



FACULTAD DE EDUCACIÓN



GRADO DE MAESTRO
EN EDUCACIÓN PRIMARIA

2014/2015

Errores y dificultades más comunes en el aprendizaje de cuadriláteros: una muestra con alumnos de 9/12 años en Cantabria

Most common errors and difficulties in the
learning of quadrilaterals: a sample with 9 to
12 year-old students in Cantabria

Autora: Andrea González González

Directora: Irene Polo Blanco

Octubre 2015

Índice

1. INTRODUCCIÓN	2
2. LITERATURA.....	4
2.1. INTRODUCCIÓN	4
2.2. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.....	4
2.3. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS	6
2.4. ESTUDIO DE LOS CUADRILÁTEROS	10
2.4.1. Definición y clasificación de cuadriláteros	10
2.4.2. Cuadriláteros en el currículo de Primaria	14
2.5. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS.....	16
3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA	18
3.1. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	18
3.2. DISEÑO DE LOS MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN.....	19
3.2.1 Cuestionario	19
3.3. MUESTRA.....	22
4. RESULTADOS	23
4.1. RESULTADOS 4º ED. PRIMARIA	23
4.2. RESULTADOS 6º ED. PRIMARIA	27
5. DISCUSIÓN.....	31
6. CONCLUSIÓN	33
7. BIBLIOGRAFÍA	35

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación tiene como finalidad la identificación y el estudio de los errores y las dificultades que existen en el aprendizaje de los cuadriláteros en alumnos/as de entre 9 y 12 años en Cantabria.

Existe un gran interés en el estudio de los errores que se producen en el aprendizaje de las matemáticas. Numerosos estudios acerca de este tema realizados antes de la década de los ochenta consideran el error como algo negativo que debe intentar erradicarse. Sin embargo, a partir de la década de los ochenta se comienza a considerar este como algo necesario en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los errores forman parte del aprendizaje de las matemáticas: no sólo se producen en alumnos/as “menos capaces” sino que casi todos los alumnos cometen algún error o tienen alguna dificultad en el aprendizaje de las matemáticas (Socas, 2007). Es importante considerar los errores como una herramienta con la que el docente puede organizar estrategias que permitan una mejor enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Socas, 2007), por lo que, además, es necesario no sólo conocer cuáles son esos errores sino saber por qué se producen.

A través de este estudio trataremos de identificar los errores que comenten el alumnado de 4º y 6º de Cantabria en el aprendizaje de los cuadriláteros. A su vez, proporcionaremos una clasificación de dichos errores basándonos en el marco teórico de formación de conceptos matemáticos de Vinner y Hershkowitz (1983) y Vinner (1991).

El trabajo se presenta en 6 capítulos. En el capítulo 2, literatura, se realiza una revisión bibliográfica sobre estudios realizados anteriormente relacionados con los errores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, de la geometría y, de forma particular, de los cuadriláteros. También, se realiza una conceptualización de los diferentes cuadriláteros, así como un estudio de los contenidos referentes a los cuadriláteros según el currículo de Primaria. En el capítulo 3 se presentan las preguntas de investigación que se han estimado para llevar a cabo este estudio, así como las

características del método y la muestra empleados para llevar a cabo este estudio. En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos en la investigación. En el capítulo 5 se analizan e interpretan los resultados obtenidos relacionándolos con el marco teórico expuesto en el capítulo 2. Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones más importantes obtenidas de este estudio.

2. LITERATURA

2.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se realizará una revisión bibliográfica de los estudios realizados sobre el tema a tratar. En el primer punto (§ 2.2.) hablaremos, de forma general, de los errores y las dificultades que surgen en el aprendizaje de las matemáticas. En el segundo punto (§ 2.3.) hablaremos acerca de los errores que aparecen en la formación de los conceptos geométricos, para lo cual se tendrá en cuenta el modelo de Vinner y Hershkowitz (1983) y Vinner (1991). A continuación (§ 2.4.) se realizará una conceptualización de los cuadriláteros, presentando diferentes definiciones y clasificaciones de los mismos. Analizaremos cómo y cuándo se estudian los contenidos referentes a los cuadriláteros según se establece en el currículo de Educación Primaria de la LOMCE. Finalmente (§ 2.5.) se presentarán algunos estudios que tratan de identificar diferentes errores que aparecen en el aprendizaje del concepto de cuadrilátero.

2.2. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La continua presencia de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas ha supuesto que se hayan realizado multitud de estudios acerca de este tema. Estos se pueden clasificar en dos etapas. Por un lado, los estudios realizados antes de la década de los ochenta reflejan que el error es algo negativo que debe erradicarse. Por otro lado, a partir de la década de los ochenta diferentes estudios coinciden en que el error es un elemento normal en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado. En ellos se muestra el error como un elemento mediante el cual se puede profundizar en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos del alumnado (Socas, 2008).

Asimismo, este incesante estudio acerca de los errores ha llevado a diversos filósofos de la ciencia y epistemólogos a reflexionar sobre este tema; entre ellos destacaremos las consideraciones que tienen sobre el error Popper, Bachelard y Lakatos.

Popper (1967) sostiene que no hay fuentes últimas de conocimiento, ya que éste está mezclado con nuestros errores. Por ello, hay que admitir el error como parte de la adquisición del conocimiento, buscándolos de forma crítica para modificar aquellos conocimientos erróneos.

Bachelard (1978) señala el error como un obstáculo epistemológico, utilizándolo como clave para el estudio, análisis, sistematización y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

Lakatos (1986) considera que los errores aparecen de forma sistemática durante el proceso habitual de construcción de los conocimientos matemáticos. En este proceso se debe incluir el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores a través de actividades que inciten a ver de forma crítica las propias elaboraciones.

Existen dos acercamientos al tratamiento del error por parte de los docentes. En el primero, el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno/a y por ello debe ser corregido, controlado e, incluso, penalizado. En el segundo, el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, por lo que el docente debe tratar de contribuir cuando el alumnado lo necesite evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Ambos tipos tienen algo en común y es que se considera el error como algo natural en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero que debe ser diagnosticado lo antes posible para poder lograr que el alumnado lo supere (Rico, 1997).

Los errores forman parte del aprendizaje de las matemáticas: no sólo se producen en los alumnos/as “menos capaces” sino que, en un momento u otro, prácticamente todos cometemos algún error o tenemos alguna dificultad en el aprendizaje de las matemáticas (Socas, 1997). Cuando un alumno/a comete un error está mostrando que tiene ciertos conocimientos incompletos. El papel del

docente no es evitar ese error, sino hacer ver a su alumnado que los conocimientos que tienen pueden no ser válidos para todos los casos, por lo que deberá ayudarlo dándole elementos que le permitan comprender y evitar ese error, completando ese conocimiento que tenía incompleto (Rico, 1997).

Es importante considerar los errores como una herramienta con la que el docente puede organizar estrategias que permitan una mejor enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que, además, es necesario no sólo conocer cuáles son esos errores sino saber por qué se producen (Socas, 1997).

Socas (1997, pp. 126) señala que *las dificultades pueden estar asociadas a diferentes causas: la complejidad de los objetos matemáticos, los procesos de pensamiento matemático, procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y/o las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.*

Por otra parte, Brousseau et al. (1986) consideran que los errores pueden tener varios orígenes diferentes: errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, errores como consecuencia de la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, errores como consecuencia del uso de métodos propios del alumnado, etc., o consecuencia de las diferentes variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto... y de las interacciones de todas ellas (Radatz, 1979).

