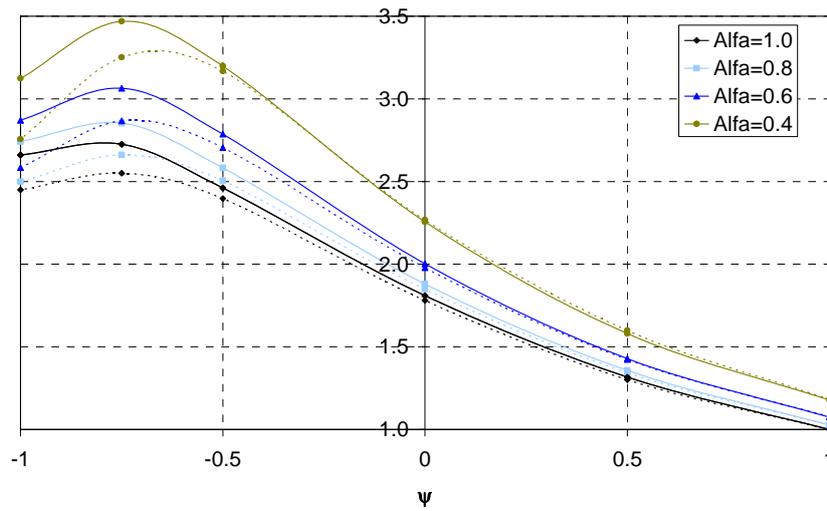


Figura 4-64 Valores de C_1 exactos frente a los obtenidos por la Eq (4-14) para viga de canto variable. Viga 1, $L=10\text{m}$ y distribución lineal de momentos.

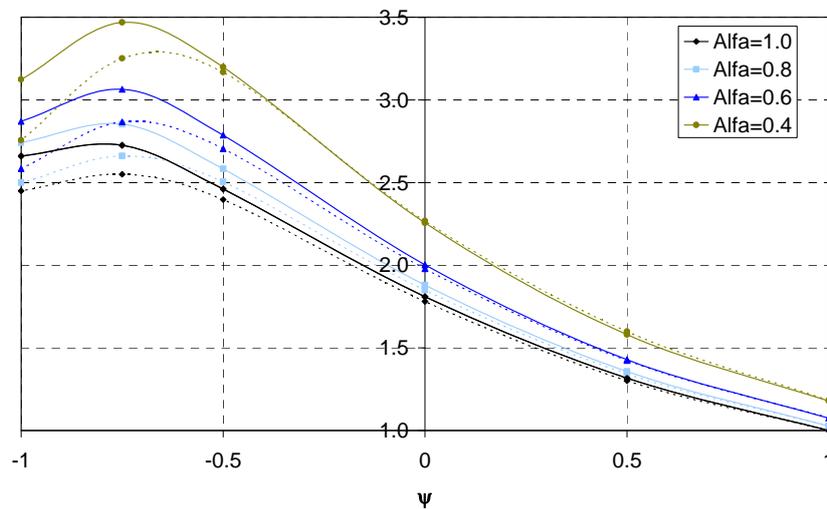


Figura 4-65 Valores de C_1 exactos frente a los obtenidos por la Eq (4-14) para viga de canto variable. Viga 2, $L=10\text{m}$ y distribución lineal de momentos.

5 PROCEDIMIENTO DE VERIFICACIÓN DE LA RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS DE SECCIÓN VARIABLE SOMETIDOS A FLEXO-COMPRESIÓN

5.1 INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 3 de la tesis se ha presentado un nuevo método para obtener la carga crítica de pandeo elástico de elementos de sección variable sometidos a esfuerzo axial también variable. Según el método propuesto, el elemento original es sustituido por otro de sección constante, igual a la de menor área, transformando la ley de esfuerzos axiales mediante un coeficiente de equivalencia que es función en las inercias de las secciones respecto del eje de pandeo. A continuación, la nueva ley de esfuerzos axiales es sustituida por otra ley uniforme equivalente, usando para ello un segundo factor de equivalencia.

Por otra parte, el Capítulo 4, siguiendo un proceso similar, ha descrito la aplicación de los mismos conceptos a la determinación del momento crítico de pandeo lateral elástico para vigas de sección variable sometidas a un momento flector también variable. En este caso, la transformación de la ley de momentos flectores de la viga de sección variable a la de sección uniforme es realizada mediante un coeficiente de equivalencia que depende de los valores del momento crítico correspondiente a las propiedades de cada sección. En segundo lugar, la nueva ley de momentos es sustituida por una ley uniforme utilizando para ello el factor de equivalencia correspondiente.

En el presente capítulo, los conceptos presentados son utilizados para desarrollar una metodología que permite determinar la resistencia de elementos de sección variable sometidos a flexo-compresión. Se presentará en primer lugar la aplicación del método propuesto a los elementos sometidos a compresión, seguidamente se extenderá a los elementos sometidos a flexión y, para finalizar, se completará el desarrollo con el caso general de los elementos a flexo-compresión.

Los resultados obtenidos con el nuevo método propuesto serán comparados con los ofrecidos en la literatura más reciente, de forma particular con los trabajos doctorales de L. Marques en las Universidades de Coímbra y

Graz (Marques, 2012; Marques et al., 2012; Marques et al., 2013 y Marques et al., 2014) y los de Y.D. Kim en el Georgia Institute of Technology (Kim, 2010; Kaehler et al., 2011).

5.2 RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A COMPRESIÓN

Consideremos el caso general de un elemento de sección variable, definida por su área e inercia variables $A(x)$ e $I(x)$ respectivamente, que supondremos biarticulado, sometido a un esfuerzo axial variable, definido por $N(x)$, tal como indica la Figura 5.1.

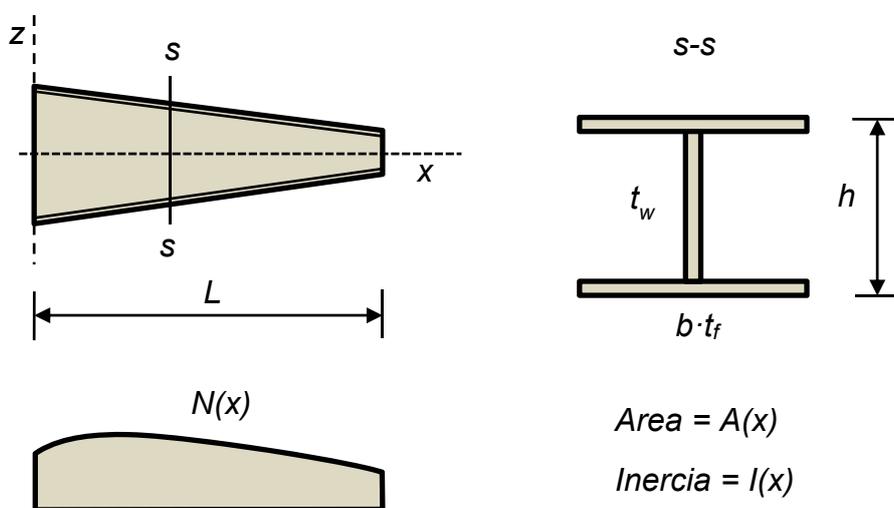


Figura 5-1 Elemento de sección y esfuerzo axial variable

En el Capítulo 3 de la presente tesis se ha definido un nuevo método explícito aproximado para la determinación de la carga crítica correspondiente al pandeo de flexión, N_{cr} .

Con base en dicho desarrollo, la verificación de la resistencia del elemento en relación al pandeo elástico puede determinarse considerando, en primer lugar, que el elemento de sección variable es sustituido por un elemento de sección constante, igual a la sección de menor inercia a la flexión activa en el pandeo, sometido a una distribución de esfuerzo axial equivalente $\hat{N}(x)$, definido por

$$\hat{N}(x) = c(x)N(x) \quad (5.1)$$

donde el coeficiente de equivalencia, $c(x)$, viene dado por

$$c(x) = \frac{I_m^\chi}{I(x)^\chi} \frac{I_0^\beta I_2^\gamma I_4^\beta}{I_M^{(2\beta+\gamma)}} \tag{5.2}$$

siendo I_m e I_M la menor y la mayor inercia en el elemento, e I_0 , I_2 e I_4 las inercias a 0, 1/2 y 1 de la luz. Los valores elegidos para cada uno de los coeficientes χ , β y γ , adoptados con criterios conservadores, han sido 0,30, 0,30 y 0,15 respectivamente.

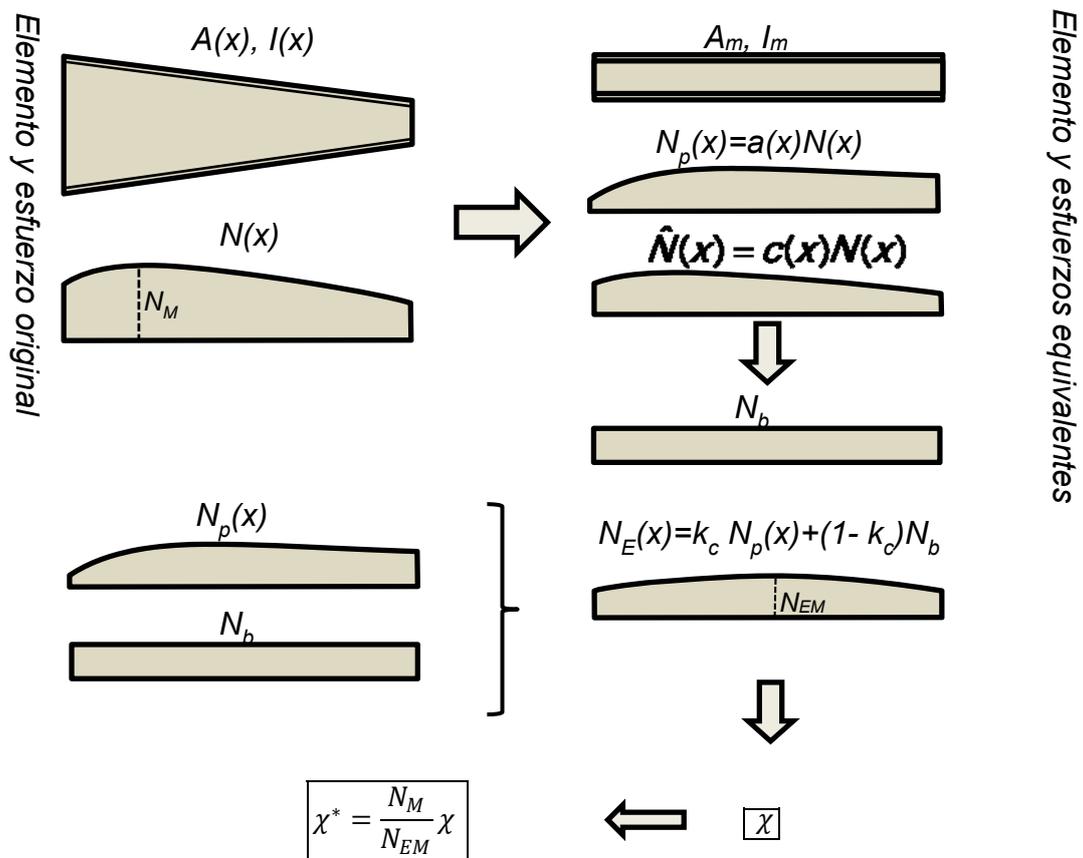


Figura 5-2 Elemento y esfuerzos originales y equivalentes

Por otro lado, también de acuerdo con el método presentado en el Capítulo 3, la carga crítica correspondiente a la distribución variable de esfuerzo $\hat{N}(x)$, que designaremos por \hat{N}_{cr} , viene dado por

$$\hat{N}_{cr} = \hat{C} \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} \tag{5.3}$$

con

$$\hat{C} = \frac{21\hat{N}_M}{4(\hat{N}_0 + \hat{N}_4) + 6(\hat{N}_1 + \hat{N}_3) + \hat{N}_M} = \frac{21(cN)_M}{4(c_0N_0 + c_4N_4) + 6(c_1N_1 + c_3N_3) + (cN)_M} \quad (5.4)$$

Donde los subíndices 0, 1, 3 y 4 indican los valores de los esfuerzos y coeficientes de equivalencia para x igual a 0, $L/4$, $3L/4$ y L , y $\hat{N}_M = (cN)_M$ el máximo valor del Esfuerzo Equivalente de Pandeo.

Con ello y en relación con el pandeo elástico, el elemento de sección variable sometido a un axil variable, puede ser sustituido por un elemento de sección constante, igual a la menor, sometido a un esfuerzo axil uniforme N_b , que denominaremos Esfuerzo Equivalente de Pandeo (Figura 5.2), de valor

$$N_b = \frac{\hat{N}_M}{\hat{C}} = \frac{(cN)_M}{\hat{C}} \quad (5.5)$$

Por otro lado, la resistencia plástica del elemento vendrá definida por el área de la sección, variable a lo largo de su longitud. La verificación de su resistencia podrá determinarse en este caso considerando un elemento de sección constante, de área igual a la menor, sometido a un esfuerzo axil equivalente $N_p(x)$, que denominaremos Esfuerzo Equivalente Plástico (Figura 5.2), definido por

$$N_p(x) = a(x)N(x) \quad (5.6)$$

donde el coeficiente de equivalencia, $a(x)$, viene dado por

$$a(x) = \frac{A_m}{A(x)} \quad (5.7)$$

siendo A_m el área de la menor sección.

El valor de la esbeltez representa un indicador de la resistencia dominante en el elemento. Si la esbeltez es pequeña, será la resistencia plástica de la sección la que determine la resistencia del elemento, siendo por tanto el Esfuerzo Equivalente Plástico $N_p(x)$, dado por la Ecuación (5.6), el determinante. Si, por el contrario, la esbeltez es grande, será la carga crítica de pandeo la que determine

la resistencia del elemento, siendo en este caso el Esfuerzo Equivalente de Pandeo N_b , dado por la Ecuación (5.5), el esfuerzo de referencia.

Lógicamente, en la zona de pandeo inelástico, es decir, para valores intermedios de la esbeltez, se producirá una interacción entre las dos resistencias. El modo de considerar esta interacción de forma sencilla es asumir un Esfuerzo Equivalente para el elemento de sección constante, igual a la menor sección, definido por una combinación lineal de los Esfuerzos Equivalentes Plástico y de Pandeo, en la forma

$$N_E(x) = kN_p(x) + (1 - k)N_b \quad (5.8)$$

donde k es un coeficiente de interacción, que debe aproximarse a la unidad para la esbeltez tendiendo a cero, y a cero para la esbeltez tendiendo a infinito. Por sencillez, la expresión propuesta para el valor de k es la siguiente

$$k = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_0^\beta} \quad (5.9)$$

donde α y β son dos coeficientes a definir, y

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{crm}}} \quad (5.10)$$

siendo f_y la tensión de fluencia del material, A_m el área de la menor sección y N_{crm} es el esfuerzo crítico del elemento de sección igual a la menor, es decir

$$N_{crm} = \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} \quad (5.11)$$

Con esta definición de k , el valor del Esfuerzo Equivalente viene dado por

$$N_E(x) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_0^\beta} N_p(x) + \frac{\alpha\lambda_0^\beta}{1 + \alpha\lambda_0^\beta} N_b \quad (5.12)$$

que, teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.5) y (5.6), puede escribirse como

$$N_E(x) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_0^\beta} a(x) N(x) + \frac{\alpha\lambda_0^\beta}{1 + \alpha\lambda_0^\beta} \frac{(cN)_M}{\hat{C}} \quad (5.13)$$

Para evaluar la resistencia del elemento a compresión, el Esfuerzo Equivalente deberá ser comparado con la resistencia a compresión del elemento definida por las normas. Es decir

$$N_E(x) \leq \chi A_m f_y \Rightarrow N_{EM} \leq \chi A_m f_y \quad (5.14)$$

donde N_{EM} es el valor máximo de $N_E(x)$ y χ representa el factor de reducción de resistencia por pandeo de flexión correspondiente a la esbeltez λ_E , es decir, la reducción correspondiente al nuevo elemento uniforme sometido al axil equivalente $N_E(x)$.

Por lo que hace referencia al esfuerzo axil máximo en la distribución $N(x)$, que designaremos por N_M , su valor estará limitado por

$$N_M = \frac{N_M}{N_{EM}} N_{EM} \leq \frac{N_M}{N_{EM}} \chi A_m f_y \quad (5.15)$$

Es decir

$$N_M \leq \chi^* A_m f_y \quad (5.16)$$

Con

$$\chi^* = \frac{N_M}{N_{EM}} \chi \quad (5.17)$$

Con ello, y en resumen, la resistencia de un elemento de sección variable sometido a compresión, es determinada mediante el siguiente proceso:

1. Determinar el Esfuerzo Equivalente de Pandeo definido por la Ecuación (5.5).
2. Determinar el Esfuerzo Equivalente Plástico definido por la Ecuación (5.6).
3. Determinar el Esfuerzo Equivalente mediante la Ecuación (5.12).
4. Con la norma o código correspondiente, determinar el factor de reducción por pandeo χ correspondiente al elemento de sección uniforme sometido al Esfuerzo Equivalente.

5. Aplicando la Ecuación (5.17), obtener el factor de reducción modificado χ^* que permite obtener la resistencia del elemento según la Ecuación (5.16).

A continuación se muestra el modo de proceder para cada norma.

5.2.1 Aplicación a la norma americana

De acuerdo con la norma americana, la resistencia nominal a compresión para el caso de sección uniforme viene dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \lambda \leq 1,5 \quad P_n &= 0,658^{\lambda^2} A_m f_y \\ \lambda > 1,5 \quad P_n &= \frac{0,877}{\lambda^2} A_m f_y \end{aligned} \quad (5.18)$$

Por tanto, el valor del factor de reducción modificado se obtendrá de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda \leq 1,5 \quad \chi^* &= \frac{N_M}{N_{EM}} 0,658^{\lambda_E^2} \\ \lambda > 1,5 \quad \chi^* &= \frac{N_M}{N_{EM}} \frac{0,877}{\lambda_E^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

siendo λ_E la esbeltez del elemento uniforme de menor sección sometido a los Esfuerzos Equivalentes. La condición de resistencia vendrá dada por la condición

$$N_M \leq \phi_c P_n \quad (5.20)$$

donde N_M es el valor máximo del esfuerzo axial actuante y ϕ_n es el coeficiente parcial de seguridad correspondiente a la compresión.

5.2.2 Aplicación a la norma europea

El procedimiento propuesto es de directa aplicación a la norma europea, ya que en ella se define directamente el factor de reducción por pandeo χ que vendría dado, en nuestro caso, por la siguiente expresión

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_E^2}} \quad (5.21)$$

siendo

$$\phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\lambda_E - 0,2) + \lambda_E^2 \right] \quad (5.22)$$

y α el factor correspondiente a la curva de pandeo relevante.

Con objeto de visualizar la variación del coeficiente de reducción modificado χ^* según el gradiente de variación de la sección, el método propuesto se ha aplicado al caso de una columna con sección en I, con alas de 100x10 mm y una altura linealmente variable, siendo para la sección menor de 100 mm; manteniendo el espesor del alma también de 10 mm. Se ha utilizado un acero de 275 MPa de tensión de fluencia. Los resultados son presentados en las Tablas 5.1 y 5.2, y en la Figura 5.3, para los distintos casos de gradiente de sección. El gradiente de la sección viene definido por el parámetro “alfa” (se recuerda que alfa=1 implica secciones iguales; alfa=0,2 implica, en este caso, que la sección mayor es igual a 100/0,2=500 mm). Se ha tomado como referencia la curva *b* del EC3 ($\alpha=0,34$ en la Ecuación 5.22).

Para ajustar los coeficientes α y β de la Ecuación (5.9) se han utilizado los resultados obtenidos por Marques (Marques, 2012) para dicho elemento utilizando un análisis tipo GMNIA (Geometric and Material Nonlinear Inelastic Analysis). La Figura 5.3 presenta la comparación entre los resultados “exactos” de GMNIA y los “aproximados” obtenidos mediante el método propuesto para los valores de $\alpha=1,5$ y $\beta=2$, es decir, con k dado por la expresión

$$k = \frac{1}{1 + 1,5\lambda_0^2} = \frac{2}{2 + 3\lambda_0^2} \quad (5.23)$$

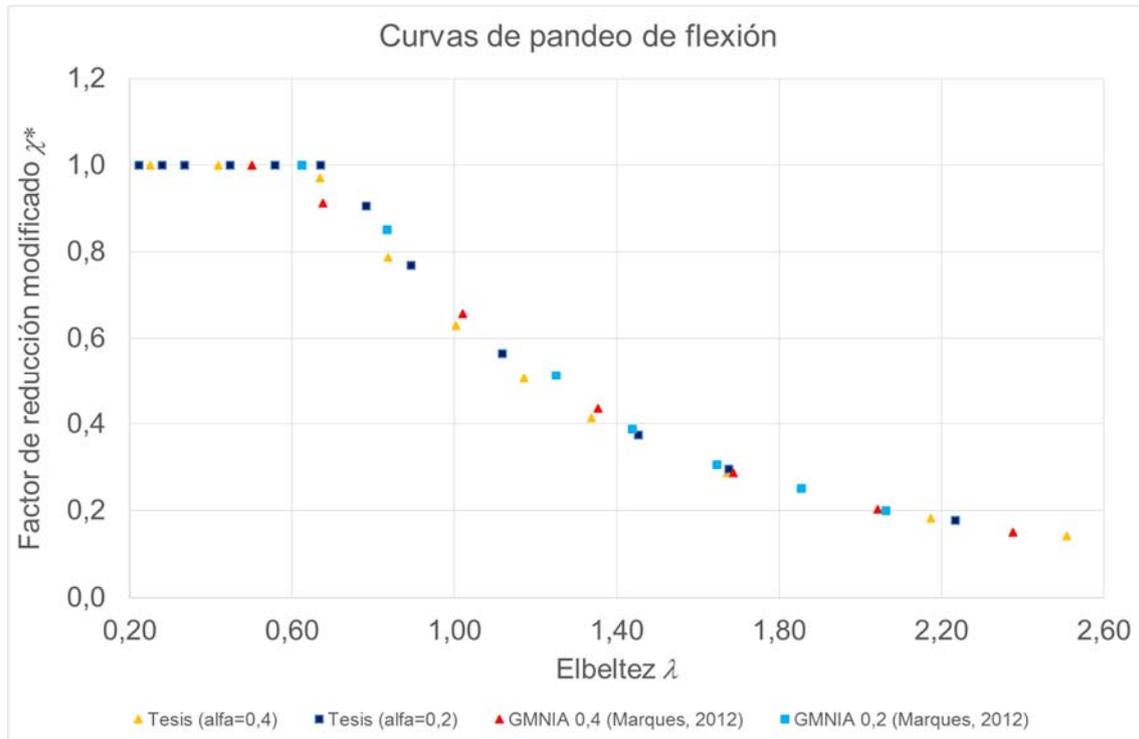


Figura 5-3 Comparación de los resultados en compresión uniforme

Los resultados están referidos a la esbeltez del elemento original considerando la resistencia de la menor sección, e decir

$$\lambda = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{cr}}} \quad (5.24)$$

donde, de acuerdo con los desarrollos del Capítulo 3,

$$N_{cr} = \frac{N_M}{N_b} \frac{\pi^2 E I_m}{L^2} \quad (5.25)$$

La Tabla 5.1 presenta los valores de la esbeltez λ_b en función de la longitud de la columna y del gradiente de altura de sección. La Tabla 5.2 proporciona los resultados obtenidos para el factor de reducción modificado χ^* para cada uno de los casos anteriores. Finalmente, la Figura 5.4 representa gráficamente estos resultados.

λ	L																
α	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	10	13	15	20	25
1,00	0,00	0,14	0,29	0,43	0,58	0,72	0,86	1,15	1,44	1,73	2,01	2,30	2,88	3,74	4,31	5,75	7,19
0,80	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	1,01	1,26	1,51	1,76	2,01	2,51	3,27	3,77	5,03	6,28
0,60	0,00	0,11	0,21	0,32	0,42	0,53	0,64	0,85	1,06	1,27	1,48	1,70	2,12	2,75	3,18	4,24	5,30
0,40	0,00	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,67	0,84	1,00	1,17	1,34	1,67	2,17	2,51	3,34	4,18
0,20	0,00	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,34	0,45	0,56	0,67	0,78	0,89	1,12	1,45	1,68	2,23	2,79

Tabla 5-1 Valor de la esbeltez λ en función de L y α (Sección 100x10)

χ^*	L																
α	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7	8	10	15	20	25	30
1	1,00	1,00	0,97	0,91	0,85	0,77	0,69	0,51	0,37	0,27	0,21	0,16	0,11	0,07	0,05	0,03	0,02
0,8	1,00	1,00	1,00	0,97	0,93	0,87	0,79	0,61	0,45	0,34	0,26	0,21	0,14	0,08	0,06	0,04	0,02
0,6	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,92	0,75	0,58	0,44	0,35	0,28	0,19	0,12	0,09	0,05	0,03
0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,97	0,79	0,63	0,51	0,41	0,29	0,18	0,14	0,08	0,05
0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,91	0,77	0,56	0,37	0,29	0,18	0,12

Tabla 5-2 Valor del factor χ^* en función de L y α (Sección 100x10)

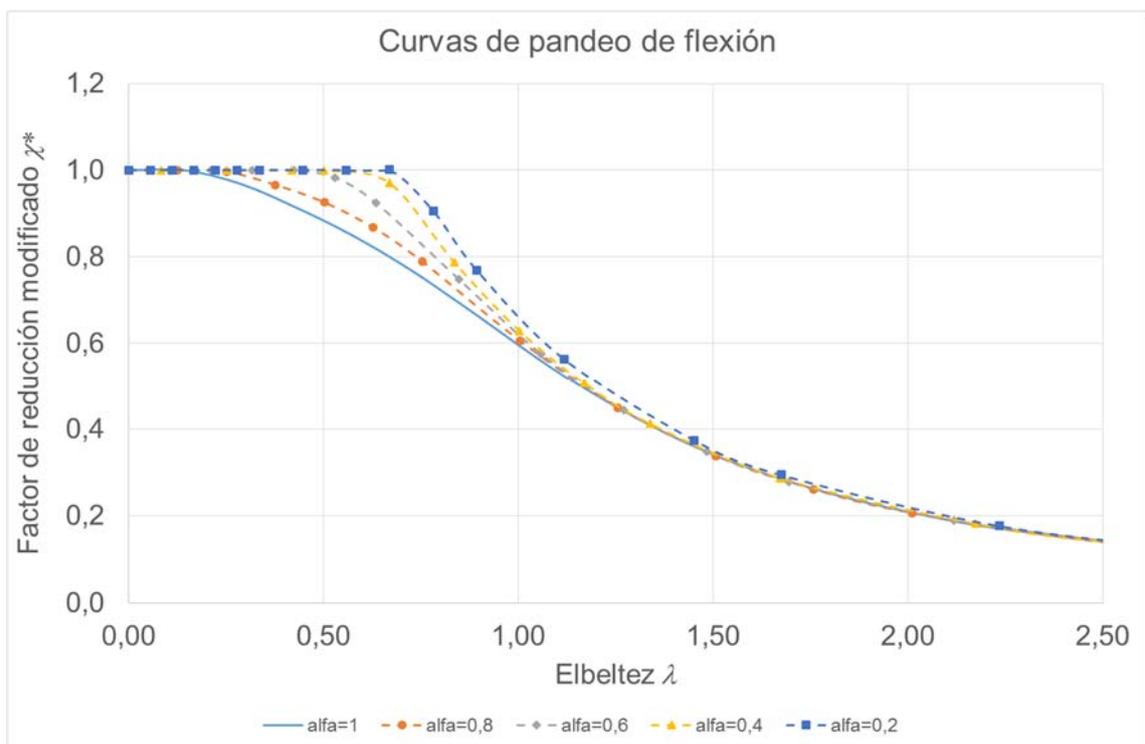


Figura 5-4 Curvas de pandeo en función de la esbeltez λ (Sección 100x10)

Más representativa del incremento de la resistencia con la variación de sección es la Figura 5.5, donde el factor de reducción modificado se representa respecto de la esbeltez del elemento de sección constante, igual a la menor, es decir λ_0 . Puede observarse que, como era de esperar, la resistencia al pandeo elástico se incrementa significativamente con el gradiente de variación de

sección, llegando a ser superior a cinco veces para un alfa igual a 0,2 y valores de la esbeltez superiores a 2,5.

