



*FACULTAD
DE
CIENCIAS*

MODELOS MATEMÁTICOS EN MACROECONOMÍA

(Mathematical models in macroeconomics)



Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Lucía Méndez Gutiérrez

Director: Luis Alberto Fernández Fernández

Octubre-2015

Índice general

1.	Resumen	4
2.	Introducción	5
2.1.	Evolución histórica y motivación	5
2.2.	El uso de las matemáticas	5
3.	El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico constante y crecimiento exponencial de la población	6
3.1.	Introducción	6
3.2.	Formulación del modelo	9
3.3.	Estudio analítico	27
4.	El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico y crecimiento de la población, ambos exponenciales	33
4.1.	Introducción	33
4.2.	Formulación del modelo	35
4.3.	Estudio analítico	36
5.	El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico constante y crecimiento logístico de la población	38
5.1.	Introducción	38
5.2.	Formulación del modelo	40
5.3.	Estudio analítico	43
6.	Comparativa de los tres modelos	47
7.	Glosario	53

1. Resumen

El análisis del crecimiento económico a largo plazo ha sido, es y será un tema de gran interés por parte de economistas y gobiernos. Especialmente en la actualidad, donde la crisis mundial ha provocado una desaceleración económica. Una herramienta interesante que nos permite conocer los factores que determinan este crecimiento económico es la modelización matemática.

En el presente trabajo estudiaremos algunas funciones de producción clásicas, útiles para determinar la contribución del capital, del trabajo y del progreso tecnológico en el aumento de la producción de un país, y analizaremos su ajuste a unos datos reales mediante mínimos cuadrados no lineales.

Nos centraremos, tanto desde el punto de vista teórico como computacional, en tres variantes del **modelo neoclásico de Solow-Swan**, introducido en 1956 por Robert Solow a través del artículo “*A Contribution to the Theory of Economic Growth*” [14] y cuyas contribuciones le supusieron el Premio Nobel de Economía de 1987. Finalizaremos con una comparativa de los modelos estudiados.

Palabras clave: Modelización matemática, crecimiento económico, sistemas dinámicos, modelo de Solow-Swan, macroeconomía.

Abstract

Analysis of economic growth in the long term has been, is and will be an issue of great interest for economists and governments. Especially nowadays, where the global crisis has caused an economic slowdown. An interesting tool for knowing the factors which determine this economic growth is the mathematical modelling.

In this work we will study some classical production functions, which are useful to determine the contribution of the capital, the work and the technological progress in the increase of the production of a country, and we will analyze their fitting to real historical data by using nonlinear least squares techniques.

Our main focus will be, both from the theoretical and computational point of view, three variants of **the neoclassical Solow-Swan model of economic growth**, which was introduced in 1956 by Robert Solow in the paper “*A Contribution to the Theory of Economic Growth*” [14] and whose contributions supposed to him the Nobel Prize on Economy in 1987. We will finish with a comparison of the studied models.

Key words: Mathematical modelling, economic growth, dynamical systems, Solow-Swan model, macroeconomics.

2. Introducción

2.1. Evolución histórica y motivación

A lo largo de la historia ha habido grandes inestabilidades económicas marcadas por importantes crisis mundiales. De ahí que aparezca la necesidad de reconstruir las economías nacionales, así como la de descubrir los factores que generan el crecimiento económico. Por este motivo, empiezan a nacer las distintas escuelas de pensamiento económico. Así, en 1776, y gracias a la publicación de *“La riqueza de las naciones”* de **Adam Smith**, tiene lugar la primera de ellas. Formada por economistas clásicos que basaban sus teorías en el entorno agrario y cuestionaban, por la **Ley de los Rendimientos Marginales Decrecientes** (ver Glosario), que el crecimiento fuese indefinido. Hasta que, David Ricardo afirmó, de manera empírica, que con la tecnología era posible alcanzar un crecimiento indefinido y continuo (ver [2], págs. 77-82).

Pese a que la escuela económica clásica no demostró que la innovación era capaz de vencer los rendimientos decrecientes, sí lo hizo la Primera Revolución Industrial (segunda mitad del siglo XVIII) al obtener un crecimiento económico sostenido. Asimismo, tras esta revolución, las tasas de crecimiento económico empezaron a variar mucho entre países y algunos de estos pasaron de pobres a ricos. Hechos que las teorías del crecimiento económico tendrían que explicar a través de las matemáticas.

Así, a finales del siglo XIX, se inicia una etapa de importante crecimiento económico. Se involucran en el análisis diferentes matemáticos y se desarrollan las primeras herramientas de análisis. Es aquí donde nace la escuela neoclásica, en 1928, con el modelo de crecimiento económico de Ramsey, que explica el crecimiento económico a largo plazo con una función de producción de proporciones fijas y que predice un sistema económico inestable. Más tarde, en 1956, tiene lugar el modelo neoclásico de crecimiento económico de Solow-Swan que propone una función de producción con sustitución de factores y predice una estabilidad dinámica del sistema económico (ver [2], págs. 84-89).

En definitiva, con el uso de los modelos matemáticos, se ha avanzado mucho en macroeconomía. Sin embargo, los constantes cambios de la economía han hecho que, el estudio del crecimiento económico (necesario para alcanzar un mayor bienestar de la población) siga siendo de gran interés.

2.2. El uso de las matemáticas

Desde los economistas neoclásicos se empezaron a introducir los primeros modelos matemáticos para explicar el crecimiento económico producido por los distintos factores. Estos modelos, además de provocar avances importantes, convirtieron la modelización matemática en herramienta fundamental para sus análisis.

Los modelos económicos parten de supuestos que permiten simplificar la realidad, dejando de lado algunos hechos para concentrar la atención en aquello que los modelos quieren estudiar. Las matemáticas son el lenguaje utilizado para presentar estos modelos y son las ecuaciones las que describen las relaciones entre las distintas variables que el modelo presenta. Además el posterior estudio de éstos lleva a tomar decisiones políticas para mejorar el crecimiento económico.

Por otra parte, las simulaciones numéricas son muy útiles a la hora de realizar la comparativa de modelos.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en primer lugar, estudiaremos el modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico constante y crecimiento exponencial de la población. A continuación, analizaremos dos variantes del mismo: uno con progreso tecnológico y crecimiento de la población, ambos exponenciales; y otro con progreso tecnológico constante y crecimiento logístico de la población. Y por último, elaboraremos una comparativa del modelo y de sus variantes.

Podemos establecer tres artículos clave, [14], [11] y [6], que han definido la estructura básica de este trabajo.

3. El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico constante y crecimiento exponencial de la población

3.1. Introducción

El modelo de Solow-Swan, perteneciente a la teoría neoclásica, explica los factores que inciden en el crecimiento económico a largo plazo. Actualmente, es uno de los pilares fundamentales de la macroeconomía, pues sobre él se plantean diversas teorías como: ¿por qué nuestra renta nacional crece? ó ¿por qué algunas economías crecen más deprisa que otras?.

En 1956 Robert Solow introdujo [14] dicho modelo que, ahora, lleva su nombre junto al de Trevor Swan y que en 1987 le sirvió para ganar el premio Nobel de Economía.

Para medir el crecimiento de una economía es necesario introducir algunas nociones básicas. Para ello, haremos uso de la referencia [10]. Así, denotaremos $Y(t)$ como la producción de bienes y servicios realizados en un instante de tiempo t en un país, producción que se puede descomponer como:

$$Y(t) = C(t) + I_B(t) + G(t) + N_X(t), \quad (3.1)$$

donde:

- $C(t)$: (Consumo) Gasto de las familias en bienes y servicios (*coches, electrodomésticos, productos electrónicos, joyas, alimentos, ropa, cosméticos, transporte, sanidad, educación,...*).
- $I_B(t)$: (Inversión) Gasto de las empresas en bienes, como *plantas y equipos*, usados para producir otros bienes.

- $G(t)$: (Gasto público) Gasto del gobierno en bienes (*museos públicos y hospitales*) y servicios (*distribución de electricidad, suministro de agua potable, transporte,...*).
- $N_X(t)$: (Exportaciones netas) Gasto por parte de países extranjeros en bienes producidos en nuestro país (exportaciones) menos gastos por parte de los residentes de nuestro país en bienes extranjeros (importaciones).

Como el comportamiento de los distintos elementos de (3.1) es muy complicado, el análisis global resulta inviable. Por ello, es necesario identificar las variables con mayor importancia en el estudio a realizar y elegir una situación extremadamente simplificada, de hecho poco realista, pero lo suficiente para obtener conclusiones útiles en la práctica. En concreto, el modelo de Solow-Swan se centra en una economía que verifica los siguientes supuestos (recogidos en [11]):

- La economía no intercambia bienes o servicios con otros países (economía cerrada):

$$N_X(t) = 0. \quad (3.2)$$

- El gobierno no realiza ningún gasto público:

$$G(t) = 0, \quad (3.3)$$

y por (3.2) y (3.3), la identidad (3.1) se reduce a:

$$Y(t) = C(t) + I_B(t). \quad (3.4)$$

Por tanto, en una economía cerrada, donde el gobierno no gasta, la producción de bienes y servicios se realiza entre familias (consumo) y empresas (inversión).

- El ahorro de las familias es igual a la inversión de las empresas:

$$S(t) = I_B(t). \quad (3.5)$$

Se trata de una economía formada únicamente por hogares, donde las familias consumen o ahorran.

- La tasa de ahorro es constante:

$$S(t) = sY(t), \quad (3.6)$$

donde s es el coeficiente de ahorro ($0 < s < 1$). Así, suponemos que las familias ahorran una parte constante de su ingreso. Además, teniendo en cuenta (3.4), (3.5) y (3.6), tenemos que la otra parte restante de su ingreso la dedican al consumo:

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \quad (3.7)$$

- Existen dos factores de producción: el capital (K) y la mano de obra (L)

$$Y = F(K, L), \quad (3.8)$$

$F(K, L)$ se conoce como **función de producción**, y representa la relación entre los factores utilizados para la producción de bienes y servicios (K, L) y la cantidad obtenida de producción de bienes y servicios (Y). En este contexto $K(t)$ representa los bienes que, en el instante de tiempo t , forman parte del proceso productivo de una empresa (*maquinaria, instalaciones,...*). En lo que sigue supondremos siempre que $K, L \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

- La inversión neta es igual a la inversión bruta menos la depreciación:

$$\frac{dK}{dt}(t) = I_B(t) - \delta K(t), \quad (3.9)$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital ($0 < \delta < 1$).

- La población de la economía es equivalente a la fuerza laboral (L). Asimismo, se supone que la población total crece de forma exponencial en el tiempo:

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n, \quad \text{con } n > 0. \quad (3.10)$$

Integrando (3.10), obtenemos la fuerza laboral de la economía en un instante t :

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \quad (3.11)$$

donde L_0 es la población laboral inicial y n la tasa de crecimiento de la población.

- La función de producción F es neoclásica, lo que significa que cumple las siguientes condiciones:

a) Homogénea de grado uno:

$$F(\tau K, \tau L) = \tau F(K, L), \quad \forall \tau > 0. \quad (3.12)$$

b) Si no utiliza el factor capital o el factor trabajo, no puede haber producción:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0. \quad (3.13)$$

c) F es dos veces continuamente diferenciable

d) Los productos marginales (ver Glosario) son positivos:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) > 0, \quad (3.14)$$

por tanto, se verifica la productividad marginal decreciente (Ver Glosario):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) < 0. \quad (3.15)$$

e) Satisface las condiciones de Inada:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= 0, \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = 0, \\ \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= +\infty, \quad \lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = +\infty, \end{aligned} \quad (3.16)$$

que indican que las primeras unidades de capital y de trabajo son muy productivas y que cuando las unidades de capital o de trabajo son muy grandes, sus productos marginales son próximos a cero.

3.2. Formulación del modelo

A partir de las hipótesis definidas en la introducción y de la observación que a continuación se muestra, formularemos el modelo.

Observación. 3.1. *Trabajar con las variables Y , K , L es importante. Sin embargo, en la práctica lo más habitual es utilizar variables referidas a la población. Así, como nuestra función de producción es homogénea de grado 1, podemos trabajar con la siguiente función de producción per cápita:*

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) \quad (3.17)$$

Sean $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, $c = \frac{C}{L}$ la producción per cápita, el capital per cápita y el consumo per cápita, respectivamente. Podemos reescribir (3.17) como:

$$y = f(k) \quad (3.18)$$

Luego, los supuestos (3.7) y (3.13)–(3.16) se pueden expresar como: $c = (1 - s)y$

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0.$$

Teorema 3.1 (Ecuación Fundamental de Solow). *Si la economía cumple con los supuestos (3.2)–(3.16), la ecuación fundamental de Solow es:*

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t). \quad (3.19)$$

Demostración. Sabemos que $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego,

$$k'(t) = \frac{K'(t)L(t) - K(t)L'(t)}{L^2(t)} = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} \cdot \frac{K(t)}{L(t)}$$

Por (3.10) y la observación anterior tenemos que:

$$k'(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} - nk(t) \Rightarrow \frac{K'(t)}{L(t)} = k'(t) + nk(t) \quad (3.20)$$

Pero, por (3.9), $K'(t) = I_B(t) - \delta K(t)$. Luego,

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = \frac{I_B(t)}{L(t)} - \frac{\delta K(t)}{L(t)} \quad (3.21)$$

Igualando (3.20) y (3.21),

$$\frac{I_B(t)}{L(t)} - \delta k(t) = k'(t) + nk(t) \Rightarrow k'(t) = \frac{I_B(t)}{L(t)} - (\delta + n)k(t)$$

Finalmente, por (3.5), (3.6) y la observación anterior, $I_B(t) = S(t) = sY(t)$ e $\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t)$. Así, teniendo en cuenta (3.17) y (3.18),

$$k'(t) = sy(t) - (\delta + n)k(t), \quad \text{donde } y(t) = f(k(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right). \quad (3.22)$$

□

Como bien sabemos, $f(k(t))$ depende de la función de producción elegida y por tanto (3.19) también. Así que empezaremos por analizar alguna de estas funciones.

Funciones de producción

Recordemos que se denomina **función de producción** a la relación existente entre el producto obtenido (Y) y la combinación de factores (K y L) utilizada para su obtención. Además, esta función permite analizar cambios futuros (disminución de la mano de obra, carencia de innovación tecnológica, escasez del capital, etc.). Como dijimos en (3.8), se formula:

$$Y = F(K, L).$$

Robert Solow, en su artículo [14], planteó tres posibilidades de función de producción para las que era posible resolver la ecuación diferencial básica (3.19) de forma explícita (al menos en algunos casos):

1. Función de producción de Leontief

También conocida como función de producción de coeficientes fijos, fue introducida por el economista ruso Wassily Leontief en 1941 como:

$$F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\},$$

en donde a (número de unidades de capital requeridas para producir una unidad de producto) y b (número de unidades de trabajo requeridas para producir una unidad de producto) son los coeficientes fijos.