2.3. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Como marco teórico para el estudio de los errores en la formación de los conceptos geométricos, se tomará como principal modelo de referencia la teoría de Vinner y Hershkowitz (1983) y Vinner (1991). Según Vinner y Hershkowitz (1983) y Vinner (1991) cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto que conocemos, se estimula en nuestra memoria algo que

generalmente no es la definición de dicho concepto; en cambio, aparece una representación visual, una imagen de ese concepto. Ese “algo” que aparece, Vinner lo describe como imagen del concepto o imagen conceptual (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Es habitual entre los docentes pensar que sus alumnos forman sus razonamientos a partir de las definiciones de los conceptos, y que las imágenes mentales que tienen de dichos conceptos tienen un papel secundario. Vinner y Hershkowitz (1983) y Hershkowitz (1989) muestran en sus estudios con alumnos de entre 10 y 14 años cómo la mayoría de los estudiantes resuelven problemas basándose en las imágenes conceptuales que han adquirido, mientras que apenas hacen uso de la definición de concepto. En contraposición, los docentes a menudo piensan que sus alumnos/as utilizan las definiciones conceptuales formales que les proporcionan, y que las imágenes conceptuales tienen un papel secundario. Dicha imagen mental del concepto es con frecuencia incompleta o contiene ejemplos que no pertenecen al concepto implicado (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Teniendo en cuenta esto, aunque los estudiantes memoricen las definiciones para responder cuando se les pregunta sobre un concepto geométrico, para la resolución de ejercicios no utilizan dichas definiciones ya que carecen de una imagen conceptual correcta (Vinner, 1991). De este modo, aunque conocen la definición del concepto, en muchos casos no son capaces de reconocerlo cuando aparecen en una posición diferente a la figura prototipo que se da en el libro de texto, puesto que han tomado esa posición como parte de la definición (Barrantes y Zapata, 2008).

Vinner y Hershkowitz (1983) hacen distinción entre tres elementos claves en la formación de conceptos matemáticos: (1) el concepto, (2) la imagen conceptual y (3) la definición del concepto.

(1) El concepto es la definición matemática formal. Según la teoría de Vinner y Hershkowitz (1983), para adquirir un concepto debemos obtener un mecanismo de construcción e identificación por el cual podamos construir e identificar todos los ejemplos posibles de ese concepto, tal y como esté concebido por la comunidad matemática. (2) La imagen conceptual es la

representación visual formada por un conjunto de figuras y propiedades asociadas a ese concepto que un individuo tiene en la mente. *La imagen conceptual de un concepto será correcta cuando permita al alumno/a discriminar sin errores todos los ejemplos de dicho concepto y cuando las propiedades que llevan asociadas sean todas relevantes* (Gutiérrez y Jaime, 1996, pp. 146). Finalmente, (3) la definición de concepto es la definición verbal que el estudiante tiene en la memoria y repite cuando se le pide. A pesar de que los alumnos/as son capaces de memorizar sin problema la definición de concepto no suelen aplicarla para resolver un problema.

Como explican Gutiérrez y Jaime (1996) cuando en una persona se forma la imagen de un concepto tiene un papel muy importante la experiencia propia y los ejemplos que ha visto y/o utilizado. Viendo los libros de texto podemos comprobar que los ejemplos que aparecen de las diferentes figuras geométricas son escasos y siempre iguales. Esto provoca que los estudiantes asocien dicha imagen a ese concepto, siendo así un prototipo. Por lo tanto, es necesario mostrar al alumnado un gran número de ejemplos diferentes y lograr así que tengan una imagen conceptual más completa.

Hershkowitz (1990), basándose en el modelo de Vinner, señala tres tipos de comportamientos en función de la calidad de las imágenes conceptuales que tengan los estudiantes, como veremos a continuación.

En primer lugar, encontramos aquellos estudiantes con imágenes conceptuales muy pobres, las cuales están formadas únicamente por unos pocos ejemplos prototípicos. Estos alumnos/as a la hora de resolver problemas se basan en comparaciones entre las figuras prototipo y las que aparecen en su problema, por lo que rechazan aquellas figuras que no coinciden con su imagen del concepto.

En segundo lugar, encontramos aquellos estudiantes con imágenes conceptuales formadas por unos pocos ejemplos prototípicos pero que, además, incluyen propiedades matemáticas de las figuras. Estos alumnos/as se basan en dichas propiedades, por lo que rechazan aquellas figuras que no cumplen esas propiedades.

Por último, encontramos aquellos estudiantes que han sido capaces de construir una imagen conceptual completa ya que han recibido una gran variedad de ejemplos y todas sus propiedades importantes.

Así mismo, Vinner (1991) diferencia entre dos elementos clave para adquirir un concepto: los atributos relevantes y los atributos irrelevantes. Los atributos relevantes de un concepto son aquellas propiedades que deben poseer todos los ejemplos de dicho concepto, mientras que los atributos irrelevantes son aquellas propiedades no necesarias para definir el concepto pero que permite diferenciar unos ejemplos de otros. Por ejemplo, para definir el concepto de cuadrilátero, un atributo relevante es ser un polígono de cuatro lados; sin embargo sería un atributo irrelevante el paralelismo de sus lados.

Con frecuencia los ejemplos presentados en los libros de texto fomentan la inclusión de atributos irrelevantes en las imágenes conceptuales (Jaime et al, 1992; Barrantes y Zapata, 2008). Ciertos atributos irrelevantes tienen fuertes características visuales y actúan como distractores. Uno de los distractores más conocidos son los distractores de orientación. Estos se refieren a aquellas propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto (Vinner y Hershkowitz, 1983). Por ejemplo, la orientación de los rombos apoyados siempre sobre un vértice provoca que no lo reconozcan cuando aparece apoyado sobre la base.

Por otra parte, encontramos los distractores de estructuración. Estos corresponden con una presentación débil del concepto en el que ciertos elementos y propiedades son excluidos. Un ejemplo de esto es la aparición única de figuras convexas en los libros de texto. Esto provoca que cuando aparece un cuadrilátero cóncavo, por ejemplo, no sean capaces en muchos casos de identificarlo, aun conociendo la definición de cuadrilátero (Barrantes y Zapata, 2008).

En un estudio llevado a cabo por Gutiérrez y Jaime (1996) con estudiantes de Magisterio de la Universidad de Valencia con el objetivo de ampliar el estudio de Vinner y Hershkowitz, se muestra cómo la mayoría de los errores en el aprendizaje de conceptos geométricos se producen por poseer

unas imágenes conceptuales muy pobres, basadas en ejemplos prototípicos que no incluyen todos los atributos relevantes del concepto.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, Gutiérrez y Jaime (1996) proponen presentar al alumnado una colección rica de diferentes ejemplos y contraejemplos de cada concepto que les permita identificar qué atributos son relevantes y cuáles no lo son; de esta forma se logrará crear una imagen conceptual completa acorde a la definición matemática.

2.4. ESTUDIO DE LOS CUADRILÁTEROS

En esta sección se tratará el concepto de cuadrilátero, presentándose distintas clasificaciones y definiciones que se consideran, así como cuándo y cómo se enseña este concepto según el currículo de Primaria.