Por otro lado, la zona de resistencia plástica se ve significativamente ampliada con el gradiente de la sección. Así, para el caso de gradiente igual a 0,2 la resistencia del elemento es igual a la plástica hasta una esbeltez igual a 1,77 frente al 0,2 que corresponde al caso de sección constante.

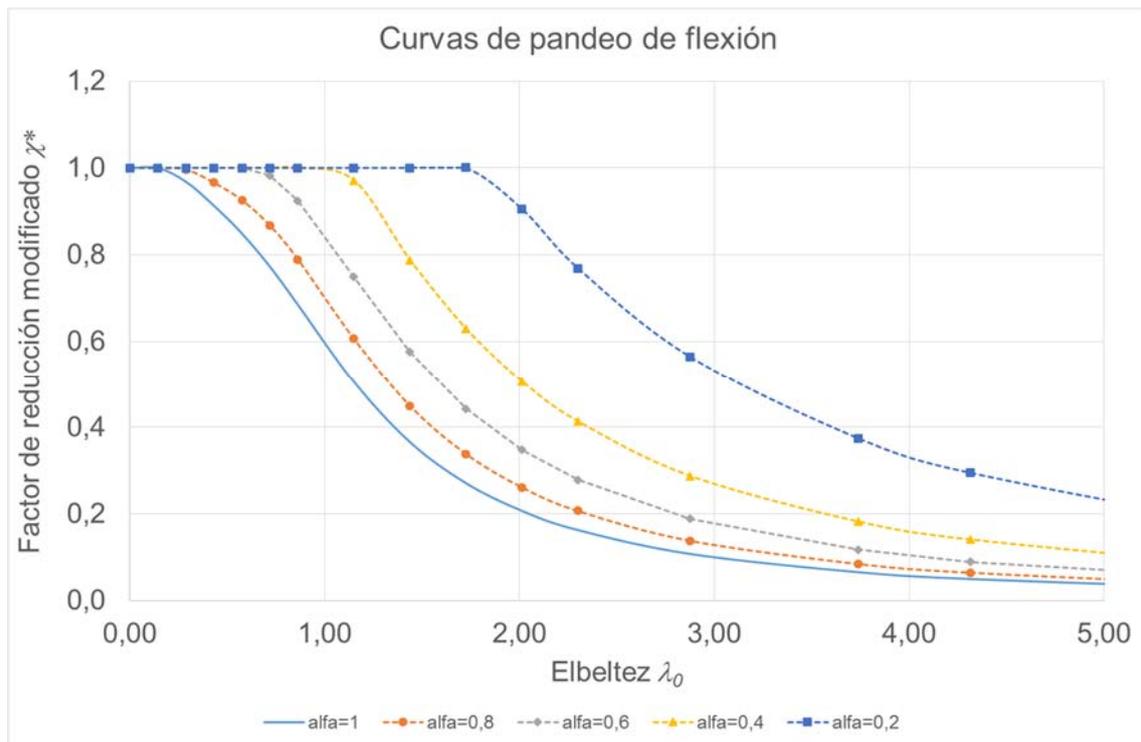


Figura 5-5 Curvas de pandeo en función de la esbeltez λ_0 (Sección 100x10)

5.2.3 Aplicación a la norma británica

Finalmente, la norma británica establece que la resistencia nominal a compresión, P_n , viene dada por

$$P_n = A_m f_c \tag{5.26}$$

con

$$f_c = \frac{f_E f_y}{\phi + \sqrt{\phi^2 - f_E f_y}} \tag{5.27}$$

siendo en nuestro caso

$$f_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda_E^2} \quad (5.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{f_y + (\eta + 1)f_E}{2} \\ \eta &= \frac{\alpha(\lambda_E - \lambda_0)}{100} \quad \eta \geq 0 \\ \lambda_0 &= 0,2 \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}} \end{aligned} \quad (5.29)$$

y α el factor correspondiente a la curva de pandeo relevante.

Con ello, el factor de reducción por pandeo χ , puede expresarse como

$$\chi = \frac{f_E}{\phi + \sqrt{\phi^2 - f_E f_y}} \quad (5.30)$$

Con lo que el factor de reducción modificado χ^* quedaría

$$\chi^* = \frac{N_M}{N_{EM}} \frac{f_E}{\phi + \sqrt{\phi^2 - f_E f_y}} \quad (5.31)$$

5.2.4 Ejemplos de aplicación

Consideramos en este apartado dos ejemplos de aplicación publicados en la literatura. El primero está tomado de Kaheler et al. (2011) y el segundo de Marques et al (2012), que se corresponden con la aplicación de la norma americana y la norma europea, respectivamente.

a) Ejemplo 1 (Kaehler et al., 2011)

El primer caso corresponde al elemento de sección variable definido en la Figura 5.6, con una variación lineal de la altura del alma, sometido a un esfuerzo axial constante N cuyo valor máximo se quiere determinar. El material tiene una tensión de fluencia igual a 55 ksi , un módulo de elasticidad de 29.000 ksi y un módulo de elasticidad transversal de 11.200 ksi .

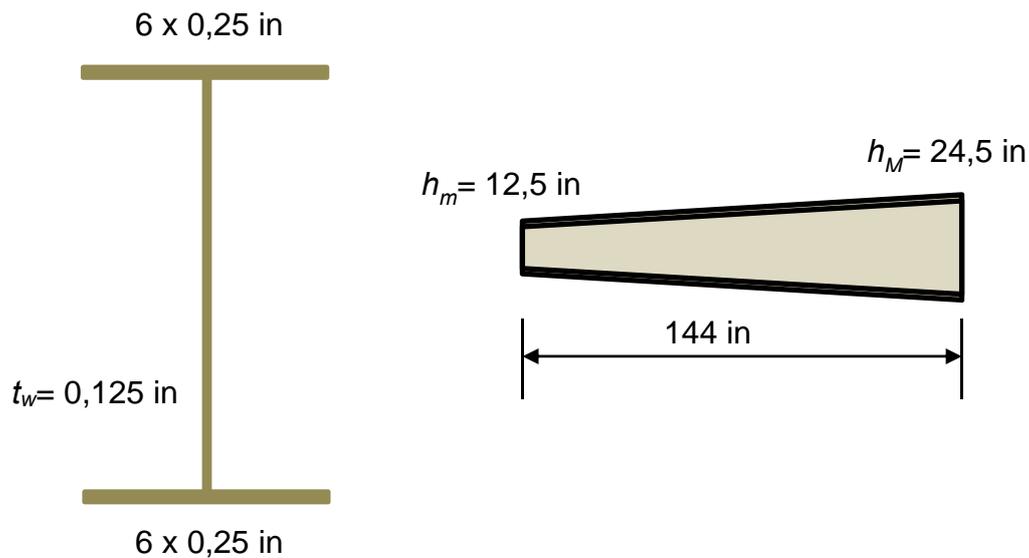


Figura 5-6 Geometría de elemento y sección del ejemplo de Kaehler et al. (2011)

Siguiendo el procedimiento expuesto, se determinan en primer lugar los $c(x)$ y $a(x)$. Tomando como secciones de referencia las correspondientes a $x=0$, $L/4$, $L/2$, $3L/4$, L , se obtienen los siguientes valores para los coeficientes $c(x)$ y $a(x)$

c0	c1	c2	c3	c4
0,5799	0,5031	0,4471	0,4041	0,3698

a0	a1	a2	a3	a4
1,0000	0,9231	0,8571	0,8000	0,7500

Dado que en el caso en estudio el esfuerzo axial es constante, los Esfuerzos Equivalentes coinciden con los valores de los coeficientes multiplicados por N .

A partir de los coeficientes $c(x)$ podemos obtener el valor del coeficiente de esfuerzo uniforme equivalente \hat{C} , que vendrá dado por

$$\hat{C} = \frac{21 \cdot 0,5799}{4(0,5799 + 0,3698) + 6(0,5031 + 0,4041) + 0,5799} = 1,2398$$

Con ello, el valor de N_b será

$$N_b = \frac{0,5799 \times N}{1,2398} = 0,4677N \text{kip}$$

Por su parte, la carga crítica correspondiente al elemento uniforme será

$$N_{cr0} = \frac{\pi^2 EI_m}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 29.000 \times 130,56}{144^2} = 1.802 \text{kip}$$

con lo que el valor de la esbeltez λ_0 vendrá dada por

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{cr0}}} = \sqrt{\frac{55 \times 4,5}{1.802}} = 0,3706$$

Una vez calculada la esbeltez, el Esfuerzo Equivalente en cada punto, resultante de aplicar la Ecuación (5.12), proporciona los siguientes resultados

N_{E0}	N_{E1}	N_{E2}	N_{E3}	N_{E4}
0,9282N	0,8513N	0,7871N	0,7324N	0,6850N

donde N es el esfuerzo axial actuante. El esfuerzo equivalente máximo se presenta en $x=0$.

Una vez obtenida la distribución equivalente de esfuerzos se procede a aplicar la norma americana, asumiendo que el elemento es de sección constante. Para la distribución de esfuerzos equivalentes resultan los siguientes valores

$$C_E = \frac{21 \times 0,9282}{4 \times (0,9282 + 0,6850) + 6 \times (0,8513 + 0,7324) + 0,9282} = 1,1545$$

$$N_{Ecr} = C_E N_{cr0} = 1,1545 \times 1.802 = 2.080 \text{kip}$$

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{Qf_y A_m}{N_{Ecr}}} = \sqrt{\frac{0,615 \times 55 \times 4,5}{2.080}} = 0,2705$$

donde la tensión de fluencia del material, f_y , ha sido reducida, de acuerdo con la norma americana, con el coeficiente 0,615, para tener en cuenta la reducción de resistencia por pandeo local.

Con ello, teniendo en cuenta que la esbeltez es inferior a 1,5, el factor de reducción modificado vendrá dado por

$$\chi^* = \frac{N_M}{N_{EM}} 0,658 \lambda_E^2 = \frac{N}{N} \frac{0,658^{0,2705^2}}{0,9282} = 1,0449$$

Con lo que resulta

$$P_n = 1,0449 Q_f y A_m = 1,0449 \times 0,615 \times 55 \times 4,5 = 159 \text{ kip}$$

El valor que proporciona Kaehler et al. (2011) para la resistencia nominal debido a pandeo de flexión es de 168 *kip*, lo que representa una diferencia del 5,7%.

Por lo que hace referencia al valor de la carga crítica de pandeo, su valor vendrá dado por la Ecuación (5.25), es decir

$$N_{cr} = \frac{N_M}{N_b} N_{cr0} = \frac{N}{0,4677N} \times 1.802 = 3.853 \text{ kip}$$

Kaehler et al. (2011) dan el valor de 3.990 *kip*, obtenido por aproximaciones sucesivas, lo cual implica una diferencia del 3,6%.

b) Ejemplo 2 (Marques et al., 2012)

El caso descrito por Marques et al. (2012) corresponde a un elemento sometido a compresión uniforme, en el que las alas y el alma de la sección menor tienen las dimensiones correspondientes a un perfil IPE200. La longitud del elemento es de 12,9m. La altura del alma de la sección varía linealmente, de forma que la altura final es tres veces la del perfil IPE200 inicial. La tensión de fluencia del acero considerado es de 235MPa.

Marques et al. (2012) obtienen la resistencia nominal del elemento utilizando dos métodos. El primero, considerado exacto, corresponde a un análisis no lineal que incluye imperfecciones y tensiones residuales, y da un valor de 502kN. El segundo método es el presentado por Marques en su tesis doctoral (Marques, 2012), que requiere unos cálculos significativamente más complejos que los que precisa el método presentado en esta tesis, y da un valor no conservador de 504,2kN.

La aplicación del método propuesto en la tesis da los siguientes valores para los coeficientes $c(x)$ y $a(x)$ en las secciones de referencia

c0	c1	c2	c3	c4
0,3999	0,3027	0,2475	0,2111	0,1849

a0	a1	a2	a3	a4
1,0000	0,8295	0,7087	0,6186	0,5488

A partir de los coeficientes $c(x)$ podemos obtener el valor del coeficiente de esfuerzo uniforme equivalente \hat{C} , que vendrá dado por

$$\hat{C} = \frac{21 \times 0,3999}{4(0,3999 + 0,01849) + 6(0,3027 + 0,02111) + 0,3999} = 1,4424$$

Con ello, el valor de N_b será

$$N_b = \frac{0,3999 \times N}{1,4424} = 0,2772N$$

La carga crítica correspondiente al elemento uniforme será

$$N_{cr0} = \frac{\pi^2 E I_m}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \times 10^{11} \times 1,846 \times 10^{-5}}{12,9^2} = 2,299 \times 10^5 N$$

con lo que el valor de la esbeltez λ_0 vendrá dada por

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{cr0}}} = \sqrt{\frac{2,35 \times 10^8 \times 2,725 \times 10^{-3}}{2,299 \times 10^5}} = 1,6690$$

El Esfuerzo Equivalente en cada punto, resultante de aplicar la Ecuación (5.12), proporciona los siguientes resultados

N_{E0}	N_{E1}	N_{E2}	N_{E3}	N_{E4}
0,4168N	0,3839N	0,3605N	0,3431N	0,3297N

Para esta distribución equivalente de esfuerzos, que se supone aplicada al elemento de sección constante, se obtienen los siguientes valores

$$C_E = 1,1272$$

$$N_{Ecr} = C_E N_{cr0} = 2,591 \times 10^5 N$$

$$\lambda_E = 1,5720$$

y, a partir de ellos, la aplicación de la norma europea, con la curva de pandeo b ($\alpha=0,34$), proporciona los siguientes resultados

$$\phi = 1,9689$$

$$\chi = 0,3170$$

Con ello, el factor de reducción modificado resultaría ser

$$\chi^* = \frac{N_M}{N_{EM}} \chi = \frac{N}{0,4168N} 0,3170 = 0,7606$$

Como resultado, la resistencia nominal vendría dada por

$$N_{b,Rd} = 0,7606 A_m f_y = 0,7606 \times (2,7248 \times 10^{-3}) \times (235 \times 10^6) = 487 kN$$

Este resultado es un 3,1% inferior al obtenido por Marques (2012) con GMNIA.

5.3 RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN

Consideremos, de nuevo, el caso general de un elemento de sección variable, que supondremos biarticulado y con la torsión impedida en los extremos, sometido a un momento flector variable, definido por $M(x)$, tal como indica la Figura 5-7.

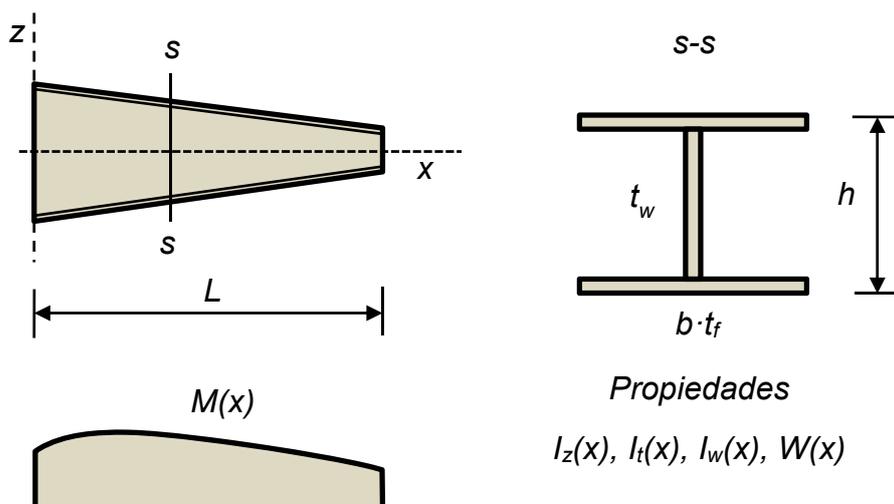


Figura 5-7 Viga de sección y diagrama de momentos variables

En el Capítulo 4 se ha definido un nuevo método explícito aproximado para la determinación del momento crítico de pandeo lateral, M_{cr} , y con ello su esbeltez relativa a la sección menor del elemento, λ_{LT} .

La verificación de la resistencia del elemento en relación al pandeo elástico, puede determinarse, con ello, considerando que el elemento de sección variable es sustituido por un elemento de sección constante, igual a la sección de menor resistencia a pandeo lateral, sometido a una distribución de momento flector equivalente $\hat{M}(x)$, definido por

$$\hat{M}(x) = m(x) M(x) \quad (5.32)$$

donde el coeficiente de equivalencia, $m(x)$, viene dado por

$$m(x) = \frac{M_{crm}}{M_{cr}(x)} \quad (5.33)$$

siendo M_{crm} el momento crítico de pandeo lateral correspondiente a sección menos resistente y $M_{cr}(x)$ el momento crítico de la sección genérica, definido por

$$M_{cr}(x) = \sqrt{\frac{\pi^2 E I_z(x) G I_t(x)}{L^2} + \frac{\pi^4 E I_z(x) E I_w(x)}{L^4}} \quad (5.34)$$

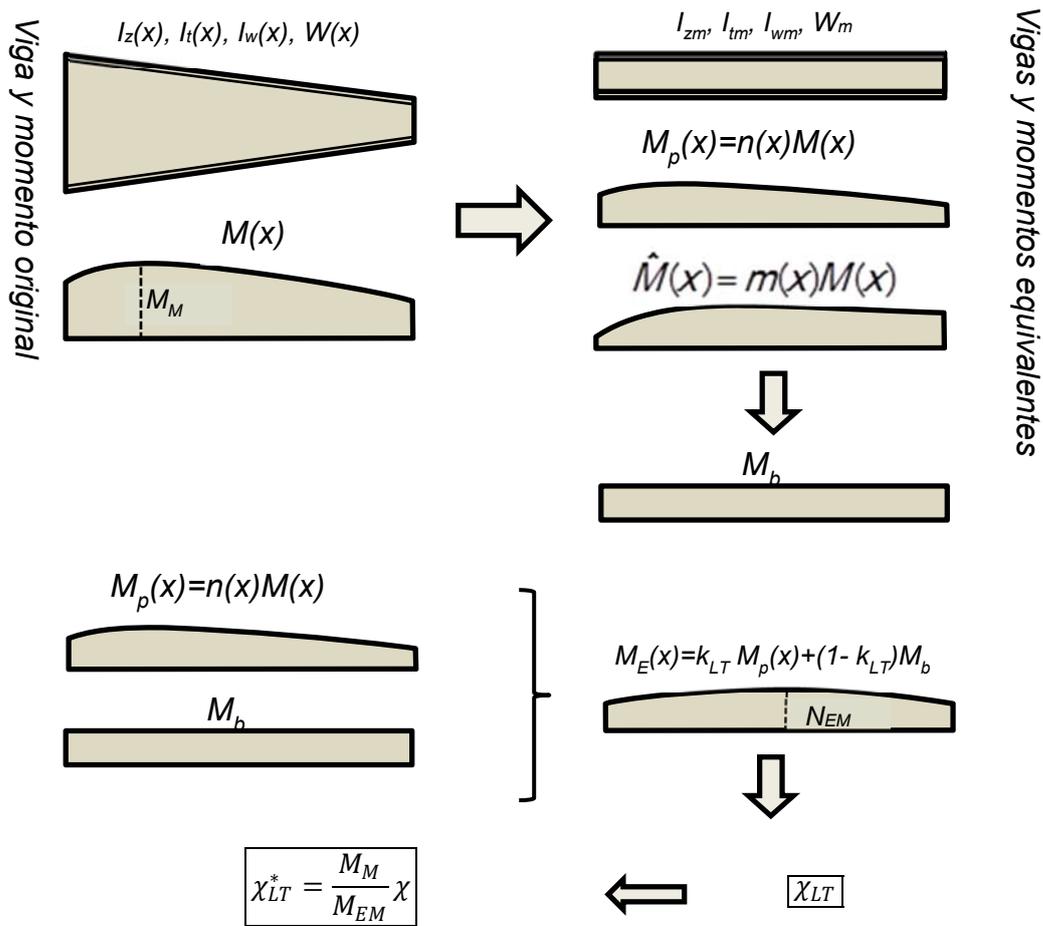


Figura 5-8 Viga y momento originales y equivalentes

Por lo tanto, también de acuerdo con el método presentado en el Capítulo 4, la carga crítica correspondiente a la distribución variable de momento $\hat{M}(x)$, viene dado por

$$\hat{M}_{cr} = \hat{C}_{LT} M_{crm} \tag{5.35}$$

con

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21\hat{M}_M^2}{5\hat{M}_1^2 + 10\hat{M}_2^2 + 5\hat{M}_3^2 + \hat{M}_M^2}} = \tag{5.36}$$

$$\sqrt{\frac{21(mM)_M^2}{5(m_1M_1)^2 + 10(m_2M_2)^2 + 5(m_3M_3)^2 + (mM)_M^2}}$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 indican los valores de los momentos y coeficientes de equivalencia para x igual a $L/4$, $L/2$ y $3L/4$.

Con ello, y en relación con el pandeo elástico, el elemento de sección variable sometido a un momento variable, puede ser sustituido por un elemento de sección constante, igual a la menor, sometido a un momento flector uniforme M_b , que denominaremos Momento Equivalente de Pandeo Lateral (Figura 5.8), de valor

$$M_b = \frac{\hat{M}_M}{\hat{C}_{LT}} = \frac{(mM)_M}{\hat{C}_{LT}} \quad (5.37)$$

Por lo que hace referencia a la resistencia a flexión del elemento, ésta vendrá definida por el módulo resistente de la sección, variable a lo largo de su longitud. La verificación de su resistencia podrá determinarse en este caso considerando un elemento de sección constante, de módulo resistente igual al menor, sometido a un momento flector equivalente $M_p(x)$, que denominaremos Momento Equivalente Plástico (Figura 5.8), definido por

$$M_p(x) = n(x)M(x) \quad (5.38)$$

donde el coeficiente de equivalencia, $n(x)$, viene dado por

$$n(x) = \frac{W_m}{W(x)} \quad (5.39)$$

siendo W_m el módulo resistente menor y $W(x)$ el módulo resistente de la sección genérica.

Al igual que con la resistencia a compresión, el valor de la esbeltez representa un indicador de la resistencia dominante en el elemento. Si la esbeltez es pequeña, será la resistencia de la sección a la flexión la que determine la resistencia del elemento, siendo por tanto el Momento Equivalente Plástico $M_p(x)$, dado por la Ecuación (5.38), el determinante. Si, por el contrario, la esbeltez es grande, será el momento crítico de pandeo lateral quien determine la resistencia del elemento, siendo en este caso el Momento Equivalente de Pandeo Lateral M_b , dado por la Ecuación (5.37), el momento de referencia.

Lógicamente, en la zona de pandeo inelástico, es decir, para valores intermedios de la esbeltez, se producirá una interacción entre las dos

resistencias. El modo de considerar esta interacción de forma sencilla es asumir un Momento Equivalente para el elemento de sección constante, igual a la menor sección, definido por una combinación lineal de los Momentos Equivalentes Plástico y de Pandeo Lateral, en la forma

$$M_E(x) = k_{LT}M_p(x) + (1 - k_{LT})M_b \quad (5.40)$$

donde k_{LT} es un coeficiente de interacción, que debe aproximarse a la unidad para λ_{LT0} tendiendo a cero, y a cero para λ_{LT0} tendiendo a infinito. La expresión propuesta para el valor de k_{LT} es idéntica a la definida para la resistencia a compresión y es la siguiente

$$k_{LT} = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_{LT0}^\beta} \quad (5.41)$$

Con esta definición de k_{LT} , el valor del Momento Equivalente viene dado por

$$M_E(x) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_{LT0}^\beta} M_p(x) + \frac{\alpha\lambda_{LT0}^\beta}{1 + \alpha\lambda_{LT0}^\beta} M_b \quad (5.42)$$

que, teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.37) y (5.38), puede escribirse como

$$M_E(x) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_{LT0}^\beta} n(x) N(x) + \frac{\alpha\lambda_{LT0}^\beta}{1 + \alpha\lambda_{LT0}^\beta} \frac{(mM)_M}{\hat{C}_{LT}} \quad (5.43)$$

Para evaluar la resistencia del elemento a pandeo lateral, el Momento Equivalente deberá ser comparado con la resistencia a flexión del elemento definida por las normas. Es decir

$$M_E(x) \leq \chi_{LT} W_m f_y \Rightarrow M_{EM} \leq \chi_{LT} W_m f_y \quad (5.44)$$

donde M_{EM} es el valor máximo de $M_E(x)$ y χ_{LT} representa el factor de reducción de resistencia por pandeo lateral.