En este caso, (3.19) queda de la siguiente manera:

Teorema 3.2 (Ecuación Fundamental de Solow con la función de producción de Leontief). Si la economía cumple con los supuestos (3.2)-(3.16) y utiliza la función de producción de Leontief, la ecuación fundamental de Solow queda:

$$k'(t) = s \cdot \min\left(\frac{k(t)}{a}, \frac{1}{b}\right) - (\delta + n)k(t). \quad (3.23)$$

Demostración. Basta ver la demostración del Teorema 3.1. Notemos que en este caso, como $F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\}$, $y(t) = f(k(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = \min\left(\frac{k(t)}{a}, \frac{1}{b}\right)$. $\square$

Veamos ahora la solución explícita de (3.23) con la condición inicial $k(0) = k_0$. Para ello, diferenciamos dos casos:

- si $\frac{k(t)}{a} \leq \frac{1}{b}$: $k'(t) = \left(\frac{s}{a} - (\delta + n)\right) k(t)$ y,

$$k(t) = C_1 e^{\left(\frac{s}{a} - (\delta + n)\right)t}, \quad \text{para algún } C_1 \in \mathbb{R}_+.$$
- si $\frac{k(t)}{a} > \frac{1}{b}$: $k'(t) = \frac{s}{b} - (\delta + n)k(t)$ y,

$$k(t) = C_2 e^{-(\delta + n)t} + \frac{s}{b(\delta + n)}, \quad \text{para algún } C_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Ahora:

- si $k_0 > \frac{a}{b}$, al principio

$$k(t) = \left(k_0 - \frac{s}{b(\delta + n)}\right) e^{-(\delta + n)t} + \frac{s}{b(\delta + n)} \quad (3.24)$$

y se pueden diferenciar varios casos:

- 1) $k_0 < \frac{s}{b(\delta + n)} \Rightarrow k'(t) > 0 \Rightarrow k(t)$ es estrictamente creciente.
 Luego, $k(t) > k_0 > \frac{a}{b} \quad \forall t$, y por tanto la expresión de $k(t)$ es (3.24) $\forall t \in \mathbb{R}_+$.
- 2) $k_0 > \frac{s}{b(\delta + n)} \Rightarrow k'(t) < 0 \Rightarrow k(t)$ es estrictamente decreciente.
 - i) Si $k_0 > \frac{a}{b} > \frac{s}{b(\delta + n)}$, entonces existe t_1 tal que $k(t_1) = \frac{a}{b}$. Esto ocurre para $t_1 = -\left(\frac{1}{\delta + n}\right) \ln\left(\frac{a(\delta + n) - s}{k_0 b(\delta + n) - s}\right)$. Notemos que $t_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a(\delta + n) - s}{k_0 b(\delta + n) - s} \in (0, 1)$, lo cual es cierto en este caso. Entonces,

$$k(t) = \begin{cases} \left(k_0 - \frac{s}{b(\delta + n)}\right) e^{-(\delta + n)t} + \frac{s}{b(\delta + n)} & \text{si } t \in [0, t_1] \\ \frac{a}{b} e^{\left(\frac{s}{a} - (\delta + n)\right)(t - t_1)} & \text{si } t \geq t_1 \end{cases}$$

- ii) Si $k_0 > \frac{s}{b(\delta + n)} > \frac{a}{b}$, entonces $k_0 > k(t) > \frac{a}{b} \quad \forall t$, y por tanto la expresión de $k(t)$ es (3.24) $\forall t > 0$.

- 3) $k_0 = \frac{s}{b(\delta + n)} \Rightarrow k(t) = \frac{s}{b(\delta + n)} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$

- si $k_0 \leq \frac{a}{b}$, al principio

$$k(t) = k_0 e^{\left(\frac{s}{a} - (\delta+n)\right)t} \quad (3.25)$$

y pueden darse tres casos:

- 1) $\frac{s}{a} = \delta + n \Rightarrow k(t) = k_0 \forall t \in \mathbb{R}_+$.
- 2) $\frac{s}{a} < \delta + n \Rightarrow k(t)$ es estrictamente decreciente. Luego, $k(t) < k_0 \leq \frac{a}{b} \forall t$, y por tanto la expresión de $k(t)$ es (3.25) $\forall t \geq 0$.
- 3) $\frac{s}{a} > \delta + n \Rightarrow k(t)$ es estrictamente creciente. Veamos que $\exists t_2$ tal que $k(t_2) = \frac{a}{b}$.

Esto ocurre si $t_2 = \frac{\ln\left(\frac{a}{k_0 b}\right)}{\frac{s}{a} - (\delta+n)}$ y $t_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{k_0 b} > 1$, lo cual es cierto. Entonces,

$$k(t) = \begin{cases} k_0 e^{\left(\frac{s}{a} - (\delta+n)\right)t} & \text{si } t \in [0, t_2] \\ \left(\frac{a}{b} - \frac{s}{b(\delta+n)}\right) e^{-(\delta+n)(t-t_2)} + \frac{s}{b(\delta+n)} & \text{si } t \geq t_2 \end{cases}$$

Una vez resuelta la ecuación (3.23), podemos ver cómo su solución depende de los parámetros s, n, δ, a, b , y de la condición inicial (k_0). A continuación, tomando diferentes valores de dichos parámetros, compararemos los resultados obtenidos al utilizar la solución exacta con los obtenidos numéricamente al usar el método **ode45** del software MATLAB:

Ejemplo 1. Sea una economía con una función de producción de Leontief $F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{0.3}, \frac{L}{0.2}\right\}$, con una tasa de ahorro del 17%, una tasa de natalidad del 2%, una tasa de depreciación del capital del 5% y un stock de capital inicial $k_0 = 3$ unidades de capital, tenemos que $\frac{a}{b} < k_0 < \frac{s}{b(\delta+n)}$. Luego, por (3.24)

$$k(t) \approx -9.14e^{-0.07t} + 12.14, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.26)$$

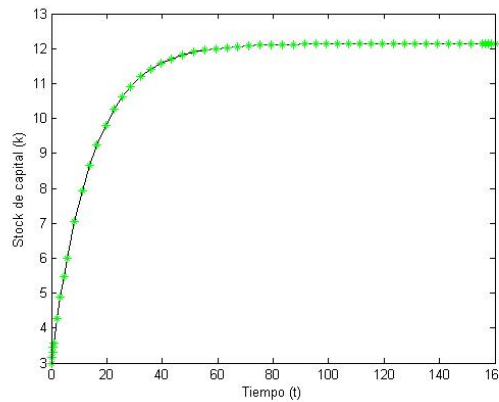


Figura 1: Representación de la solución explícita (línea negra) de $F(K, L) = \min\left\{\frac{K}{0.3}, \frac{L}{0.2}\right\}$, tomando $s = 0.17$, $n = 0.02$, $\delta = 0.05$ y $k_0 = 3$ unidades de capital, en un periodo de tiempo $t = 160$ años. Junto a su solución numérica (* verdes).

En la Figura 1, $k(t)$ es creciente, como habíamos dicho antes. Además, a partir de $t \approx 60$ años, la gráfica se estabiliza en $k(t) \approx 12$ unidades de capital. Hecho que puede verse a partir de (3.26),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -9.14e^{-0.07t} + 12.14 = 12.14 \text{ unidades de capital.}$$

Ahora bien, si en esta economía cambiamos la función de producción de Leontief y la condición inicial (k_0): $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{0.7}, \frac{L}{0.2} \right\}$ y $k_0 = 1$ unidad de capital, respectivamente. Observemos que se cumple $k_0 < \frac{a}{b} < \frac{s}{b(\delta+n)}$. Y en este caso, $k(t)$ es una función definida a trozos que cambia de expresión cuando:

$$t_2 = \frac{\ln \left(\frac{0.7}{0.2} \right)}{0.173} \approx 7.24 \text{ años.}$$

Luego,

$$k(t) \approx \begin{cases} e^{0.17t} & \text{si } t \in [0, t_2] \\ -8.64e^{0.07(t_2-t)} + 12.14 & \text{si } t \geq t_2 \end{cases}$$

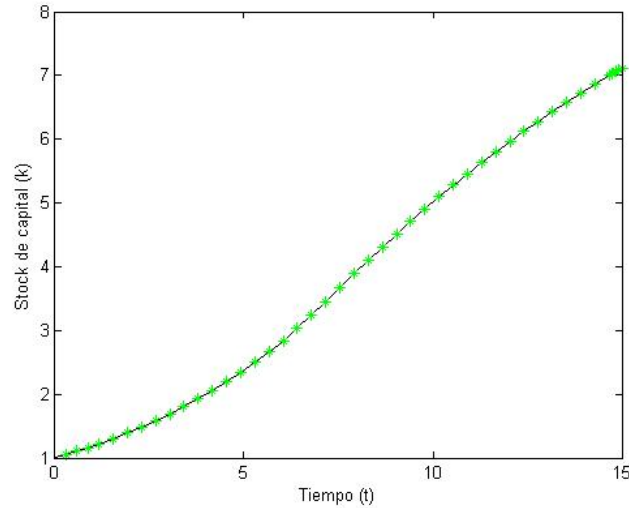


Figura 2: Representación de la solución explícita (línea negra) de la función de producción de Leontief $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{0.7}, \frac{L}{0.2} \right\}$, tomando $s = 0.17$, $n = 0.02$, $\delta = 0.05$ y $k_0 = 1$ unidad de capital, en un periodo de tiempo $t = 15$ años. Junto a su solución numérica (* verdes).

En la Figura 2, $k(t)$ es estrictamente creciente, como bien habíamos dicho. Sin embargo, en $t \approx 7.24$ años hay una pequeña perturbación de la función $k(t)$. Perturbación ocasionada por producirse, en ese instante, el cambio de expresión de la función. Notemos además que se cumple $k(t_2) = 3.5$ unidades de capital $= \frac{a}{b}$.

Ejemplo 2. Sea una economía con una función de producción de Leontief $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{0.9}, \frac{L}{0.2} \right\}$, con una tasa de ahorro del 5%, una tasa de natalidad del 1.2%, una tasa de depreciación del capital del 5% y un stock de capital inicial $k_0 = 6$ unidades de capital. Tenemos que $k_0 > \frac{a}{b} > \frac{s}{b(\delta+n)}$. Y en este caso, $k(t)$ es una función definida a trozos que cambia de expresión cuando:

$$t_1 = - \left(\frac{1}{0.062} \right) \ln \left(\frac{0.0058}{0.0244} \right) \approx 23.17 \text{ años.}$$

Así,

$$k(t) \approx \begin{cases} 1.97e^{-0.062t} + 4.03 & \text{si } t \in [0, t_1] \\ 4.5e^{0.006(t_1-t)} & \text{si } t \geq t_1 \end{cases}$$

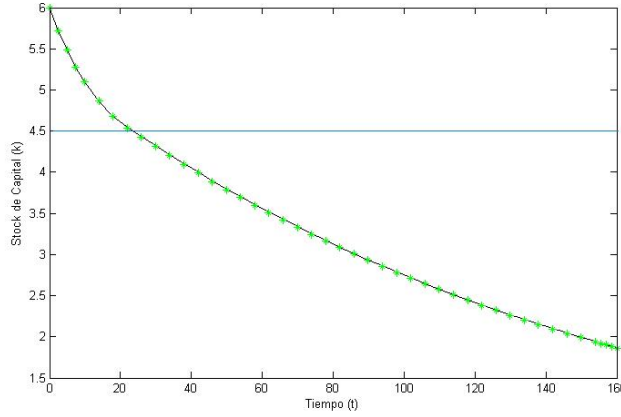


Figura 3: Representación de la solución explícita (línea negra) de la función de producción de Leontief $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{0.9}, \frac{L}{0.2} \right\}$, tomando $s = 0.05$, $n = 0.012$, $\delta = 0.05$ y $k_0 = 6$ unidades de capital, en un periodo de tiempo $t = 15$ años. Junto con su solución numérica (* verdes).

En la Figura 3, $k(t)$ es estrictamente decreciente. Sin embargo, en $t \approx 23.17$ años, se produce una pequeña perturbación ocasionada por el cambio de expresión de la función $k(t)$. Notemos además que se satisface $k(t_1) = 4.5$ unidades de capital $= \frac{a}{b}$.

Ahora, si cambiamos la condicional inicial, tomando $k_0 = 1$ unidad de capital, tenemos que $k_0 < \frac{s}{b(\delta+n)} < \frac{a}{b}$. Luego, por (3.25)

$$k(t) \approx e^{-0.006t}, \quad \forall t \geq 0.$$

En este caso, como $t = 15$ años, la gráfica de $k(t)$ no se va a estabilizar (ver Figura 4). Para ello, tendría que ser un periodo de tiempo más largo. De ser así, veamos en qué valor

se estabilizaría:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0.006t} = 0 \text{ unidades de capital.}$$

Luego, $k(t)$ sería decreciente hasta llegar a $k(t) = 0$, donde se estabilizaría. En otras palabras, $k(t)$ tiene una asíntota horizontal en $t=0$.

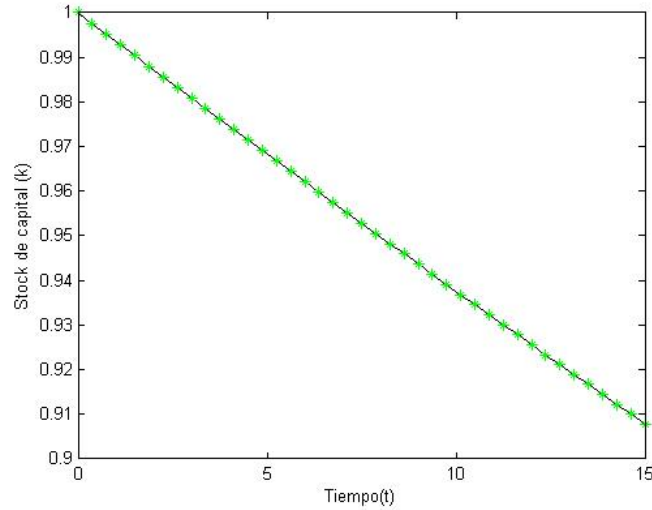


Figura 4: Representación de la solución explícita (línea negra) de la función de producción de Leontief $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{0.9}, \frac{L}{0.2} \right\}$ tomando $s = 0.05$, $n = 0.012$, $\delta = 0.05$ y $k_0 = 1$ *unidad de capital* en un periodo de tiempo $t = 15$ *años*. Junto con su solución numérica (* verdes).

2. Función de producción de Cobb-Douglas

En 1927, Cobb Douglas descubrió que en Estados Unidos los trabajadores se quedaban con el 70 % de la renta total mientras que los capitalistas se quedaban con el 30 %. Esto le llevó a investigar las condiciones bajo las cuales las rentas de los factores mantenían proporciones constantes. Para ello, preguntó a Charles Cobb si había alguna función de producción tal que, si los factores de producción cobraban sus productos marginales (ver Glosario), la proporción de la renta agregada que se quedaba cada uno de ellos fuera constante. Esta era la función de producción, propuesta por Knut Wicksell (1851-1926) y publicada en 1928 por Charles Cobb y Paul Douglas y que ahora lleva su nombre (ver [15]).

Esta función de producción es utilizada en la mayoría de trabajos encontrados en diversas fuentes y viene dada por:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^\beta, \quad (3.27)$$

donde α y β son parámetros que representan el peso de K y de L en la distribución de la renta y A representa el conocimiento tecnológico. Luego veremos que $\alpha + \beta$ se puede considerar igual a 1 y podremos así tomar:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}. \quad (3.28)$$

En este caso último caso (3.19) queda de la siguiente manera:

Teorema 3.3 (Ecuación Fundamental de Solow con la función de producción de Cobb-Douglas). *Si la economía cumple con los supuestos (3.2)-(3.16) y utiliza la función de producción de Cobb-Douglas, la ecuación fundamental de Solow queda:*

$$k'(t) = sAk^\alpha(t) - (n + \delta)k(t). \quad (3.29)$$

Demostración. Basta ver la demostración del Teorema 3.1. Notemos que en este caso, como $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, $y(t) = f(k(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = Ak^\alpha(t)$. $\square$

Veamos ahora la solución de esta EDO no lineal de primer orden (3.29). Para ello, vamos a utilizar que es de tipo Bernoulli y vamos a realizar el cambio de función incógnita $u = k^{1-\alpha}$ llegando a:

$$u'(t) = -(\delta + n)(1 - \alpha) \cdot u(t) + sA(1 - \alpha). \quad (3.30)$$

Esta es una EDO lineal de primer orden y podemos resolverla fácilmente. Así, para cualquier $k_0 > 0$, hay una única solución del problema de valor inicial,

$$\begin{cases} k'(t) = sAk^\alpha(t) - (n + \delta)k(t) \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

dada por:

$$k(t) = \left(C_1 e^{-(\delta+n)(1-\alpha)t} + \frac{sA}{\delta+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{con } C_1 = k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{\delta+n}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.31)$$

3. Familia de funciones de rendimientos constantes a escala de producción

Estas familias vienen dadas por:

$$F(K, L) = (AK^p + L^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.32)$$

donde, Robert Solow se limita al caso $0 < p < 1$ que da los rendimientos marginales decrecientes habituales y de nuevo A representa el conocimiento tecnológico.