2.4.1. Definición y clasificación de cuadriláteros

Se entiende por cuadrilátero un *polígono de cuatro lados* (SM, 2008). Así mismo, los polígonos son aquellas *figuras planas formadas por una línea poligonal cerrada y su interior* (SM, 2008). Los polígonos se clasifican según su número de lados. Además, en la enseñanza en España en Primaria se clasifican los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. En esta clasificación sólo se consideran los casos convexos, lo cual se deduce de los ejemplos que aparecen de trapecioide en los libros consultados. Así, se dividen en: (1) paralelogramos, (2) trapecios y (3) trapezoides.

(1) Los paralelogramos se definen como *cuadriláteros con lados paralelos dos a dos* (SM, 2008) o como *cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí* (Santillana, 2002; Everest 2009; RAE, 2015). Entre los paralelogramos se encuentran el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide. (2) Los trapecios se definen como *cuadriláteros con dos lados*

paralelos (SM, 2008; Santillana, 2002; Everest, 2009) o como *cuadrilátero irregular que tiene paralelos solamente dos de sus lados* (RAE, 2015). Dentro de los trapecios se distinguen el trapecio isósceles, el cual se define como *trapecio cuyos lados no paralelos son iguales y los ángulos son iguales dos a dos* (SM, 2008) o como *trapecio cuyos lados no paralelos son iguales* (Everest, 2009); el trapecio rectángulo, el cual se define como *trapecio con dos ángulos rectos* (SM, 2008; Everest, 2009); y el trapecio escaleno, el cual se define como *trapecio con los cuatro lados y los cuatro ángulos desiguales* (SM, 2014; Everest, 2009). (3) Los trapezoides son aquellos *cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo* (SM, 2008; Santillana, 2002; Everest, 2009) o *cuadriláteros irregulares que no tienen ningún lado paralelo a otro* (RAE, 2015). Aunque dentro de los trapezoides podemos encontrar diferentes casos, en los libros de Primaria consultados no se les hacía ninguna mención.

Dentro de los distintos tipos de paralelogramos encontramos las siguientes definiciones de cuadrado: *figura plana con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales* (SM, 2008), *figura plana que tiene sus cuatro lados iguales y sus cuatro ángulos rectos* (Santillana, 2002; Everest, 2009) y *figura plana cerrada por cuatro líneas rectas iguales que forman otros tantos ángulos rectos* (RAE, 2015).

Por su parte, encontramos las siguientes definiciones de rectángulo: *paralelogramo con cuatro lados iguales dos a dos y cuatro ángulos iguales* (SM, 2008), *paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos* (Santillana, 2002), *paralelogramo que tiene los lados paralelos iguales y sus cuatro ángulos rectos* (Everest, 2009) y *paralelogramo que tiene los cuatro ángulos rectos y los lados contiguos desiguales* (RAE, 2015).

En cuanto a los rombos podemos encontrar las siguientes definiciones: *paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos iguales dos a dos* (SM, 2008), *paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales* (Santillana, 2002), *paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y los ángulos opuestos iguales* (Everest, 2009) y *paralelogramo que tiene los lados iguales y dos de sus ángulos mayores que los otros dos* (RAE, 2015).

Por último, encontramos las siguientes definiciones de romboide: *paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos iguales dos a dos* (SM, 2008), *paralelogramo que tiene los lados y los ángulos opuestos iguales* (Santillana, 2002), *paralelogramo que tiene los lados paralelos iguales y los ángulos opuestos iguales* (Everest, 2009) y *paralelogramo cuyos lados contiguos son desiguales y dos de sus ángulos mayores que los otros dos* (RAE, 2015).

Los cuadriláteros son polígonos que tienen 4 lados y 4 ángulos.

Clasificamos los cuadriláteros según el número de lados paralelos.

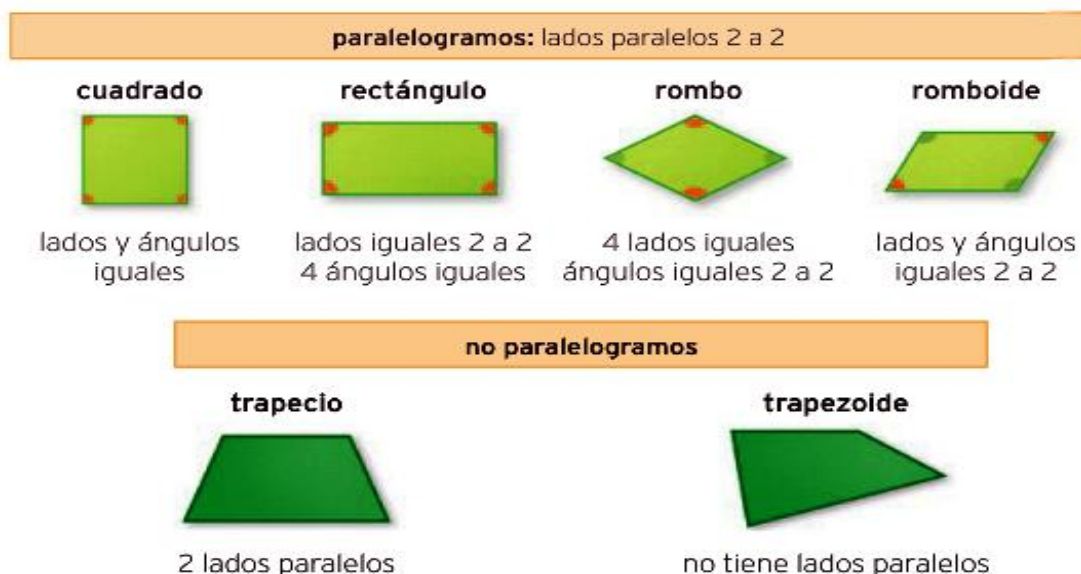


Figura 1. Clasificación y definición de los cuadriláteros. (Libro 4º Matemáticas SM, 2012)

Dentro de la clasificación de los paralelogramos pueden aparecer ambigüedades dependiendo de la interpretación que se haga de las definiciones. Por ejemplo, la definición de rectángulo que aparece en la figura 1 es paralelogramo que tiene los lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos iguales; esto generalmente se interpreta como que dos de los lados son de tamaño mayor a los otros dos lados. Esta interpretación lleva a que el alumnado no considere que el cuadrado (cuya definición que se proporciona es: lados y ángulos iguales) también sea un rectángulo (Barrantes y Zapata, 2008). Como afirman Barrantes y Zapata (2008, pp. 10) esto ocurre porque *los cuadriláteros son clasificados en Primaria como clases disjuntas en las que el*

rectángulo, el cuadrado y el rombo pertenecen a clases distintas. De esta forma encontramos la siguiente clasificación:

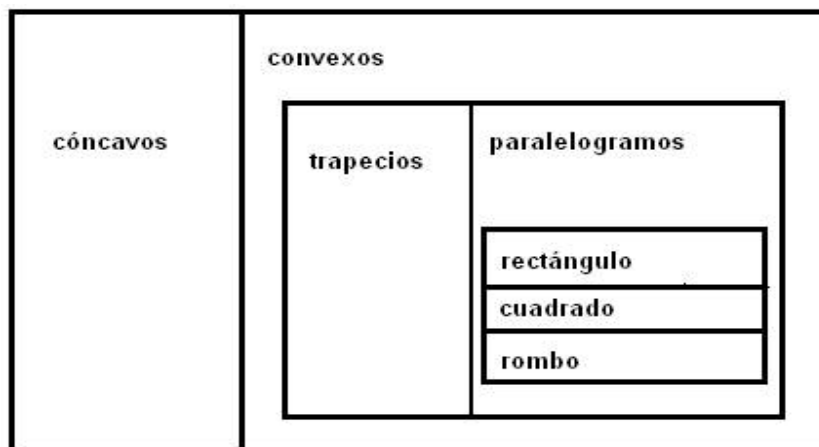


Figura 2. Clasificación por partición de los cuadriláteros. (Barrantes y Zapata, 2008)

En Primaria, a través de las definiciones de los libros de texto, las figuras planas se clasifican por partición (figura 2). Esto se observa, sobre todo, en las definiciones de rectángulo, cuadrado y rombo que son clasificados como figuras diferentes. No es hasta Secundaria cuando comienza a verse la clasificación por inclusión (figura 3) y se les explica que los cuadrados pueden ser rombos o pueden ser rectángulos. Sin embargo, tienen tan arraigada la clasificación por partición que esto les produce serias dificultades (Barrantes y Zapata, 2008).