Por lo que hace referencia al momento flector máximo en la distribución $M(x)$, que designaremos por M_M , su valor estará limitado por

$$M_M = \frac{M_M}{M_{EM}} M_{EM} \leq \frac{M_M}{M_{EM}} \chi_{LT} W_m f_y \quad (5.45)$$

Es decir

$$M_M \leq \chi_{LT}^* W_m f_y \quad (5.46)$$

Con

$$\chi_{LT}^* = \frac{M_M}{M_{EM}} \chi_{LT} \quad (5.47)$$

Con ello, y en resumen, la resistencia a pandeo lateral de un elemento de sección variable sometido a flexión, es determinada mediante el siguiente proceso:

1. Determinar el Momento Equivalente de Pandeo Lateral definido por la Ecuación (5.37).
2. Determinar el Momento Equivalente Plástico definido por la Ecuación (5.38).
3. Determinar el Esfuerzo Equivalente mediante la Ecuación (5.42).
4. Con la norma o código correspondiente, determinar el factor de reducción por pandeo lateral χ_{LT} correspondiente al elemento de sección uniforme sometido al Momento Equivalente.
5. Aplicando la Ecuación (5.47), obtener el factor de reducción modificado χ_{LT}^* que permite obtener la resistencia del elemento según la Ecuación (5.46).

A continuación se muestra el modo de proceder para cada norma.

5.3.1 Aplicación a la norma americana

Tal y como se expuso en el Capítulo 2, la norma americana define la resistencia nominal a flexión en función de la longitud no arriostrada L_b y su comparación con dos longitudes, L_p y L_r , que definen los límites de la resistencia plástica y del pandeo elástico, respectivamente, tal y como se representa en la Figura 2.2, que para facilitar la lectura se reproduce en la Figura 5.9.

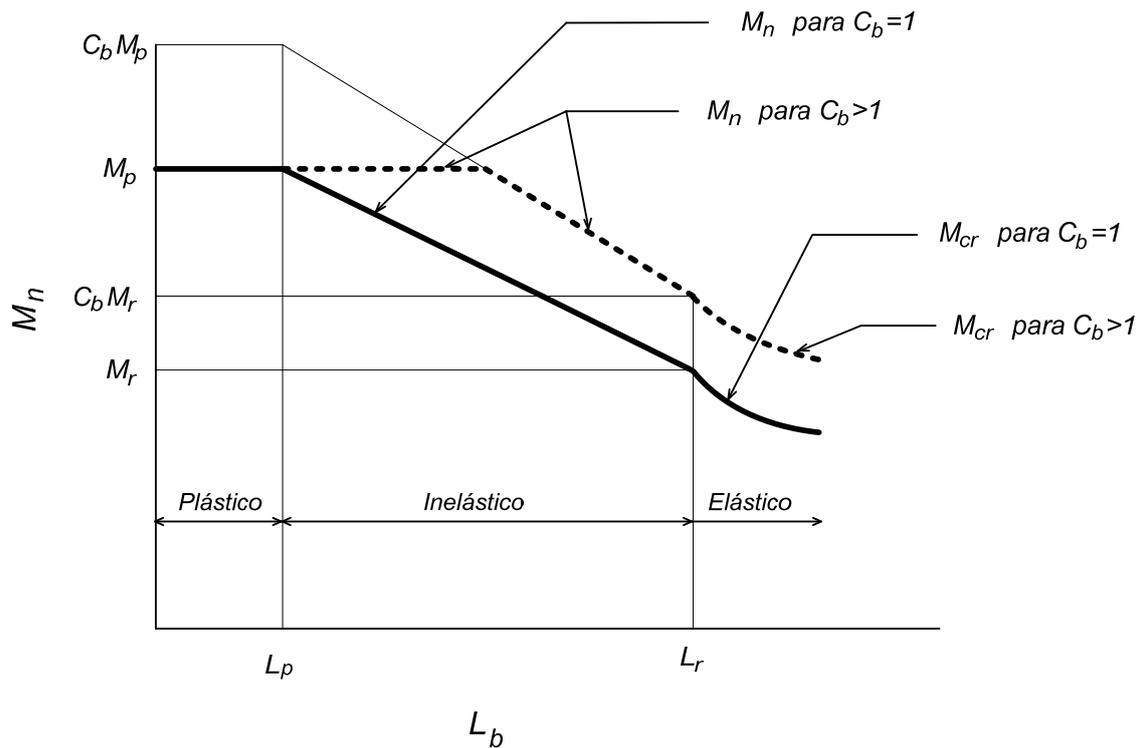


Figura 5-9 Variación del momento nominal según la norma americana

Para $L_b > L_r$, la resistencia viene dada por el valor del momento crítico, M_{cr} . Para el estado límite de fluencia, es decir para $L_b < L_p$, la resistencia correspondería a la resistencia plástica de la sección, M_p . Finalmente, para el pandeo inelástico, es decir $L_p < L_b \leq L_r$, la forma americana realiza una simple interpolación lineal, tal y como se puede ver en la Figura 5-9.

La aplicación del método propuesto a la norma americana implica determinar, en primer lugar, los valores de las longitudes L_p y L_r utilizando la viga equivalente, es decir, la viga de sección uniforme sometida al Momento Equivalente. El coeficiente C_b , correspondiente a la distribución de momento no uniforme dado por el Momento Equivalente, puede determinarse utilizando la expresión proporcionada por la norma americana o mediante la nueva ecuación proporcionada por la tesis, que se ha demostrado más precisa. Con los valores de L_p , L_r y C_b la Figura 5.9 de forma indirecta nos proporciona el factor de reducción por pandeo lateral $\chi_{LT} = \frac{M_n}{M_p}$. A partir de χ_{LT} puede obtenerse el factor

de reducción modificado mediante la Ecuación (5.47) y, a partir de él, la condición

de resistencia, definida por la Ecuación (5.46), correspondiente al diagrama de momento flectores original.

5.3.2 Aplicación a la norma europea

La aplicación a la norma europea del nuevo procedimiento descrito en este apartado es similar a la descrita para el caso de elementos sometidos a compresión.

A partir de la esbeltez λ_{LTE} , correspondiente a la viga de sección uniforme sometida al Momento Equivalente, y de la curva de pandeo lateral aplicable, se obtiene el valor del factor de reducción por pandeo lateral, χ_{LT} , que será utilizado para determinar el factor modificado χ_{LT}^* , y con él la condición de resistencia.

Utilizando los mismos valores de los coeficientes α y β ajustados con el caso de compresión, la Figura 5.10 presenta la comparación de los resultados obtenidos con el nuevo método, para una distribución uniforme de momento, y los obtenidos por Marques (Marques, 2012) utilizando un análisis tipo GMNIA. Los resultados corresponden a la sección 100x10.

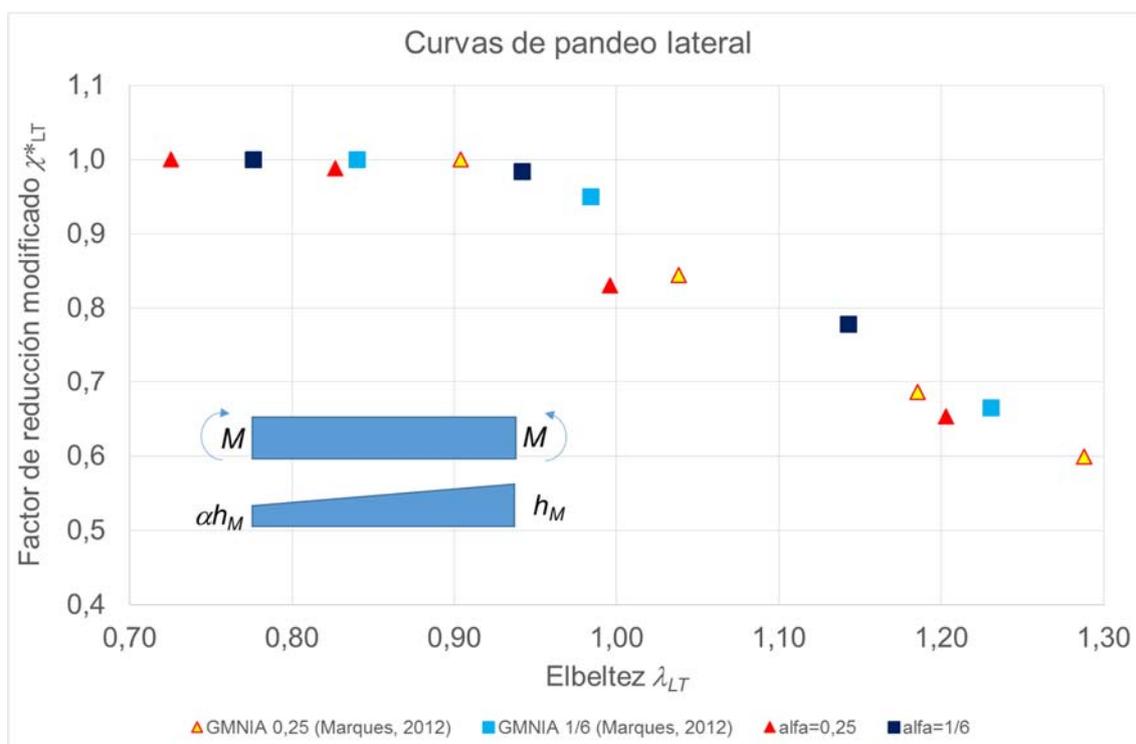


Figura 5-10 Comparación de resultados en flexión uniforme (Sección 100x10)

Por otra parte, a modo de ejemplo ilustrativo, las Tablas 5.3 y 5.4, y la Figura 5.11 presentan los resultados obtenidos para el caso de una distribución de momento flector uniforme actuando sobre una viga en I, de sección variable, con la altura del alma variando linealmente. La variación de la altura de la sección es definida, como en casos anteriores, por el parámetro α . La sección menor es la ya definida 100x10, siendo la curva de pandeo b ($\alpha=0,34$) la utilizada y 275MPa la tensión de fluencia del material.

λ_{LT}	L																					
	α	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	2	3	4	5	7	10	15	20	25	30	35	40
1	0,00	0,12	0,20	0,26	0,32	0,38	0,43	0,47	0,51	0,56	0,71	0,83	0,94	1,12	1,34	1,64	1,90	2,12	2,32	2,51	2,68	2,85
0,8	0,00	0,11	0,19	0,25	0,31	0,36	0,41	0,46	0,50	0,55	0,70	0,82	0,93	1,10	1,32	1,62	1,88	2,10	2,30	2,48	2,65	2,82
0,6	0,00	0,11	0,17	0,24	0,29	0,35	0,39	0,44	0,48	0,53	0,68	0,80	0,91	1,08	1,30	1,60	1,85	2,06	2,26	2,44	2,61	2,77
0,4	0,00	0,10	0,16	0,21	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45	0,50	0,65	0,77	0,88	1,05	1,26	1,55	1,79	2,00	2,20	2,37	2,54	2,69
0,2	0,00	0,08	0,13	0,18	0,22	0,27	0,31	0,35	0,38	0,44	0,58	0,70	0,80	0,97	1,17	1,44	1,67	1,87	2,05	2,22	2,37	2,51

Tabla 5-3 Valor de la esbeltez λ_{LT} en función de L y α (momento uniforme)

χ^*_{LT}	L																					
	α	0	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	2	3	4	5	7	10	15	20	25	30	35	40
1	1,00	1,00	1,00	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,88	0,85	0,78	0,70	0,64	0,53	0,41	0,30	0,23	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11
0,8	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98	0,96	0,94	0,91	0,82	0,74	0,68	0,56	0,44	0,31	0,24	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12
0,6	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,89	0,81	0,73	0,61	0,47	0,34	0,26	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12
0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,91	0,83	0,70	0,54	0,39	0,30	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14
0,2	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,91	0,72	0,51	0,40	0,32	0,27	0,23	0,20	0,18

Tabla 5-4 Valor del factor χ^*_{LT} en función de L y α (momento uniforme)

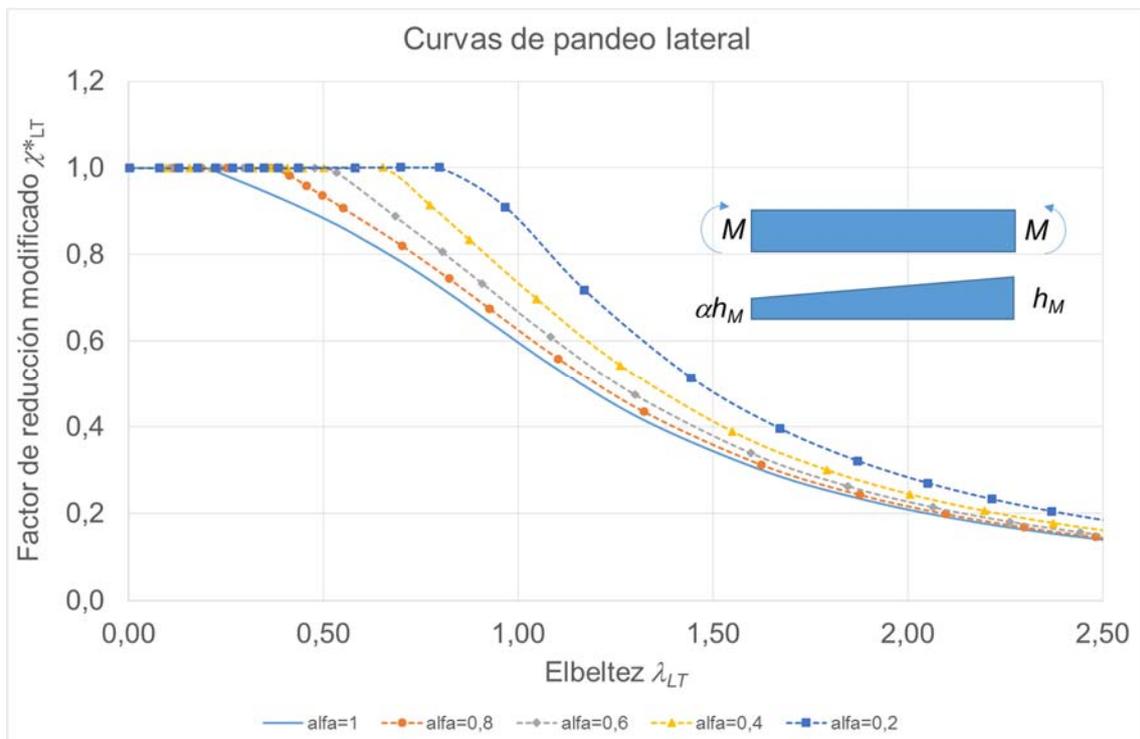


Figura 5-11 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (Sección 100x10 con momento uniforme)

Al igual que en el caso de elementos sometidos a compresión, el incremento de la resistencia con la variación de sección es mejor observado mediante la variación del factor de reducción modificado con respecto de la esbeltez del elemento de sección constante, igual a la menor, es decir λ_{LT0} , presentado en la Figura 5.12. Puede observarse que la resistencia al pandeo elástico se incrementa con el gradiente de variación de sección, llegando a representar más del 70% para un alfa igual a 0,2 y valores de la esbeltez en el entorno de 1,5.

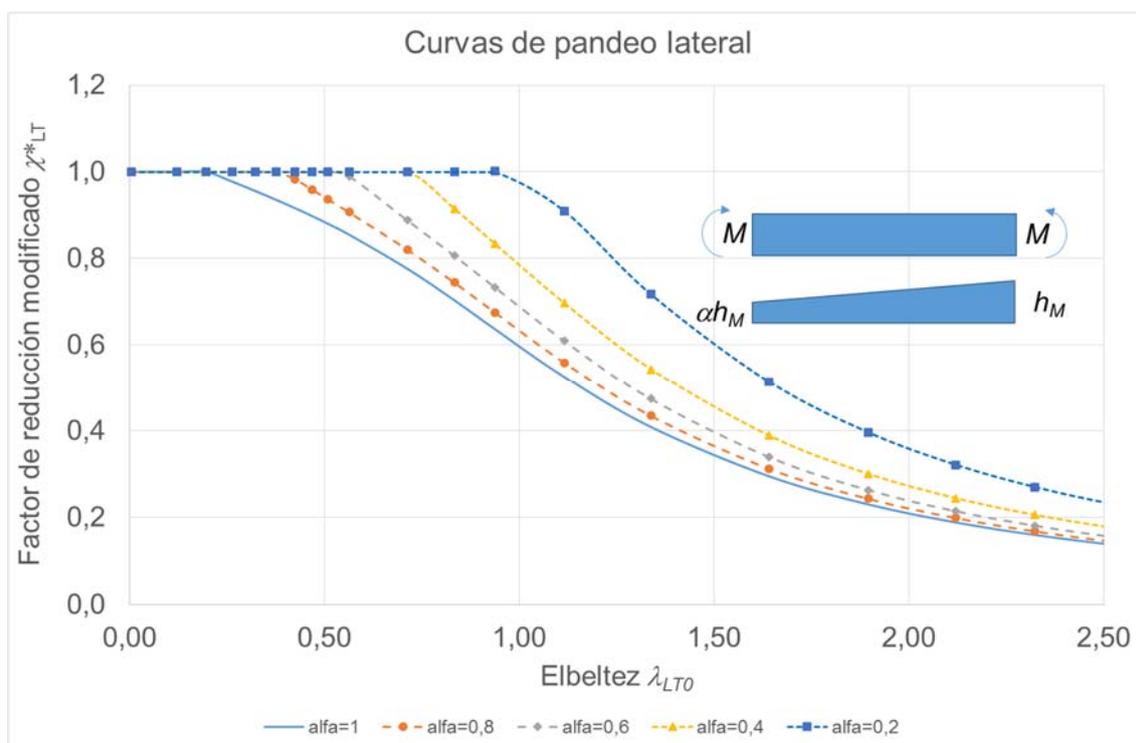


Figura 5-12 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento uniforme)

Por su parte, y para la misma sección, las Tablas 5.5 y 5.6 y las Figuras 5.13 y 5.14 presentan los resultados correspondientes a una viga de sección y

momento linealmente variables, con la variación definida por el mismo parámetro α .

λ_{LT}	L																																		
α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	19	21	23	25	27	30	35											
1	0,00	0,35	0,56	0,71	0,83	0,94	1,03	1,12	1,19	1,27	1,34	1,40	1,47	1,53	1,59	1,64	1,75	1,85	1,94	2,03	2,12	2,20	2,32	2,51											
0,8	0,00	0,32	0,52	0,67	0,78	0,88	0,97	1,05	1,12	1,19	1,26	1,32	1,38	1,44	1,49	1,54	1,64	1,74	1,83	1,91	1,99	2,07	2,18	2,36											
0,6	0,00	0,28	0,48	0,61	0,72	0,81	0,90	0,97	1,04	1,11	1,17	1,23	1,28	1,33	1,38	1,43	1,53	1,61	1,70	1,78	1,85	1,93	2,03	2,19											
0,4	0,00	0,24	0,42	0,54	0,65	0,73	0,81	0,88	0,94	1,00	1,06	1,11	1,16	1,21	1,26	1,30	1,39	1,47	1,54	1,62	1,68	1,75	1,85	1,99											
0,2	0,00	0,18	0,32	0,44	0,53	0,61	0,68	0,74	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99	1,04	1,08	1,12	1,19	1,26	1,32	1,39	1,45	1,50	1,59	1,71											

Tabla 5-5 Valor de la esbeltez λ_{LT} en función de L y α (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)

χ^*_{LT}	L																																		
α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	19	21	23	25	27	30	35											
1	1,00	0,95	0,85	0,78	0,70	0,64	0,58	0,53	0,48	0,44	0,409	0,38	0,355	0,332	0,313	0,295	0,265	0,241	0,22	0,203	0,189	0,176	0,16	0,139											
0,8	1,25	1,18	1,05	0,94	0,84	0,76	0,68	0,62	0,57	0,52	0,478	0,444	0,413	0,387	0,363	0,342	0,307	0,278	0,254	0,234	0,217	0,202	0,183	0,159											
0,6	1,67	1,56	1,35	1,19	1,06	0,94	0,84	0,76	0,69	0,63	0,579	0,535	0,497	0,464	0,435	0,409	0,365	0,33	0,301	0,277	0,256	0,238	0,216	0,187											
0,4	2,50	2,32	1,95	1,66	1,43	1,26	1,11	0,99	0,89	0,81	0,742	0,682	0,631	0,587	0,549	0,515	0,458	0,413	0,375	0,344	0,318	0,295	0,267	0,23											
0,2	5,00	4,63	3,66	2,91	2,40	2,03	1,75	1,53	1,35	1,21	1,098	1,002	0,921	0,851	0,792	0,74	0,653	0,585	0,53	0,484	0,445	0,412	0,371	0,319											

Tabla 5-6 Valor del factor χ^*_{LT} en función de L y α (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)

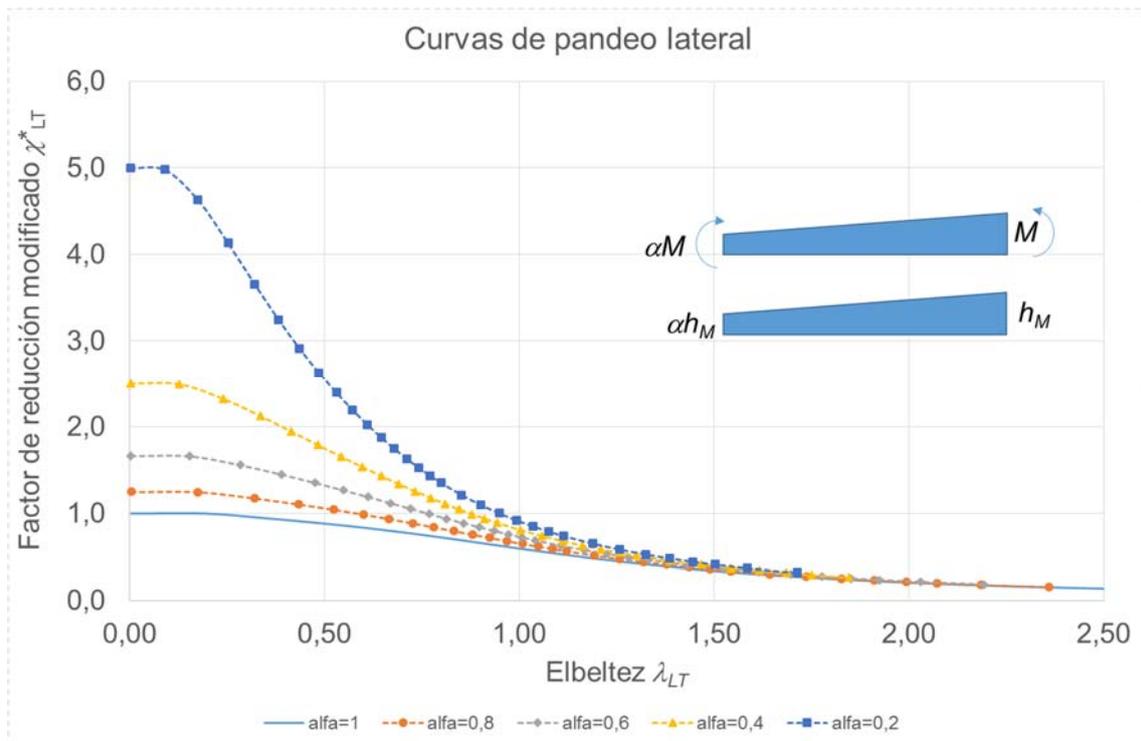


Figura 5-13 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (IPE300 con momento proporcional al canto)

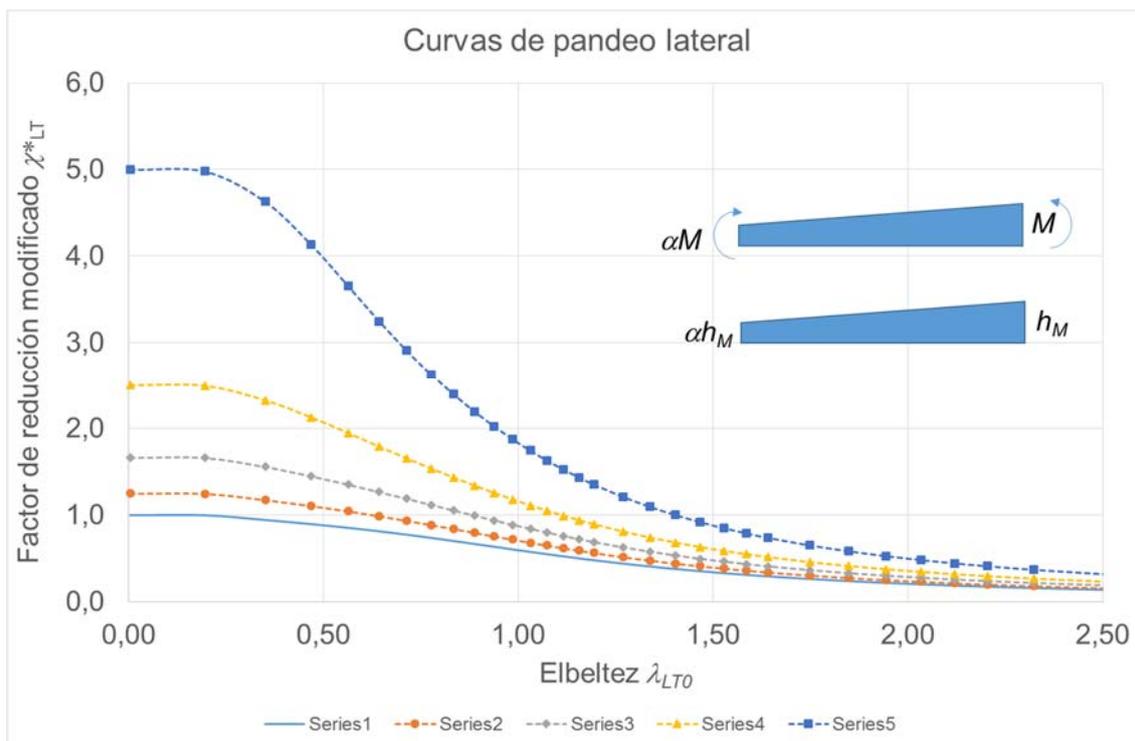


Figura 5-14 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LTO} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)

Dado que el factor de reducción está referido a la resistencia plástica de la sección con menor módulo resistente, el límite del factor de reducción viene dado en este caso no por el valor 1, sino por $1/\alpha$.