En este caso, (3.19) queda de la siguiente manera:

Teorema 3.4 (Ecuación Fundamental de Solow con la función de producción p).
Si la economía cumple con los supuestos (3.2)-(3.16) y utiliza una función de producción p (3.32), la ecuación fundamental de Solow queda:

$$k'(t) = s \cdot (Ak^p(t) + 1)^{\frac{1}{p}} - (\delta + n)k(t). \quad (3.33)$$

Demostración. Basta ver la demostración del Teorema 3.1. Notemos que en este caso, como $F(K, L) = (AK^p + L^p)^{\frac{1}{p}}$, $y(t) = f(k(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = (Ak^p(t) + 1)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

En general, es difícil de obtener la solución explícita de esta EDO no lineal de primer orden (3.33), incluso con programas de cálculo simbólico como MAPLE. En el caso particular $p = \frac{1}{2}$ resulta más sencillo y es lo que toma Robert Solow en su artículo [14]. Así,

$$k'(t) = s(A(\sqrt{k(t)} + 1)^2 - (\delta + n)k(t)). \quad (3.34)$$

Podemos reescribir (3.34) como $k'(t) = (sA^2 - (\delta + n))k(t) + 2sA\sqrt{k(t)} + s$ y realizando el cambio de función incógnita $v(t) = \sqrt{k(t)}$ tenemos que:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(sA^2 - (\delta + n))v^2 + 2sAv + s}{2v}$$

Esta ecuación se puede resolver por variables separadas, en la forma

$$\int \frac{2v}{(sA^2 - (\delta + n))v^2 + 2sAv + s} dv = \int dt \quad (3.35)$$

Ahora,

$$\int \frac{2v}{(sA^2 - (\delta + n))v^2 + 2sAv + s} dv = \int \frac{2v}{s \left(\left(A - \sqrt{\frac{\delta+n}{s}} \right) v + 1 \right) \left(\left(A + \sqrt{\frac{\delta+n}{s}} \right) v + 1 \right)} dv \quad (3.36)$$

Llamemos $C = A - \sqrt{\frac{\delta+n}{s}}$ y $D = A + \sqrt{\frac{\delta+n}{s}}$. Reemplazando en (3.36), la integral queda:

$$\int \frac{2v}{s(Cv + 1)(Dv + 1)} dv$$

Esta integral racional la podemos calcular descomponiéndola en la forma

$$\frac{2}{s(D - C)} \left(\int \frac{1}{Cv + 1} dv - \int \frac{1}{Dv + 1} dv \right)$$

Luego,

$$\frac{2}{s(D - C)} \left(\ln \left((Cv + 1)^{\frac{1}{C}} (Dv + 1)^{-\frac{1}{D}} \right) \right) = t + E, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Y podemos resolver (3.35) como $(Cv + 1)^{\frac{1}{C}}(Dv + 1)^{-\frac{1}{D}} = e^{(t+E)\sqrt{(\delta+n)s}}$. Finalmente, deshaciendo el cambio de variable y despejando E con la condición inicial $k(0) = k_0$, podemos concluir:

$$\left(\frac{C\sqrt{k(t)} + 1}{C\sqrt{k_0} + 1} \right)^{\frac{1}{C}} \left(\frac{D\sqrt{k(t)} + 1}{D\sqrt{k_0} + 1} \right)^{-\frac{1}{D}} = e^{t\sqrt{(\delta+n)s}}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.37)$$

Sin embargo, en (3.37), no aparecen las soluciones constantes proporcionadas al resolver la ecuación de segundo grado $(sA^2 - (\delta + n))v^2 + 2sAv + s = 0$, siendo estas:

$$k_1(t) = \left(\frac{\sqrt{(\delta + n)s} - sA}{sA^2 - (\delta + n)} \right)^2 \quad y \quad k_2(t) = \left(\frac{\sqrt{(\delta + n)s} + sA}{sA^2 - (\delta + n)} \right)^2.$$

En el caso general podemos usar el método numérico **ode45** del software MATLAB para obtener las soluciones de (3.33) con distintos valores de s, n, d, p y A .

Ejemplo. Sea una economía con una función de producción $p: F(K, L) = (K^{0.4} + L^{0.4})^{\frac{1}{0.4}}$, con $A = 1$, una tasa de ahorro del 17%, una tasa de natalidad del 2% y una tasa de depreciación del capital del 5%.

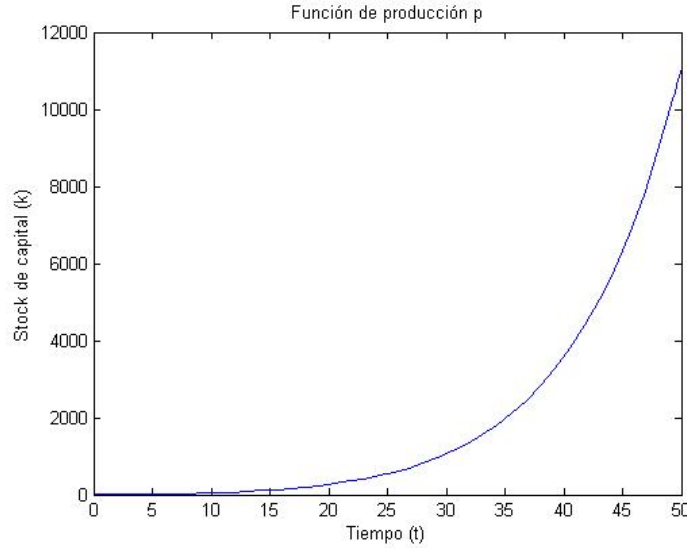


Figura 5: Representación de la solución explícita de la función de producción de p , tomando $s = 0.17$, $n = 0.02$, $\delta = 0.05$, $A = 1$ y $p = 0.4$, en un periodo de tiempo $t = 50$ años.

Teniendo en cuenta la Figura 5, vemos que $k(t)$, en este caso, es estrictamente creciente $\forall t \in [0, 50]$.

Hemos visto las funciones de producción que propuso Solow en su artículo [14], así como su ecuación fundamental y su resolución correspondiente. A continuación, veremos el ajuste de estas tres funciones de producción a unos datos reales históricos, recogidos en [7]. Para ello, utilizaremos el ajuste de los parámetros por un método de mínimos cuadrados no lineales mediante el método de optimización iterativo **fminsearch** del software MATLAB.

Antes de comenzar el ajuste, veamos los datos reales recogidos en [7]:

i	Y_i	K_i	L_i
1	100	100	100
2	101	107	105
3	112	114	110
4	122	122	118
5	124	131	123
6	122	138	116
7	143	149	125
8	152	163	133
9	151	176	138
10	126	185	121
11	155	198	140
12	159	208	144
13	153	216	145
14	177	226	152
15	184	236	154
16	169	244	149
17	189	266	154
18	225	298	182
19	227	335	196
20	223	366	200
21	218	387	193
22	231	407	193
23	179	417	147
24	240	431	161

Cuadro 1: Datos reales de producción (Y), capital (K) y mano de obra (L) en Estados Unidos entre los años 1895 y 1925.

Bien, comencemos el ajuste de las tres funciones de producción a los datos del Cuadro 1.

- Función de producción de Leontief

En este caso tenemos que minimizar:

$$\begin{cases} \text{Min} & H_1(a, b) = \sum_{i=1}^{24} \left(Y_i - \min \left\{ \frac{K_i}{a}, \frac{L_i}{b} \right\} \right)^2 \\ (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

Hemos tomado como valores iniciales $a = 0.20$ y $b = 0.30$. Utilizando el método de optimización **fminsearch** con estos valores iniciales para encontrar los parámetros a y b que minimicen la función (3.38), hemos obtenido $a \approx 0.87$ y $b \approx 0.50$.

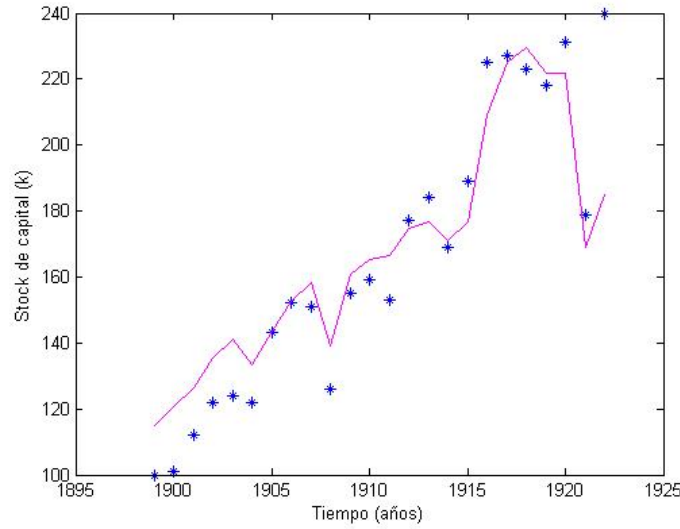


Figura 6: Representación de (3.38) con $a \approx 0.87$ y $b \approx 0.50$, en un periodo de tiempo $t = 30$ años (línea roja), frente a los datos reales de stock de capital (*).

- Función de producción de Cobb-Douglas con tres y con dos parámetros

En este caso tenemos que minimizar:

$$\begin{cases} \text{Min} & H_2(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{24} (Y_i - AK_i^\alpha L_i^\beta)^2 \\ (A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^3 \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{cases} \text{Min} & H_3(A, \alpha) = \sum_{i=1}^{24} (Y_i - AK_i^\alpha L_i^{1-\alpha})^2 \\ (A, \alpha) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (3.40)$$

Como se trata de un método iterativo tenemos que proporcionar unos valores iniciales a los parámetros A , α y β . Vamos a calcular una estimación inicial de A , α y β . Para ello, con los datos del Cuadro 1, linealizamos $Y = F(K, L)$ con F dada por (3.27) y (3.28):

$$\ln(Y_i) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(K_i) + \beta \cdot \ln(L_i), \forall i = 1, \dots, 24$$

$$\ln(Y_i) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(K_i) + (1 - \alpha) \cdot \ln(L_i), \forall i = 1, \dots, 24$$

Resolviendo ahora los sistemas lineales no cuadrados,

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(K_1) & \ln(L_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \ln(K_{24}) & \ln(L_{24}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(A) \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(Y_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ln(Y_{24}) \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln(K_1/L_1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & \ln(K_{24}/L_{24}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(A) \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(Y_1/L_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \ln(Y_{24}/L_{24}) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

mediante el método de mínimos cuadrados lineales se tiene que $\alpha \approx 0.233$, $\beta \approx 0.807$ y $A \approx 0.838$ son los valores iniciales para (3.41) y $\alpha \approx 0.75$, $A \approx 1.015$ para (3.42). Ahora bien, utilizando con estos valores iniciales el método de optimización **fminsearch**, hemos obtenido que $A \approx 1.239$, $\alpha \approx 0.268$ y $\beta \approx 0.691$ son los valores que minimizan la función (3.39) y $A \approx 1.018$, $\alpha \approx 0.250$ son los valores que minimizan (3.40).

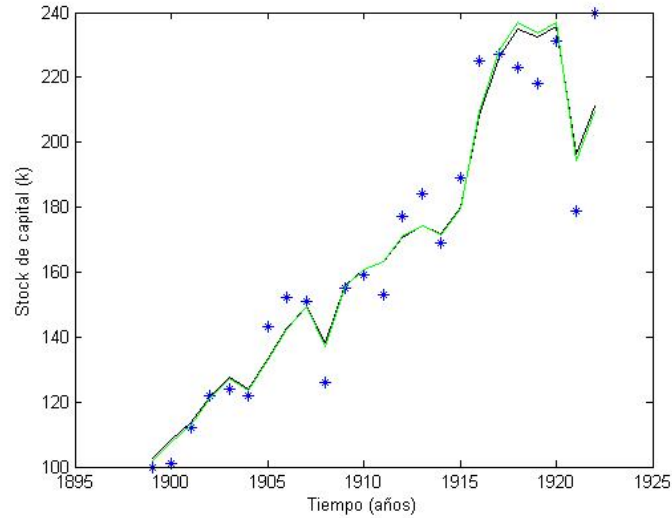


Figura 7: Representación de (3.39) con $\alpha \approx 0.268$, $\beta \approx 0.691$ y $A \approx 1.239$ (línea negra) y de (3.40) tomando $\alpha \approx 0.250$, $A \approx 1.018$ (línea verde) frente a los datos reales del Cuadro 1 (*).

En la Figura 7, hasta aproximadamente el año 1917, el ajuste de las dos funciones a los datos reales es prácticamente el mismo. Sin embargo, a partir del año 1917, la gráfica verde se ajusta (ligeramente) mejor que la negra. Por tanto, podemos decir que la función de producción de Cobb-Douglas con tres parámetros es algo mejor que la función de producción de Cobb-Douglas con dos parámetros, como cabía esperar por tener el modelo un parámetro más. Para estar más seguros de esto que acabamos de decir vamos a analizar el error cuadrático y el coeficiente de determinación (ver Cuadro 2).

Parámetros	Error cuadrático	Coeficiente de determinación
3	50.39	0.9423
2	50.64	0.9418

Cuadro 2: Error cuadrático y coeficiente de determinación de la función de producción de Cobb-Douglas con 2 y 3 parámetros

Aquí, la función de producción de Cobb-Douglas con 3 parámetros tiene un menor error cuadrático y un mayor coeficiente de determinación. No obstante, las diferencias entre ambas son mínimas. Notemos además que:

$$F(\tau K, \tau L) = A(\tau K)^\alpha (\tau L)^\beta = \tau^{\alpha+\beta} A K^\alpha L^\beta = \tau^{\alpha+\beta} F(K, L)$$

Luego, la función de producción Cobb-Douglas con 3 parámetros es homogénea de grado $\alpha + \beta$. Y homogénea casi de grado 1 para los valores del ajuste ($\alpha + \beta \approx 0.268 + 0.691 \approx 0.959$). Por ello, y teniendo en cuenta que el ajuste con la función de producción de Cobb-Douglas con 2 parámetros es similar, aunque ligeramente peor, se prefiere trabajar con esta última.

■ Función de producción p

En el caso de la función de producción de p tenemos que minimizar:

$$\begin{cases} \text{Min} & H_4(A, p) = \sum_{i=1}^{24} (Y_i - (AK_i^p + L_i^p)^{\frac{1}{p}})^2 \\ (A, p) \in \mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (3.43)$$

Al igual que para la función de producción de Leontief, esta función es complicada de linealizar. Por ello, hemos tomado unos valores iniciales $A = 1$ y $p = 0.9$, que nos parecen razonables. Así, hemos obtenido una gráfica de (3.43) junto a los datos reales del Cuadro 1, muy parecida a las anteriores.

Realizado el ajuste de las funciones de producción, procederemos a la comparación de sus errores cuadráticos y de sus coeficientes de determinación.

Función de producción	Error cuadrático	Coefficiente de determinación
H_1	75.17	0.8717
H_2	50.39	0.9423
H_3	50.64	0.9418
H_4	51.02	0.9409

Cuadro 3: Error cuadrático y coeficiente de determinación de todas las funciones de producción propuestas por Robert Solow.

Luego, tras ver el Cuadro 3, la función que mejor se ajusta a los datos reales (Cuadro 1) es la función de producción de Cobb-Douglas con 3 parámetros, con un coeficiente de determinación igual a 0.9423 (muy cercano a 1). Sin embargo, por lo visto con anterioridad, podemos quedarnos con la función de producción de Cobb-Douglas con 2 parámetros.

A continuación vamos a ver si las funciones de producción anteriores cumplen las propiedades de función neoclásica (ver (3.12)–(3.16)):

■ Función de producción de Leontief

Proposición. 3.1. Sean $a > 0$ y $b > 0$, entonces la función de producción de Leontief $F(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\}$ no es neoclásica en $\Omega = \{(K, L) \in \mathbb{R}_+^2 : bK \neq aL\}$.

Demostración. Veamos qué propiedades de función de producción neoclásica no satisface la función de producción de Leontief,

1. Homogénea de grado 1:

$$F(\tau K, \tau L) = \min \left\{ \frac{\tau K}{a}, \frac{\tau L}{b} \right\} = \tau \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\} = \tau F(K, L).$$

2. Si no utiliza el factor capital o el factor trabajo, no puede haber producción:

$$\min \left\{ \frac{K}{a}, 0 \right\} = \min \left\{ 0, \frac{L}{b} \right\} = 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2.$$

3. $F \in C^2(\Omega)$, es decir, F es dos veces continuamente diferenciable en Ω :

- Si $bK < aL$, entonces $F(K, L) = \frac{K}{a}$:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \frac{1}{a}, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}(K, L) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}(K, L) = 0.$$

- Si $bK > aL$, entonces $F(K, L) = \frac{L}{b}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= 0, & \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) &= \frac{1}{b}, & \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}(K, L) &= 0, & \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}(K, L) &= 0.\end{aligned}$$

Notemos que las derivadas parciales de F de primer orden no existen en los puntos $bK = aL$. De ahí que consideremos Ω .