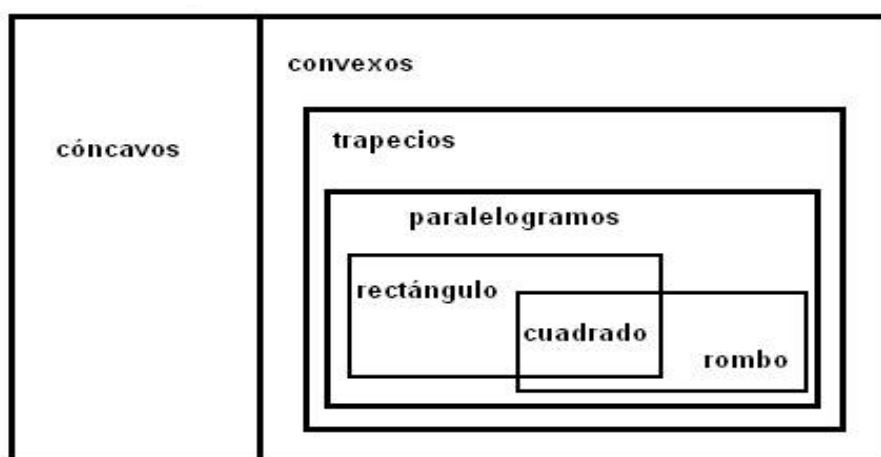


Figura 3. Clasificación por inclusión de los cuadriláteros. (Barrantes y Zapata, 2008)

Por otro lado, los cuadriláteros pueden ser cóncavos o convexos. Sin embargo en los libros de texto de Primaria consultados no se hace ninguna mención a la definición de estos conceptos. Además solamente aparecen polígonos cóncavos, de forma general, en los diferentes ejercicios del libro para hacer distinción entre polígono regular o irregular o para calcular un perímetro, pero no como ejemplo de cuadrilátero.

2.4.2. Cuadriláteros en el currículo de Primaria

Los contenidos del currículo de Educación Primaria de la Comunidad Autónoma de Cantabria (BOC, Decreto 27/2014, de 5 de junio, pp. 1679-1735) en lo referente a la geometría son especificados en el Bloque 4 de cada curso.

Los contenidos que se trabajan en 1º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1685-1686) relacionados con los cuadriláteros son las formas geométricas planas.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables para este curso se tiene en cuenta si son capaces de identificar formas geométricas cuadrangulares en el entorno, de dibujar a mano alzada cuadrados, o si utilizan un vocabulario geométrico, adecuado a su nivel, en la descripción oral de itinerarios o rutas.

En 2º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1692) vuelven a aparecer en cuanto a contenidos las formas geométricas planas. Además, se comienza a identificar las figuras geométricas en función de sus vértices y lados.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluable se tiene en cuenta si son capaces de identificar polígonos contando sus lados o vértices, si saben dibujar a mano alzada cuadriláteros, si dibujan y construyen figuras planas utilizando distintos tipos de materiales, si observan e identifican en su entorno las formas geométricas planas más comunes, o si utilizan un vocabulario geométrico, adecuado a su nivel, en la descripción de itinerarios.

En 3º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1700-1701) los contenidos que se trabajan son las figuras planas: elementos y relaciones, la clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados, la concavidad y convexidad de figuras planas y el concepto de perímetro de figuras planas.

Por su parte, los estándares de aprendizaje evaluables tienen en cuenta si el alumnado es capaz de clasificar los cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados, de identificar y nombrar los polígonos atendiendo al número de lados, calcular el perímetro de las figuras planas, componer y descomponer para formar figuras planas sencillas a través de otras, y comparar y clasificar figuras planas utilizando diversos criterios.

En 4º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1712-1713) el único contenido relacionado con los cuadriláteros que aparece en el currículo es el cálculo del perímetro de las figuras planas.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables únicamente mencionan la construcción de figuras planas a través de instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas, y la composición y descomposición para formar figuras planas a través de otras.

En 5º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1722-1723) los contenidos que se trabajan es la medida de ángulos en cuadriláteros, los polígonos regulares e irregulares y el cálculo del perímetro y área.

Por su parte, los estándares de aprendizaje evaluable tienen en cuenta si el alumnado es capaz de identificar polígonos regulares e irregulares, averiguar la medida de los ángulos de un cuadrilátero dado, utilizar instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción de figuras planas, calcular el perímetro y el área de paralelogramos y trapecio, y calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.

Por último, en 6º de Educación Primaria (BOC, 2014, pp. 1733-1734) los contenidos que se trabajan es el cálculo de áreas de las figuras planas.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables se tiene en cuenta si el alumnado es capaz de representar figuras semejantes por ampliación y

reducción, utilizar instrumentos de dibujo y herramientas tecnológicas para la construcción de figuras planas, calcular el área de un polígono regular para resolver problemas, y si aplica los conceptos de perímetro y área de figuras para la realización de cálculos sobre planos y espacios reales y para interpretar situaciones de la vida diaria.

2.5. ERRORES Y DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS

Existen numerosos estudios que tratan de identificar los diferentes errores que se producen en el aprendizaje de los conceptos geométricos, como son los de Gutiérrez y Jaime (1996), Medici et al. (1986) y Vinner (1991). En particular, varios tratan los errores en el aprendizaje de los cuadriláteros Kerslake (1979, citado en Dickson et al., 1991) o los informes APU (1980 y 1981, citado en Dickson et al., 1991)

Medici et al. (1986) realizaron una investigación con estudiantes de entre 9 y 10 años en un colegio de Italia con la finalidad de identificar su habilidad para describir con palabras una figura geométrica o para construir conceptos. Medici et al. (1986) concluyen que los estudiantes son influidos por el uso de un nombre común “oficial” y que estos presentan dificultades cuando tienen que describir una figura geométrica que no tenga uno de esos nombres. Además, explican cómo algunos estudiantes aplican una traslación u homotecia a los ejemplos prototípicos que tienen adquiridos en su imagen mental del concepto para nombrar ciertas figuras; de esta forma aparecen expresiones como “cuadrado torcido” para referirse a un rombo.

Un informe APU realizado en 1980 (APU, 1980b, citado en Dickson et al., 1991) sobre enseñanza secundaria con alumnos/as de 15 años muestra que alrededor del 70% de estos tenían dificultades para nombrar correctamente a la cometa, el rombo o el trapecio.