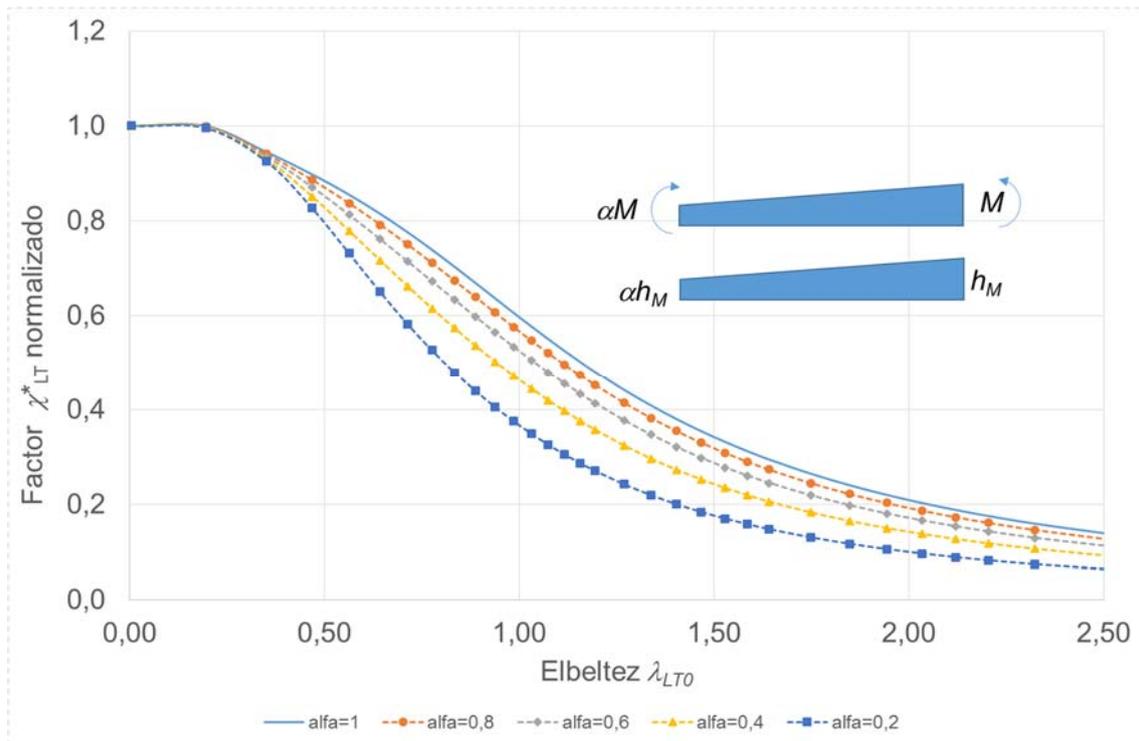


Figura 5-15 Factor de reducción modificado normalizado en función de λ_{LTO} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)

Las Figuras 5.15 y 5.16 presentan la variación de resistencia debida a la sección variable, cuando el momento flector varía con la altura de la sección. En la Figura 5.15, donde se ha normalizado el factor de reducción modificado, puede comprobarse que, en términos generales, las curvas de pandeo empeoran ligeramente con el gradiente de sección. Esa variación es más evidente en la Figura 5.16, donde se presenta la variación del factor respecto del valor para la sección uniforme. Puede comprobarse que la variación de resistencia relativa disminuye significativamente para valores de la esbeltez del elemento uniforme superiores a 0,50.

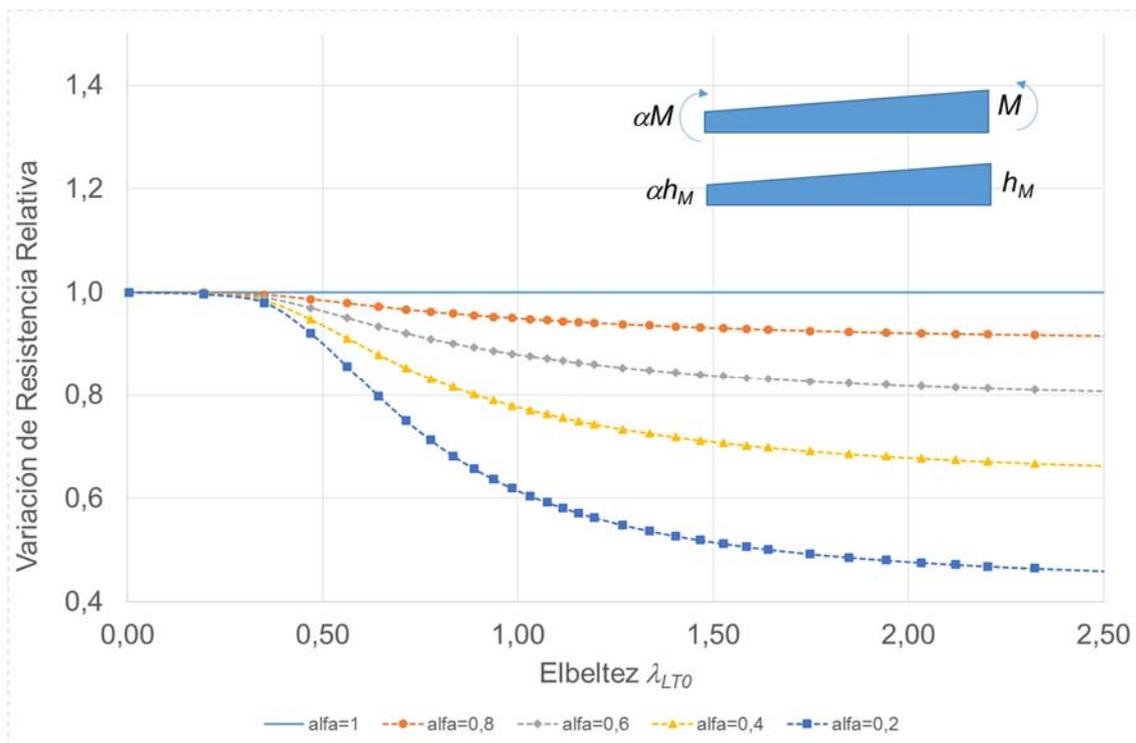


Figura 5-16 Variación de la resistencia relativa en función de λ_{LTO} (Sección 100x10 con momento proporcional al canto)

Si el momento flector varía proporcionalmente a la resistencia de la sección, es decir, a los módulos resistentes, los resultados que se obtiene son ligeramente diferentes, como puede comprobarse con las Figuras 5.17 a 5.20.

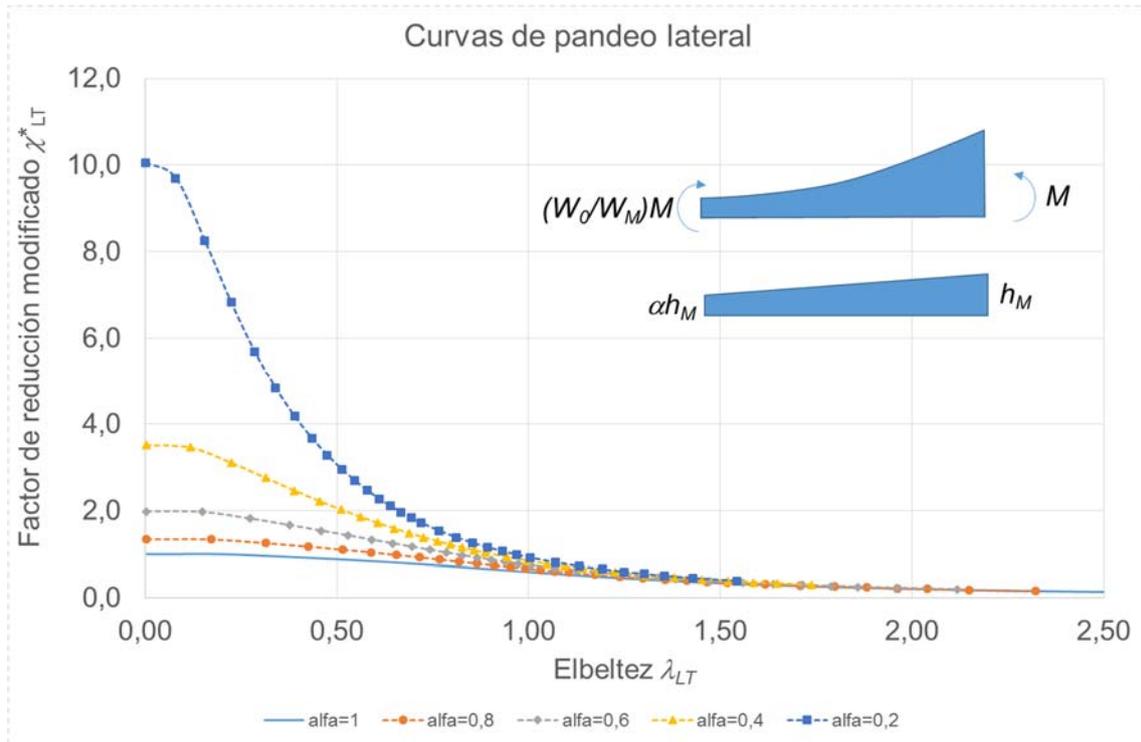


Figura 5-17 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT} (IPE300 con momento proporcional al módulo resistente)

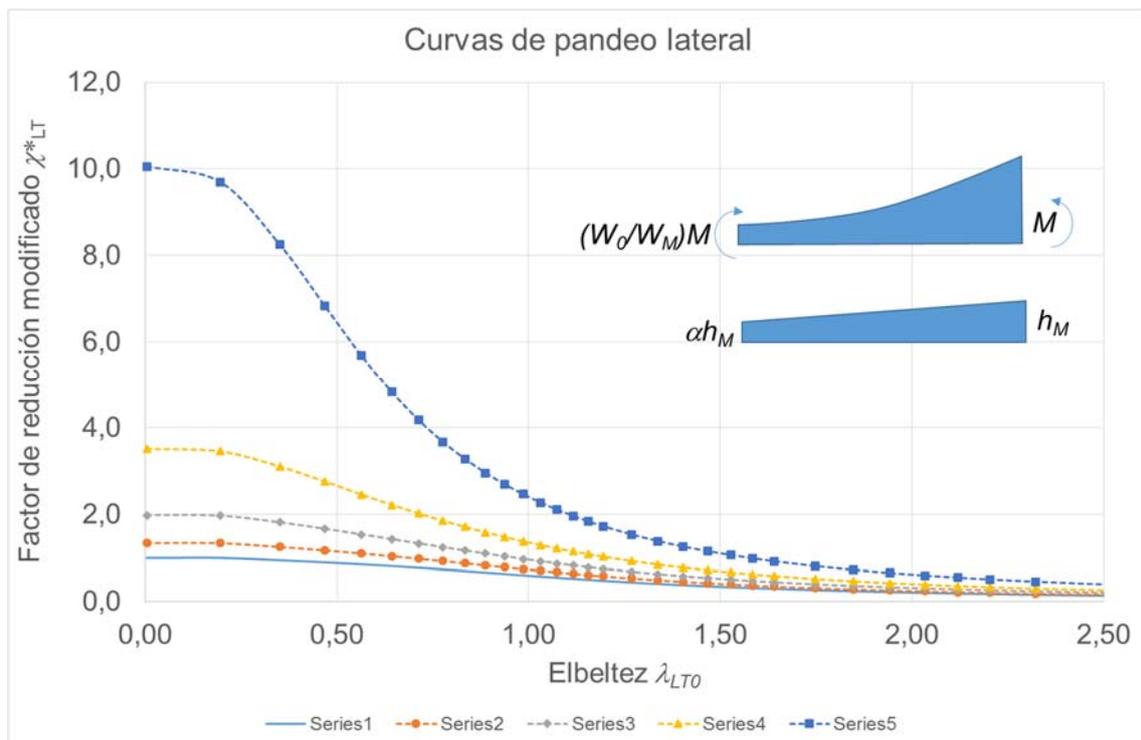


Figura 5-18 Curvas de pandeo lateral en función de λ_{LT0} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente)

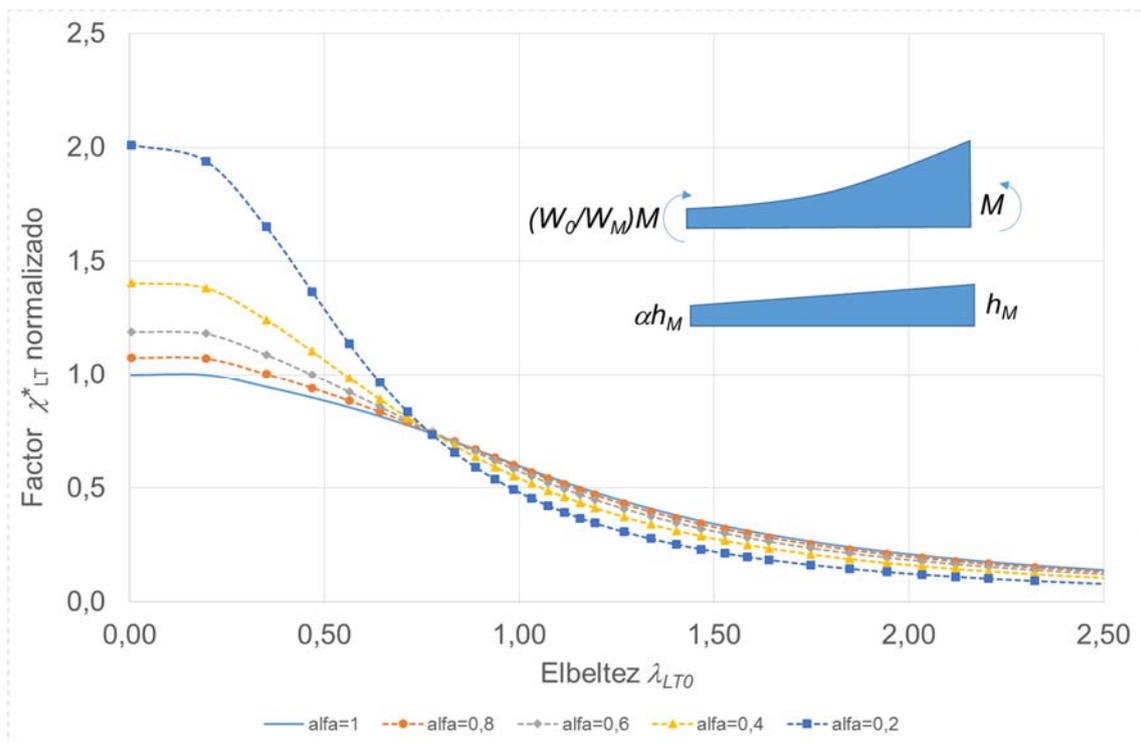


Figura 5-19 Factor de reducción modificado normalizado en función de λ_{LTO} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente)

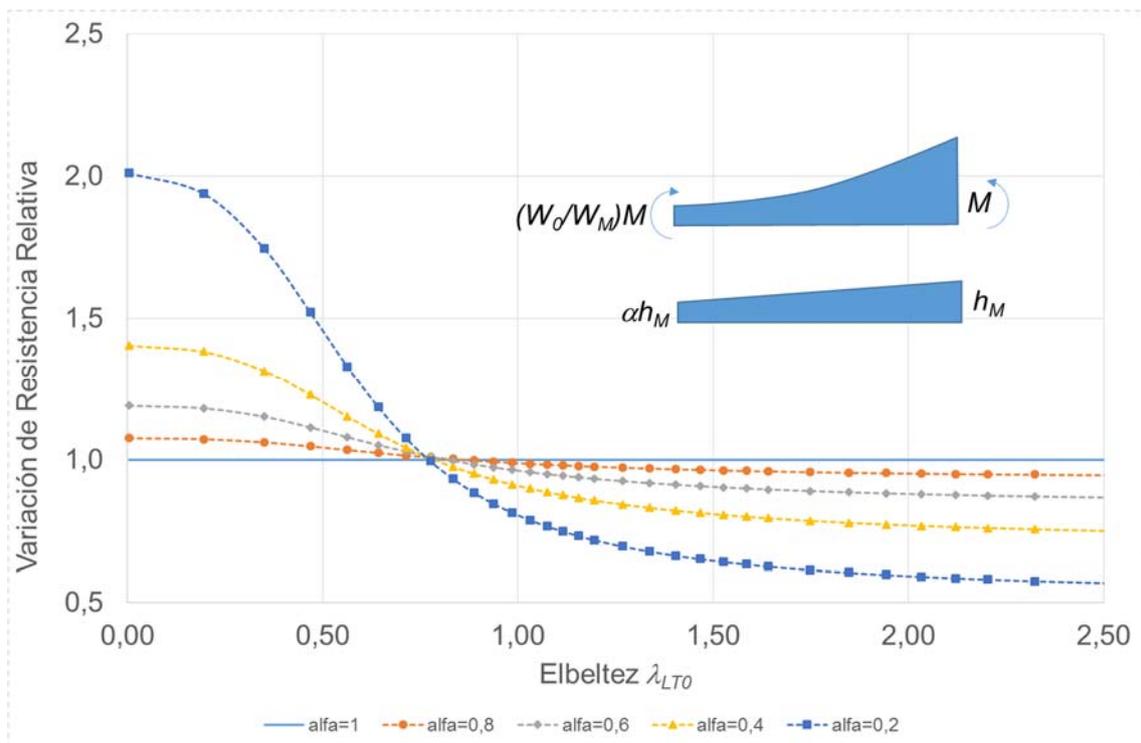


Figura 5-20 Variación de la resistencia relativa en función de λ_{LTO} (Sección 100x10 con momento proporcional al módulo resistente)

Como puede comprobarse en la Figura 20, es significativo que la variación de la sección tiene un efecto positivo para esbelteces pequeñas, que desaparece al aumentar la esbeltez, siendo negativo para esbelteces superiores a 0,8.

5.3.3 Aplicación a la norma británica

En la norma británica el momento flector máximo está limitado por la resistencia plástica de la sección y por la resistencia a pandeo lateral, tal y como se recogió en el Capítulo 2. La resistencia a pandeo lateral queda definida por la tensión de pandeo lateral f_b dada por

$$f_b = \frac{f_E f_y}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - f_E f_y}} \quad (5.48)$$

con

$$f_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{LTE}^2} \quad (5.49)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{LT} &= \frac{f_y + (\eta_{LT} + 1)f_E}{2} \\ \eta_{LT} &= \frac{\alpha_{LT}(\lambda_{LTE} - \lambda_{L0})}{1000} \quad \eta \geq 0 \\ \lambda_{L0} &= 0,4 \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_y}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

y α_{LT} es 0,7.

Con ello, el factor de reducción por pandeo lateral χ_{LT} puede expresarse como

$$\chi_{LT} = \frac{f_E}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - f_E f_y}} \quad (5.51)$$

Con lo que el factor de reducción modificado χ_{LT}^* quedaría

$$\chi_{LT}^* = \frac{M_M}{M_{EM}} \frac{f_E}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - f_E f_y}} \quad (5.52)$$

5.3.4 Ejemplos de aplicación

Presentamos en este apartado la aplicación del método propuesto a casos publicados en la literatura de referencia.

a) Ejemplo 1 (Bradford,1988)

El primer caso corresponde al elemento de sección variable definido en la Figura 5.21, con una variación lineal de la altura del alma, sometido a un momento flector variable. El material tiene una tensión de fluencia igual 275MPa.

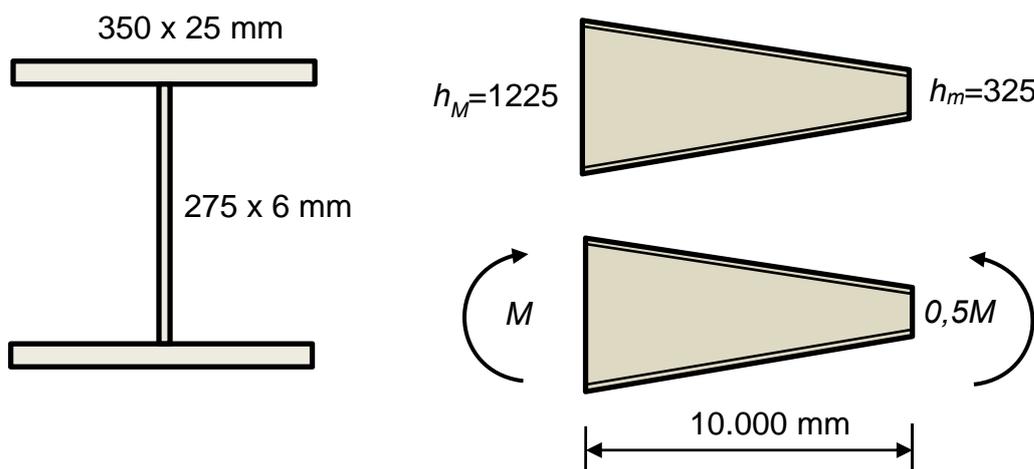


Figura 5-21 Ejemplo de Bradford (1988)

Siguiendo el procedimiento expuesto, y tomando como secciones de referencia las correspondientes a $x=0, L/4, L/2, 3L/4, L$, se obtienen en primer lugar los siguientes valores para los coeficientes $n(x)$ y $m(x)$

n0	n1	n2	n3	n4
1,0000	0,5511	0,3725	0,2770	0,2178

m0	m1	m2	m3	m4
1,0000	0,8259	0,6788	0,5668	0,4827

A partir de los coeficientes $n(x)$ y $m(x)$, y teniendo en cuenta el diagrama de momentos flectores, los Momentos Equivalentes $\hat{M}(x)$ y $M_p(x)$ valdrán

M_{p0}	M_{p1}	M_{p2}	M_{p3}	M_{p4}
0,5000M	0,3445M	0,2749M	0,2424M	0,2178M

\hat{M}_0	\hat{M}_1	\hat{M}_2	\hat{M}_3	\hat{M}_4
0,5000M	0,5162M	0,5091M	0,496M	0,4827M

A partir de los valores de \hat{M}_i podemos obtener el valor del coeficiente de momento uniforme equivalente \hat{C}_{LT} , que vendrá dado por

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21 \times (0,5162M)^2}{5 \times (0,5162M)^2 + 10 \times (0,5091M)^2 + 5 \times (0,496)^2 + (0,5162M)^2}} = 1,016$$

Con ello, el Momento Equivalente de Pandeo Lateral será

$$M_b = \frac{\hat{M}_M}{\hat{C}_{LT}} = 0,5081M$$

Por otra parte, la esbeltez λ_{LT0} viene dada por

$$\lambda_{LT0} = \sqrt{\frac{f_y W_m}{M_{cm}}} = \sqrt{\frac{(275 \times 10^6) \times (2,7384 \times 10^{-3})}{1,2269 \times 10^6}} = 0,7835$$

Una vez calculada la esbeltez, el Momento Equivalente en cada punto, resultante de aplicar la Ecuación (5.42), proporciona los siguientes resultados

M_{E0}	M_{E1}	M_{E2}	M_{E3}	M_{E4}
0,5039M	0,4229M	0,3890M	0,3697M	0,3570M

donde M es el momento flector actuante en el extremo mayor. El máximo momento equivalente se presenta en $x=0$.

Aplicando a continuación la norma europea, con un factor de imperfección $\alpha=0,49$, el factor de reducción χ_{LT} resulta ser igual a 0,7229, con lo que el factor de reducción modificado vendrá dado por

$$\chi_{LT}^* = \frac{M_M}{M_{EM}} \chi_{LT} = \frac{M}{0,5039M} \times 0,7229 = 1,4346$$

Con lo que resulta

$$M_n = 1,4346W_m f_y = 1,4346 \times (2,7384 \times 10^{-3}) \times (275 \times 10^6) = 1.080 kNm$$

Bradford (1988) proporciona varios resultados:

- Norma británica exacta: $1.079 kNm$
- Norma australiana exacta: $1.284 kNm$
- Norma británica aproximada con su método: $1.394 kNm$
- Norma australiana aproximada con su método: $1.396 kNm$

El resultado proporcionado por el método propuesto en esta tesis se encuentra entre los valores conservadores, frente a los resultados del método de Bradford, que no quedan del lado de la seguridad.

b) Ejemplo 2 (Marques, 2012)

El segundo caso tomado, Marques (2012), corresponde a un elemento de sección variable, en el que la menor sección tiene las dimensiones de un IPE200, con un gradiente de altura de sección y de momento flector definido en la Figura 5.22, con una variación lineal de la altura del alma, sometido a un momento flector variable. El material tiene una tensión de fluencia igual $235 MPa$.