4. Los productos marginales del capital y del trabajo son positivos, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &\geq 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega, \\ \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) &\geq 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega.\end{aligned}$$

Sin embargo, los productos marginales no son decrecientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) &= 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) &= 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega.\end{aligned}$$

5. Condiciones de Inada:

$$\begin{aligned}\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega, \\ \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= \frac{1}{a} \neq +\infty, \quad \forall (K, L) \in \Omega, \\ \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) &= 0, \quad \forall (K, L) \in \Omega, \\ \lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) &= \frac{1}{b} \neq +\infty, \quad \forall (K, L) \in \Omega.\end{aligned}$$

Por tanto, no se cumplen las condiciones de Inada.

Podemos concluir que la función de producción Leontief no es neoclásica por (3.15) y (3.16).

□

■ Función de producción Cobb-Douglas

Proposición. 3.2. Sean $0 < \alpha < 1$ y $A > 0$. Entonces la función de producción Cobb-Douglas $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ es neoclásica en $\mathbb{R}_+^2$.

Demostración. Veamos que se cumplen todas las propiedades de función de producción neoclásica,

1. Homogénea de grado 1:

$$F(\tau K, \tau L) = A(\tau K)^\alpha (\tau L)^{1-\alpha} = \tau A K^\alpha L^{1-\alpha} = \tau F(K, L).$$

2. Si no utiliza el factor capital o el factor trabajo, no puede haber producción:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

3. $F \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$, es decir, F es dos veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) &= \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = (1-\alpha) A K^\alpha L^{-\alpha}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) &= \alpha(\alpha-1) A K^{\alpha-2} L^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) = (1-\alpha)(-\alpha) A K^\alpha L^{-\alpha-1}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}(K, L) &= \alpha(1-\alpha) A K^{\alpha-1} L^{-\alpha} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}(K, L). \end{aligned}$$

4. Los productos marginales del capital y del trabajo son positivos,

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \text{porque } 0 < \alpha < 1 \text{ y } A > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K, L) > 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2,$$

y los productos marginales son decrecientes:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) < 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) < 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2.$$

5. Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0,$$

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \lim_{K \rightarrow 0^+} \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \lim_{L \rightarrow +\infty} (1-\alpha) A K^\alpha L^{-\alpha} = 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \lim_{L \rightarrow 0^+} (1-\alpha) A K^\alpha L^{-\alpha} = +\infty.$$

Se cumplen todas las características de función de producción neoclásica. Por tanto, la función de producción Cobb-Douglas es una función de producción neoclásica. $\square$

- Función de producción p

Proposición. 3.3. Sean $A > 0$ y $0 < p < 1$. Entonces la función de producción p $F(K, L) = (AK^p + L^p)^{\frac{1}{p}}$ no es neoclásica en $\mathbb{R}_+^2$.

Demostración. Veamos, como en el caso de la función de producción de Leontief, qué propiedades no se satisfacen.

1. Homogénea de grado 1:

$$F(\tau K, \tau L) = (A(\tau K)^p + (\tau L)^p)^{\frac{1}{p}} = (\tau^p(AK^p + L^p))^{\frac{1}{p}} = \tau(AK^p + L^p)^{\frac{1}{p}} = \tau F(K, L).$$

2. Si no utiliza el factor capital o el factor trabajo, no puede haber producción

$$F(0, L) = L, \quad F(K, 0) = A^{\frac{1}{p}} K.$$

Por tanto, no se cumple esta característica.

3. $F \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$, es decir, F es dos veces continuamente diferenciable en $\mathbb{R}_+^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = AK^{p-1}(AK^p + L^p)^{\frac{1-p}{p}}, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = L^{p-1}(AK^p + L^p)^{\frac{1-p}{p}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) = A(p-1)K^{p-2}L^p(AK^p + L^p)^{\frac{1-2p}{p}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) = A(p-1)K^pL^{p-2}(AK^p + L^p)^{\frac{1-2p}{p}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}(K, L) = A(1-p)K^{p-1}L^{p-1}(AK^p + L^p)^{\frac{1-2p}{p}} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}(K, L).$$

4. Los productos marginales del capital y del trabajo son positivos, es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K, L) > 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2,$$

y los productos marginales son decrecientes:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) < 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) < 0, \quad \forall (K, L) \in \mathbb{R}_+^2.$$

5. Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{AK^{p-1}}{\sqrt[p]{(AK^p + L^p)^{p-1}}} = A^{\frac{1}{p}} \neq 0,$$

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{AK^{p-1}}{\sqrt[p]{(AK^p + L^p)^{p-1}}} = 0 \neq +\infty,$$

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{L^{p-1}}{\sqrt[p]{(AK^p + L^p)^{p-1}}} = 1 \neq 0,$$

$$\lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \lim_{L \rightarrow 0^+} \frac{L^{p-1}}{\sqrt[p]{(AK^p + L^p)^{p-1}}} = 0 \neq +\infty.$$

Luego, no se cumplen las condiciones de Inada.

Podemos concluir que la función de producción p no es neoclásica por no cumplirse (3.13) y (3.16).

□

Por lo tanto, tras lo visto en este apartado de funciones de producción, podemos concluir que, la función que mejor se ajusta al modelo de Solow-Swan, es la función de producción de Cobb-Douglas con 2 parámetros. Así que, a partir de ahora, será la considerada.

3.3. Estudio analítico

Empezaremos el estudio teórico con el análisis del estado estacionario. El **estado estacionario** es una situación de equilibrio de la economía a largo plazo, donde las variables económicas no experimentan variación. En nuestro caso, el estado estacionario se da cuando $k'(t) = 0$.

$$k'(t) = 0 \Rightarrow sAk^\alpha(t) = (n + \delta)k(t) \Rightarrow \frac{sA}{n + \delta} = k^{1-\alpha}(t) \quad (3.44)$$

Por tanto, el estado estacionario del modelo neoclásico de Solow es:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.45)$$

Analizando esta fórmula podemos ver que, si en nuestra economía se incrementa la tasa de población (n) ó la tasa de depreciación (δ), k^* disminuye. En cambio, si la tasa de ahorro (s) ó el avance tecnológico (A) de la economía en la que nos encontramos aumenta, k^* aumenta. Por tanto, el modelo de Solow predice que los países con mayores tasas de crecimiento de población y de depreciación tendrán menores niveles de capital a largo plazo y que los países con mayores tasas de ahorro y mejores avances tecnológicos tendrán mayores niveles de capital a largo plazo. Vamos a ilustrar esto con un ejemplo propio. Para ello, consideramos dos economías:

X y Z. Ambas con una función de producción Cobb-Douglas $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.7}$ y una tasa de depreciación del capital del 5 %. Pero X con una tasa de ahorro del 10 % y una tasa de natalidad del 1 %, mientras que Z tiene una tasa de ahorro del 17 % y una tasa de natalidad del 2 %. Con ello, obtenemos la Figura 8.

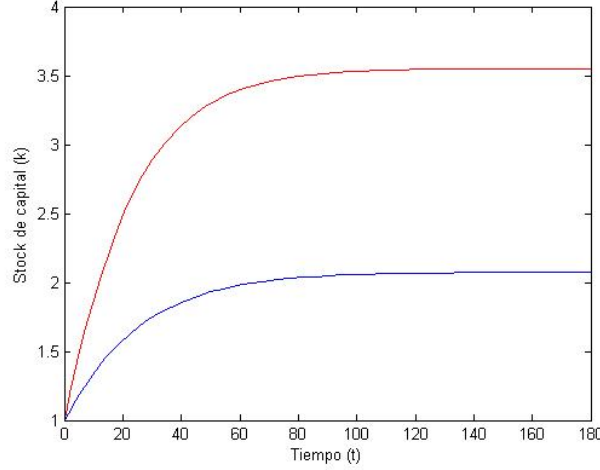


Figura 8: Representación del stock de capital de las economías X (línea azul) y Z (línea roja).

Si calculamos en este ejemplo los estados estacionarios de X y de Z con (3.45) obtenemos que:

$$k_X^* = 2.075 \text{ unidades de capital}, \quad k_Z^* = 3.552 \text{ unidades de capital}.$$

Así, $k_X^* < k_Z^*$. Como cabía esperar, por ser la tasa de ahorro mayor en Z (con un 7 % más), a pesar de tener el doble de tasa de natalidad. Además, como en la Figura 8 vemos que las dos economías tienden a largo plazo al estado estacionario, podemos concluir que el modelo de crecimiento de Solow-Swan describe un proceso de crecimiento dinámico estable.

Volvamos al caso general con $k(t)$ dado por (3.31):

$$k(t) = \left(C_1 e^{-(\delta+n)(1-\alpha)t} + \frac{sA}{\delta+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{con } C_1 = k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{\delta+n}, \quad \forall t \geq 0.$$

Podemos diferenciar dos casos:

1. $k_0 < k^*$.

Como $C_1 = k_0^{1-\alpha} - (k^*)^{1-\alpha}$, en este caso, $C_1 < 0$ y por tanto, $k(t)$ es estrictamente creciente y como $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = k^*$, $k(t)$ va a ir aumentando hacia k^* .

2. $k_0 > k^*$.

Al contrario que el caso anterior, $C_1 > 0$ y por tanto $k(t)$ es estrictamente decreciente y como $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = k^*$, $k(t)$ va a ir disminuyendo hacia k^* .

Veamos este resultado con un ejemplo propio. Para ello, consideramos una economía con una función de producción Cobb-Douglas, $F(K, L) = 0.1K^{0.25}L^{0.75}$. La tasa de ahorro de dicha economía es del 15 %, la tasa de natalidad del 2 % y en ella el capital se deprecia a un tasa del 5 %. Con ello, obtenemos la Figura 9.

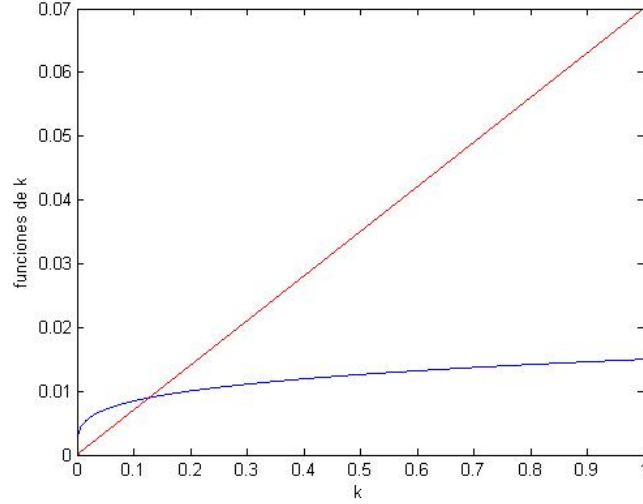


Figura 9: Representación del estado estacionario con la función de producción Cobb-Douglas tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.25$, $A = 0.1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.15$ y k entre 0 y 1, donde la línea azul es la representación de sAk^α y la línea roja es la representación de $(\delta + n)k$.

Si calculamos k^* con (3.45), obtenemos que $k^* = 0.128$. Como podemos observar, ese es el punto de corte de las dos gráficas en la Figura 9. Ahora, supongamos que $k_0 = 0.2$. Así, nos encontramos en el caso $k_0 > k^*$. Haciendo cálculos, $C_1 = 0.085$ y $k'(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$. Por tanto, la tasa de stock de capital per cápita de la economía disminuirá desde 0.2 hacia 0.128. Por el contrario, si $k_0 = 0.05 < k^*$, se tiene que $C_1 = -0.11$ y $k'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego, en este caso, la tasa de stock de capital per cápita de la economía aumentará desde 0.05 hacia 0.128.

La regla de oro de acumulación del capital

Teniendo en cuenta que para cada tasa de ahorro, s , tenemos un $k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ distinto, si queremos modificar esta tasa de ahorro para aumentar el bienestar de los individuos, deberemos tomar una que aumente el consumo per cápita, esta será la conocida como **Regla de oro de acumulación de capital**.

Veamos ahora cuál es el capital asociado a la Regla de oro. Para ello, hay que considerar que estamos hablando de estados estacionarios, luego $k'(t) = 0$. Además, sabemos que $c = (1-s)y$ por (3.1), por tanto, sustituyendo en la ecuación fundamental de Solow ($k'(t) = sf(k(t)) - (\delta+n)k(t)$)

tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 = sf(k^*) - (\delta + n)k^* &\Rightarrow 0 = f(k^*) - c^* - (\delta + n)k^* \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \end{aligned} \quad (3.46)$$

Finalmente, para encontrar el capital de Regla de oro, basta maximizar el consumo de estado estacionario con respecto a k^* ,

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0 \Rightarrow f'(k_{oro}) = \delta + n.$$

Además, tomando $f(k) = Ak^\alpha$, se tiene $f'(k) = \alpha Ak^{\alpha-1}$. Luego,

$$k_{oro} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.47)$$

y sabíamos que

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

de donde la tasa de ahorro óptima será $s = \alpha$ que se suele denominar s_{oro} .

Proposición. 3.4. Sean $A > 0$, $0 < s < 1$, $n > 0$, $0 < \alpha < 1$ y $f(k^*) = A(k^*)^\alpha$. Entonces $c^*(k^*)$ (dada por (3.46)) es una función cóncava $\forall k^* \in \mathbb{R}_+$, creciente para $k^* < k_{oro}$, decreciente para $k^* > k_{oro}$ y con un máximo local en k_{oro} .

Demostración. Veamos en primer lugar que (3.46) es cóncava $\forall k^* \in \mathbb{R}_+$. Claramente, como $f(k^*) = A(k^*)^\alpha$, se tiene:

$$\frac{d^2 c^*}{d(k^*)^2} = A\alpha(\alpha - 1)(k^*)^{\alpha-2} < 0, \quad \forall k^* \in \mathbb{R}_+.$$

Analicemos ahora el crecimiento y decrecimiento de esta función:

Teniendo en cuenta que $\frac{dc^*}{dk^*} = A\alpha(k^*)^{\alpha-1} - (\delta + n)$, se cumple que $\frac{dc^*}{dk^*}(k^*) > 0$ si y sólo si $k^* < k_{oro}$. En este caso, $c^*(k^*)$ es creciente. Además, $\frac{dc^*}{dk^*}(k^*) < 0$ si y sólo si $k^* > k_{oro}$ y $c^*(k^*)$ es decreciente en ese caso. Por lo tanto, $c^*(k^*)$ tiene un máximo local en $k^* = k_{oro}$. $\square$

Así, se pueden diferenciar claramente dos casos:

- si $k_{oro} < k^*$, entonces $s_{oro} < s$. Si lo que nos interesa es disminuir la tasa de ahorro s hacia s_{oro} , en consecuencia, disminuirá el stock de capital per cápita de estado estacionario y con ello aumentará el consumo per cápita de estado estacionario hasta alcanzar $c^*(k_{oro})$.
- si $k_{oro} > k^*$, entonces $s_{oro} > s$. Si lo que queremos es aumentar la tasa de ahorro s hacia s_{oro} , en consecuencia, aumentará el stock de capital per cápita de estado estacionario y con ello también el consumo per cápita de estado estacionario hasta alcanzar $c^*(k_{oro})$.

Vamos a ilustrar el resultado anterior con un ejemplo propio. Para ello, consideramos una economía con una función de producción Cobb-Douglas, $F(K, L) = 0.1K^{0.35}L^{0.65}$. La tasa de natalidad de dicha economía es del 5 % y en ella el capital se deprecia a un tasa del 1 %. Con ello, obtenemos la Figura 10:

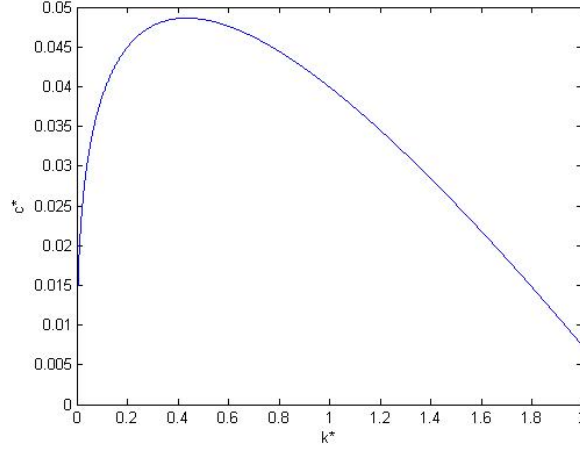


Figura 10: Representación del consumo en estado estacionario con la función de producción Cobb-Douglas tomando $n = 0.05$, $\alpha = 0.35$, $A = 0.1$, $\delta = 0.01$, y k^* entre 0 y 2.