En otro informe APU (1981a, citado en Dickson et al., 1991) se les pidió a 402 estudiantes de 11 años que identificasen cuáles de las figuras dadas eran rectángulos. Entre las respuestas obtenidas aparecieron algunas como que “los rectángulos tienen que estar acostados” o “son llanos, largos y no demasiado anchos”, viéndose reflejados los distractores de orientación.

Kerslake (1979) en un estudio con 155 niños de entre 5 y 10 años, pidió a estos que señalasen todos los rectángulos que hubiese de entre las figuras que les daba. Tanto en este estudio, como en el informe APU de 1981, el cuadrado fue prácticamente excluido por todos los estudiantes, tan sólo un 5% y un 8%, respectivamente, afirmaron que el cuadrado es también un rectángulo.

En un estudio realizado por Gutiérrez y Jaime (1996) con estudiantes de Magisterio comprobaron que estos presentan una imagen conceptual del concepto de cuadrilátero muy similar a la de los estudiantes de Educación Primaria, basando la mayoría de sus respuestas en los ejemplos prototípicos. En ese mismo artículo se indica que los estudiantes, con frecuencia, incluyen en su imagen conceptual de cuadrilátero que este sea convexo por lo que no consideran los ejemplos como “la flecha” como cuadriláteros. Esto puede deberse, como sostienen Jaime et al. (1992) a la ausencia de ejemplos de cuadriláteros cóncavos en los libros de texto.

3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

En este capítulo platearemos una serie de preguntas que nos ayuden a enfocar este trabajo de investigación. Además, se describirá cuál ha sido la metodología utilizada para la realización de este estudio.

En el primer punto (§ 3.1.) se plantearán las preguntas de investigación de este trabajo. En el segundo punto (§ 3.2.) se mostrará el diseño del método de investigación utilizado. También, se hará referencia al modo en que se ha realizado el cuestionario por el alumnado y se detallará cómo es el diseño del mismo. Por último, en el punto tres (§ 3.3.) se hablará acerca de la muestra utilizada para esta investigación.

3.1. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En el capítulo anterior, literatura, hemos observado que los alumnos/as de Educación Primaria tienen dificultades y cometen serios errores durante el proceso de aprendizaje de la geometría, en este caso en concreto, de los cuadriláteros. Además, hemos presentado el marco teórico de Vinner y Hershkowitz (1983) y Vinner (1991) que explican la presencia de dichos errores en el aprendizaje de conceptos geométricos. Teniendo esto en cuenta nos planteamos tres preguntas de investigación que orienten este trabajo:

1. ¿Qué ejemplos forman parte de la imagen conceptual de los alumnos/as de los distintos tipos de cuadriláteros?
2. ¿Qué distractores aparecen?
3. ¿Prevalece la imagen mental respecto a la definición proporcionada?

3.2. DISEÑO DE LOS MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

La realización de este estudio se ha llevado a cabo mediante un cuestionario. A través del cuestionario se pretendía averiguar si los alumnos/as son capaces de identificar distintos tipos de cuadriláteros en distintas posiciones además de la estándar y observar si identifican cuadriláteros cóncavos. Además, en todas las preguntas del cuestionario se les proporcionó la definición del concepto a identificar con el fin de observar en qué medida prevalece la imagen mental del alumno sobre la definición proporcionada. En el caso de los tipos de paralelogramos la definición proporcionada fue la de inclusión.

3.2.1 Cuestionario

En este apartado detallaremos cómo es el diseño del cuestionario empleado en esta investigación.

En la primera pregunta del cuestionario se pide al alumnado señalar de entre las figuras que se les muestra cuáles son cuadriláteros. Para ello se le da a elegir entre distintos tipos de polígonos en distintas posiciones. En la segunda pregunta se les pide señalar de entre las figuras que aparecen cuáles son rombos. En la tercera pregunta se les pide que señalen cuáles son rectángulos y en la cuarta que identifiquen los trapecios que aparecen. Todas las preguntas van acompañadas de la definición del concepto a identificar, siendo ésta en el caso de los paralelogramos la definición de la clasificación por inclusión.

En cada una de las preguntas del cuestionario se pretende encontrar si los alumnos/as comenten alguno de los errores de los se han hablado en el capítulo de literatura. Así pues podemos clasificar los errores posibles de la manera siguiente:

1. Errores en la identificación de cuadriláteros, siendo cóncavos o no.
2. Errores en la identificación de rombos.
3. Errores en la identificación de rectángulos.
4. Errores en la identificación de trapecios.

El cuestionario se divide en dos apartados. En el primero de ellos los alumnos/as deben rellenar una serie de datos como son: el nombre y apellidos, el sexo, la edad, el curso al que pertenecen y la nota que obtiene generalmente en matemáticas.

En el segundo apartado aparecen los cuatro ejercicios de los que consta el cuestionario. Los enunciados son sencillos y claros en lo que se pide: señalar un tipo de figura determinada, proporcionando la definición de la misma.

Todas las preguntas han sido diseñadas para poder encontrar los errores mencionados anteriormente. Antes de la realización de la prueba se comprobó con profesores de Primaria de los cursos evaluados que el cuestionario era adecuado para el nivel de los alumnos y se completó con sus sugerencias.

CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS

Rellena los siguientes datos:

Nombre y apellidos:

Sexo: chico ☐

chica ☐

Edad:

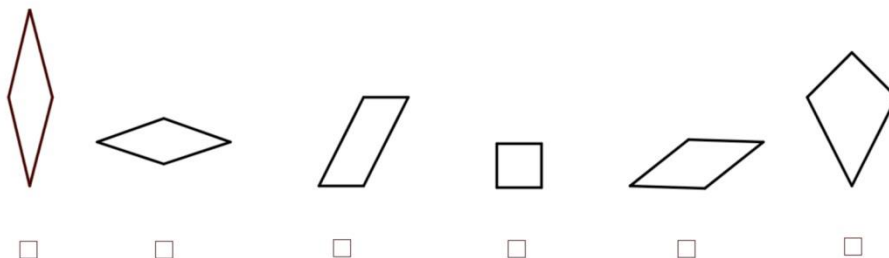
Curso:

¿Qué nota obtienes normalmente en matemáticas? Da un número del 1 al 10:

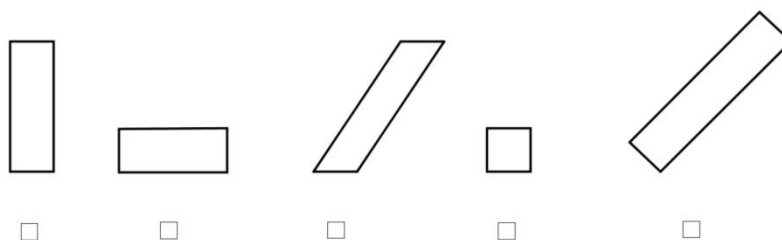
1 . Señala con una cruz las figuras que sean cuadriláteros. Recuerda la definición de cuadrilátero: polígono de cuatro lados.



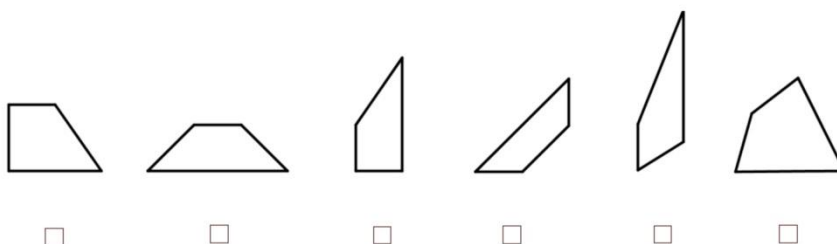
2 . Señala con una cruz las figuras que sean rombos. Recuerda la definición de rombo: cuadrilátero con cuatro lados iguales.