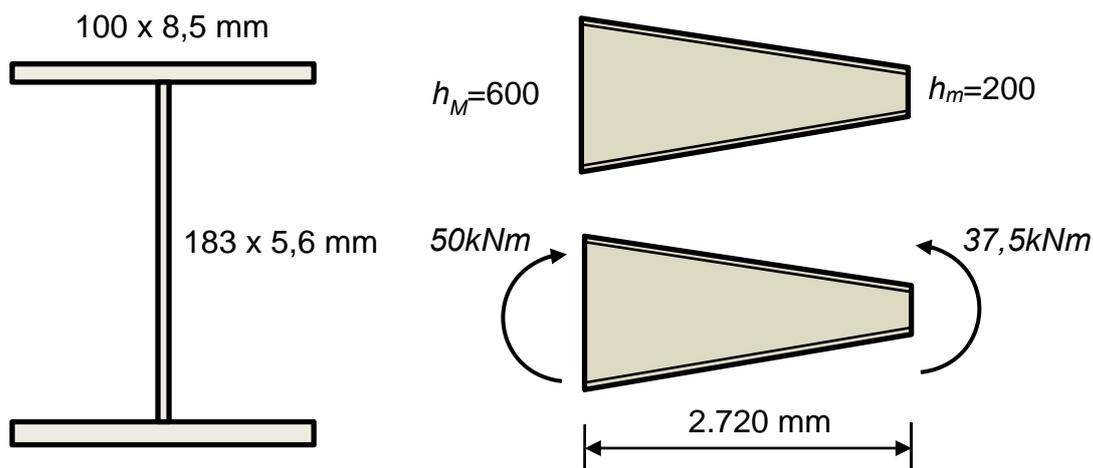


Figura 5-22 Ejemplo de Marques (2012)

Siguiendo el procedimiento descrito los valores de los coeficientes $n(x)$ y $m(x)$ resultan ser

n0	n1	n2	n3	n4
1,0000	0,5826	0,3896	0,2817	0,2142

m0	m1	m2	m3	m4
1,0000	0,7740	0,6221	0,5167	0,4405

Con lo que, teniendo en cuenta la distribución de momento flector, los Momentos Equivalentes $\hat{M}(x)$ y $M_p(x)$, en unidades del SI, valdrán

M_{p0}	M_{p1}	M_{p2}	M_{p3}	M_{p4}
37.500	23.666	17.045	13.203	10.712

\hat{M}_0	\hat{M}_1	\hat{M}_2	\hat{M}_3	\hat{M}_4
37.500	31.444	27.216	24.222	22.025

El valor del coeficiente de momento uniforme equivalente \hat{C}_{LT} resulta ser

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21 \times 37.500^2}{5 \times 31.444^2 + 10 \times 27.216^2 + 5 \times 24.222^2 + 37.500^2}} = 1,3302$$

Con ello, el Momento Equivalente de Pandeo Lateral será

$$M_b = \frac{\hat{M}_M}{\hat{C}_{LT}} = 28.191 \text{ Nm}$$

La esbeltez λ_{LT0} del elemento de sección uniforme igual a la menor será

$$\lambda_{LT0} = \sqrt{\frac{f_y W_m}{M_{cm}}} = \sqrt{\frac{(235 \times 10^6) \times (2,0966 \times 10^{-4})}{5,6894 \times 10^4}} = 0,9306$$

Con ello, el Momento Equivalente en cada punto, resultante de aplicar la Ecuación (5.42), proporciona los siguientes resultados

M_{E0}	M_{E1}	M_{E2}	M_{E3}	M_{E4}
32.241	26.223	23.343	21.672	20.589

Con esta distribución de valores del Momento Equivalente, la aplicación de la norma europea, con un factor de imperfección $\alpha=0,49$, el factor de

reducción χ_{LT} resulta ser igual a 0,6585, con lo que el factor de reducción modificado vendrá dado por

$$\chi_{LT}^* = \frac{M_M}{M_{EM}} \chi_{LT} = \frac{50.000}{32.241} \times 0,6586 = 1,0214$$

Con lo que el momento resistente de pandeo lateral resulta ser igual a

$$M_{b,Rd} = 1,0214 W_m f_y = 1,0214 \times (2,0966 \times 10^{-4}) \times (235 \times 10^6) = 50.324 Nm$$

Marques (2012) proporciona el resultado “exacto” obtenido con GMNIA, que resulta ser de 58.400 Nm, lo que representa un error del 16%, por el lado de la seguridad, del método propuesto.

5.4 RESISTENCIA DE LOS ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXO-COMPRESIÓN

Una vez presentado el método propuesto para el análisis de los elementos sometidos a compresión y a flexión, en este apartado se presenta su extensión a los elementos sometidos a flexo-compresión.

La Figura 5-23 presenta el elemento estructural de sección variable y los diagramas de esfuerzos axiles y momentos flectores.

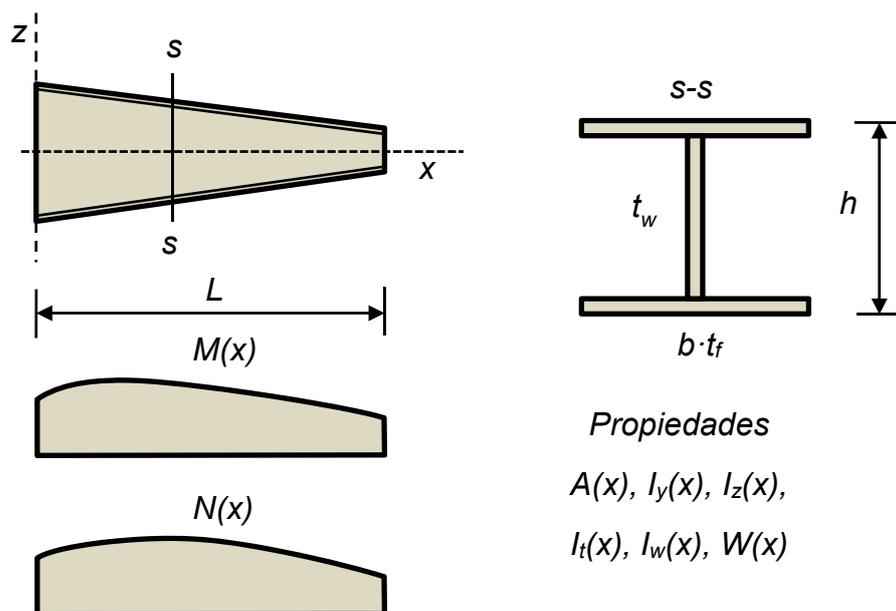


Figura 5-23 Elemento de sección y diagramas de esfuerzos variables

Siguiendo el procedimiento descrito en los apartados anteriores, el elemento original es sustituido por un elemento de sección constante cuyas propiedades resistentes fundamentales -área, momentos de inercia y módulos resistentes respecto de los ejes y y z , constantes de torsión y alabeo- son iguales a las menores del elemento de sección variable, tal y como se muestra en la Figura 5-24.

A continuación, el diagrama de esfuerzo axial es transformado en los diagramas equivalentes. En primer lugar se obtendrán los esfuerzos $\hat{N}_y(x)$ y $\hat{N}_z(x)$, que vendrán dados por

$$\begin{aligned}\hat{N}_y(x) &= c_y(x) N(x) \\ \hat{N}_z(x) &= c_z(x) N(x)\end{aligned}\quad (5.53)$$

donde los coeficientes de equivalencia, $c(x)$, vendrán dados por

$$\begin{aligned}c_y(x) &= \frac{I_{ym}^{0,3} \left(\frac{I_{y1}^{0,3} I_{y2}^{0,15} I_{y3}^{0,3}}{I_y(x)^{0,3}} \right)}{I_{yM}^{0,75}} \\ c_z(x) &= \frac{I_{zm}^{0,3} \left(\frac{I_{z1}^{0,3} I_{z2}^{0,15} I_{z3}^{0,3}}{I_z(x)^{0,3}} \right)}{I_{zM}^{0,75}}\end{aligned}\quad (5.54)$$

donde los subíndices m y M hacen referencia al menor y mayor valor, y los valores 1, 2 y 3 a las propiedades de las secciones correspondientes a $1/4$, $1/2$ y $3/4$ de la luz.

A partir de los diagramas $\hat{N}_y(x)$ y $\hat{N}_z(x)$, se obtienen los coeficientes de esfuerzos uniformes equivalentes, \hat{C}_y y \hat{C}_z , dados por

$$\begin{aligned}\hat{C}_y &= \frac{21\hat{N}_{yM}}{4(\hat{N}_{y0} + \hat{N}_{y4}) + 6(\hat{N}_{y1} + \hat{N}_{y3}) + \hat{N}_{yM}} \\ \hat{C}_z &= \frac{21\hat{N}_{zM}}{4(\hat{N}_{z0} + \hat{N}_{z4}) + 6(\hat{N}_{z1} + \hat{N}_{z3}) + \hat{N}_{zM}}\end{aligned}\quad (5.55)$$

Con ello y en relación con el pandeo elástico, el elemento de sección variable sometido a un axil variable, puede ser sustituido por un elemento de sección

constante, igual a la menor, sometido a sendos esfuerzos axiales uniformes N_{by} y N_{bz} , que denominaremos Esfuerzos Equivalentes de Pandeo (Figura 5-24), de valor

$$N_{by} = \frac{\hat{N}_{yM}}{\hat{C}_y} \quad (5.56)$$

$$N_{bz} = \frac{\hat{N}_{zM}}{\hat{C}_z}$$

Por su parte, el Esfuerzo Equivalente Plástico vendrá dado por

$$N_p(x) = a(x)N(x) \quad (5.57)$$

donde el coeficiente de equivalencia, $a(x)$, viene dado por

$$a(x) = \frac{A_m}{A(x)} \quad (5.58)$$

siendo A_m el área de la menor sección.

Con ello, el Esfuerzo Equivalente para el elemento de sección constante, definido a partir de los Esfuerzos Equivalentes Plástico y de Pandeo, vendrá dado por

$$N_{Ey}(x) = k_{cy}N_p(x) + (1 - k_{cy})N_{by} \quad (5.59)$$

$$N_{Ez}(x) = k_{cz}N_p(x) + (1 - k_{cz})N_{bz}$$

donde los coeficientes k_{cy} y k_{cz} se obtendrán mediante las ecuaciones

$$k_y = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_{y0}^\beta} \quad (5.60)$$

$$k_z = \frac{1}{1 + \alpha\lambda_{z0}^\beta}$$

con

$$\lambda_{y0} = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{crmy}}} \quad (5.61)$$

$$\lambda_{z0} = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{crnz}}}$$

siendo

$$N_{cmy} = \frac{\pi^2 E I_{ym}}{L_y^2}$$
$$N_{cmz} = \frac{\pi^2 E I_{zm}}{L_z^2}$$
(5.62)

donde las longitudes L_y y L_z corresponden a las longitudes de pandeo correspondientes.

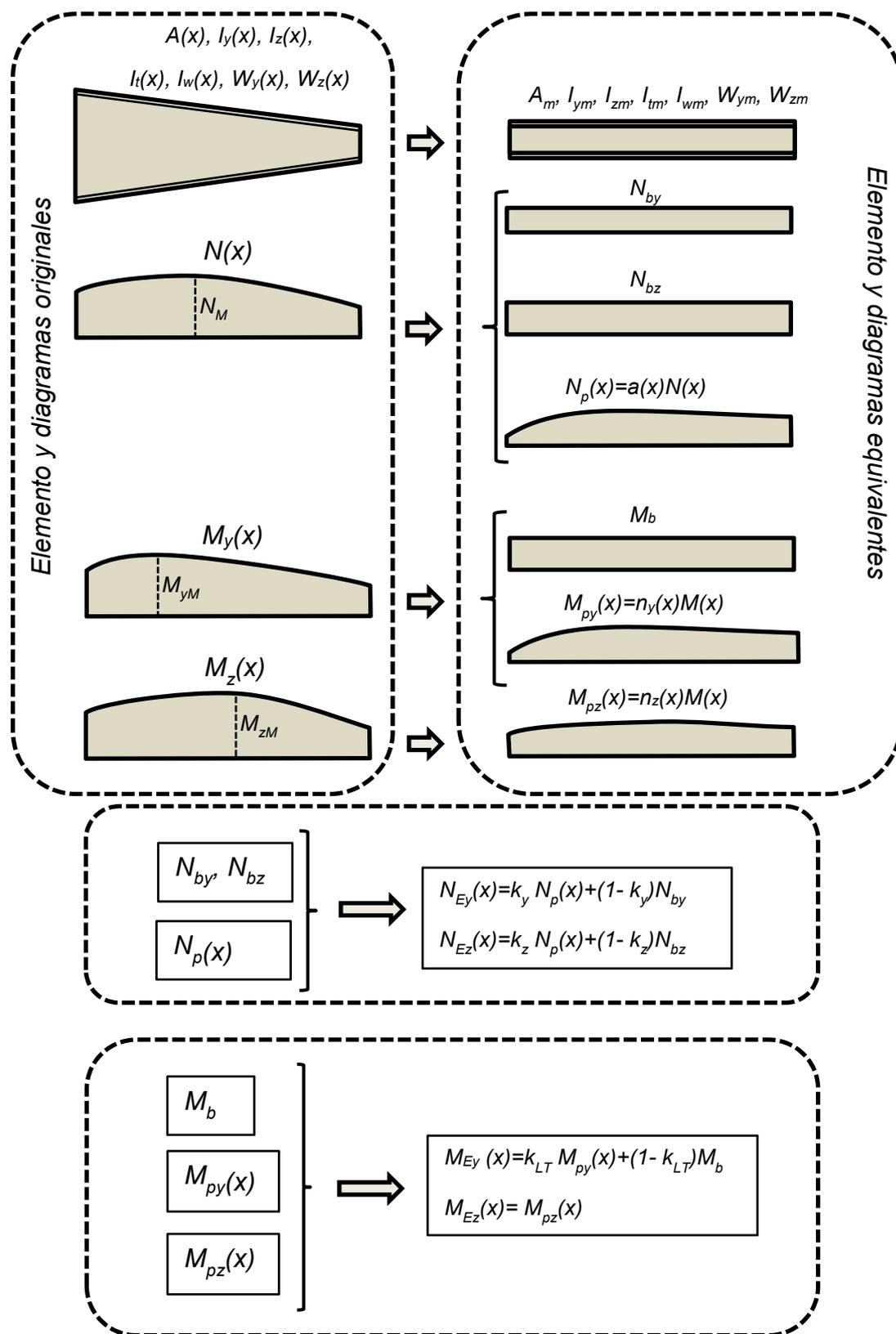


Figura 5-24 Elemento y esfuerzos originales y equivalentes

Por lo que hace referencia al diagrama de momentos, el Momento Equivalente de Pandeo Lateral, M_b , se obtendrá siguiendo el procedimiento descrito para los elementos sometidos a flexión en el Apartado 5.3.

Por otro lado, en lo que hace referencia al Momento Equivalente Plástico, su valor vendrá dado, para cada eje, por

$$\begin{aligned} M_{py}(x) &= n_y(x) M_y(x) \\ M_{pz}(x) &= n_z(x) M_z(x) \end{aligned} \quad (5.63)$$

con

$$\begin{aligned} n_y(x) &= \frac{W_{ym}}{W_y(x)} \\ n_z(x) &= \frac{W_{zm}}{W_z(x)} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Con ello, el Momento Equivalente correspondiente a la flexión respecto del eje y , sensible al pandeo lateral, vendrá dada por la expresión

$$M_{Ey}(x) = k_{LT} M_{py}(x) + (1 - k_{LT}) M_b(x) \quad (5.65)$$

En donde k_{LT} representa el coeficiente de interacción que se obtiene según la expresión

$$k_{LT} = \frac{1}{1 + \alpha \lambda_{LT0}^2} \quad (5.66)$$

con

$$\lambda_{LT0} = \sqrt{\frac{f_y W_{ym}}{M_{crm}}} \quad (5.67)$$

siendo

$$M_{crm} = \sqrt{\frac{\pi^2 E I_{zm} G I_{tm}}{L^2} + \frac{\pi^4 E I_{zm} E I_{wm}}{L^4}} \quad (5.68)$$

Por lo que a la flexión en z se refiere, el Momento Equivalente coincide con el Momento Equivalente Plástico, es decir

$$M_{Ez}(x) = M_{pz}(x) \quad (5.69)$$

Una vez determinados los Diagramas de Momentos Flectores y Esfuerzos Axiales Equivalentes, el criterio de resistencia podrá expresarse como

$$\frac{N_{Ey}}{\chi_y A_m f_y} + k_{yy} \frac{M_{Ey}}{\chi_{LT} W_{ym} f_y} + k_{yz} \frac{M_{Ez}}{W_{zm} f_y} \leq 1 \quad (5.70)$$

$$\frac{N_{Ez}}{\chi_z A_m f_y} + k_{zy} \frac{M_{Ey}}{\chi_{LT} W_{ym} f_y} + k_{zz} \frac{M_{Ez}}{W_{zm} f_y} \leq 1$$

donde k_{yy} , k_{yz} , k_{zy} y k_{zz} son los factores de interacción axil-flector, cuyo valor depende de la norma o código aplicable.

5.4.1 Ejemplo de aplicación

En este apartado se presenta la aplicación del método propuesto al caso de un elemento de sección variable analizado Kaehler et al. (2011), ya utilizado en los apartados anteriores y definido en la Figura 5-6, utilizando la norma americana. El elemento se supone sometido a un esfuerzo axial constante de 11,3 *kip* y un momento flector linealmente variable de 0 a 1.800 *kip.in*, siendo 1.120 *kip.in* el valor a 90 *in* de la base. Precisamente en este punto se supone que el elemento está arriostrado a efectos de pandeo según el eje débil y pandeo lateral, tal y como se indica esquemáticamente en la Figura 5-25.

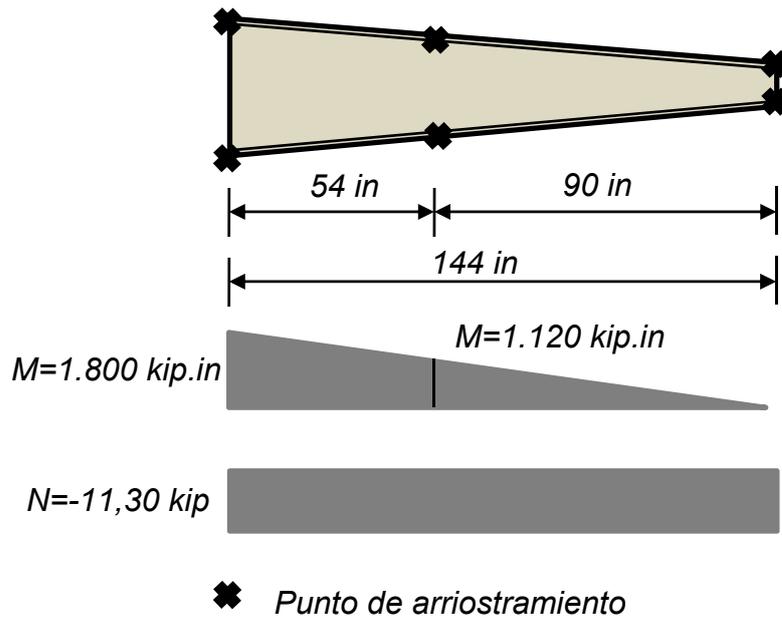


Figura 5-25 Datos del ejemplo de aplicación de Kaehler et al. (2011)

a) Resistencia a pandeo de flexión según el eje fuerte ($L=144''$)

Este caso ya ha sido analizado de forma genérica y descrito en el apartado 5.2.4. Para el caso de $N=11,3 \text{ kip}$, los Esfuerzos Equivalentes en kip serán

N_{E0}	N_{E1}	N_{E2}	N_{E3}	N_{E4}
10,489	9,620	8,894	8,276	7,741

De acuerdo con la norma americana, para el valor de esbeltez igual a 0,2705 obtenido en el apartado 5.2.4, el esfuerzo nominal y el esfuerzo resistente vendrán dados por

$$P_{ny} = 0,658^{0,2705^2} \times (0,615 \times 55) \times 4,5 = 147,62 \text{ kip}$$

$$P_{cy} = 0,9 \times 147,62 = 132,86 \text{ kip}$$

donde el coeficiente 0,9 corresponde al coeficiente parcial de seguridad.

Con ello,

$$\frac{N_{EyM}}{P_{cy}} = \frac{10,489}{132,86} = 0,0789$$

El valor obtenido por Kaehler et al. (2011) es de 0,0747. La diferencia es del 5,6%.

b) Resistencia a pandeo de flexión según el eje débil, tramo 1 ($L=90''$)

Siguiendo un procedimiento análogo al mostrado en el apartado 5.2.4, se obtienen los siguientes coeficientes

c0	c1	c2	c3	c4
0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

a0	a1	a2	a3	a4
1,0000	0,9505	0,9057	0,8649	0,8276

A partir de los coeficientes $c(x)$ se obtiene el valor del coeficiente de esfuerzo uniforme equivalente \hat{c} , que resulta ser igual a 1. Con ello, el Esfuerzo Equivalente de Pandeo resulta

$$N_b = \frac{0,9999 \times 11,30}{1} = 11,2989 \text{ kip}$$

Por otro lado, la esbeltez λ_0 viene dada por

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{cm}}} = \sqrt{\frac{55 \times 4,5}{318,09}} = 0,8821$$

Con ello, los Esfuerzo Equivalentes resultan

N_{E0}	N_{E1}	N_{E2}	N_{E3}	N_{E4}
11,300	11,041	10,808	10,595	10,400

Una vez obtenida la distribución equivalente de esfuerzos se procede a aplicar la norma americana, asumiendo que el elemento es de sección constante. Para la distribución de esfuerzos equivalentes resultan los siguientes valores

$$C_E = 1,0411$$

$$N_{Ecr} = 33117 \text{ kip}$$

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{Q f_y A_m}{N_{Ecr}}} = \sqrt{\frac{0,632 \times 55 \times 4,5}{33117}} = 0,6873$$

donde la tensión de fluencia del material, f_y , ha sido reducida, de acuerdo con la norma americana, con el coeficiente 0,632, para tener en cuenta la reducción de resistencia por pandeo local.

El esfuerzo nominal y el esfuerzo resistente vendrán dados por

$$P_{nz1} = 0,658^{0,6873^2} \times (0,632 \times 55) \times 4,5 = 128,36 \text{ kip}$$

$$P_{cz1} = 0,9 \times 128,36 = 115,52 \text{ kip}$$

Con ello,

$$\frac{N_{Ez1M}}{P_{cz1}} = \frac{11,3}{115,52} = 0,0978$$

El valor obtenido por Kaehler et al. (2011) es de 0,0903. La diferencia es del 8,3%.

c) Resistencia a pandeo de flexión según el eje débil, tramo 2 ($L=54''$)

Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, se obtienen los siguientes coeficientes

c0	c1	c2	c3	c4
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999

a0	a1	a2	a3	a4
1,0000	0,9748	0,9508	0,9280	0,9063

A partir de los coeficientes $c(x)$ se obtiene el valor del coeficiente de esfuerzo uniforme equivalente \hat{c} , que resulta ser igual a 1. Con ello, el Esfuerzo Equivalente de Pandeo resulta

$$N_b = \frac{11,30}{1} = 11,30 \text{ kip}$$

Por otro lado, la esbeltez λ_0 viene dada, para este tramo, por

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{f_y A_m}{N_{cm}}} = \sqrt{\frac{55 \times 5,4375}{883,70}} = 0,5817$$

Con ello, los Esfuerzo Equivalentes resultan

N_{E0}	N_{E1}	N_{E2}	N_{E3}	N_{E4}
11,300	11,111	10,931	10,760	10,597

Una vez obtenida la distribución equivalente de esfuerzos se procede a aplicar la norma americana, asumiendo que el elemento es de sección constante. Para la distribución de esfuerzos equivalentes resultan los siguientes valores

$$C_E = 1,0312$$

$$N_{Ecr} = 91\,129\text{kip}$$

$$\lambda_E = \sqrt{\frac{Qf_y A_m}{N_{Ecr}}} = \sqrt{\frac{0,572 \times 55 \times 5,4375}{91\,129}} = 0,4333$$

donde la tensión de fluencia del material, f_y , ha sido reducida, de acuerdo con la norma americana, con el coeficiente 0,572, para tener en cuenta la reducción de resistencia por pandeo local.