Usando (3.47) obtenemos que $k_{oro} = 0.44$ unidades de capital. Como podemos observar en la Figura 10, ahí es donde se alcanza el valor máximo de la función $c^*(k^*) = A(k^*)^\alpha - (\delta + n)k^*$. Ahora, supongamos que $k^* = 0.1$ unidades de capital $< k_{oro}$. Haciendo cálculos se tiene que $s = 0.17$ y $c^*(k^*) = 0.039$. Por tanto, la economía aumentaría la tasa de ahorro de 0.17 a 0.35 y con ello aumentaría la tasa de consumo de 0.039 a 0.049. Por el contrario, si $k^* = 0.7 > k_{oro}$, $s = 0.48$ y $c^*(k^*) = 0.046$, la economía disminuiría la tasa de ahorro de 0.48 a 0.35 y con ello aumentaría la tasa de consumo de 0.046 a 0.049.

Convergencia

Un aspecto de gran importancia en el modelo de Solow es la dinámica de transición hacia el estado estacionario. Para observar cómo se alcanza el estado estacionario se debe conocer la evolución del crecimiento del stock de capital per cápita en función del tiempo,

$$\gamma(k) = \frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{sf(k)}{k} - (\delta + n)$$

Tomando $f(k) = Ak^\alpha$,

$$\gamma(k) = sAk^{\alpha-1} - (\delta + n). \quad (3.48)$$

Proposición. 3.5. Sean $0 < s < 1$, $A > 0$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces la función $\gamma(k)$ definida en (3.48) es decreciente $\forall k \in \mathbb{R}_+$, tiene una asíntota vertical en $k = 0$ y una asíntota horizontal en $\gamma = -(\delta + n)$ y además $\gamma(k^*) = 0$.

Demostración. En primer lugar vemos que $\gamma(k)$ es decreciente $\forall k \in \mathbb{R}_+$ porque

$$\gamma'(k) = sA(\alpha - 1)k^{\alpha-2} < 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \gamma(k) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{sA}{k^{1-\alpha}} - (\delta + n) = +\infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{sA}{k^{1-\alpha}} - (\delta + n) = -(\delta + n).$$

Luego, hay una asíntota vertical en $k = 0$ y una asíntota horizontal en $\gamma = -(\delta + n)$. Finalmente, es fácil comprobar que $\gamma(k^*) = 0$. $\square$

Visto esto, ya sabemos qué forma tiene la función $\gamma(k)$ y podemos diferenciar dos casos:

- $k < k^*$: En este caso, $\gamma(k) > 0$. Y como a largo plazo k converge a k^* , $\gamma(k)$ va a ir disminuyendo hasta llegar a cero.
- $k > k^*$: Al contrario que antes, $\gamma(k) < 0$. Y como a largo plazo k converge a k^* , $\gamma(k)$ va a ir aumentando hasta llegar a cero.

Así, si dos economías poseen el mismo estado estacionario (k^*) pero diferentes niveles iniciales de stock de capital per cápita (k_0), la economía pobre crecerá a una tasa superior que la rica (**convergencia absoluta**). Sin embargo, hay un problema, y es que los valores de los parámetros s , n y δ , serán (en general) diferentes para los distintos países. En esta situación, el modelo no tiene por qué predecir mayor crecimiento para los países pobres (que parten con un k_0 más pequeño). Cada país convergerá a su propio estado estacionario (**convergencia condicional**).

Vamos a ilustrar el resultado anterior con un ejemplo propio. Para ello, consideramos una economía con una función de producción $F(K, L) = 0.05K^{0.6}L^{0.4}$. Supondremos que la tasa de ahorro de dicha economía es el 20%, la tasa de natalidad es del 5% y en ella el capital se deprecia a una tasa del 2%. Con ello, obtenemos la Figura 11:

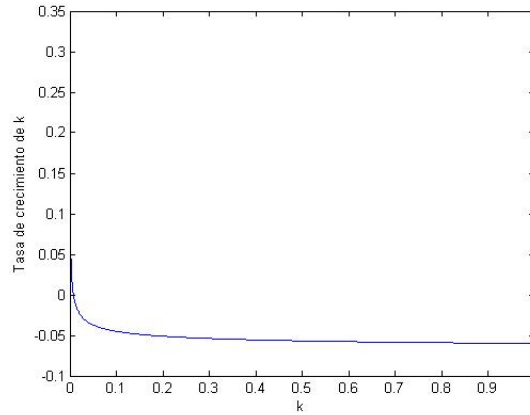


Figura 11: Representación de la tasa de crecimiento del stock de capital per cápita en función del stock de capital per cápita $\gamma(k)$ con la función de producción Cobb-Douglas tomando $n = 0.05$, $\alpha = 0.6$, $A = 0.05$, $\delta = 0.02$, $s = 0.2$ y k entre 0 y 1.

Calculando k^* con (3.45), obtenemos que $k^* = 0.008$ unidades de capital. Si tomamos $k(0) = 0.001$ unidades de capital $< k^*$, por (3.48), $\gamma(k(0)) = 0.088$. Por tanto, la tasa de crecimiento de capital per cápita inicial en esta economía es positiva, pero en la transición al estado estacionario va a ir disminuyendo hasta llegar a cero. Por el contrario, si $k(0) = 0.010$ unidades de capital $> k^*$, $\gamma(k(0)) = -0.007$. En este caso, la tasa de crecimiento de capital per cápita inicial de la economía es negativa y en la transición al estado estacionario va a ir aumentando hasta llegar a cero.

4. El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico y crecimiento de la población, ambos exponenciales

4.1. Introducción

Es importante conocer si estamos creciendo a tasas suficientemente rápidas al acercarnos al estado estacionario. Por ello, interesa saber cuáles son las tasas de crecimiento de las variables Y , K y C .

Proposición. 4.1. *Sea una economía con los supuestos (3.2)-(3.16) y con una función de producción Cobb-Douglas. Entonces, en el estado estacionario, se tiene que las variables Y , K y C crecen a la tasa poblacional n . En cambio, las variables per cápita y , k y c tienen una tasa de crecimiento nula.*

Demostración. Sabemos que $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego, $K(t) = k(t)L(t)$, tomando logaritmos y derivando se tiene:

$$\ln(K(t)) = \ln(k(t)) + \ln(L(t)) \Rightarrow \frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{k'(t)}{k(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}$$

Además, como estamos en estado estacionario, $k'(t) = 0$. Y teniendo en cuenta (3.10),

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = n$$

Del mismo modo, sabemos que $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} \forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego, $\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{L'(t)}{L(t)}$. Y, en estado estacionario, $y'(t) = 0$. Así, $\frac{Y'(t)}{Y(t)} = n$.

Finalmente, también sabemos que $c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} \forall t \in \mathbb{R}_+$. Y, usando el mismo proceso, es fácil ver que $\frac{C'(t)}{C(t)} = n$.

En cuanto a las variables per cápita, como en estado estacionario $k'(t) = y'(t) = c'(t) = 0$. Claramente, sus tasas de crecimiento serán nulas. $\square$

Visto esto, el modelo de Robert Solow (con progreso tecnológico constante) predice que, a largo plazo, no hay crecimiento económico. No obstante, países industrializados, así como varios semi-industrializados, experimentan tasas de crecimiento positivas. En consecuencia, para hacer esto compatible con el modelo neoclásico de Solow-Swan, es necesario incorporar una nueva variable: el progreso tecnológico.

Así, la consideración del avance tecnológico introduce las siguientes modificaciones:

- La producción se genera por la combinación de tres factores: el capital K , la mano de obra L y el progreso tecnológico A :

$$Y = F(K, AL),$$

donde $F(K, AL)$ es la **función de producción** y AL es el número de "trabajadores efectivos" ([9], pág. 351). Luego, esta nueva función de producción establece que la producción total (Y) depende de la cantidad de stock de capital (K) y de la cantidad de trabajadores efectivos (AL).

- Supondremos que el progreso tecnológico, A , crece de forma exponencial en el tiempo,

$$A(t) = A_0 e^{gt} \Leftrightarrow \frac{A'(t)}{A(t)} = g, \quad (4.1)$$

donde A_0 es la tecnología inicial y g la tasa de crecimiento correspondiente ($g > 0$).

Proposición. 4.2. Sea $0 < \alpha < 1$ y A dada por (4.1). Entonces la función de producción Cobb-Douglas $F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$ es neoclásica en $\mathbb{R}_+^2$.

Demostración. Basta con ver la demostración de la Proposición 3.2. Notemos que en este caso $F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$. $\square$

4.2. Formulación del modelo

Análogo al modelo anterior, trabajaremos con variables per cápita, pero aquí serán efectivas.

Observación. 4.1. *Como nuestra función de producción es homogénea de grado 1, podemos trabajar con la siguiente función de producción per cápita efectiva:*

$$\frac{Y}{AL} = \frac{F(K, AL)}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) \quad (4.2)$$

Sean $\tilde{y} = \frac{Y}{AL}$, $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$ la producción per cápita efectiva y el capital per cápita efectivo. Podemos reescribir (4.2) como:

$$\tilde{y} = f(\tilde{k})$$

Luego, los supuestos (3.7) y (3.13)–(3.16) se pueden expresar como: $\tilde{c} = (1 - s)\tilde{y}$

$$f(0) = 0, \quad f'(\tilde{k}) > 0, \quad f''(\tilde{k}) < 0, \quad \lim_{\tilde{k} \rightarrow 0^+} f'(\tilde{k}) = +\infty, \quad \lim_{\tilde{k} \rightarrow +\infty} f'(\tilde{k}) = 0.$$

Teorema 4.1 (Ecuación Fundamental de Solow con la función de Cobb-Douglas). *Si la economía cumple con los supuestos (3.2)–(3.16) y (4.1), la ecuación fundamental de Solow queda:*

$$\tilde{k}'(t) = s\tilde{k}^\alpha(t) - (n + \delta + g)\tilde{k}(t). \quad (4.3)$$

Demostración. Sabemos que $\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego

$$\tilde{k}'(t) = \frac{K'(t)A(t)L(t) - K(t)(A(t)L(t))'}{(A(t)L(t))^2} = \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)A'(t)}{A(t)L(t)A(t)} - \frac{K(t)L'(t)}{A(t)L(t)L(t)}$$

Por (3.10) y la proposición anterior tenemos que,

$$\tilde{k}'(t) = \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - (n + g)\tilde{k}(t) \quad (4.4)$$

Pero, por (3.9), $K'(t) = I_B(t) - \delta K(t)$. Luego,

$$\frac{K'(t)}{A(t)L(t)} = \frac{I_B(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\delta K(t)}{A(t)L(t)} = \frac{I_B(t)}{A(t)L(t)} - \delta\tilde{k}(t) \quad (4.5)$$

Igualando (4.4) y (4.5)

$$\frac{I_B(t)}{A(t)L(t)} - \delta\tilde{k}(t) = \tilde{k}'(t) + (n + g)\tilde{k}(t)$$

Finalmente, como $I_B(t) = S(t) = sY(t)$ y $\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \tilde{y}(t)$

$$\tilde{k}'(t) = s\tilde{y}(t) - (\delta + n + g)\tilde{k}(t), \quad \text{donde } \tilde{y}(t) = f(\tilde{k}(t)) = F\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) = \tilde{k}^\alpha(t). \quad (4.6)$$

□

Veamos ahora la solución de esta EDO no lineal de primer orden (4.3). Se puede resolver como (3.29). Así, para cualquier $\tilde{k}_0 > 0$, hay una única solución del problema de valor inicial,

$$\begin{cases} k'(t) = s\tilde{k}^\alpha(t) - (n + \delta + g)\tilde{k}(t) \\ \tilde{k}(0) = \tilde{k}_0 \end{cases}$$

dada por:

$$\tilde{k}(t) = \left(C_2 e^{-(\delta+n+g)(1-\alpha)t} + \frac{s}{\delta+n+g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{con} \quad C_2 = \tilde{k}_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta+n+g}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

4.3. Estudio analítico

Primeramente vamos a estudiar el estado estacionario,

Proposición. 4.3. *Existe un único estado estacionario $\tilde{k}^*$ positivo,*

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta+n+g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (4.8)$$

Demostración. Como bien sabemos el estado estacionario se da cuando $\tilde{k}'(t) = 0$. Luego,

$$s\tilde{k}^\alpha(t) = (\delta+n+g)\tilde{k}(t),$$

de donde obtenemos que $\frac{s}{\delta+n+g} = \tilde{k}^{1-\alpha}(t)$. Así, $\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta+n+g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. □

Analizando esta fórmula (4.8), podemos ver que si en nuestra economía (con trabajadores efectivos) se incrementa la tasa de población (n), la tasa de depreciación (δ) ó la tasa de crecimiento de progreso tecnológico (g), $\tilde{k}^*$ disminuye. En cambio, si la tasa de ahorro (s) de la economía (con trabajadores efectivos) en la que nos encontramos aumenta, $\tilde{k}^*$ aumenta. Por tanto, análogamente al modelo anterior, países con mayores tasas de crecimiento de población, de depreciación y de progreso tecnológico tendrán menores niveles de capital efectivo a largo plazo y países con mayores tasas de ahorro tendrán mayores niveles de capital efectivo a largo plazo.

Ahora bien, nos interesa ver a qué tasa crecen las variables Y , K y C (con progreso tecnológico exponencial), así como las variables per cápita efectivas correspondientes a ellas, puesto que de esta manera, descubriremos si hay crecimiento económico a largo plazo.

Proposición. 4.4. *Sea una economía con los supuestos (3.2)-(3.16) y con una función de producción Cobb-Douglas (con progreso tecnológico exponencial dado por (5.1)). Entonces, en estado estacionario, se tiene que las variables Y , K y C crecen a una tasa $n + g$. Además las variables per cápita y , k y c crecen a una tasa g . Y, las variables per cápita efectivas $\tilde{y}$, $\tilde{k}$ y $\tilde{c}$, crecen una tasa igual a 0.*

Demostración. Por definición, $\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \forall t \in \mathbb{R}_+$. Tomando de nuevo logaritmos es fácil comprobar que:

$$\frac{\tilde{k}'(t)}{\tilde{k}(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{A'(t)}{A(t)} \right).$$

Además, como en estado estacionario $\tilde{k}'(t) = 0$, tenemos:

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{A'(t)}{A(t)},$$

y por (3.10) y (4.1), $\frac{K'(t)}{K(t)} = n + g$. Del mismo modo, $\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \frac{C'(t)}{C(t)} = n + g$.

En cuanto a las variables per cápita,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{Y'(t)}{Y(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} = (n + g) - n = g,$$

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} = (n + g) - n = g,$$

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{C'(t)}{C(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} = (n + g) - n = g.$$

Y por último, como en el estado estacionario $\tilde{k}'(t) = \tilde{y}'(t) = \tilde{c}'(t) = 0$, las variables per cápita efectivas crecen a una tasa igual a 0. $\square$

En consecuencia, este modelo predice que, a largo plazo, el crecimiento de la producción sólo depende del avance tecnológico “la única fuente posible de crecimiento en el largo plazo es el cambio tecnológico” [11]. Mientras que, a corto plazo, el crecimiento se produce tanto por el progreso técnico como por la acumulación de stock de capital.

Proposición. 4.5. Sea $F(K, AL) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$ una función de producción Cobb-Douglas, entonces la tasa de crecimiento de la producción se encuentra dada por:

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha \cdot \frac{K'(t)}{K(t)} + (1 - \alpha) \cdot \frac{L'(t)}{L(t)} + R(t). \quad (4.9)$$

donde $R(t) = (1 - \alpha) \cdot \frac{A'(t)}{A(t)}$ se denomina **residuo de Solow**.