3. Señala con una cruz las figuras que sean rectángulos. Recuerda la definición de rectángulo: cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.



4 . Señala con una cruz las figuras que sean trapezios. Recuerda la definición de trapezio: cuadrilátero con un solo par de lados paralelos.



3.3. MUESTRA

Para llevar a cabo esta investigación se realizaron 88 cuestionarios a los alumnos/as de 4º y 6º de Educación Primaria de un colegio público de Cantabria, en el cual la autora estaba realizando las prácticas del grado. Dichos alumnos/as tienen entre 9/10 años y 11/12 respectivamente.

En las aulas de 4º de Educación Primaria se tomaron muestras a 40 alumnos (19 chicas y 21 chicos), mientras que en las aulas de 6º de Educación Primaria se tomaron 48 muestras (20 chicas y 28 chicos).

En el momento de la realización del estudio todos los alumnos habían recibido instrucción sobre el concepto de cuadrilátero así como de los distintos tipos en la clasificación.

Con la finalidad de obtener unos resultados lo más fiables posibles, los alumnos no tenían conocimiento previo acerca del contenido de este cuestionario. El cuestionario se realizó en presencia del tutor y/o profesor de matemáticas y se administró a la totalidad de alumnos/as presentes en el aula.

Para la realización de este cuestionario los alumnos/as no podían utilizar ningún tipo de material con la excepción de un bolígrafo o lápiz y goma. Asimismo, no se permitía que hablasen entre ellos para ayudarse ni se les contestó a ninguna de las dudas que les surgieron en ese momento. La duración de la prueba no tenía límite de tiempo, sino que se les dio a los alumnos/as el tiempo que necesitasen para pensar y responder el cuestionario. En todos los casos la duración de la prueba no fue superior a 30 minutos.

4. RESULTADOS

En este capítulo se presentaran los resultados de las preguntas del cuestionario. Por una parte, expondremos los resultados obtenidos con el alumnado de 4º de Educación Primaria y, por otra parte, los resultados obtenidos con el alumnado de 6º de Educación Primaria.

4.1. RESULTADOS 4º ED. PRIMARIA

Tabla 1. Porcentaje de errores en la pregunta 1: “Señala con una cruz las figuras que sean cuadriláteros. Recuerda la definición de cuadrilátero: polígono de cuatro lados”.

4ª Ed. Primaria	
Respuesta correcta	67,5%
Exclusión caso concavidad	17,5%
Respuestas sin clasificar	15%

El 67,5% del alumnado de 4º de Primaria ha señalado correctamente las figuras que son cuadriláteros.

Por otro lado, un 17,5% de los alumnos/as no ha sido de capaz de reconocer la figura cóncava como un cuadrilátero pero sí han señalado correctamente el resto de cuadriláteros.

En las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Laura (9 años) ha señalado todos los cuadriláteros (incluido el cóncavo) excepto el trapecio.

Tabla 2. Porcentaje de errores en la pregunta 2: “Señala con una cruz las figuras que sean rombos. Recuerda la definición de rombo: cuadrilátero con cuatro lados iguales”.

4ª Ed. Primaria	
Respuesta correcta clasificación por inclusión	35%
Respuesta correcta clasificación por partición	40%
Sólo rombos posición prototípica	5%
Respuestas sin clasificar	20%

El 35% de los alumnos/as de 4º de Primaria ha contestado correctamente a esta pregunta teniendo en cuenta la definición por inclusión dada en el enunciado. Mientras que un 40% del alumnado ha dado una respuesta correcta si se tiene en cuenta la clasificación por partición que se enseña a lo largo de la Ed. Primaria, es decir, no han incluido el cuadrado como caso particular del rombo.

El 5% de los alumnos/as únicamente ha señalado aquellos rombos que se encuentran en posición prototípica (apoyados en un vértice).

En las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Ramón (10 años) ha señalado como rombos al cuadrado y al rombo en posición horizontal apoyado sobre un vértice, pero no ha señalado el que aparece en posición vertical ni al que aparece apoyado sobre un lado.

Tabla 3. Porcentaje de errores en la pregunta 3: “Señala con una cruz las figuras que sean rectángulos. Recuerda la definición de rectángulo: cuadrilátero ángulos rectos”.

4ª Ed. Primaria	
Respuesta correcta clasificación por inclusión	15%
Respuesta correcta clasificación por partición	37,5%
Sólo rectángulos posición prototípica	10%
Sólo rectángulos pos. prototípica, exclusión cuadrado	5%
Inclusión romboide	30%
Respuestas sin clasificar	2,5%

Tan solo el 15% de los alumnos/as de 4º de Primaria ha contestado correctamente a esta pregunta atendiendo a la definición por inclusión que se les ha dado en el enunciado. Mientras que el 37,5% del alumnado ha respondido de forma correcta si se tiene en cuenta la clasificación por partición, por lo que no han incluido el cuadrado como rectángulo.

El 10% de los alumnos/as ha señalado aquellos rectángulos que aparecen en posición prototípica (apoyado en la base), incluyendo el cuadrado. Mientras que un 5% de los alumnos/as sólo han señalado aquellos que aparecen en posición prototípica, sin incluir el cuadrado.

Un 30% del alumnado ha incluido el romboide dentro de la clasificación de rombo. De ese 30%, el 25% ha incluido a su vez el cuadrado, mientras que el 75% no lo ha hecho.

Dentro de las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Lucía (9 años) ha señalado sólo el cuadrado.

Tabla 4. Porcentaje de errores en la pregunta 4: “Señala con una cruz las figuras que sean trapezios. Recuerda la definición de trapecio: cuadrilátero con un solo par de lados paralelos”.

4ª Ed. Primaria	
Respuesta correcta	5%
Sólo trapezios apoyados en un lado	17,5%
Sólo trapezios isósceles	32,5%
Sólo trapezios rectángulos	0%
Inclusión trapezoide	35%
Respuestas sin clasificar	10%

Tan solo el 5% de los alumnos/as de 4º de Primaria ha contestado correctamente a esta pregunta.

Un 17,5% del alumnado ha incluido únicamente los trapezios que se encuentran apoyados sobre un lado, es decir, no han incluido el trapecio escaleno. De este 17,5%, solamente han incluido los cuatro trapezios apoyados sobre un lado un 42,86%, mientras que el 57,14% de ellos sólo han señalado algunas de esas figuras, ya sea los dos isósceles y uno rectángulo, los dos rectángulos y uno isósceles o uno de cada.

El 32,5% del alumnado ha señalado que son trapezios únicamente los isósceles, mientras que ningún alumno ha señalado únicamente los trapezios rectángulos. Además, un 35% del alumnado ha incluido como trapecio la figura del trapezoide.

En las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Manuel (10 años) ha señalado únicamente el trapecio escaleno.

4.2. RESULTADOS 6º ED. PRIMARIA

Tabla 1. Porcentaje de errores en la pregunta 1: “Señala con una cruz las figuras que sean cuadriláteros. Recuerda la definición de cuadrilátero: polígono de cuatro lados”.