El esfuerzo nominal y el esfuerzo resistente vendrán dados por

$$P_{nz2} = 0,658^{0,4333^2} (0,572 \times 55) \times 5,4375 = 158,14\text{kip}$$

$$P_{cz2} = 0,9 \times 158,14 = 142,32\text{kip}$$

Con ello,

$$\frac{N_{Ez2}}{P_{cz2}} = \frac{11,3}{142,32} = 0,0794$$

El valor obtenido por Kaehler et al. (2011) es de 0,0795. La diferencia es del 0,1%.

d) Resistencia a pandeo lateral en el tramo 1 ($L=90''$)

Siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 5.3, se obtienen los siguientes coeficientes

n0	n1	n2	n3	n4
1,0000	0,8409	0,7204	0,6264	0,5511

m0	m1	m2	m3	m4
1,0000	0,8756	0,7783	0,7001	0,6361

A partir de los coeficientes y con la distribución de momentos flectores, se obtiene

Mp0	Mp1	Mp2	Mp3	Mp4
0,00	235,45	403,44	526,15	617,23

\hat{M}_0	\hat{M}_1	\hat{M}_2	\hat{M}_3	\hat{M}_4
0,00	245,17	435,82	588,10	712,43

A partir de los valores de \hat{M} (α) podemos obtener el valor del coeficiente de momento uniforme equivalente \hat{C}_{LT} , que vendrá dado por

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21 \times 712,43^2}{5 \times 245,17^2 + 10 \times 435,82^2 + 5 \times 588,10^2 + 712,43^2}} = 1,5499$$

Con ello, el Momento Equivalente de Pandeo Lateral será

$$M_b = \frac{\hat{M}_M}{\hat{C}_{LT}} = 459,66 \text{ kip.in}$$

Por otra parte, la esbeltez λ_{LT0} viene dada por

$$\lambda_{LT0} = \sqrt{\frac{f_y W_m}{M_{cm}}} = \sqrt{\frac{55 \times 22,875}{2.049,9}} = 0,7834$$

Una vez calculada la esbeltez, el Momento Equivalente en cada punto, resultante de aplicar la Ecuación (5.42), proporciona los siguientes resultados

M _{E0}	M _{E1}	M _{E2}	M _{E3}	M _{E4}
220,33	342,92	430,38	494,27	541,70

Por otro lado, de la aplicación de la norma americana al elemento de sección constante, igual a la menor, se obtienen los siguientes valores:

$$L_p = 57,214 \text{ in}$$

$$L_r = 135,332 \text{ in}$$

$$M_p = 1.258,125 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$M_r = 940,050 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Dado que la longitud de pandeo está entre los dos valores L_p y L_r , la resistencia nominal vendrá dada por

$$M_{n1} = 1.258,125 - \left(\frac{1.258,125 - 940,050}{135,332 - 90} \right) (90 - 57,214) = 1.028,081 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Con ello,

$$\frac{M_{EM1}}{0,9M_{n1}} = \frac{54170}{0,9 \times 1.028,081} = 0,585$$

El valor obtenido por Kaehler et al. (2011) es de 0,0629. La diferencia es del 7,5%.

e) Resistencia a pandeo lateral en el tramo 2 ($L=54''$)

Procediendo de modo análogo al caso anterior se obtienen los siguientes coeficientes

n0	n1	n2	n3	n4
1,0000	0,9305	0,8687	0,8132	0,7634

m0	m1	m2	m3	m4
1,0000	0,9479	0,9009	0,8583	0,8196

A partir de los coeficientes y con la distribución de momentos flectores, se obtiene

Mp0	Mp1	Mp2	Mp3	Mp4
1120,00	1200,40	1268,26	1325,59	1374,05

\hat{M}_0	\hat{M}_1	\hat{M}_2	\hat{M}_3	\hat{M}_4
1120,00	1222,79	1315,33	1399,07	1475,19

El coeficiente de momento uniforme equivalente \hat{C}_{LT} vendrá dado por

$$\hat{C}_{LT} = \sqrt{\frac{21 \times 1.475,19^2}{5 \times 1.222,79^2 + 10 \times 1.315,33^2 + 5 \times 1.399,07^2 + 1.475,19^2}} = 1,1153$$

El Momento Equivalente de Pandeo Lateral será

$$M_b = \frac{\hat{M}_M}{\hat{C}_{LT}} = 1.322,68 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

La esbeltez del elemento de sección constante λ_{LT0} viene dada, para este tramo, por

$$\lambda_{LT0} = \sqrt{\frac{f_y W_m}{M_{cm}}} = \sqrt{\frac{55 \times 41,508}{3.226,1}} = 0,8412$$

Con ello, los Momentos Equivalentes valdrán

M_{E0}	M_{E1}	M_{E2}	M_{E3}	M_{E4}
1120,00	1211,93	1292,51	1363,45	1426,16

La aplicación de la norma americana al elemento de sección constante, igual a la menor sección, conduce a los siguientes valores:

$$L_p = 52,052 \text{ in}$$

$$L_r = 126,012 \text{ in}$$

$$M_p = 2.127,690 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

$$M_r = 1.664,104 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Dado que la longitud de pandeo está entre los dos valores L_p y L_r , la resistencia nominal vendrá dada por

$$M_{n2} = 2.127,69 - (2.127,69 - 1.664,104) \times \left(\frac{54 - 52,052}{126,012 - 54} \right) = 2.115,15 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

Con ello,

$$\frac{M_{EM2}}{0,9M_n} = \frac{1.426,16}{0,9 \times 2.115,15} = 0,749$$

El valor obtenido por Kaehler et al. (2011) es de 0,816. La diferencia es del 8,9%.

f) Comprobación de la resistencia a flexo-compresión

De acuerdo con la norma americana, cuando el esfuerzo axial actuante es inferior al 20% de la resistencia a compresión, la comprobación del elemento a flexo-compresión viene dada por la ecuación

$$\frac{P}{2P_c} + \left(\frac{My}{\phi M_{ny}} + \frac{Mz}{\phi M_{nz}} \right) \leq 1,0$$

En el caso que nos ocupa, el valor máximo se presenta en el tramo 2, donde

$$\frac{P}{P_c} = 0,0794$$
$$\frac{My}{\phi M_{ny}} = 0,749$$
$$\frac{Mz}{\phi M_{nz}} = 0$$

Con ello

$$\frac{0,0794}{2} + (0,749 + 0) = 0,7887 \leq 1,0$$

Con los resultados obtenidos por Kaehler et al. (2011), la comprobación de resistencia conduciría a

$$\frac{0,0795}{2} + (0,816 + 0) = 0,8557 \leq 1,0$$

Es decir, el método propuesto en la tesis proporciona, para este caso concreto, comparado con el método propuesto por Kaehler et al. (2011), una diferencia del 8,5%.

6 APORTACIONES, CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

6.1 APORTACIONES

El trabajo de investigación desarrollado en la tesis doctoral se ha centrado en la estabilidad de los elementos estructurales de sección variable, sometidos a esfuerzos variables. Dos han sido los objetivos fundamentales, la recogida de información previa sobre el tema y las nuevas aportaciones que sugerimos.

El primero de los objetivos, como suele ser habitual en los trabajos conducentes a la obtención del grado de doctor, es el de recoger el estado del conocimiento sobre el tema, recopilando los distintos tratamientos que sobre el pandeo de vigas de sección variable aparecen en las distintas normativas y en la literatura especializada. Este primer objetivo se condensa en el capítulo 2 y en la amplia referencia bibliográfica que ha servido de apoyo en la investigación y que se presenta al final del documento.

El segundo objetivo consiste en la aportación de un nuevo método para determinar de forma sencilla los valores críticos de las cargas de pandeo, tanto de flexión como lateral. El nuevo método se recoge en el capítulo 3 para el caso de elementos sometidos a axil (pandeo por flexión), en el 4 para el caso de elementos sometidos a flexión (pandeo lateral) y en el 5 para elementos con efectos combinados.

En lo referente al pandeo por axil, y siguiendo la filosofía de la Norma Americana AISC LRFD, se ha propuesto una formulación sencilla que permite transformar, a efectos de cálculo, la pieza de sección variable en otra pieza de igual longitud pero de sección constante sometida a una carga corregida respecto de la real tal que plantee la misma solución de inestabilidad que la de la pieza original. Para este proceso se obtiene un coeficiente para cada punto de la viga, que depende de las características geométricas de las secciones. Además, y en un paso posterior, se sustituye al igual que en la norma americana, la carga variable por otra uniforme equivalente mediante un coeficiente C (coeficiente de carga uniforme equivalente).

Una de las aportaciones de este trabajo en lo que hace referencia al pandeo de flexión es el de plantear una expresión que permita obtener el factor de longitud efectiva en el caso del pandeo por flexión en vigas de sección variable, que en la norma americana simplemente indica que se ha de obtener mediante un análisis racional, sin dar más criterios.

Como ya se ha comentado, el capítulo cuatro recoge la parte de la investigación referente al pandeo por flexión. La metodología ha sido la misma que la empleada en el capítulo anterior: primero, y atendiendo a criterios geométricos, se modifica la ley de flectores mediante el factor $m(x)$ de forma que la nueva ley tenga efectos similares al caso inicial pero ahora actuando sobre una viga de sección constante igual a la menor sección de la viga real. Después se obtiene el coeficiente \hat{C}_{LT} que pondera el momento crítico de la viga sometida a flexión constante para mantener la equivalencia, a partir de los momentos ya modificados de tres secciones intermedias y del momento máximo modificado.

Asimismo, en el capítulo 5 se recoge, de una forma más práctica, lo definido en los dos capítulos anteriores, comparando los resultados obtenidos con los nuevos métodos con las distintas normas, tanto en el caso del axil (pandeo por flexión) como en el caso de la flexión (pandeo lateral), indicando el procedimiento para la obtención de las curvas de pandeo mediante una fórmula de interacción entre la carga crítica de plastificación y la carga crítica de pandeo correspondiente, siguiendo la metodología establecida en AISC LRFD.

Por último, también en el capítulo 5, se plantea la metodología a seguir a la hora de tratar vigas sometidas a esfuerzos combinados de axil-momento, desarrollando por separado los estudios de ambos esfuerzos según lo ya comentado según el Esfuerzo Equivalente de Pandeo de Flexión y el Momento Equivalente de Pandeo Lateral, para luego, mediante un criterio de resistencia combinar los dos casos de inestabilidad.

6.2 CONCLUSIONES

En primer lugar, basándose en un extenso estudio paramétrico, la tesis ha presentado una fórmula para la obtención de un valor suficientemente aproximado de la carga elástica de pandeo de flexión de elementos de sección

uniforme sometidos a esfuerzo axial no uniforme. La fórmula propuesta ha sido comprobada con cuatro distribuciones de carga: a) distribución lineal con máximo en un extremo; b) distribución lineal con máximo en el centro de la luz; c) distribución parabólica con máximo en un extremo; y d) distribución parabólica con máximo en el centro de la luz. Para todos los casos la nueva fórmula propuesta en la tesis da resultados muy aceptables, con errores inferiores al 7% en los casos analizados.

Adicionalmente, por lo que se refiere al pandeo de flexión, la tesis ha propuesto, y validado con los correspondientes análisis numéricos, un nuevo método de carga equivalente para elementos de sección no uniforme, sometidos a esfuerzo axial no uniforme. El nuevo método se ha mostrado altamente eficiente en los casos de sección variable analizados, que cubren un rango representativo tanto de la esbeltez del elemento como de las propiedades de la sección. Incluso para la geometría más variable y la mayor variación de esfuerzo, el nuevo método proporciona resultados aproximados de forma directa con errores inferiores al 11%.

La unión de los dos procedimientos anteriores en un método combinado, que permite abordar el caso más general de sección y esfuerzo no uniformes, ha resultado altamente eficiente y permite sustituir un elemento de sección variable y esfuerzo variable, por otro de sección y esfuerzo uniforme.

Por lo que hace referencia al pandeo lateral de vigas de sección variable sometidas a una distribución de momento flector variable, la tesis doctoral ha presentado un nuevo procedimiento de momento equivalente que permite sustituir la viga de sección variable por otra de sección uniforme, modificando para ello la distribución de momento flector. El nuevo método ha demostrado su eficacia en un conjunto de casos, que cubre variaciones de sección y de momento flector similares a las analizadas para el pandeo de flexión. Los resultados proporcionados por el nuevo método se encuentran habitualmente en márgenes de error inferiores al 5%, siendo para los casos de variación extrema de sección y momento inferiores al 15%.

La combinación del nuevo método con otros presentes en la literatura y recogidos en la tesis aplicables a distribuciones de momento no uniforme con secciones constante, permite disponer de un nuevo procedimiento con el que, a efectos de obtener el momento crítico de pandeo lateral elástico, la viga de sección variable y distribución de momento no uniforme, es sustituida por una viga de sección constante sometida a un momento flector uniforme.

Con los métodos propuestos para la determinación de las cargas críticas de pandeo, la tesis doctoral ha presentado una extensión de los códigos vigentes en Estados Unidos, Europa y Reino Unido para la verificación de la resistencia a pandeo de los elementos de sección variable sometidos a compresión, flexión y flexo-compresión, presentando para ello una nueva metodología. Aunque no existen en la literatura estudios detallados que permitan validar de forma definitiva la nueva metodología, los resultados obtenidos son altamente satisfactorios cuando se comparan con los obtenidos por trabajos doctorales recientes, desarrollados tanto en Europa como en Estados Unidos. Se añade a ello la sencillez de los procedimientos propuestos.

En resumen, los métodos y formulaciones propuestos dan resultados satisfactorios con niveles de error aceptables y nos permiten abordar el análisis de inestabilidad para elementos de sección variable sometidos a esfuerzos también variables de una forma sencilla, definiendo al final un coeficiente que multiplicado por el esfuerzo crítico de una pieza de similar longitud y esfuerzo uniforme me da la carga crítica de la viga real.

6.3 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Una de las limitaciones del método propuesto es que sólo se ha validado en piezas biapoyadas de sección doble T y doble simetría, pero que en contrapartida responden a la mayoría de los casos prácticos reales. Aunque se ha esbozado la posibilidad tratar secciones con un solo eje de simetría, por motivos de tiempo y extensión de la tesis no se ha concluido ese estudio, analizando sólo en profundidad los casos de doble simetría para validar el nuevo método EMA y aplicándolo para vigas simplemente apoyadas.

Se considera que este nuevo enfoque también dará buenos resultados incluso para casos donde la sección transversal tenga una sola simetría o responda a secciones distintas de la doble T. También será conveniente analizar en posteriores investigaciones las situaciones de condiciones de apoyo distintas a las estudiadas como por ejemplo el caso de vigas en voladizo.

Otro de los puntos que pueden tratarse en futuros estudios es, manteniendo la metodología expuesta, ver si se consiguen ajustes mejores a las expresiones propuestas que, sin aumentar la complejidad, disminuyan más el error propio de los procedimientos aproximados. Esto puede hacerse bien considerando coeficientes distintos en la distintas fórmulas, bien trabajando secciones de referencia otras distintas a las utilizadas, bien, por último, utilizando para el elemento uniforme de referencia uno cuya sección no se corresponda con la sección menor del elemento de sección variable

Finalmente, también se debe señalar que el elemento viga de canto variable usado por ANSYS (Beam 189) no toma en consideración el efecto de variación del alma en la formulación del elemento viga, un hecho que se puede mostrar comparando los resultados ANSYS con los proporcionados en Andrade et al. (2007). Por tanto, los valores numéricos obtenidos usando ANSYS pueden subestimar las cargas de pandeo lateral-torsional para vigas con alta variación del canto. En futuros trabajos de investigación también debería tratarse este problema.

ANEJOS

Anejo A: Fórmula de Ayrton-Perry

Las curvas de pandeo del Eurocódigo 3 se basan en los estudios realizados por W.E. Ayrton y J. Perry sobre la estabilidad de puntales en el Siglo XIX. Aunque parte de la formulación ha sido ya presentada en el Capítulo 2 de esta tesis, en este Anexo se recoge el proceso de obtención y la expresión exacta de la conocida como “fórmula de Ayrton-Perry” en la literatura de la estabilidad estructural.

En el ámbito de la normativa británica, y en los códigos que de ella han derivado en el mundo de influencia británica, la fórmula de Ayrton-Perry es conocida como fórmula de Perry-Robertson, en honor a los trabajos desarrollados por este último investigador para definir la imperfección inicial de los elementos estructurales de acero.

Para la obtención de la fórmula de Ayrton-Perry considérese un elemento estructural sometido a compresión, asumiendo una imperfección geométrica inicial $v_0(x)$, tal y como se indica en la Figura A.1. Esta imperfección es asumida como una función sinusoidal con un máximo valor de $e_{o,d}$ en la mitad de la luz, viniendo definida por tanto por

$$v_0(x) = e_{o,d} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (\text{A.1})$$

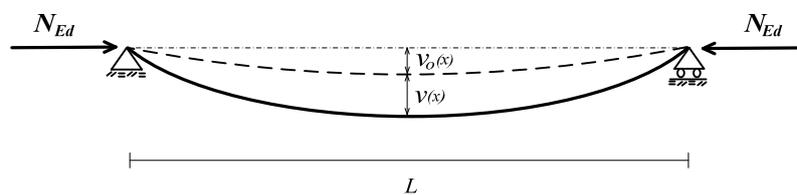


Figura A-1 Elemento biarticulado con imperfección inicial

Al aplicar la fuerza axial N_{Ed} en el elemento, se producirá una flecha adicional $v(x)$ (Figura A.1). La ecuación diferencial del equilibrio elástico vendrá dada por

$$v'' + \frac{N_{Ed}}{EI} (v_0 + v) = 0 \quad (A.2)$$

donde (v_0+v) es la flecha total.

La solución de la ecuación diferencial puede obtenerse con funciones de la forma

$$v(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (A.3)$$

donde A representa el valor máximo de la flecha adicional que se produce en la mita de la luz del elemento.

Sustituyendo las Ecuaciones (A.1) y (A.3) en (A.2) se obtiene

$$A = \frac{N_{Ed}}{N_{cr} - N_{Ed}} e_{o,d} \quad (A.4)$$

en donde N_{cr} es la carga crítica de pandeo de Euler.

La flecha máxima vendrá dada por

$$v_{\max} = \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{cr}} e_{o,d} \quad (A.5)$$

con lo que el momento flector máximo, que se producirá en el centro de la luz, será

$$M_{\max} = N_{Ed} v_{\max} = \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{cr}} N_{Ed} e_{o,d} \quad (A.6)$$

El límite de resistencia elástica vendrá dado por la ecuación

$$\frac{N_{Ed}}{A} + \frac{1}{1 - N_{Ed} / N_{cr}} \frac{N_{Ed} e_{o,d}}{W_{el,y}} = f_y \quad (A.7)$$

donde A representa el área de la sección recta y $W_{el,y}$ es el módulo resistente elástico respecto del eje de flexión.

Denominando σ_b al valor definido por

$$\sigma_b = \frac{N_{Ed}}{A} \quad (A.8)$$

la Ecuación (A.7) puede escribirse como

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{A}{W_{el,y}} \frac{N_{cr}}{N_{cr} - N_{Ed}} e_{o,d} = f_y \quad (A.9)$$

Denominando σ_{cr} a la tensión definida por

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} \quad (A.10)$$

la Ecuación (A.9) puede escribirse como

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - \sigma_b} \frac{A}{W_{el,y}} e_{o,d} = f_y \quad (A.11)$$

Denominando η al factor dependiente de la imperfección y de las propiedades geométricas del elemento, es decir

$$\eta = \frac{A}{W_{el,y}} e_{o,d} \quad (A.12)$$

la Ecuación (A.11) queda

$$\sigma_b + \sigma_b \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - \sigma_b} \eta = f_y \quad (A.13)$$

o la expresión equivalente

$$(\sigma_{cr} - \sigma_b)(f_y - \sigma_b) = \sigma_{cr} \sigma_b \eta \quad (A.14)$$

que es la fórmula de Ayrton-Perry.

A partir de la fórmula de Ayrton-Perry la formulación del Eurocódigo 3 se obtiene de forma directa. Para ello, dividiendo la Ecuación (A.14) por σ_{cr} y por f_y , y multiplicando y dividiendo por f_y uno de los cocientes, se obtiene

$$\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}} - \frac{\sigma_b}{\sigma_{cr}} \frac{f_y}{f_y} \right) \left(\frac{f_y}{f_y} - \frac{\sigma_b}{f_y} \right) = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}} \frac{\sigma_b}{f_y} \eta \quad (A.15)$$

Designando por χ al factor de reducción por pandeo de flexión, definido por

$$\chi = \frac{\sigma_b}{f_y} \quad (A.16)$$

y usando la esbeltez adimensional, $\bar{\lambda}$, definida por

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (\text{A.17})$$

la Ecuación (A.15) queda

$$(1 - \chi\bar{\lambda}^2)(1 - \chi) = \eta\chi \quad (\text{A.18})$$

o

$$\bar{\lambda}^2\chi^2 - (1 + \eta + \bar{\lambda}^2)\chi + 1 = 0 \quad (\text{A.19})$$

El menor valor del factor de reducción vendrá dado por

$$\chi = \frac{(1 + \eta + \bar{\lambda}^2) - \sqrt{(1 + \eta + \bar{\lambda}^2)^2 - 4\bar{\lambda}^2}}{2\bar{\lambda}^2} \quad (\text{A.20})$$

expresión que, en ocasiones, es denominada fórmula de Perry.

Introduciendo el coeficiente auxiliar ϕ , definido por

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \eta + \bar{\lambda}^2) \quad (\text{A.21})$$

la Ecuación (A.20) queda

$$\chi = \frac{\phi - \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\bar{\lambda}^2} = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (\text{A.22})$$

que es la propuesta por el Eurocódigo 3.

El coeficiente de imperfección, η , que en la fórmula de Ayrton-Perry está relacionado con la imperfección inicial y la geometría de la sección, ha sido reformulado como imperfección generalizada para incluir tanto la falta de rectitud inicial del elemento como las tensiones residuales y la excentricidad de la carga. Tras los oportunos estudios numéricos y experimentales en el marco del Comité Técnico 8 del ECCS, la fórmula propuesta para el coeficiente de imperfección es la dada por la ecuación

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) \quad (\text{A.23})$$

siendo α la constante o factor de imperfección que depende de la forma de la sección recta, del proceso de fabricación (laminado o soldado), del plano de pandeo y del tipo de acero. Los distintos valores del factor de imperfección proporcionan las distintas curvas de pandeo contempladas en el Eurocódigo 3 (Capítulo 2).

Como se ha indicado ya, en la norma británica se utiliza una formulación general similar, cambiando únicamente las expresiones que definen el coeficiente de imperfección, η , que es denominado coeficiente de Perry, así como los valores del factor de imperfección, α , que es designado como constante de Robertson.

ANEJO B: ARTÍCULOS PUBLICADOS

IBÁÑEZ, J.R.; SERNA, M.A. 2008. Elastic critical moment of web tapered I-members equivalent moment approach and closed form expression. En OFNER, R. [et al.] (eds.) EUROSTEEL 2008 - Proceedings of the 5th European Conference on Steel and Composite Structures: Gratz, Austria, September 3-5, 2008, pp. 1575-1580. ISBN 92-0147-000-90

IBÁÑEZ, J.R.; SERNA, M.A. 2010. Equivalent moment approach for elastic lateral-torsional buckling of tapered beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10(3), pp. 387-409. ISSN 0219-4554. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219455410003543>



Elastic flexural buckling of non-uniform members: Closed-form expression and equivalent load approach

M.A. Serna^{a,*}, J.R. Ibáñez^a, A. López^b

^a Structural Engineering Department, University of Cantabria, 39005 Santander, Spain

^b Tecnun, University of Navarra, 20018 San Sebastian, Spain

ARTICLE INFO

Article history:
Received 8 May 2010
Accepted 3 January 2011

Keywords:
Flexural buckling
Non-uniform members

ABSTRACT

Experienced structural engineers have an intuitive understanding of the buckling behavior of uniform members subjected to compressive loads. The Euler critical load and the concept of buckling length are extensively used in this context. Unfortunately, the extension of this intuitive approach to cases with non-uniform load or non-uniform members is not straightforward. Based on an extensive numerical parametric study, the paper first presents a closed-form expression for the buckling load of constant cross-section members with non-uniform axial loading. Consequently, an equivalent load approach for non-uniform members subjected to non-uniform axial load distribution is proposed and validated. The combination of both procedures has the power of transforming the general complex case of a non-uniform member under non-uniform load into an equivalent simple case of a uniform member subjected to uniform load. The new methodology is simple and direct, and produces more than acceptable approximate results.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Tapered members are extensively used in structural, mechanical and aeronautical engineering. According to Lee and Morrell [1], the use of tapered members was first proposed by Amirikian [2] in 1952 for reasons of economy. Nowadays, structural engineers make use of non-uniform members in order to adapt the cross-section stiffness to variable resistance needs and to satisfy esthetic as well as functional architectural requirements.

The flexural buckling resistance of non-uniform columns has been comprehensively studied during the last century, and it remains a research topic still. The formulation and solutions for simple cases can be found in [3] and in [4]. In the search for analytical solutions, many research works are based on assumed stiffness distributions. Ermopoulos [5] presented results for tapered bars under stepped axial loads with a second-order polynomial stiffness variation and used the same assumption to obtain the equivalent buckling length of non-uniform members [6]. Using the same model, he also studied the effect of initial imperfections on the stability of tapered members [7]. A similar stiffness distribution was used by Elishakoff and coworkers [8,9] to find new closed-form solutions for the buckling load of simply supported columns. A more general polynomial stiffness variation

was also investigated by Elishakoff and Guede [10]. Using Bessel functions, Siginer [11] considered the buckling of columns with a continuous monotonic variation in flexural rigidity.

A more general power series approach can be found in [12], where expressions for stability functions of a general non-prismatic member are given. However, this work is limited to uniform axial compressive or tensile forces. Another solution for a general stiffness distribution column, using also Bessel functions, has been presented by Li [13,14]. In his works, the expression for describing the distribution of flexural stiffness is arbitrary, but the axial distributed loading must be expressed as a functional relation to the flexural stiffness. More recently, Coskun and Atay [15] have used a variational iteration method to obtain the buckling load of non-uniform columns under the particular case of constant axial loading.

Other groups of researchers have focused their work on finding simple and fast approximate procedures. Saffari et al. [16] have presented an easy method for a quick estimation of the effective length factor of columns in gabled frames consisting of linearly tapered members. Their method is based on design-oriented two-dimensional charts. Similarly, Bazeos and Karabalis [17] have published an approximate method for quick calculation of the critical load of tapered members, which is based on a series of dimensionless charts and can be applied to linearly tapered columns.

The work presented in this paper can be included in the cluster of approximate fast methods. The proposed methodology can be

* Corresponding author. Tel.: +34 942 201736; fax: +34 942 201747.
E-mail address: sernama@unican.es (M.A. Serna).

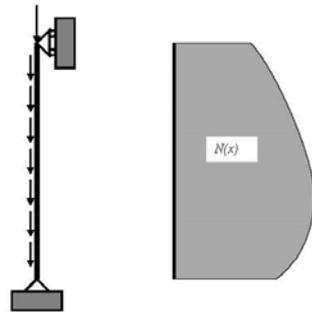


Fig. 1. Non-uniform axial loading.

applied to columns with a general stiffness variation subjected to any axial loading distribution. In what follows, the paper first presents a closed-form formula for the buckling load of uniform members under non-uniform axial loading. Then an equivalent loading approach for non-uniform members is described. Finally, the paper shows how the combination of both the closed-form formula and the equivalent loading approach leads to a general methodology that can be applied to any case of non-uniform member.

2. Closed-form formula for uniform members with non-uniform load

Let us first consider the case of a uniform member subjected to a non-uniform axial load as defined in Fig. 1, where both ends are considered as pinned. Following a similar approach to that described in [18] for tapered beams, the elastic flexural buckling load can be expressed as

$$P_{cr} = CP_E \tag{1}$$

where P_{cr} corresponds to the maximum value of the non-uniform axial load distribution, C is the equivalent uniform load coefficient and P_E is the Euler critical load of the column, given by

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2}$$

with E being the modulus of elasticity, I the moment of inertia, and L the column length. The equivalent uniform load coefficient C is equal to 1 for uniform axial load and is greater than 1 for any other load distribution.

Duan and Wang [19] have recently presented an exact solution for the buckling of columns including self-weight, but no general solution is available. In order to attempt an approximate closed-form formula to calculate the coefficient C , a set of cases was numerically solved using the eigenvalue routine provided by MATLAB. Fig. 2 shows the axial load distributions considered in the analysis: (a) linear distribution with maximum at one end; (b) linear distribution with maximum at the middle span; (c) parabolic distribution with maximum at one end; and (d) parabolic distribution with maximum at the middle span.