Demostración. Como $Y(t) = K^\alpha(t)(A(t)L(t))^{1-\alpha}$, tomando logaritmos:

$$\ln(Y(t)) = \alpha \ln(K(t)) + (1 - \alpha)(\ln(L(t)) + \ln(A(t))),$$

y por tanto, derivando:

$$\frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha \cdot \frac{K'(t)}{K(t)} + (1 - \alpha) \left(\frac{L'(t)}{L(t)} + \frac{A'(t)}{A(t)} \right).$$

$\square$

Así, dado un periodo de tiempo t , (4.9) proporciona una forma de descomponer la producción ($Y(t)$) en las contribuciones debidas al capital ($K(t)$), al trabajo ($L(t)$) y al residuo de Solow ($R(t)$). Este último término “es la tecnología y todo lo demás que está afectando al crecimiento y no sabemos qué es” [11].

Recientemente el economista francés Thomas Piketty dió una nueva interpretación al Residuo de Solow relacionándolo con la renta del capitalista (ver [12]) para un contexto mucho más realista que el que estamos considerando en este trabajo. Para ello investigó la evolución del crecimiento de la desigualdad a lo largo de la historia, basada en la (ahora famosa) relación $r > g$, donde r es la tasa media anual de rendimiento del capital (*beneficios, dividendos, intereses y rentas*) y g la tasa de crecimiento económico. El propio Solow ha destacado la transcendencia de esta investigación.

Por otro lado, la introducción del progreso tecnológico también modifica el criterio para alcanzar la regla de oro. Ahora el nivel de capital de la regla de oro es el estado estacionario que maximiza el consumo por trabajador efectivo,

$$\tilde{c}^* = f(\tilde{k}^*) - (\delta + n + g)\tilde{k}^*.$$

Luego, el capital de la regla de oro viene dado por,

$$\frac{d\tilde{c}^*}{d\tilde{k}^*} = f'(\tilde{k}^*) - (\delta + n + g) \Rightarrow f'(\tilde{k}_{oro}) = \delta + n + g.$$

Además, tomando $f(\tilde{k}) = \tilde{k}^\alpha$, se tiene $f'(\tilde{k}) = \alpha \cdot \tilde{k}^{\alpha-1}$. Por tanto,

$$\tilde{k}_{oro} = \left(\frac{\alpha}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

y sabíamos que

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{\delta + n + g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

de donde $s_{oro} = \alpha$.

Si echamos un vistazo al modelo anterior, vemos que el capital de la regla de oro y el estado estacionario son parecidos, diferencias que no van a afectar a los resultados establecidos. Por ello, no resulta de gran interés un nuevo estudio.

5. El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico constante y crecimiento logístico de la población

5.1. Introducción

Un aspecto importante que se puede apreciar en los modelos de Solow-Swan vistos con anterioridad, es el crecimiento exponencial de la población, con una tasa constante $n > 0$, (3.10). Esto

proporciona una buena aproximación al crecimiento demográfico durante un período inicial. Sin embargo, cuando el tiempo tiende a infinito la población crece exponencialmente. Un enfoque más realista se produce en 1838 de la mano de Verhulst, quien sostuvo que una población estable debe llegar a un nivel de saturación característico (capacidad de carga del ambiente) y debe tener una tasa de decrecimiento de la población decreciente con tendencia a ser nula. Es decir,

- 1) La población es estrictamente creciente y acotada por la capacidad de carga del ambiente L_∞ :

$$L(0) = L_0 > 0; \quad L(t) > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = L_\infty. \quad (5.1)$$

- 2) La tasa de crecimiento de la población $\frac{L'(t)}{L(t)}$ disminuye estrictamente a cero.

En esta caso, a diferencia del modelo estándar de Solow-Swan, la tasa de crecimiento de la población no es constante, sino que está dada por una ley logística de crecimiento de la población:

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n - bL(t) \quad \text{con } n > b > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2)$$

En esta sección seguiremos el artículo [6] realizando algunas demostraciones con argumentos propios.

Proposición. 5.1. *La ley logística de crecimiento de población (5.2) cumple las propiedades anteriores.*

Demostración. Claramente, (5.2) es una EDO de primer orden no lineal (de tipo Bernoulli). Realizando el cambio de función incógnita $u(t) = L^{-1}(t)$, obtenemos la ecuación lineal:

$$u'(t) = -n \cdot u(t) + b,$$

cuya solución general es $u(t) = C_1 e^{-nt} + \frac{b}{n}$, $\forall C_1 \in \mathbb{R}_+$. Además, como $u(t) = L^{-1}(t)$ y $L(0) = L_0 > 0$, concluimos que:

$$L(t) = \frac{ne^{nt}}{-b + be^{nt} + \frac{n}{L_0}}, \quad \forall t \geq 0.$$

De aquí se observa que $L(t) > 0$, $\forall t \geq 0$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = \frac{n}{b} \stackrel{\text{def}}{=} L_\infty$. Así, se cumple 1). Veamos ahora si se cumple 2). Usando (5.2) y tomando límite cuando $t \rightarrow +\infty$, se llega a:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L'(t)}{L(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} n - bL(t) = 0.$$

□

Veamos ahora cuál es la ecuación fundamental de este modelo.

5.2. Formulación del modelo

Teorema 5.1 (Ecuación Fundamental de Solow con la función de Cobb-Douglas). *Si la economía cumple con los supuestos (3.2)-(3.9), (5.2), y (3.12)-(3.16) entonces, la ecuación fundamental de Solow queda:*

$$k'(t) = sAk^\alpha(t) - (\delta + n - bL(t))k(t). \quad (5.3)$$

Demostración. Sabemos que $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Luego,

$$k'(t) = \frac{K'(t)L(t) - K(t)L'(t)}{L^2(t)} = \frac{K'(t)}{L(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)} \cdot \frac{K(t)}{L(t)}$$

por (5.2) tenemos que:

$$k'(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} - (n - bL(t))k(t) \Rightarrow \frac{K'(t)}{L(t)} = k'(t) + (n - bL(t))k(t) \quad (5.4)$$

pero, por (3.9), $K'(t) = I_B(t) - \delta K(t)$. Luego,

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = \frac{I_B(t)}{L(t)} - \frac{\delta K(t)}{L(t)} \quad (5.5)$$

Igualando (5.4) y (5.5),

$$\frac{I_B(t)}{L(t)} - \delta k(t) = k'(t) + (n - bL(t))k(t) \Rightarrow k'(t) = \frac{I_B(t)}{L(t)} - (\delta + n - bL(t))k(t)$$

Finalmente, por (3.5) y (3.6),

$$k'(t) = sy(t) - (\delta + n - bL(t))k(t), \quad \text{donde } y(t) = f(k(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = Ak^\alpha(t).$$

□

Veamos la solución de (5.3). Claramente, (5.3) es una EDO no lineal de primer orden (de tipo Bernoulli) ya que la función $L(t)$ es conocida. Realizando el cambio de función incógnita $u(t) = k^{1-\alpha}(t)$ tenemos la ecuación lineal:

$$u'(t) = -(\delta + n - bL(t))(1 - \alpha) \cdot u(t) + (1 - \alpha)sA.$$

En este caso, la ecuación es no homogénea y calculamos una solución particular por el método de variación de constantes,

$$u(t) = e^{\int_0^t -(\delta+n-bL(t))(1-\alpha) dt} \left[C + \int_0^t sA(1-\alpha)e^{\int_0^t (\delta+n-bL(t))(1-\alpha) dt} dt \right], \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $u(t) = k^{1-\alpha}(t)$, y llamando $k(0) = k_0 > 0$

$$k(t) = \left(e^{\int_0^t -(\delta+n-bL(t))(1-\alpha) dt} \left[k_0^{1-\alpha} + \int_0^t sA(1-\alpha)e^{\int_0^t (\delta+n-bL(t))(1-\alpha) dt} dt \right] \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Además,

$$e^{\int_0^t -(\delta+n-bL(t))(1-\alpha) dt} = e^{-(1-\alpha) \int_0^t (\delta+n-bL(t)) dt}$$

y como $L'(t) = (n - bL(t))L(t)$, se tiene:

$$e^{-(1-\alpha) \int_0^t (\delta+n-bL(t)) dt} = e^{-(1-\alpha) \int_0^t \left(\delta + \frac{L'(t)}{L(t)}\right) dt} = e^{-(1-\alpha)\delta t} \left(\frac{L(t)}{L_0}\right)^{-(1-\alpha)}.$$

Luego,

$$k(t) = \frac{\frac{n}{L_0} - b + be^{nt}}{\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}} \left[k_0^{1-\alpha} + sA(1-\alpha) \int_0^t \left(\frac{\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}}{\frac{n}{L_0} - b + be^{nt}} \right)^{1-\alpha} dt \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Vamos a ver a continuación una versión equivalente usando funciones hipergeométricas. Se define la función hipergeométrica de Gauss [3] por:

$$F_1(C_1, C_2, C_3; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(C_1)_m (C_2)_m}{(C_3)_m} \frac{z^m}{m!}, \quad (5.6)$$

donde $C_3 \neq 0, -1, -2, \dots$ y $(C_1)_m$ es el símbolo de Pochhammer definido por:

$$(C_1)_m = C_1(C_1 + 1) \dots (C_1 + m - 1) = \frac{\Gamma(C_1 + m)}{\Gamma(C_1)}, \quad (5.7)$$

donde Γ es la función Gamma. Es conocido que [3] la serie (5.6) es convergente para cualquier C_1, C_2 y C_3 si $|z| < 1$, y para cualquier C_1, C_2 y C_3 tal que $C_1 + C_2 - C_3 < 0$ si $|z| = 1$.

Veamos que esta función también admite una representación integral. Para ello, supongamos que $C_3 > C_2 > 0$ y consideremos (5.7):

$$\frac{(C_2)_m}{(C_3)_m} = \frac{\frac{\Gamma(C_2+m)}{\Gamma(C_2)}}{\frac{\Gamma(C_3+m)}{\Gamma(C_3)}} = \frac{\Gamma(C_2+m)\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_3+m)\Gamma(C_2)}.$$

Así,

$$\frac{(C_2)_m}{(C_3)_m} = \frac{\Gamma(C_2+m)\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_3+m)\Gamma(C_2)} = \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} \cdot B(C_2+m, C_3-C_2),$$

donde $B(.,.)$ es la función Beta. Luego,

$$\frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} \cdot B(C_2+m, C_3-C_2) = \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} \int_0^1 t^{C_2+m-1} (1-t)^{C_3-C_2-1} dt,$$

y se tiene que:

$$\begin{aligned} F_1(C_1, C_2, C_3; z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(C_1)_m}{m!} z^m \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} \int_0^1 t^{C_2+m-1} (1-t)^{C_3-C_2-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(C_1)_m}{m!} z^m \int_0^1 t^m t^{C_2-1} (1-t)^{C_3-C_2-1} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3 - C_2)} \int_0^1 t^{C_2-1} (1-t)^{C_3-C_2-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(C_1)_m}{m!} (zt)^m dt = \\
&= \frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3 - C_2)} \int_0^1 t^{C_2-1} (1-t)^{C_3-C_2-1} (1-zt)^{-C_1} dt.
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se deduce tomando $x = zt$ en la identidad

$$(1-x)^{-C_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(C_1)_m}{m!} x^m,$$

que se obtiene utilizando el desarrollo de Taylor y que se verifica si $|x| < 1$.

Proposición. 5.2. *Con la notación anterior, tomando $\gamma = (1-\alpha)(\delta+n)$ y $M = \frac{b}{b-\frac{n}{L_0}}$, se llega a:*

$$\begin{aligned}
k(t) = \frac{1 - Me^{nt}}{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}} \left[k_0^{1-\alpha} + \frac{sA(1-\alpha)(1-M)^{1-\alpha}}{\gamma} \left(e^{\gamma t} F_1 \left(1-\alpha, \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + 1; Me^{nt} \right) \right. \right. \\
\left. \left. - F_1 \left(1-\alpha, \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + 1; M \right) \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar veamos $\frac{\frac{n}{L_0} - b + be^{nt}}{\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}}$. Así,

$$\frac{\frac{n}{L_0} - b + be^{nt}}{\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}} = \frac{-\frac{n}{L_0} + b - be^{nt}}{-\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}} = \frac{\frac{b - \frac{n}{L_0} - be^{nt}}{b - \frac{n}{L_0}}}{\left(\frac{b - \frac{n}{L_0} - b}{b - \frac{n}{L_0}} \right) e^{(\delta+n)t}} = \frac{1 - Me^{nt}}{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}}$$

Ahora,

$$\int_0^t \left(\frac{\frac{n}{L_0} e^{(\delta+n)t}}{\frac{n}{L_0} - b + be^{nt}} \right)^{1-\alpha} dt = \int_0^t \left(\frac{1 - Me^{nt}}{(1-M)e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha}\right)t}} \right)^{-(1-\alpha)} dt,$$

y haciendo el cambio de variable $x = e^{nt}$, obtenemos $\frac{(1-M)^{1-\alpha}}{n} \int_1^{e^{nt}} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} x^{\frac{\gamma}{n}-1} dx$. Además, teniendo en cuenta la expresión integral de las funciones hipergeométricas, nos interesa escribir:

$$\int_1^{e^{nt}} x^{\frac{\gamma}{n}-1} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} dx = \int_0^{e^{nt}} x^{\frac{\gamma}{n}-1} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} dx - \int_0^1 x^{\frac{\gamma}{n}-1} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} dx.$$

El último término claramente coincide con $\frac{n}{\gamma} F_1 \left(1-\alpha, \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + 1; M \right)$, donde hemos tomado $C_1 = 1-\alpha$, $C_2 = \frac{\gamma}{n}$, $C_3 = \frac{\gamma}{n} + 1$, $z = M$ y usado que $\frac{\Gamma(C_3)}{\Gamma(C_2)\Gamma(C_3-C_2)} = \frac{\gamma}{n}$. Para el término $\int_0^{e^{nt}} x^{\frac{\gamma}{n}-1} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} dx$ es necesario realizar un nuevo cambio de variable $r = e^{-nt}x$ y tomar los mismos valores de C_1 , C_2 , C_3 , pero con $z = Me^{nt}$. Así, podemos concluir:

$$\int_1^{e^{nt}} x^{\frac{\gamma}{n}-1} (1-Mx)^{-(1-\alpha)} dx = \frac{ne^{\gamma t}}{\gamma} F_1 \left(1-\alpha, \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + 1; Me^{nt} \right) - \frac{n}{\gamma} F_1 \left(1-\alpha, \frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n} + 1; M \right),$$

llegando a la expresión (5.8). $\square$

Según hemos visto, con la inclusión de una ley logística de crecimiento de la población, a partir de (5.2), la economía del modelo de Solow modificado viene dado por un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\begin{cases} k'(t) = sAk^\alpha(t) - (\delta + n - bL(t))k(t) \\ L'(t) = (n - bL(t))L(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

5.3. Estudio analítico

Primeramente vamos a estudiar el estado estacionario,

Proposición. 5.3. *Existen un único estado estacionario $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$, del sistema (5.9), en $\mathbb{R}_+^2$.*

Demostración. Como bien sabemos el estado estacionario se da cuando $k'(t) = L'(t) = 0$. Es decir, cuando:

$$sAk(t)^\alpha - (\delta + n - bL(t))k(t) = 0 \quad \wedge \quad (n - bL(t))L(t) = 0$$

de donde si $k(t) \neq 0$ y $L(t) \neq 0$:

$$(k^*, L^*) = \left(\left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b} \right) \in \mathbb{R}_+^2.$$

□

En general la tasa de crecimiento de la economía no es constante, sino que se comporta de acuerdo con (5.9). Por ello, para determinar cuál es la trayectoria de equilibrio de nuestra economía tenemos que estudiar la dinámica de transición del sistema dinámico (5.9) a partir de $k_0 > 0$. Así, veremos cómo tiende la economía hacia el estado estacionario $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right) \in \mathbb{R}_+^2$ y el comportamiento que ésta tiene a lo largo de la transición. El resto de los estados estacionarios tiene alguna componente nula por lo que su interés de estudio es muy reducido.