6º Ed. Primaria	
Respuesta correcta	35,42%
Exclusión caso concavidad	37,5%
Respuestas sin clasificar	27,08%

El 35,42% del alumnado de 6º de Primaria han señalado correctamente las figuras que son cuadriláteros.

Por otro lado, un 37,5% de los alumnos/as no ha sido capaz de reconocer en la figura cóncava un cuadrilátero a pesar de darles la definición, pero si han señalado correctamente el resto de cuadriláteros.

En las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Miguel (11 años) sólo ha señalado el paralelogramo.

Tabla 2. Porcentaje de errores en la pregunta 2: “Señala con una cruz las figuras que sean rombos. Recuerda la definición de rombo: cuadrilátero con cuatro lados iguales”.

6º Ed. Primaria	
Respuesta correcta clasificación por inclusión	16,67%
Respuesta correcta clasificación por partición	58,33%
Sólo rombos posición prototípica	2,08%
Respuestas sin clasificar	22,91%

El 16,67% de los alumnos/as de 6º de Primaria han contestado correctamente a esta pregunta teniendo en cuenta la definición por inclusión que se les proporciona en el enunciado. Por otro lado, el 58,33% ha respondido de forma correcta si se tiene en cuenta la clasificación por partición que se les enseña en Primaria, por lo que no han incluido el cuadrado como rombo.

El 2,08% de los alumnos/as únicamente han señalado aquellos rombos que se encuentran en posición prototípica, es decir, apoyados en un vértice.

Dentro de las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Sergio (11 años) ha señalado todos los rombos a excepción del cuadrado pero ha añadido el romboide.

Tabla 3. Porcentaje de errores en la pregunta 3: “Señala con una cruz las figuras que sean rectángulos. Recuerda la definición de rectángulo: cuadrilátero ángulos rectos”.

6º Ed. Primaria	
Respuesta correcta clasificación por inclusión	16,67%
Respuesta correcta clasificación por partición	62,5%
Sólo rectángulos posición prototípica	4,17%
Sólo rectángulos pos. prototípica, exclusión cuadrado	2,08%
Inclusión romboide	12,5%
Respuestas sin clasificar	2,08%

Tan sólo el 16,67% del alumnado de 6º de Primaria ha contestado correctamente a esta pregunta teniendo en cuenta la definición por inclusión dada en el enunciado, mientras que el 62,5% de ellos ha respondido de forma correcta teniendo en cuenta la clasificación por partición, por lo que no ha incluido el cuadrado como rectángulo.

El 4,17% de los alumnos/as únicamente ha señalado aquellos rectángulos que aparecen en posición prototípica (apoyado en la base), incluyendo el cuadrado. Mientras que un 2,08% de ellos sólo ha señalado aquellos que aparecen en posición prototípica y sin incluir el cuadrado.

Un 12,5% del alumnado ha incluido el romboide, excluyendo en todos los casos el cuadrado en sus respuestas.

En las respuestas sin clasificación se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Elena (11 años) ha señalado únicamente el rectángulo que aparece en posición vertical apoyado sobre la base y el rectángulo que aparece apoyado sobre un vértice.

Tabla 4. Porcentaje de errores en la pregunta 4: “Señala con una cruz las figuras que sean trapezios. Recuerda la definición de trapecio: cuadrilátero con un solo par de lados paralelos”.

6º Ed. Primaria	
Respuesta correcta	25%
Sólo trapezios apoyados en un lado	41,66%
Sólo trapezios isósceles	10,42%
Sólo trapezios rectángulos	2,08%
Inclusión trapezoide	10,42%
Respuestas sin clasificar	10,42%

Tan sólo el 25% de los alumnos/as de 6º de Primaria ha contestado correctamente a esta pregunta.

Un 41,66% del alumnado ha incluido únicamente los trapezios apoyados sobre un lado. De este 41,66%, un 65% ha señalado todos los trapezios apoyados sobre un lado, mientras que un 35% sólo ha señalado algunos de ellos. Por ejemplo, Sergio (11 años) ha señalado solamente los trapezios que

se encuentran apoyados en la base o Lucas (11 años) que únicamente ha señalado un trapecio rectángulo y uno escaleno.

El 10,42% de los alumnos/as ha señalado que son trapecios únicamente los isósceles, mientras que un 2,08% del alumnado ha señalado solamente los trapecios rectángulos. Además, el 10,42% de los alumnos/as ha incluido como trapecio la figura del trapezoide.

En de las respuestas sin clasificar se han incluido las que presentan un desconocimiento del concepto implicado o que no se ha podido catalogar. Por ejemplo, Marta (12 años) ha señalado sólo los trapecios que se encuentran apoyados sobre uno de los lados no paralelos.

5. DISCUSIÓN

En este capítulo comentaremos los resultados obtenidos del cuestionario presentados en la sección anterior.

Al igual que en el estudio de Gutiérrez y Jaime (1996) los alumnos/as han demostrado hacer uso de su imagen mental del concepto frente a la definición proporcionada por nosotros. Esto puede verse manifestado en todas las preguntas. Por ejemplo, únicamente el 35% de los alumnos/as de 4º de Educación Primaria escogió los ejemplos de rombo por inclusión según la definición proporcionada frente al 65% que escogió otros ejemplos.

En el capítulo de Literatura hemos visto que en los libros de texto aparecen casi siempre los mismos ejemplos prototípicos. En particular la mayoría de los ejemplos de polígono que se proporcionan son ejemplos de polígonos convexos. La exclusión de figuras cóncavas da lugar a un distractor de estructuración que provoca que los alumnos/as se formen un esquema mental incorrecto incluyendo la convexidad como parte de la definición de polígono. Esto ha sido confirmado en nuestro estudio al encontrar que un número elevado de alumnos no ha incluido el caso cóncavo al pedirles seleccionar los cuadriláteros. Esta ausencia, curiosamente, es más frecuente entre el alumnado de 6º que el de 4º de Educación Primaria.

De forma general, en las preguntas del cuestionario relacionadas con paralelogramos se ha obtenido un porcentaje bajo de alumnos/as que han señalado los ejemplos teniendo en cuenta la definición por inclusión que se les ha dado en el enunciado, frente a un porcentaje de alumnos/as que han señalado los ejemplos teniendo en cuenta la clasificación por partición o han señalado otros ejemplos. Como se ha comentado anteriormente, en Primaria la clasificación de los paralelogramos que aparece en los libros de texto es la de partición, la cual excluye el cuadrado como caso particular del rombo y del rectángulo. A la vista de los resultados concluimos que el alumno/a tiene interiorizada dicha clasificación y hace uso de su imagen mental frente a la definición proporcionada a la hora de escoger ejemplos. Por ejemplo, en la

pregunta de identificación de rombos se observa que solamente un 35% del alumnado de 4º y casi un 17% de los alumnos/as de 6º ha tenido en cuenta la definición por inclusión que se proporcionaba. Lo mismo ha ocurrido en la pregunta de identificación de rectángulos, en la que solamente alrededor de un 15% de los alumnos/as tanto de 4º como de 6º han tenido en cuenta la definición por inclusión.