The objective of a closed-form formula is to provide a simple, fast and approximate procedure to obtain the value of a given property whose exact value can be obtained using more complex methods. Closed-form expressions are usually the result of a fitting procedure based on a parametric or case study. For the flexural buckling load of uniform columns subjected to no uniform axial loading, we attempted the following closed-form formula to

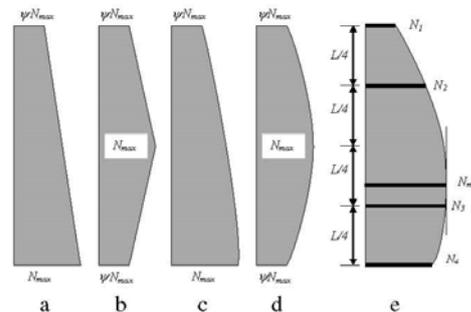


Fig. 2. Cases of non-uniform axial loading.

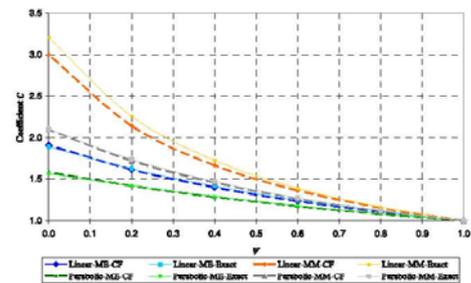


Fig. 3. Closed-form formula results for non-uniform loading.

compute the coefficient C :

$$C = \frac{N_M \left(1 + \sum_{i=1}^n c_i \right)}{N_M + \sum_{i=1}^n c_i N_i} \tag{3}$$

where N_M is the maximum axial load acting on the column, N_i is the axial load at point i , and c_i is a weight coefficient.

Using the numerically obtained exact values corresponding to the load cases of Fig. 2, and trying to keep the closed-form values below the exact ones, a good approximation is obtained with the following particular case of Eq. (3):

$$C = \frac{21N_M}{4(N_1 + N_4) + 6(N_2 + N_3) + N_M} \tag{4}$$

where, as shown in Fig. 2(e), N_1 and N_4 are the axial loads at the member ends and N_2 and N_3 are the axial loads at $L/4$ and $3L/4$.

Fig. 3 shows the comparison between the numerically obtained values (Exact) and the approximate values (CF) obtained by using the closed-form formula given as Eq. (4). In Fig. 4, the labels ME and MM indicate distributions with maximum axial load at one end or at the middle span, respectively. It can be seen that a good enough approximation is obtained for all cases. In fact, the maximum error, which corresponds to the linear distribution with maximum load at the middle span, is lower than 7%.

3. Equivalent load approach for tapered members

Consider now a tapered column subjected to a non-uniform compressive load (Fig. 4). The governing differential equation for

1080

MA. Serna et al. / Journal of Constructional Steel Research 67 (2011) 1078–1085

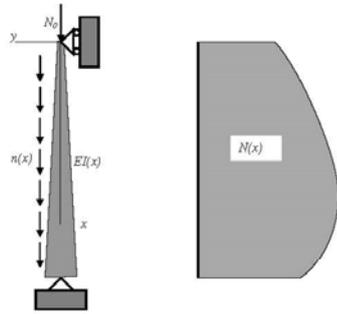


Fig. 4. Tapered column.

the elastic flexural buckling can be written as

$$EI(x)v''(x) + N_0v(x) + R(x)x + \int_0^x n(\eta)[v(x) - v(\eta)]d\eta = 0,$$

with

$$R(x) = \frac{1}{L} \int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta = 0.$$

Introducing (6) in (5), we obtain

$$EI(x)v''(x) + N(x)v(x) + \frac{x}{L} \int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta - \int_0^x n(\eta)v(\eta)d\eta = 0,$$

with

$$N(x) = N_0 + \int_0^x n(\eta)d\eta$$

and

$$n(x) = \frac{dN(x)}{dx}.$$

Integrating by parts, we obtain

$$\int_0^x n(\eta)v(\eta)d\eta = \int_0^x \frac{dN(\eta)}{d\eta} v(\eta)d\eta = N(x)v(x) - \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta$$

and

$$\int_0^L n(\eta)v(\eta)d\eta = \int_0^L \frac{dN(\eta)}{d\eta} v(\eta)d\eta = - \int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta.$$

Therefore, introducing (10) and (11) into (7), we have

$$EI(x)v''(x) - \frac{x}{L} \int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta + \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta = 0.$$

Multiplying by $I_m/I(x)$, where I_m represents the minimum inertia along the column, we obtain

$$EI_m v''(x) - \frac{I_m x}{I(x)L} \int_0^L N(\eta)v'(\eta)d\eta + \frac{I_0}{I(x)} \int_0^x N(\eta)v'(\eta)d\eta = 0.$$

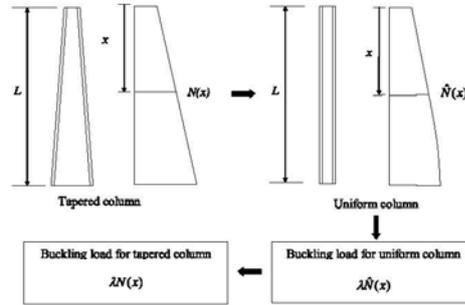


Fig. 5. Equivalent load approach.

Let us now consider a uniform column with a flexural rigidity EI_m subjected to a non-uniform axial loading defined by \hat{N}_0 and $\hat{n}(x)$. The governing equation will be

$$EI_m v''(x) - \frac{x}{L} \int_0^L \hat{N}(\eta)v'(\eta)d\eta + \int_0^x \hat{N}(\eta)v'(\eta)d\eta = 0.$$

Let us assume that there is an axial load distribution $\hat{N}(x)$, a function of $N(x)$ and $I(x)$, such that Eqs. (13) and (14) become identical. To obtain the elastic critical load corresponding to the tapered column we would compute the elastic critical load of a uniform column subjected to an equivalent load. This equivalent load approach is summarized in Fig. 5.

The authors have not been able to find an exact analytical solution for the axial load distribution $\hat{N}(x)$. However, considering the physical meanings of the terms in Eqs. (13) and (14), an approximate solution has been obtained using the general expression

$$\hat{N}(x) = N(x) \frac{I_m^\chi I_1^\beta I_2^\beta I_3^\beta}{I(x)^\chi I_m^{2\beta+\gamma}},$$

where $I_1, I_2,$ and I_3 are the moments of inertia for x equal to $0, L/2,$ and $L,$ respectively; I_m is the maximum inertia along the column; and $\chi, \beta,$ and γ are a set of coefficients to be determined in a fitting parametric process.

In order to evaluate the quality of the approximation defined by Eq. (15), a set of cases has been analyzed. In these cases the columns are modeled using finite elements and the corresponding eigenvalue problem is solved using MATLAB. Results obtained using $\chi = 0.30, \beta = 0.30,$ and $\gamma = 0.15$ are shown in the following sections. For these results, the coefficient C relates the elastic critical load of the case under consideration with the Euler critical load of a column with minimum flexural stiffness

$$P_{cr} = C \frac{\pi^2 EI_m}{L^2}.$$

3.1. Results for single web-tapered columns

Using the web-tapered column geometry shown in Fig. 6, results have been obtained for the axial load distributions shown in Fig. 2. Results are shown for three values of taper ratio ($\alpha = 0.4, 0.6, 0.8$), covering in this way a representative range of column slenderness and beam properties.

Figs. 7–12 compare the results obtained using the equivalent load approach defined by Eq. (15) with those obtained by solving the eigenvalue problem. It can be seen that the approximation is very good for taper ratios 0.80 and 0.60 (the errors are lower than 2%), and acceptable for taper ratio 0.40 (the errors are lower than 10%).

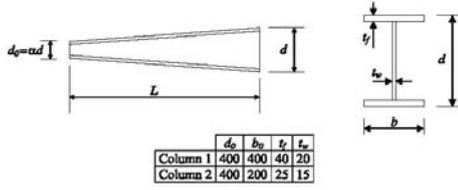


Fig. 6. Single tapered column geometry.

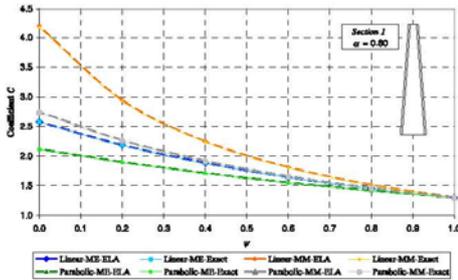


Fig. 7. Exact results versus approximate results for section 1 and $\alpha = 0.80$.

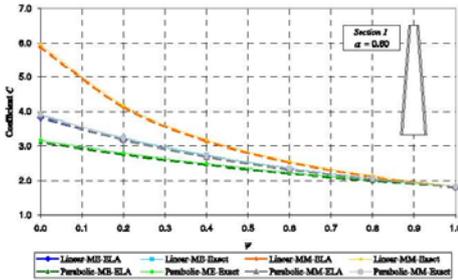


Fig. 8. Exact results versus approximate results for section 1 and $\alpha = 0.60$.

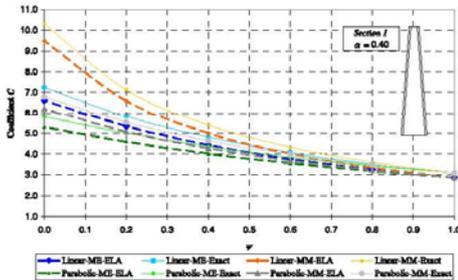


Fig. 9. Exact results versus approximate results for section 1 and $\alpha = 0.40$.

3.2. Results for double web-tapered beams

Fig. 13 shows the geometry of the double web-tapered member considered to validate the equivalent load approach as a simple

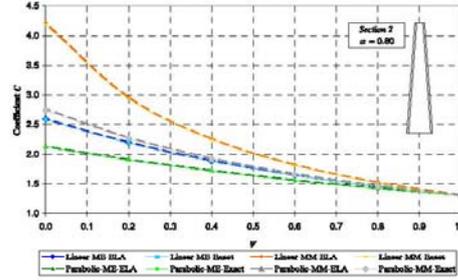


Fig. 10. Exact results versus approximate results for section 2 and $\alpha = 0.80$.

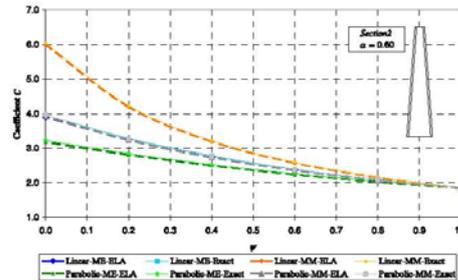


Fig. 11. Exact results versus approximate results for section 2 and $\alpha = 0.60$.

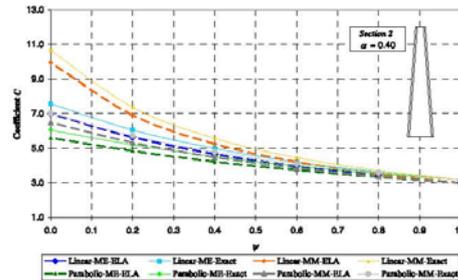


Fig. 12. Exact results versus approximate results for section 2 and $\alpha = 0.40$.

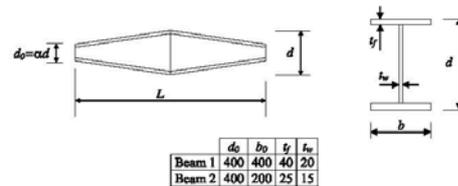


Fig. 13. Double web-tapered column geometry.

method to obtain a good approximation to the elastic critical load of non-uniform cross-section columns.

Figs. 14–19 show the results for the loading cases depicted in Fig. 2. It can be seen that, as for the single web-tapered column,

1082

MA. Serna et al. / Journal of Constructional Steel Research 67 (2011) 1078–1085

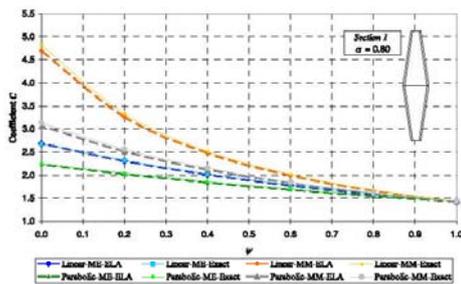


Fig. 14. Double web-tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.80$.

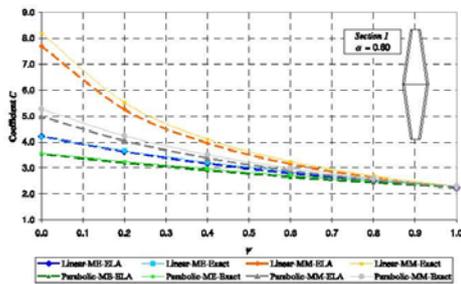


Fig. 15. Double web-tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.60$.

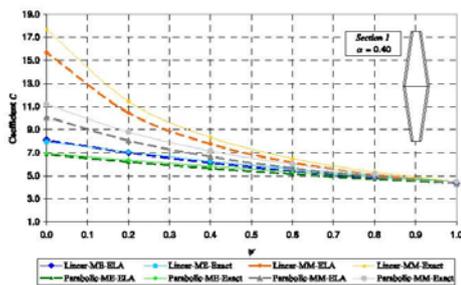


Fig. 16. Double web-tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.40$.

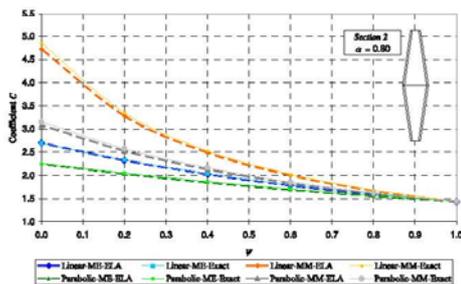


Fig. 17. Double web-tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.80$.

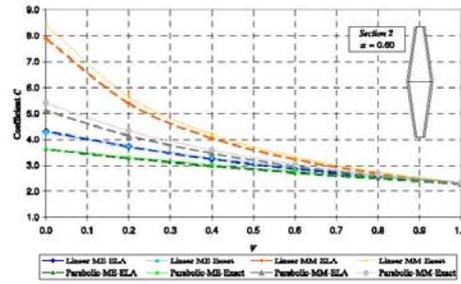


Fig. 18. Double web-tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.60$.

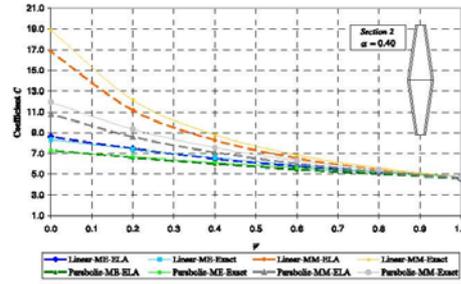


Fig. 19. Double web-tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.40$.

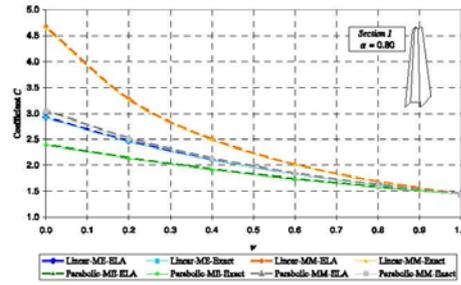


Fig. 20. Full tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.80$.

the approximate results are quite good for low to medium taper ratios, and acceptable for extreme taper ratio.

3.3. Results for web-tapered and flange-tapered columns

The results presented in Sections 3.1 and 3.2 correspond to web-tapered columns with constant flange dimensions. This section offers results for beams with both tapered web and tapered flanges. The same taper ratio is considered for both the web and the flange. The cross-section properties at the smaller end are given in Fig. 6.

The results are shown in Figs. 20–25. It can be seen that the approximate solution follows the exact solution for taper ratios 0.80 and 0.60 (errors lower than 2%), and it is good enough for taper ratio 0.40 (errors between 6% and 11%).

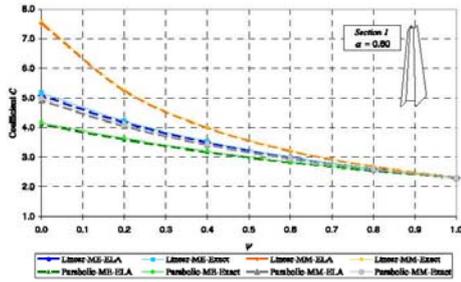


Fig. 21. Full tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.60$.

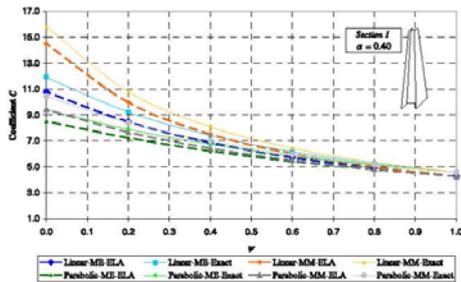


Fig. 22. Full tapered column results for section 1 and $\alpha = 0.40$.

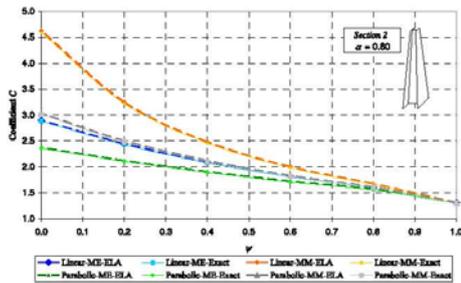


Fig. 23. Full tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.80$.

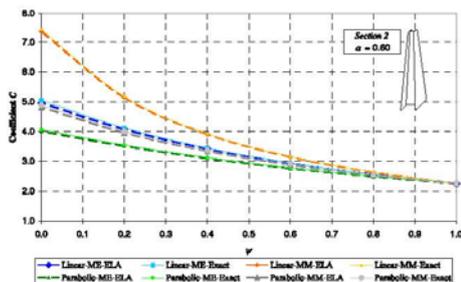


Fig. 24. Full tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.60$.

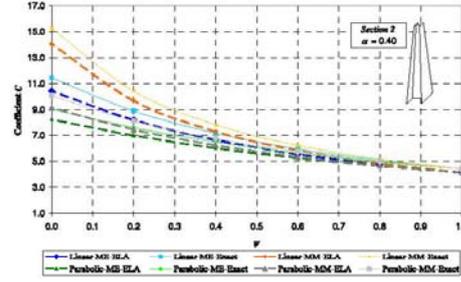


Fig. 25. Full tapered column results for section 2 and $\alpha = 0.40$.

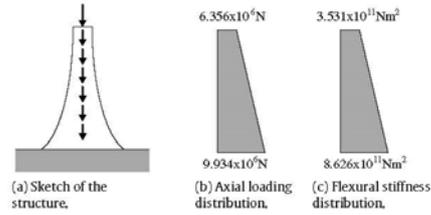


Fig. 26. High-rise structure.

4. Combined approach and numerical example

The equivalent load approach allows the substitution of the non-uniform column by a uniform column with minimum flexural rigidity subjected to an equivalent axial load given by Eq. (15). If we now apply the closed-form formula (Eq. (4)) we obtain the following expression:

$$\frac{N_{cr}}{N_M} = \frac{\hat{N}_{cr}}{\hat{N}_M} = \frac{21}{4(\hat{N}_1 + \hat{N}_4) + 6(\hat{N}_2 + \hat{N}_3) + \hat{N}_M} \frac{\pi^2 E I_m}{L^2} = \frac{21}{4(c_1 N_1 + c_4 N_4) + 6(c_2 N_2 + c_3 N_3) + c_M N_M} \frac{\pi^2 E I_m}{L^2}, \quad (17)$$

with

$$c(x) = \frac{I_m^\alpha}{I(x)^\alpha} \frac{I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\delta}{I_M^{(2\beta+\gamma)}}. \quad (18)$$

In order to show the application of the methods presented in this paper to real structures, a numerical example is developed in this section. The structure data are taken from [13], which has presented the elastic buckling load of a 210 m high cantilever structure located in Wuhan, PR China. Fig. 26 presents a sketch of the structure, the distribution of axial forces and the distribution of flexural stiffness. Fig. 27 shows the equivalent pinned–pinned structure and the equivalent uniform cross-section structure and loading.

First the non-uniform column is substituted by the equivalent uniform column using the equivalent load approach defined by Eq. (15). Then, the closed-form formula (Eq. (4)) is applied to obtain the elastic critical load of the uniform column with non-uniform axial loading. Once the critical load is obtained, the corresponding load factor is calculated.

According to Eq. (15),

$$\hat{N}(x) = \frac{N(x)}{(EI(x))^\alpha} (EI_m)^\alpha \frac{I_1^\beta I_2^\gamma I_3^\delta}{I_M^{(2\beta+\gamma)}} = 1704.6 \frac{N(x)}{(EI(x))^\alpha}.$$

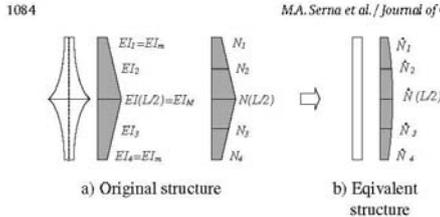


Fig. 27. Original structure and equivalent uniform structure.

Consequently,

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 = \hat{N}_4 &= 3719,093 \text{ N} \\ \hat{N}_2 = \hat{N}_3 &= 4049,250 \text{ N} \\ \hat{N}(L/2) = \hat{N}_M &= 4446,351 \text{ N}. \end{aligned}$$

We now apply Eq. (4) to obtain the elastic critical load of the equivalent column:

$$\begin{aligned} \hat{N}_{cr} &= C \frac{\pi^2 EI_M}{L^2} = \frac{2.1 \hat{N}_M}{4(\hat{N}_1 + \hat{N}_4) + 6(\hat{N}_2 + \hat{N}_3) + \hat{N}_M} \\ &\times \frac{\pi^2 (3.531 \times 10^{11})}{420^2} = 22,280,810 \text{ N}. \end{aligned}$$

The load factor needed to reach buckling is

$$\frac{\hat{N}_{cr}}{\hat{N}_M} = \frac{22,280,810}{\hat{N}_M} = 5.011.$$

This load factor can now be used to obtain the critical axial loading for the non-uniform structure:

$$N_{cr} = 5.011 \times 9.934 \times 10^6 = 49.779 \times 10^6 \text{ N},$$

which represents the axial load at the bottom of the column (cross section of maximum axial load).

According to Li [13], the exact load factor is equal to 5.374. This means that the simple procedures described above lead to a quite good approximation (error equal to 6.75%).

5. Application to the AISC LRFD code

For cross sections with width–thickness ratios that prevent local buckling, the AISC LRFD code specifies that the nominal design strength P_n of compressive uniform members is given by

$$P_n = AF_{cr}, \tag{19}$$

where A is the cross-sectional area and F_{cr} is the critical stress, which is a function of the member slenderness, λ , given by

$$\lambda = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}}, \tag{20}$$

where L is the unbraced length, r is the radius of gyration cross section, F_y is the yield stress, E is the modulus of elasticity, and K is the effective length factor.

Section F3 in Appendix F of the AISC code deals with web-tapered members. Following the research work of Prawel et al. in the 1970s [20,21], the design compressive strength is based on a general formulation with the following considerations: (1) the smallest area of the tapered member is used as the reference cross section, and (2) an effective slenderness parameter λ_{eff} must be used. The effective slenderness λ_{eff} is defined by the equation

$$\lambda_{eff} = \frac{K_y L}{r_0 \pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}}, \tag{21}$$

where r_0 is the radius of gyration at the smallest end of the tapered member and K_y is the effective length factor for tapered members.

The AISC LRFD code specifies that the effective length factor for tapered members must be “determined by a rational analysis”. Unfortunately, no directions for that “rational analysis” are given by the code.

Since the new procedure presented in this paper deals with the determination of the elastic critical load and the elastic critical load is directly related to column slenderness, the new method may be applied to obtain the value of K_y and, subsequently, to determine the design compressive strength of tapered members according to the AISC LRFD code. In fact, from Eq. (16), it can be seen that

$$K_y = \sqrt{\frac{1}{C}}, \tag{22}$$

where C is the equivalent uniform section coefficient presented in this paper.

6. Conclusions

Based on an extensive numerical parametric study, the paper has first presented a closed-form expression for the buckling load of uniform cross-section members with non-uniform axial loading. The proposed expression has been tested with four loading distribution cases; (a) linear distribution with maximum at one end; (b) linear distribution with maximum at the middle span; (c) parabolic distribution with maximum at one end; and (d) parabolic distribution with maximum at the middle span. For all cases the new closed-form expression gives quite good results. The maximum error, which corresponds to the linear distribution with maximum load at the middle span, is lower than 7%.

In addition, the paper has proposed and validated an equivalent load approach for non-uniform members subjected to a non-uniform axial load distribution. The new approach has shown its effectiveness for different types of tapering geometry with three values of taper ratio ($\alpha = 0.4, 0.6, 0.8$), which cover a representative range of column slenderness and beam properties, and the same loading cases used in the first parametric study. Even for the most rare geometry, with the 0.4 extreme tapering ratio, and the least uniform loading case, the errors obtained with the proposed procedure are lower than 11%.

Moreover, the paper has shown how the combination of both procedures has the power of transforming the general complex case of a non-uniform member under non-uniform load into an equivalent simple case of a uniform member subjected to uniform load. The combination has been applied to a complex real case, showing that good enough results can be obtained with just a few calculations.

Finally, the new approach can be used to obtain the effective length factor required by the AISC LRFD code to determine the design compressive strength of tapered members.

References

- [1] Lee GC, Morrell ML. Application of AISC design provisions for tapered members. *Engineering Journal* 1975;12(1 First Q):1–13.
- [2] Amirikian A. Wedge-beam framing. *Transactions on ASCE* 1952;117:596.
- [3] Timoshenko SP, Gere JM. *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill; 1961.
- [4] Gere JM, Carter WO. Critical buckling loads for tapered columns. *Journal of Structural Division ASCE* 1962;112(6):1346–54.
- [5] Ermopoulos JCh. Buckling of tapered bars under stepped axial loads. *Journal of the Structural Engineering* 1986;112(6):1346–54.
- [6] Ermopoulos JCh. Equivalent buckling length of non-uniform members. *Journal of Constructional Steel Research* 1997;42(2):141–58.
- [7] Raftoyiannis IG, Ermopoulos JCh. Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections. *Engineering Structures* 2005;27(8):1248–57.
- [8] Elishakoff I. Euler's problem revisited: 222 years later. *Meccanica* 2001;36(3):265–72.