Teorema 5.2. *El estado estacionario $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$ es un nodo asintóticamente estable.*

Demostración. Consideramos

$$\begin{cases} F_1(k, L) = sAk^\alpha - (\delta + n - bL)k \\ F_2(k, L) = (n - bL)L \end{cases}$$

Vamos a estudiar la estabilidad de $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$. Para ello tendremos en cuenta que un sistema no lineal puede ser aproximado linealmente por medio del desarrollo de Taylor alrededor del punto crítico,

$$F_i(k, L) = F_i(k^*, L^*) + \frac{\partial F_i(k, L)}{\partial k} \Big|_{(k^*, L^*)} (k - k^*) + \frac{\partial F_i(k, L)}{\partial L} \Big|_{(k^*, L^*)} (L - L^*) + R_i(k, L), \quad \forall i = 1, 2.$$

Como $F_i(k^*, L^*) = 0$, $\forall i = 1, 2$, entonces

$$F_1(k, L) = \delta(\alpha - 1)(k - k^*) + bk^*(L - L^*) + R_1(k, L)$$

$$F_2(k, L) = -n(L - L^*) + R_2(k, L)$$

Obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} k'(t) \\ L'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k(t) - k^* \\ L(t) - L^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(k, L) \\ R_2(k, L) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

donde $A = \begin{pmatrix} \delta(\alpha - 1) & bk^* \\ 0 & -n \end{pmatrix}$ y con $R_1(k, L) = sAk^\alpha - (\delta + n - bL)k - bk^*(L - L^*) - \delta(\alpha - 1)(k - k^*)$, $R_2(k, L) = 2nL - bL^2 - \frac{n^2}{b}$.

Ahora para estudiar la estabilidad de (5.10) utilizaremos el método de linealización y en particular el siguiente resultado [8].

Teorema 5.3 (Método de linealización). *Sea $x'(t) = A(x(t) - x_0) + R(x(t))$ con $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $R : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua tal que $R(x_0) = (0, 0)$ y supongamos que $\lim_{\|x-x_0\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$. Entonces, si x_0 es punto crítico asintóticamente estable de $x'(t) = A(x(t) - x_0)$, entonces x_0 es punto crítico asintóticamente estable de $x'(t) = A(x(t) - x_0) + R(x(t))$.*

Veamos que se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar el Teorema de linealización:

$$\lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{\|R(k, L)\|}{\|(k - k^*, L - L^*)\|} = \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|R_1(k, L)| + |R_2(k, L)|}{|k - k^*| + |L - L^*|}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|R_2(k, L)|}{|k - k^*| + |L - L^*|} &= \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|2nL - bL^2 - \frac{n^2}{b}|}{|k - k^*| + |L - L^*|} \leq \\ &\leq \lim_{L \rightarrow L^*} \frac{|2nL - bL^2 - \frac{n^2}{b}|}{|L - L^*|} = \left| \lim_{L \rightarrow L^*} \frac{2nL - bL^2 - \frac{n^2}{b}}{L - L^*} \right| = 0 \end{aligned}$$

ya que aplicando L'Hopital,

$$\lim_{L \rightarrow L^*} \frac{2nL - bL^2 - \frac{n^2}{b}}{L - L^*} = \lim_{L \rightarrow L^*} \frac{2n - 2bL}{1} = 2n - 2bL^* = 0$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|R_1(k,L)|}{|k-k^*| + |L-L^*|} = \\
& = \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|sAk^\alpha - (\delta + n - bL)k - bk^*(L-L^*) - \delta(\alpha-1)(k-k^*)|}{|k-k^*| + |L-L^*|} = \\
& = \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|sAk^\alpha - nk + bLk - bk^*L + nk^* - \delta\alpha(k-k^*) - \delta k^*|}{|k-k^*| + |L-L^*|} = \\
& = \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|sAk^\alpha + n(k^*-k) + \delta\alpha(k^*-k) - bL(k^*-k) - \delta k^*|}{|k-k^*| + |L-L^*|} \leq \\
& \leq \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|(n-bL)(k^*-k)|}{|k-k^*| + |L-L^*|} + \lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{|sAk^\alpha + \delta\alpha(k^*-k) - \delta k^*|}{|k-k^*| + |L-L^*|} \leq \\
& \leq \lim_{L \rightarrow L^*} |n-bL| + \lim_{k \rightarrow k^*} \frac{|sAk^\alpha + \delta\alpha(k^*-k) - \delta k^*|}{|k-k^*|} = \left| \lim_{k \rightarrow k^*} \frac{sAk^\alpha + \delta\alpha(k^*-k) - \delta k^*}{k-k^*} \right|
\end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital,

$$\lim_{k \rightarrow k^*} \frac{sAk^\alpha + \delta\alpha(k^*-k) - \delta k^*}{k-k^*} = \lim_{k \rightarrow k^*} \frac{sA\alpha k^{\alpha-1} - \delta\alpha}{1} = sA\alpha(k^*)^{\alpha-1} - \delta\alpha = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{\|(k,L)-(k^*,L^*)\| \rightarrow 0} \frac{\|R(k,L)\|}{\|(k-k^*, L-L^*)\|} = 0 \quad (5.11)$$

Como $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$ es un punto crítico aislado y se cumple (5.11) estamos en condiciones de aplicar el método de linealización. Vamos a analizar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} k'(t) \\ L'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(\alpha-1) & bk^* \\ 0 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k(t) - k^* \\ L(t) - L^* \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Claramente los valores propios de la matriz A son los elementos de la diagonal $\lambda_1 = \delta(\alpha-1)$ y $\lambda_2 = -n$. Como $\lambda_i < 0, i = 1, 2$, el punto crítico $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$ es un nodo asintóticamente estable para el sistema (5.12). Por el Teorema de linealización $\left(\left(\frac{sA}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \frac{n}{b}\right)$ es también un nodo asintóticamente estable para el sistema definido por (5.9). $\square$

Proposición. 5.4. *No existe ningún ciclo límite.*

Demostración. En este caso, no podemos aplicar el criterio negativo de Bendixson. Por ello, tenemos que recurrir al teorema de Bendixson-Dulac que es un poco más general [8].

Teorema 5.4 (Teorema de Bendixson Dulac). Sea $\varphi(x, y)$ (llamada función Dulac) una función de clase C^1 en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ simplemente conexo, tal que $\frac{\partial(\varphi F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi F_2)}{\partial y}$ no es idénticamente cero, y no cambia de signo en D . Entonces el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y)\end{aligned}$$

no tiene soluciones periódicas en D .

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe una trayectoria cerrada C del sistema en D siendo Ω el interior de C . Aplicando el teorema de Green,

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\varphi F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi F_2)}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (-\varphi F_2 dx + \varphi F_1 dy) = \int_C \varphi \left(-\frac{dy}{dt} dx + \frac{dx}{dt} dy \right) = 0$$

Pero, $\int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(\varphi F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi F_2)}{\partial y} \right) dx dy \neq 0$ por hipótesis. Por tanto, no puede haber tal trayectoria cerrada C en D . $\square$

Consideramos ahora $\varphi(k, L) = \frac{1}{kL}$ que es una función Dulac en $D = \mathbb{R}_+^2$. En nuestro caso,

$$\frac{\partial(\varphi F_1)}{\partial k} + \frac{\partial(\varphi F_2)}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{sAk^{\alpha-1} - (\delta + n)}{L} + b \right) + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{n - bL}{k} \right) = - \left(\frac{(1 - \alpha)sAk^{\alpha-2}}{L} + \frac{b}{k} \right) < 0.$$

No hay ninguna solución periódica en D y por tanto no existe ningún ciclo-límite en D . $\square$

Teorema 5.5. Cualquier solución $(k(t), L(t))$ del sistema (5.9) con $(k(0), L(0)) \in \mathbb{R}_+^2$ está acotada, i.e., existe un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ tal que $(k(t), L(t)) \subset \Omega$, $\forall t \geq 0$.

Demostración. Supondremos que $L_0 < L_{\infty} = \frac{n}{b}$ por ser el caso más habitual. Por la propiedad 1 vista al principio de este modelo, $L(t)$ se encuentra acotada, inferiormente por $L_0 > 0$ y superiormente por L_{∞} . Veamos ahora que $k(t)$ está acotada. Para ello nos fijaremos en la siguiente expresión:

$$u(t) = e^{-(1-\alpha)\delta t} L(t)^{-(1-\alpha)} \left[C + \int_0^t sA(1-\alpha)e^{(1-\alpha)\delta t} L(t)^{1-\alpha} dt \right].$$

Teniendo en cuenta que $L_0^{1-\alpha} \leq L(t)^{1-\alpha} < \left(\frac{n}{b}\right)^{1-\alpha}$ y que $\left(\frac{n}{b}\right)^{-(1-\alpha)} < L(t)^{-(1-\alpha)} \leq L_0^{-(1-\alpha)}$,

$$\left(\frac{ne^{\delta t}}{b}\right)^{-(1-\alpha)} \left[C + \int_0^t sA(1-\alpha)(e^{\delta t} L_0)^{1-\alpha} dt \right] < u(t) < (e^{\delta t} L_0)^{-(1-\alpha)} \left[C + \int_0^t sA(1-\alpha) \left(\frac{ne^{\delta t}}{b}\right)^{1-\alpha} dt \right],$$

desarrollando las integrales de esta última expresión llegamos a:

$$\left(\frac{n}{b}\right)^{-(1-\alpha)} \left[Ce^{-(1-\alpha)\delta t} + \frac{sAL_0^{1-\alpha}}{\delta} (1 - e^{-(1-\alpha)\delta t}) \right] < u(t) < L_0^{-(1-\alpha)} \left[Ce^{-(1-\alpha)\delta t} + \frac{sA}{\delta} \left(\frac{n}{b}\right)^{1-\alpha} (1 - e^{-(1-\alpha)\delta t}) \right].$$

Acotando inferiormente la función que aparece a la izquierda y usando que $0 < e^{-(1-\alpha)\delta t} < 1$ se obtiene:

$$\left(\frac{n}{b}\right)^{-(1-\alpha)} \min \left\{ \frac{sAL_0^{1-\alpha}}{\delta}, C \right\} \leq u(t) < L_0^{-(1-\alpha)} \left[C + \frac{sA}{\delta} \left(\frac{n}{b}\right)^{1-\alpha} \right]$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de función incógnita $u(t) = k^{1-\alpha}(t)$, se tiene:

$$\left(\frac{b}{n}\right) \left(\min\left\{\frac{sAL_0^{1-\alpha}}{\delta}, C\right\}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq k(t) < L_0^{-1} \left(\left[C + \frac{sA}{\delta} \left(\frac{n}{b}\right)^{1-\alpha}\right]\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Y podemos concluir que $k(t)$ está acotada. Así pues, cualquier solución $(k(t), L(t))$ del sistema (5.9) está acotada. $\square$

Teorema 5.6 (Convergencia). *Cualquier solución $(k(t), L(t))$ del sistema (5.9) converge hacia el estado estacionario (k^*, L^*) cuando $t \rightarrow +\infty$*

Demostración. Por el teorema de Bendixson-Poincaré cada trayectoria $(k(t), L(t))$ debe ser acotada, converger a un ciclo límite ó converger al estado estacionario. En los dos teoremas anteriores, hemos visto que no existe ningún ciclo límite y que toda trayectoria $(k(t), L(t))$ está acotada. Por tanto, cualquier solución del sistema (5.9) converge hacia el estado estacionario (k^*, L^*) . $\square$

6. Comparativa de los tres modelos

Para finalizar el trabajo, realizaremos una comparativa de los tres modelos vistos (no contemplada en publicaciones), con técnicas propias. Recordemos que, los tres modelos a comparar son:

1. El modelo neoclásico de Solow-Swan con tecnología constante y población exponencial
2. El modelo neoclásico de Solow-Swan con tecnología exponencial y población exponencial
3. El modelo neoclásico de Solow-Swan con tecnología constante y población logística

Notemos que no se pueden comparar los tres modelos directamente entre sí. Luego, haremos dos comparaciones:

- Comparativa del primer y segundo modelo,

$$\begin{cases} k'(t) = sAk(t)^\alpha - (\delta + n)k(t) \\ \tilde{k}'(t) = s\tilde{k}(t)^\alpha - (\delta + n + g)\tilde{k}(t) \end{cases}$$

Para su comparación es necesario poner, en el primer modelo, $A = A^{1-\alpha}$ y, en el segundo, $k(t)$ en vez de $\tilde{k}(t)$. Así, el primer modelo queda:

$$k'(t) = sA^{1-\alpha}k^\alpha(t) - (\delta + n)k(t) \quad (6.1)$$

En el segundo, como $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$, $\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$, y $A(t) = Ae^{gt}$ se tiene:

$$\tilde{k}'(t) = s \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)} \right)^\alpha - (\delta + n + g) \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)} \right) = sA^{-\alpha}(t)k^\alpha(t) - (\delta + n + g)A^{-1}(t)k(t) =$$

$$= s(Ae^{gt})^{-\alpha} k^{\alpha}(t) - (\delta + n + g)(Ae^{gt})^{-1} k(t)$$

y como $\tilde{k}'(t) = \frac{1}{A(t)}(k'(t) - k(t)g) \Rightarrow k'(t) = A(t)\tilde{k}'(t) + gk(t)$, a $\tilde{k}'(t)$ le multiplicamos por $A(t)$ y le sumamos $k(t)g$. Así,

$$k'(t) = s(Ae^{gt})^{1-\alpha} k^{\alpha}(t) - (\delta + n)k(t) \quad (6.2)$$

Por tanto, de (6.1) y de (6.2) tenemos:

$$\begin{cases} k'(t) = sA^{1-\alpha} k^{\alpha}(t) - (\delta + n)k(t) \\ k'(t) = s(Ae^{gt})^{1-\alpha} k^{\alpha}(t) - (\delta + n)k(t) \end{cases}$$

donde podemos observar que tomando $g = 0$, los dos modelos son iguales. Hecho que queda ilustrado en el siguiente ejemplo.

Sea una economía con una función de producción Cobb-Douglas $F(K, L) = K^{0.3}L^{0.7}$, con un stock de capital inicial $k_0 = 2$ unidades de capital, una tasa de ahorro del 17%, una tasa de natalidad del 2% y una tasa de depreciación del capital del 5%. Teniendo en cuenta un periodo de tiempo $t = 180$ años y un g muy pequeño, por ejemplo $g = 10^{-5}$, obtenemos la Figura 12.

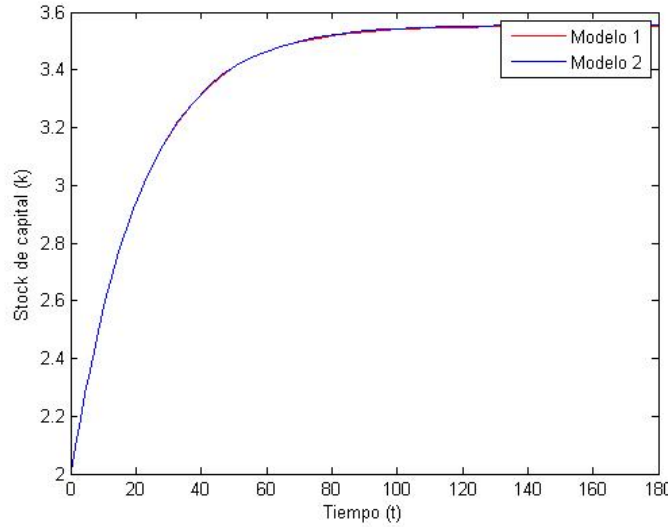


Figura 12: Representación de la evolución del stock de capital con la función de producción Cobb-Douglas, tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.17$ y $g = 10^{-5}$, en un periodo de tiempo $t = 180$ años. Con progreso tecnológico (línea azul) y sin él (línea roja).

En la Figura 12, las gráficas azul y roja coinciden, prácticamente, en todo el intervalo $[0, 180]$. Aunque bien es cierto que, en determinadas zonas, se pueden apreciar pequeñas

diferencias entre ambas. Esto es debido a que g no es exactamente 0. Notemos además que el estado estacionario es casi el mismo:

En el primer modelo,

$$k^* = A \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \approx 3.552 \text{ unidades de capital}$$

y en el segundo modelo,

$$k^* = A \cdot e^{180 \cdot g} \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \approx 3.559 \text{ unidades de capital}$$

Valores que, en cada caso, coinciden con $k(180)$, síntoma de que la economía se está estabilizando.

Veamos ahora qué ocurre si cogemos un g más grande. Para ello, tomamos los datos del ejemplo anterior pero con $g = 10^{-3}$ (Figura 13).

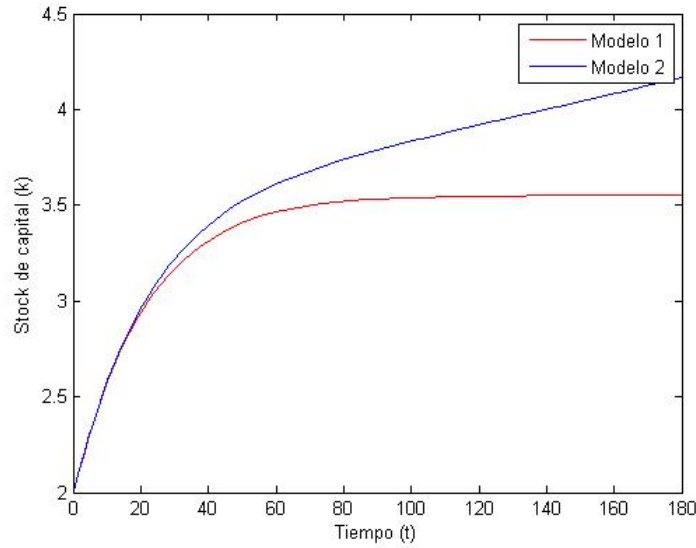


Figura 13: Representación de la evolución del stock de capital con la función de producción Cobb-Douglas, tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.17$ y $g = 10^{-3}$. Con progreso tecnológico (línea azul) y sin él (línea roja).

Aquí (Figura 13) se perciben con mayor claridad las diferencias entre ambos modelos. Se ve cómo, empezando los dos con un stock de capital inicial $k_0 = 2$ unidades de capital, el que tiene progreso tecnológico del 0.1 %, en $t = 180$ años, posee un stock de capital de $k(180) = 4.1672$ unidades de capital. Mientras que el otro, en ese mismo instante de

tiempo, posee un stock de capital de $k(180) = 3.5520$ unidades de capital. Es más, la economía sin progreso tecnológico se estabiliza y la otra sigue creciendo (ver Figura 13).

Finalmente, cogemos un g aún más grande. Es de esperar una mayor diferencia de stock de capital, en $t = 180$ años, entre la economía con progreso tecnológico y la que no tiene. Veámoslo tomando los datos del ejemplo anterior pero con $g = 0.01$ (Figura 14).

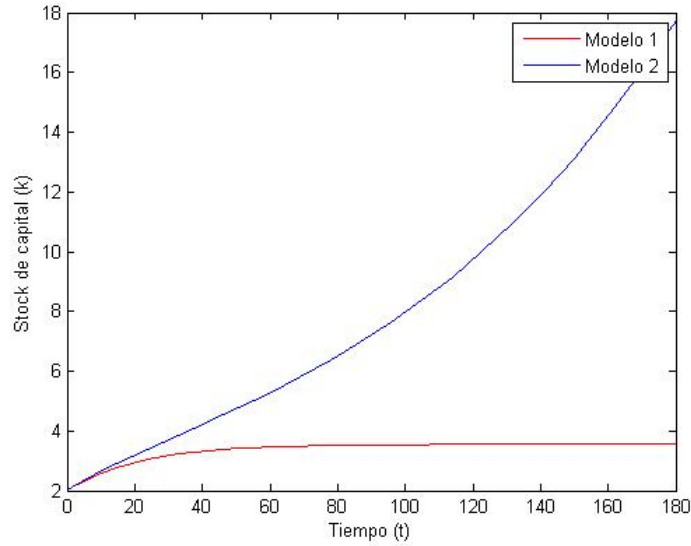


Figura 14: Representación de la evolución del stock de capital con la función de producción Cobb-Douglas tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.17$ y $g = 0.01$, en un periodo de tiempo $t = 180$ años. Con progreso tecnológico (línea azul) y sin él (línea roja).

Como preveíamos, en $t = 180$ años, hay una gran diferencia entre ambas economías. Así, partiendo de $k_0 = 2$ unidades de capital, la que posee progreso tecnológico, en $t = 180$ años, tiene un stock de capital de $k(180) = 17.7575$ unidades de capital y la otra $k(180) = 3.5520$ unidades de capital. Asimismo, se contempla cómo la economía sin progreso tecnológico, de nuevo, se estabiliza. Así como la otra crece con mayor fuerza.

En resumidas cuentas, teniendo en cuenta los resultados obtenidos, es importante innovar en una economía para producir crecimiento económico. A niveles prácticos, esto es algo que el economista N. Rosenberg, profesor de la universidad de Stanford y uno de los mayores expertos del mundo en políticas de innovación había anunciado en una entrevista (ver [13]) publicada en el periódico *El País* el 8 de mayo de 2005 (pocos años antes del comienzo de la crisis española del 2008), donde decía que España iba a sufrir mucho si no empezaba a innovar. Y así fue. De hecho, si nos fijamos en el índice publicado por la Organización

Mundial de la Propiedad Intelectual (OMPI) del año 2013, que evalúa la capacidad de los países para promover el desarrollo y el crecimiento económico, Suiza es el país con mayor innovación mientras que España se encuentra la 27^o (ver [16]). Es más, si observamos las tasas de crecimiento de ese mismo año, la de Suiza es de un 1.92 % y la de España de un -1.23 % (ver [5]).

- Comparativa del primer y tercer modelo,

$$\begin{cases} k'(t) = sAk(t)^\alpha - (\delta + n)k(t) \\ k'(t) = sAk(t)^\alpha - (\delta + n - bL(t))k(t) \end{cases}$$

En este caso la comparación es inmediata y no es necesario realizar ningún cambio. Además, se puede apreciar cómo los dos modelos son iguales cuando $b = 0$: veámoslo gráficamente mediante un ejemplo. Para ello tomamos los datos del ejemplo anterior y un b pequeño, por ejemplo $b = 10^{-6}$. Dado que b no es exactamente 0 los dos modelos difieren algo y cabe esperar dos gráficas con pequeñas diferencias (Figura15).

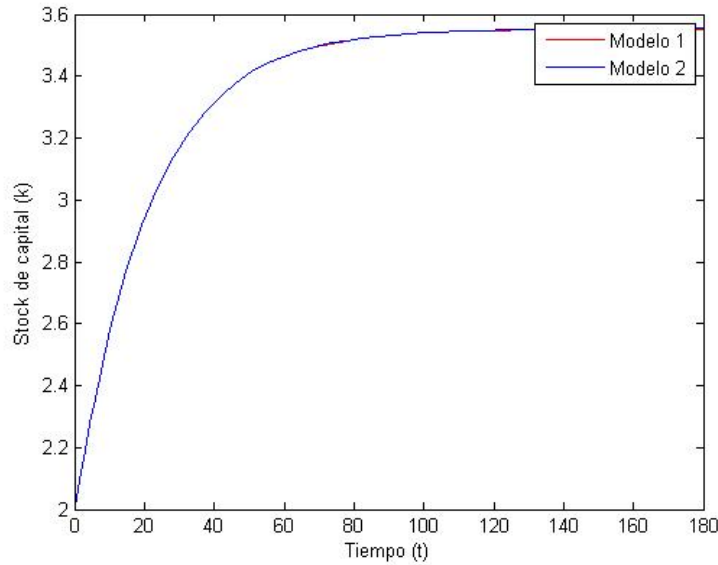


Figura 15: Representación de la evolución del stock de capital con la función de producción Cobb-Douglas tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.17$ y $b = 10^{-6}$, en un periodo de tiempo $t = 180$ años. Con población exponencial (línea roja) y con población logística (línea azul).

Como habíamos dicho con anterioridad las dos gráficas son muy semejantes. De hecho, los dos modelos coinciden prácticamente en todo el recorrido. Veamos cuál es la diferencia de stock de capital en $t = 180$ años utilizando una población exponencial o una población

logística. En el primer caso, tenemos $k(180) = 3.5520$ unidades de capital y en el segundo $k(180) = 3.5577$ unidades de capital. Luego, a largo plazo, produce más stock de capital el modelo con población logística. Sin embargo, ambas economías se estabilizan, de ahí que no exista crecimiento económico a largo plazo.

No obstante, si el valor de b es más grande ¿será mayor la diferencia de stock de capital a largo plazo entre los dos modelos?. Para ello tomaremos el ejemplo anterior con $b = 10^{-4}$ (gráfica de arriba de la Figura 16) y $b = 0.01$ (gráfica de abajo de la Figura 16).

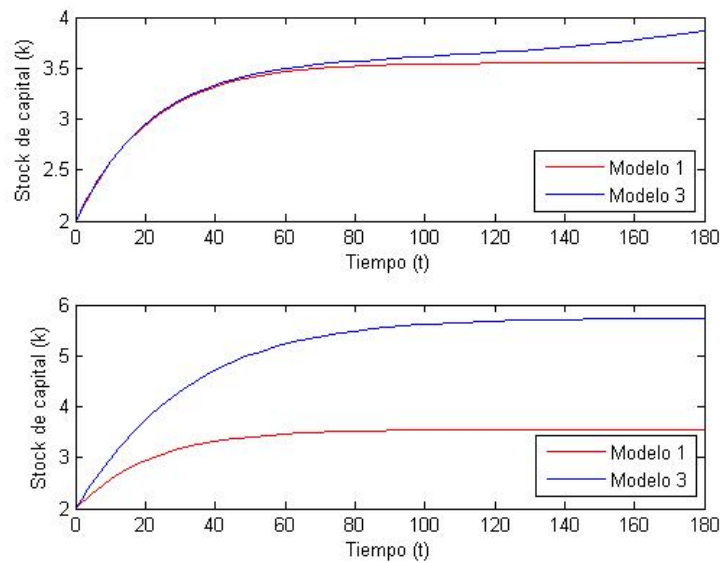


Figura 16: Representación de la evolución del stock de capital con la función de producción Cobb-Douglas, tomando $n = 0.02$, $\alpha = 0.3$, $A = 1$, $\delta = 0.05$, $s = 0.17$, $b = 10^{-4}$ (gráfica de arriba) y $b = 0.01$ (gráfica de abajo), en un periodo de tiempo $t = 180$ años. Con población exponencial (línea roja) y población logística (línea azul).

En la Figura 16, observamos que, a partir de $t \approx 40$ años los modelos empiezan a diferir. Así, con el paso de los años la diferencia se incrementa. Es más, en $t = 180$ años, el modelo de población exponencial posee un stock de capital $k(180) = 3.5520$ unidades de capital y el de población logística $k(180) = 3.8671$ unidades de capital. Una diferencia ya notable.

Y en la gráfica de abajo (Figura 16), vemos cómo, desde el principio, los dos modelos son diferentes. Y, a largo plazo, la diferencia de stock de capital es mayor: en el modelo de población exponencial $k(180) = 3.5520$ unidades de capital y en el de población logística $k(180) = 5.7367$ unidades de capital. A largo plazo, ambas se estabilizan.

Por tanto, a la vista de los análisis realizados, el hecho de que la población crezca de manera logística no garantiza un crecimiento económico a largo plazo. Así pues, la única solución es el uso de la innovación.

7. Glosario

- i) Producción $Y(t)$: Cantidad de bienes y servicios realizados, en un instante de tiempo t , dentro de un país. Por ejemplo, *número de automóviles fabricados en España en un año*.
- ii) $L(t)$: Población de trabajadores que participan, en el instante de tiempo t , en la producción.
- iii) $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$: Producción por trabajador.
- iv) Capital $K(t)$: Bienes que, en el instante de tiempo t , forman parte del proceso productivo de una empresa. Por ejemplo, *maquinaria, instalaciones, etc.*
- v) $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$: Capital por trabajador.
- vi) Conocimiento tecnológico $A(t)$: Conocimiento que todo el mundo posee ó conocimiento exclusivo. Por ejemplo, *la compañía Coca-Cola es la única que conoce la receta para fabricar su bebida*.
- vii) Inversión Bruta $I_B(t)$: Cantidad de producto $Y(t)$ que, en un instante de tiempo t , compran las empresas (por ejemplo, *plantas y equipos, construcción de nuevas viviendas para uso residencial y variación de existencias*). Se incluye el gasto producido en la compra de una nueva vivienda por parte de las familias.
- viii) Depreciación δ : Bienes que compra una empresa para reemplazar las máquinas que se deterioran en el proceso productivo.
- ix) Consumo $C(t)$: Cantidad de producto que, en un instante de tiempo t , compran las familias para su propio consumo (por ejemplo, *electrodomésticos, alimentos, ropa, cortes de pelo, atención médica, educación, etc.*). Se excluyen los bienes usados (por ejemplo, *coches de segunda mano o libros utilizados*), los activos (por ejemplo, *acciones, bonos o inmuebles*) y la compra de nuevas viviendas.
- x) Ahorro $S(t)$: Cantidad de producto $Y(t)$ que, en un instante de tiempo t , no se dedica al consumo.
- xi) Coeficiente de ahorro s : Parte del Producto Interior Bruto (PIB) que se destina al ahorro. Se excluye el consumo del Estado y del sector privado.
- xii) Gasto público $G(t)$: Cantidad de producto $Y(t)$ que, en un instante de tiempo t , compra el gobierno (por ejemplo, *salarios de los empleados del sector público, funcionarios o*

no). Se excluyen los pagos de transferencias (por ejemplo, *pensiones, intereses de deuda pública, etc.*).

- xiii) Exportaciones netas $N_X(t)$: Gasto de los países extranjeros en bienes producidos en nuestro país (exportaciones) menos gastos de los residentes de nuestro país en bienes extranjeros (importaciones).
- xiv) Economía cerrada: Economía sin comercio exterior. Se consume lo que se produce en el país.
- xv) Productos marginales: Variación producida en la producción (Y) por el empleo de una unidad adicional de K o de L .
- xvi) **Ley de los rendimientos decrecientes:** Si incrementamos la cantidad de un factor productivo (K o L), manteniendo el otro constante, en la producción de un bien, llegará un momento donde la producción total dejará de aumentar. Es más, empezará a disminuir. *(Por ejemplo, supongamos que en una parcela de 5 hectáreas se encuentra un trabajador al cargo de la producción del tomate. Como la producción es muy buena, se decide contratar a otro trabajador. Como la producción sigue mejorando se decide seguir incrementando el número de trabajadores. No obstante, llega un momento en el que los trabajadores es estorban entre sí y la producción disminuye.)* [17]

Bibliografía

- [1] D. ACEMOGLU, *“Introduction to Modern Economic Growth”*, Princeton University Press, 2009.
- [2] J. ÁVILA Y LUGO *“Introducción a la economía”*, Plaza y Valdés, 2004.
- [3] W. N. BAILEY *“Generalized Hypergeometric Series”*, London: Cambridge University Press, 1935.
- [4] R. J. BARRO Y X. SALA-I-MARTIN, *“Economic Growth”*, MIT Press, 2004.
- [5] <http://datos.bancomundial.org/indicador/NY.GDP.MKTP.KD.ZG>
- [6] M. FERRARA Y L. GUERRINI, *“The neoclassical model of Solow and Swan with logistic population growth”*, Proceedings of the 2nd International Conference of IMBIC on Mathematical Sciences for Advancement of Science and Technology (MSAST), Kolkata, India, 2008, págs. 119-127.
- [7] F. GERARD Y J. F. TABLADO, *“A Theory of Production: The Estimation of the Cobb-Douglas Function, a Retrospective View”*, Eastern Economic Journal, vol.31, No.3, págs. 427-446, 2005.
- [8] S. G. KRANTZ Y G. F. SIMMONS, *“Ecuaciones Diferenciales. Teoría, Técnica y Práctica”*, McGraw-Hill, 2007.
- [9] N. G. MANKIW, *“Macroeconomía”*, Antoni Bosch, 2014.
- [10] N. G. MANKIW, *“Principios de economía”*, McGraw-Hill, 2002.
- [11] E. M. M. NAVARRO, *“El modelo de crecimiento económico de Solow-Swan: implicaciones y limitaciones”*, Universidad Autónoma de Querétaro, México, 2010.
- [12] T. PIKETTY, *“Capital in the Twenty-First Century”*, Harvard University Press, 2014.
- [13] N. ROSENBERG, *“España va a sufrir mucho si no empieza a innovar”*, El País, 8 de mayo de 2005.
Consultado online en <http://elpais.com/diario/2005/05/08/sociedad/1115503203850215.html>

- [14] R. SOLOW, “*A Contribution to the Theory of Economic Growth*”, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, No.1, págs. 65-94, 1956.
- [15] B. VALDÉS, “*Economic Growth: Theory, Empirics and Policy*”, Edward Elgar Pub, 1999.
- [16] <http://www.wipo.int/econstat/es/economics/gii/>
- [17] WIKIPEDIA, <http://www.wikipedia.org>