- [9] Elishakoff I, Rollot G. New closed-form solutions for buckling of a variable stiffness column by Mathematica. *Journal of Sound and Vibrations* 1999; 224(1):172–82.
- [10] Elishakoff I, Guédé Z. Novel closed-form solutions in buckling of inhomogeneous columns under distributed variable loading. *Chaos, Solitons and Fractals* 2001; 12(6):1075–89.
- [11] Signer A. Buckling of columns of variable flexural rigidity. *Journal of Engineering Mechanics* 1992; 118:640–3.
- [12] Al-Sadder SZ. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member. *Journal of Constructional Steel Research* 2004; 60(11):1561–84.
- [13] Li QS. Exact solutions for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 2001; 20(3):485–500.
- [14] Li QS. Analytical solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with arbitrary distribution of flexural stiffness or axial distributed loading. *International Journal of Mechanical Sciences* 2001; 43(2):349–66.
- [15] Coşkun SB, Atay MT. Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications* 2009; 58(11–12):2260–6.
- [16] Saffari H, Rahgozar R, Jahanshahi R. An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members. *Journal of Constructional Steel Research* 2008; 64(4):400–6.
- [17] Bazsos N, Karabalis DL. Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members. *Engineering Structures* 2006; 28(5):771–5.
- [18] Serna MA, Lopez A, Puente I, Yong DL. Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members. *Journal of Constructional Steel Research* 2006; 62(6):566–80.
- [19] Duan WH, Wang CM. Exact solution for buckling of columns including self-weight. *Journal of Engineering Mechanics* 2008; 134(1):116–9.
- [20] Prawel S.P, Morrel ML, Lee GC. Bending and buckling strength of tapered structural members. *Welding Research* 1974; 53(2):75–84.
- [21] Lee GC, Morrel ML, Ketter RL. Design of tapered members. *Welding Research Council Bulletin* 1972; 173:1–32.

Bibliografía

- AISC LRFD. (1986). *Load and Resistance Factor Design*. Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC).
- AISC LRFD. (1994). *Load and Resistance Factor Design*. Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC).
- Al-Sadder, S. (2004). Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member. *Journal of Constructional Steel Research*, 60 (11), 1561-1584.
- Andrade, A., & Camotim, D. (2005). Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: Theory and applications. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(6), 586-597.
- Andrade, A., Camotim, D., & Dinis., P. (2007). Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. *Computers and Structures*, 85(17-18), 1343-1359.
- Andrade, A., Providência, P., & Camotin, D. (2010). Elastic lateral-torsional buckling of restrained web-tapered I-beams. *Computers and Structures*, 88, 1179-1196.
- ANSI/AISC 360-05. (2005). *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC).
- ASCE . (1997). *Effective Length and Notional Load Approaches for Assessing Frame Stability: Implications for American Steel Design*. New York: ASCE.
- Asgarian, B., Soltani, M., & Mohri, F. (2013). Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures* 62, 96-108.
- Austin, W. J. (1961). Strength and Design of Metal Beam-Columns. *ASCE, Journal of the Structural Division*, 87, Nº. ST4, 1-32.
- Baláz, I., & Koleková, Y. (2002). *Critical Moments. Stability and Ductility of Steel Structures*. Budapest: Iványi, M., editor. Akademiai Kiado.
- Basler, K. (1961). Strength of Plate Girders in Shear. *ASCE, Journal of the Structural Division*, 104, Nº. ST9, October 1961, 151-180.
- Bazeos, N., & Karabalis, D. (2006). Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members. *Engineering Structures*, 28 (5), 771-775.

- Benyamina, A. B., Meftah, S. A., Mohri, F., & Daya, E. M. (2013). Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams. *Engineering Structures* 56, 1207-1219.
- Bhurke, K., & Alandkar, P. (2013). Strength of Welded Plate Girder with Tapered Web. *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol 3, Issue 5, Sep-Oct, 1947-1951.
- Boissonnade, N., Greiner, R., Jaspart, J., & Lindner, J. (1993). Rules for member stability in EN 1993-1-1.
- Boissonnade, N., Jaspart, J., Muzeau, J., & Villette, M. (2002). Improvement of the Interaction Formulae for Beam Columns in Eurocode 3. *Computers and Structures*, 80, 2375-2385.
- Boissonnade, N., Jaspart, J., Muzeau, J., & Villette, M. (2004). New Interaction Formulae for Beam-Columns in Eurocode 3: The French-Belgian Approach. *Journal of Constructional Steel Research*, 60, 421-431.
- Braham, M., & Hanikenne, D. (1993). Lateral buckling of web tapered beams: An original design method confronted with a computer simulation. *Journal of Constructional Steel Research*, 27(1-3), 23-36.
- Brown, T. (1981). Lateral-torsional buckling of tapered I-beams. *ASCE Journal of the Structural division*, 107 (4), 689-697.
- BS5950-1. (2000). *Structural use of steelwork in building-Part 1: Code of practice for design-Rolled and welded sections*, (2000).
- Bureau, A., Galéa, Y., Jaspart, J., Maquoi, R., Muzeau, J., & Villette, M. (1999). TC8 - ECCS meeting. *Proposal for a revision of Eurocode 3*. Timisoara.
- Chajes, A. (1974). *Principles of Structural Stability*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Challamel, N., Andrade, A., & Camotim, D. (2007). An analytical study on the lateral-torsional buckling of linearly tapered cantilever strip beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7 (3), 441-456.
- Chen, W. (1977). *Theory of Beam-Columns - The State of the Art Review*. Washington D.C.: Proc. Int. Colloq. Stab. Struct. Under Static Dyn. Loads. SSRC/ASCE.
- Chen, W. (1981). *Recent Advances in Analysis and Design of Steel Beam-Columns in U.S.A.* Tokyo: Proc. U.S.- Jpn. Sem. Inelastic Instab. Steel Struct. Elements.

-
- Chen, W. F. (1970). General Solution of Inelastic Beam-Column Problem. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 96, N^o. EM4, 421-442.
- Chen, W. F. (1977). Proc. Int. Colloq. Stab. Struct. Under Static Dyn. Loads. *Theory of Beam-Columns - The State of the Art Review*. Washington D. C: SSR/ASCE.
- Chen, W. F. (1981). Jpn. Sem. Inelastic Instab. Steel Struct. Struct. Elements. *Recent Advances in Analysis and Design of Steel Beam-Columns in U.S.A. Proc. U. S. Tokyo*.
- Chen, W. F., & Atsuta, T. (1972). Interaction Equations for Biaxially Loaded Sections. *ASCE, Journal of the Structural Division*, 98, N^o. ST5, 1035-1052.
- Chen, W. F., & Atsuta, T. (1974). Interaction Curves for Steel Sections, Under Axial Load and Biaxial Bending. *EIC Eng J.*, 17, N^o. A-3.
- Chen, W. F., & Atsuta, T. (1976). *Theory of Beam-Columns: In Plane Behavior and Design. Vol. 1*. New York: McGraw-Hill.
- Chen, W. F., & Atsuta, T. (1977). *Theory of Beam-Columns: Space Behavior and Design. Vol. 2*. New York: McGraw-Hill.
- Chen, W. F., & Lui, E. M. (1987). *Structural Stability: Theory and Implementation*. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- Chen, W. F., & Zhou, S. P. (1987). Cm Factor in Load and Resistance Factor Design. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 113(8), 1738-1754.
- Cheney, W., & Kincaid, D. (1999). *Numerical Mathematics and Computing*. 4th ed, Brooks/Code Publishing Company, California.
- Cheong-Siat-Moy, F., & Downs, T. (1980). New Interaction Equation for Steel Column Design. *ASCE, Journal of the Structural Division*, 106, N^o. ST5, 1047-1062.
- Clark, J. W., & Hill, H. N. (1960). Lateral Buckling of Beams. *Journal of the Structural Division. Proceedings of the ASCE, (July)*, 175-196.
- Cooper, P. B., Galambos, T. V., & Ravindra, M. K. (1978). LRFD Criteria for Plate Girders. *ASCE, Journal of the Structural Division*, 104, N^o. ST9, September 1978, 1389-1407.
- Coşkun, S., & Atay, M. (2009). Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, 58 (11-12), 2260-2266.

- DIN 18800. (1988). *Teil 1, Stahlbauten, Bemessung und Konstruktion*. Berlin: Beuth Verlag GMBH.
- Elishakoff, I. (2001). Euler's problem revisited: 222 years later. *Meccanica*, 36 (3) , 265-272.
- Elishakoff, I., & Guédé, Z. (2001). Novel closed-form solutions in buckling of inhomogeneous columns under distributed variable loading. *Chaos, solitons and fractals*, 12 (6), 1075-1089.
- Elishakoff, I., & Rollet, G. (1999). New closed-form solutions for buckling of a variable stiffness column by Mathematica. *J. of Sound and Vibrations*, 224 (1), 172-182.
- Ermopoulos, J. (1986). Buckling of tapered bars under stepped axial loads, . *Journal of structural engineering* 112 (6), 1346-1354.
- Ermopoulos, J. (1997). Equivalent buckling length of non-uniform members. *Journal of Constructional Steel Research*, 42 (2), 141-158.
- European Committee for Standardization. (1992). *Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Brussels: EC3 European Committee for Standardization. ENV1993-1-1.
- European committee for Standardization. (2005). *Eurocode 3: Design of steel structures: General rules and rules for buildings*.
- Galambos, T. V. (1988). *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. 4th ed.* Minneapolis: Wiley-Interscience.
- Gere, J., & Carter, W. (1962). Critical buckling loads for tapered columns. *J. Struct. Div. ASCE*, 112(6), 1346-1354.
- Gonçalves, R., & Camotim, D. (2004). On the Application of Beam-Column Interaction Formulae to Steel Members with Arbitrary Loading and Support Conditions. *Journal of Constructional Steel Research*, 60, 433-450.
- Greiner, R. (2001). *Background Information on the Beam-Column Interaction Formulae at Level 1. ECCS TC 8, Report N° TC 8-2001*. Graz: Technical University Graz.
- Greiner, R. (2002). *Recent Developments of the New Rules for Member Stability in Eurocode 3. Institute for Steel, Timber and Shell Structures*. Graz: Graz University of Technology.
- Greiner, R., & Kaim, P. (2001). *Comparison of LT-Buckling Design Curves with Test Results*. ECCS - Validation Group, Report N° 23.

-
- Greiner, R., & Kaim, P. (2003). *Comparison of LT-Buckling Curves with Test Results. ECCS - TC8. Supplementary Report N° 2003-10.*
- Greiner, R., & Lindner, J. (1999). *Proposal for Buckling Resistance of Members: Flexural and Lateral Torsional Buckling. - Validation Group, Report N° 6. ECCS.*
- Greiner, R., & Lindner, J. (2000). *Proposal for Buckling Resistance of Members: Flexural and Lateral Torsional Buckling. ECCS - Validation Group, Report N° 7.*
- Greiner, R., & Lindner, J. (2006). Interaction formulae for members subjected to bending and axial compression in Eurocode 3 - the Method 2 approach. *Journal of Constructional Steel Research*, 62, 757-770.
- Greiner, R., & Ofner, R. (1999). Validation of Design Rules for Member Stability of European Standards-Proposal for Buckling Rules. . *Stability and Ductility of Steel Structures*. Timisoara, Romania: Dubina, D. & Iványi, M. editors. Elsevier.
- Greiner, R., & Ofner, R. (2001). *Proposal for Improved Interaction Factors k_{LT} for LT-Buckling at Level 1. ECCS - TC8, Report N° 2001-016.*
- Greiner, R., Ofner, R., & Salzgeber, G. (1998). *Verification of GMNIA-Results. ECCS - Validation Group, Report N° 2.*
- Greiner, R., Ofner, R., & Salzgeber, G. (1999). *Lateral Torsional Buckling of Beam-Columns: Theoretical Background. ECCS - Validation Group, Report N° 5.*
- Guo, Y.-l., Zhang, B.-h., Zhao, S.-y., Dou, C., & Pi, Y.-L. (2014). Ultimate Resistance Design of Shuttle-Shaped Steel Tubular Latticed Columns. *Journal of Structural Engineering*, 140 (10).
- Gupta, P., Wang, S., & Blandford, G. (1996). Lateral-torsional buckling of nonprismatic I-beams. *Journal of Structural Engineering*;122(7), 748-755.
- Helwig, T. A., Frank, K. H., & Yura, J. A. (1997). Lateral-Torsional Buckling of Singly Symmetric I-Beams. *Journal of Structural Engineering*, (September), 1172-1179.
- Institution, BS 5950-1. (2000). *Structural Use of Steelwork in Buildings. Code of Practice for Design. Rolled and Welded Sections*. British Standards.
- Jiménez, G., & Galambos, T. (2006). SDSS2006 International Colloquium of Stability and Ductility of Steel Structures, September 6-8. *The American Institute of Steel Construction (AISC) design criteria for web-tapered members: virtues and shortcomings*. IST Press.

- Johnston, B. G. (1976). *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures 3rd ed.* Wiley, New York: SSRC.
- Kaehler, R. C., White, D. W., & Kim, Y. D. (2011). *Frame Design Using Web-Tapered Members.* American Institute of Steel Construction.
- Kaim, P. (2004). *Spatial Buckling Behaviour of Steel Members under Bending and Compression. PhD thesis.* Graz: Institute for Steel, Timber and Shell Structures. Graz University of Technology, H. 12.
- Kanchanalai, T. (1977). The Design and Behavior of Beam-Columns in Unbraced Steel Frames. AISI Project N° 189, Report N° 2. Texas-Austin: Civil Engineering/Structures Research Lab. University of Texas-Austin.
- Kim, M., Chang, K., & Lee, G. (1997). Elastic and inelastic buckling analysis of thin-walled tapered members. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(7), 727-737.
- Kim, Y. D. (2010). *Behavior and design of metal Building Frames using general prismatic and web-tapered steel I-section members. D.Ph.* Georgia: Georgia Institute of Technology.
- Kirby, P. A., & Nethercot, D. A. (1979). *Design for Structural Stability.* Granada Publishing, Suffolk.
- Kitipornchai, S., & Trahair, N. (1972). Elastic stability of tapered I-beams. *ASCE Journal of the Structural division*, 98 (3), 713-728.
- Lechner, A. (2005). *Plastic Cross-Section Capacity of Semi-Compact Steel Sections. Ph.D. Thesis.* Graz: Institute for Steel Structures and Shell Structures. TU, Graz.
- Lee, G., M.L, M., & Ketter, R. (1972). Design of Tapered Members. *Welding Research Council Bulletin*, 173, 1-32.
- Lei, Z., & Shu, T. G. (2008). Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 64, 1379-1393.
- Li, G.-Q., & Li, J.-J. (2002). A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 58, 1531-1544.
- Li, J.-J., Li, G.-Q., & Chan, S.-L. (2003). A second-order inelastic model for steel frames of tapered members with slender web. *Engineering Structures*, 25, 1033-1043.
- Li, Q. (2001 a). Exact solutions for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 20 (3), 485-500.

-
- Li, Q. (2001 b). Analytical solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with arbitrary distribution of flexural stiffness or axial distributed loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 (2), 349-366.
- Li, Q. (2002). Non-conservative stability of multi-step non-uniform columns. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 2387-2399.
- Li, X.-X. (2007). Flexural strength for general lateral-torsional buckling. *Journal of Structural Engineering*, 133(5), 674-682.
- Lim, N. H., Park, N. H., Kang, Y. J., & Sung, I. H. (2003). Elastic Buckling of I-Beams Under Linear Moment Gradient. *International Journal of Solid and Structures*, 40, 5635-5647.
- Lindner, J. (1997). Design of Steel Beams and Beam Columns. *Engineering Structures*, 19(5), 378-384.
- Lindner, J. (2000). *Lateral Torsional Buckling Consideration of Different Moment Distribution by Factor f* . . ECCS, Report N° TC 8-2000-019.
- Lindner, J. (2001). *Evaluation of Interaction Formulae at Level 1 Approach with Regard to Ultimate Load Calculations and Test Results: Flexural Buckling and Lateral Torsional buckling*. . Berlin: Report 2144E. T.U. .
- Lindner, J. (2003). Design of Beams and Beam Columns. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 5, 38-47.
- Lindner, J., & Gietzelt, R. (1986). *Design equations for biaxial loaded steel beam-columns*. . Berlin: Bericht VR2041E. Institut für Baukonstruktionen und Festigkeit TU Berlin (internal report).
- Lopez, A., A., Yong, D., & Serna, M. (2006). SDSS2006 International Colloquium of Stability and Ductility of Steel Structures, September 6-8, 2006. *Lateral-torsional buckling of steel beams: A general expression for the moment gradient factor*. IST Press.
- LRFD, A. (1994). *Load and Resistance Factor Design*. Chicago: American Institute of Steel Construction (AISC).
- Manual of Steel Construction. (1994). *Load and Resistance Factor Design*,. AISC.
- Maquoi, R., & Rondal, J. (1982). *Sur la force portante des poutres colonnes*. . Annales des travaux publics de Belgique.

- Marques, L. R. (2012). *Tapered steel members: Flexural and lateral-torsional buckling*. Coimbra: Universidade de Coimbra.
- Marques, L., Silva, L. S., Greiner, R., Rebelo, C., & Taras, A. (2013). Development of a consistent design procedure for lateral-torsional buckling of tapered beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 89, 213-235.
- Marques, L., Silva, L. S., Rebelo, C., & Santiago, A. (2014). Extension of EC3-1-1 interaction formulae for the stability verification of tapered beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 100, 122-135.
- Marques, L., Taras, A., Silva, L. S., Greiner, R., & Rebelo, C. (2012). Development of a consistent buckling design procedure for tapered columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 72, 61-74.
- Massonnet, C. (1959). Stability Considerations in the Design of Steel Columns. *ASCE. Journal of the Structural Division*, 85(September), 75-111.
- Massonnet, C. (1976). *Forty Years of Research on Beam-Columns in Steel*. Solid Mechanics Archives, 1(1).
- Mohebkhah, A. (2004). The moment-gradient factor in lateral-torsional buckling on inelastic castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 60, 1481-1494.
- Nethercot, D. A. (1983). Elastic Lateral Buckling of Beams. Beams and Beam Columns: Stability and Strength. In *Applied Science Publisher* (pp. 1-34). London: Narayama, R., editor.
- Nethercot, D. A. (1988). *Lateral Buckling. Stability of Steel Structures*. Budapest: Iványi, M., editor. Akademiai Kiado.
- Nethercot, D. A., & Rockey, K. (1972). A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams. *AISC Engineering Journal*, (July), 96-107.
- Nguyen, N. D., Nguyen-Van, H., Han, S.-y., Choi, J.-H., & Kang, Y.-J. (2013). Elastic Lateral-torsional Buckling of Tapered I-girder with Corrugated Webs. *International Journal of Steel Structures*, March 2013, Vol 13, No 1, 71-79.
- Ofner, R. (1997). *Traglasten Von Stäben aus Stahl bei Druck und Biegung*. Ph.D. Thesis. Graz: Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke. TU.
- Ofner, R. (1999). Results of a Parametric Study of Steel Beams Under Axial Compression and Biaxial Bending - Comparisons with Code Regulations. Prag: Eurosteel Conference.

-
- Ofner, R. (2003). *Buckling Check of Members and Frame Based on Numerical Simulations*. Graz: Institute for Steel, Timber and Shell Structures. Graz University of Technology.
- Ofner, R., Salzgeber, G., & Guggenberger, W. (1999). *Ultimate Loads of Beam-Columns Under General Loading Conditions: Comparison of Different Analysis Approaches*. Graz: Institute for Steel, Timber and Shell Structures. Graz University of Technology.
- Park, J. S., & Stallings, J. M. (2003). Lateral-Torsional Buckling of Stepped Beams. *Journal of Structural Engineering*, Vol 129, Nº 11, 1457-1465.
- Park, J. S., Stalling, J. M., & Kang, Y. J. (2004). Lateral-Torsional Buckling of Prismatic Beams with Continuous Top-Flange Bracing. *Journal of Constructional Steel Research*, 60, 147-160.
- Polyzois, D., & Raftoyiannis, I. (1998). Lateral-torsional Stability of Steel Web-tapered I-beams. *Journal of Structural Engineering*, 124(10), 1208-1216.
- Prawel, S., Morrel, M., & Lee, G. (1974). Bending and Buckling Strength of Tapered Structural Members. *Welding Research*, 53 (2), 75-84.
- Raftoyiannis, I. G., & Adamakos, T. (2010). Critical Lateral-Torsional Buckling Moments of Steel Web-Tapered I-beams. *The Open Construction and Building Technology Journal* 4, 105-112.
- Raftoyiannis, I., & Ermopoulos, J. (2005). Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections. *Engineering Structures*, 27 (8), 1248-1257.
- Riahi, H., Barjoui, A. S., Bazazzadeh, S., & Etezady, S. (2012). *Buckling Analysis of Non-Prismatic Columns Using Slope-Deflection Method*. Lisboa: 15 WCEE.
- Ronagh, H., Bradford, M., & Attard, M. (2000). Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory. *Computers and Structures*, 77, 285-299.
- Ronagh, H., Bradford, M., & Attard, M. (2000). Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application. *Computers and Structures*, 77, 301-313.
- Ross, D. A., & Chen, W. F. (1976). Design Criteria for Steel I-Columns Under Axial Load and Biaxial Bending. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 3(2).
- Saffari, H., Rahgozar, R., & Jahanshahi, R. (2008). An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members. *Journal of Constructional Steel Research*, 64, 400-406.
- Salvadory, M. G. (1955). Lateral Buckling of I-Beams. *ASCE Transactions*, 120(1), 1165-1177.

- Salzgeber, G. (2000). *LT-Buckling Curves*. ECCS, Report N° 20. TC 8-2000-01.
- Salzgeber, G. (2000). *LT-Buckling of Beam-Columns, Derivation of Elastic 2nd Order Solutions*. Graz: Internal Report, TU.
- Sapalas, V., Samofalov, M., & Saraskinas, V. (2005). Fem stability analysis of tapered beam-columns. *Journal of Civil Engineering and Management, Vol XI, N° 3*, 211-216.
- Serna, M., Lopez, A., Puente, I., & Yong, D. (2006). Equivalent uniform moment factors for lateral-torsional buckling of steel members. *Journal of Constructional Steel Research, 62 (6)*, 566-580.
- Siginer, A. (1992). Buckling of columns of variable flexural rigidity. *Journal of Engineering Mechanics, 118*, 640-643.
- Soltani, M., Asgarian, B., & Mohri, F. (2014). Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by power series method. *Journal of Constructional Steel Research 96*, 106-126.
- Suryoatmono, B., & Ho, D. (2002). The Moment-Gradient Factor in Lateral-Torsional Buckling of Wide Flange Steel Sections. *Journal of Constructional Steel Research, 58*, 1247-1264.
- Tebedge, N., & Chen, W. F. (1974). Design Criteria for Steel H-Columns Under Biaxial Loading. *ASCE, Journal of the Structural Division, 100, N° ST3*, 579-598.
- Timoshenko, S., & Gere, J. (1961). *Theory of elastic stability*. New York: McGray-Hill.
- Totry, E. M., Altus, E., & Proskura, A. (2007). Buckling of non-uniform beams by a direct functional perturbation method. *Probabilistic Engineering Mechanics, 22*, 88-99.
- Trahair, N. (2012). Inelastic buckling design of monosymmetric I-beams. *Engineering Structures 34*, 564-571.
- Trahair, N. (2014). Bending and buckling of tapered steel beam structures. *Engineering Structures 59*, 229-237.
- Trahair, N. (2014). Interaction buckling of tapered beams. *Engineering Structures 62-63*, 174-180.
- Trahair, N. S. (1993). *Flexural-Torsional Buckling of Structures*. Boca Raton: CRC Press.
- Trahair, N. S. (1998). *Multiple Design Curves for Beam Lateral Buckling. Stability and Ductility of Steel Structures*. Usamy, T. & Itoh, Y., editors. Pergamon.

-
- Villette, M. (2004). *Analyse critique du traitement de la barre comprimée et fléchie et propositions de nouvelles formulations. PhD Thesis*. Liège: Faculté des Sciences Appliquées. Université of Liège.
- Villette, M., Boissonnade, N., Muzeau, J.-P., & Jaspart, J.-P. (2000). *Development of a comprehensive formula for the design of beam-columns*. Liege: Internal report, Baudin-Châteauneuf, LERMES-CUST. University of Liege.
- Vlasov, V. Z. (1961). *Thin-Walled Elastic Beams. 2nd ed.* Washington (DC): National Science Foundation.
- W.H. Duan, C. W. (2008). Exact solution for buckling of columns including self-weight. *Journal of Engineering Mechanics*, 134 (1), 116-119.
- White, D. W., & Clarke, M. J. (1997). Design of Beam-Columns in Steel Frames. I: Philosophies and Procedures. *Journal of Structural Engineering*, 123(12), 1556-1564.
- White, D. W., & Clarke, M. J. (1997). Design of Beam-Columns in Steel Frames. II: Comparison of Standards. *Journal of Structural Engineering*, 123(12), 1565-1575.
- Yang, Y., & Yau, J. (1987). Stability of beams with tapered I-sections. *ASCE Journal of the Structural division*, 113 (9), 1337-1357.
- Yau, J.-D. (2006). Stability of tapered I-Beams under torsional moments. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42, 914-927.
- Yong, D. J., López, A., & Serna, M. A. (2006). A Comparative Study of AISC LRFD and EC3 Approaches to Beam-Column Buckling Resistance. *Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures vol 2*, (pp. 1109-1116). Lisbon, Portugal.
- Yuan, W.-b., Kim, B., & Chen, C.-y. (2013). Lateral-torsional buckling of steel web tapered tee-section cantilevers. *Journal of Constructional Steel Research* 87, 31-37.
- Zhang, B.-H., Guo, Y.-L., & Dou, C. (2013). Ultimate bearing capacity of asymmetrically double tapered steel columns with tubular cross-section. *Journal of Constructional Steel Research* 89, 52-62.