Por otro lado, muchos alumnos/as muestran no haber adquirido algunos conceptos de forma completa debido a la presencia de distractores. Esto se manifiesta en aquellos alumnos que han dado una respuesta parcialmente correcta, es decir, han señalado ejemplos correctos pero que no han incluido todos los ejemplos correctos que había. Por ejemplo, en la pregunta 4 en la cual debían señalar todos los trapecios, se puede observar cómo se manifiestan los distractores de estructuración en un porcentaje importante de alumnos/as. Por ejemplo un 10,42% del alumnado de 6º de Educación Primaria ha señalado únicamente los trapecios isósceles; esto podemos interpretarlo como que esos alumnos/as tienen incluido el concepto la igualdad de los lados opuestos no paralelos como parte de la definición. Lo mismo ocurre con aquellos alumnos/as que solamente han señalado los trapecios rectángulos.

Por otra parte, se manifiestan los distractores de orientación en aquellos alumnos que incluyen solamente figuras en posición prototípica. Esto se ha visto manifestado en el caso de los trapecios (solo se seleccionan los que se encuentran apoyados sobre uno de los lados paralelos), los rombos (solo los apoyados en un vértice) y los rectángulos (solo los apoyados sobre uno de los lados). Como ya hemos mencionado, estos distractores dan lugar a que el alumnado introduzca en su esquema conceptual unas propiedades que nada tienen que ver con la definición del concepto (en este caso, la posición).

También encontramos un porcentaje elevado de alumnos/as que seleccionan ejemplos equivocados del concepto, como los que han señalado como rombo al romboide o como trapecio al trapezoide. Estos alumnos/as incluyen ejemplos en la imagen mental que no son ejemplos del concepto y les lleva a cometer errores.

6. CONCLUSIÓN

Esta investigación se ha centrado en la identificación de los errores y las dificultades en el aprendizaje de los cuadriláteros. El objetivo de la misma es dar respuesta a las preguntas planteadas en el apartado (§ 3.1.): (1) ¿Qué ejemplos forman parte de la imagen conceptual de los alumnos/as de los distintos tipos de cuadriláteros?, (2) ¿Qué distractores aparecen? y (3) ¿Prevalece la imagen mental respecto a la definición proporcionada?

Como hemos visto, Vinner y Hershkowitz (1983) señalan la diferencia que existe entre el concepto matemático (que es la definición formal), la definición del concepto (que es la definición verbal que el alumno tiene memorizada), y la imagen conceptual que tiene el alumno de cada uno de esos conceptos geométricos.

Tras analizar los cuestionarios hemos podido observar que, tanto en 4º como en 6º de Primaria, un porcentaje elevado de alumnos/as tiene una imagen conceptual muy pobre o incorrecta de los cuadriláteros. Muchos muestran no tener adquiridos ciertos conceptos al incluir en su imagen mental ejemplos que no son ejemplos de ese concepto (por ejemplo, el trapecioide como caso particular del trapecio).

Por otro lado, en las respuestas de estos alumnos/as hemos comprobado que aparecen en muchas ocasiones distractores de orientación y estructuración. Los primeros se manifiestan en aquellos estudiantes que han señalado solamente las figuras que aparecen en una determinada posición (por ejemplo, rectángulos apoyados en uno de los lados). Los segundos distractores, en aquellos alumnos que sólo han señalado un tipo concreto de figuras (por ejemplo únicamente los trapecios rectángulos). Ambos distractores conllevan a que el alumnado introduzca en su definición del concepto unas propiedades que no forman parte de la definición del concepto.

A pesar de que en todas las preguntas les hemos proporcionado la definición del concepto que se les pedía señalar, en casi todos los casos ha

prevalecido la imagen mental del alumnado frente a la definición proporcionada.

Todo esto confirma el importante papel que juega la imagen mental del alumno, y la necesidad de proporcionar una gran cantidad de ejemplos diferentes a la hora de introducir un concepto nuevo con el fin de que el alumnado lo adquiriera correctamente.

7. BIBLIOGRAFÍA

ABRATE, R., POCHULU, M., & VARGAS, J. M. 2006. *Errores y dificultades en matemáticas: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María. ISBN-10: 987-98292-9-8

BACHELARD, G. 1978. Conocimiento común y conocimiento científico. En: G. Bachelard. *El racionalismo aplicado*. Buenos Aires: Paidós, pp. 99-130.

BARRANTES, M., & BALLESTO, I. 2012. Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, 8(1), pp. 25-42. ISSN: 2225-5117, ISSN-e: 2226-4000.

BARRANTES, M., & BLANCO, L. J. 2004. Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didáctica*, 22(2), pp. 241-250. ISSN: 0212-4521, ISSN-e: 2174-6486.

BARRANTES, M., & ZAPATA, M. A. 2008. Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo abierto: Revista de educación*, 27(1), pp. 55-71. ISSN: 0213-9529

BROUSSEAU, G., DAVIS, R., & WERNER, T. 1986. Observing students at work. En: B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.) *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

DE VILLIERS, N. D. 1994. The role and function of a hierarchical classification of quadrilateral. *For the learning of mathematics*, 14 (1), pp. 11-18.

DICKSON, L., BROWN, M., & GIBSON, O. 1991. Pensamiento espacial. En: L. Dickson, M. Brown y O. Gibson (AA.) *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor, pp. 15-87. ISBN: 9788433551481.

EVEREST - EQUIPO BRÚJULA (aut.). 2009. *Proyecto Brújula: Matemáticas 5º Ed. Primaria*. Everest. ISBN: 9788424106843

FRANCHI, L., & RINCÓN, A. I. 2004. Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere: Revista Venezolana de Educación*, 24, pp. 63-71. ISSN-e: 1316-4910.

GUILLÉN, G. 2000. Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didáctica*, 18(1), pp. 35-53. ISSN: 0212-4521, ISSN-e: 2174-6486.

GUTIÉRREZ, A., & JAIME, A. 1996. Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En: J. Giménez y A. Jaime (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares, pp. 143-170. ISBN: 8481513210, ISBN-13: 9788481513219.

HERSHKOWITZ, R. 1990. Psychological aspects of learning geometry. En: P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition*, pp. 70-95.

JAIME, A., CHAPA, F. & GUTIÉRREZ, A. 1992. Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencia en libros de texto de E.G.B. *Revista Epsilon*, 23, pp. 49-62.

LAKATOS, I., WORRAL, J., ZAHAR, E., & SANTOS, C. S. 1986. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial. ISBN: 9788420622064

MEDICI, D., SPERANZA, F., & VIGHI, P. 1986. Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 4(1), pp. 16-22. ISSN: 0212-4521, ISSN-e: 2174-6486.

POPPER, K. 1967. *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós. ISBN: 84-7509-146-6.

RADATZ, H. 1979. Error analysis in mathematics education. *Journal for research in mathematics education*, 9, pp. 163-172.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. 2014. *Real Academia Española: Diccionario de la lengua española 23ª edición* [Sitio web] Madrid. [Recuperado el 2 de octubre de 2015]. Disponible en: <http://dle.rae.es/?w=diccionario>

REY, J. L. 2004. Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos o cuándo los modelos ayudan, pero no tanto. *Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 22, pp. 3-12.

RICO, L. 1997. Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 38, pp. 185-198. ISSN: 1131-9321.

RICO, L. (n.d.) *Propuesta de desarrollo de la geometría en Educación Infantil y Primaria*. CEIP- Dr. Caravaca.

SANTILLANA EDUCACIÓN (aut.). 2002. *Proyecto Entre amigos: Matemáticas 5º Ed. Primaria*. Madrid: Santillana. ISBN: 84-294-7551-6.

SANTILLANA EDUCACIÓN (aut.). 2009. *Proyecto La Casa del Saber: Matemáticas 6º Ed. Primaria*. Madrid: Santillana. ISBN: 978-84-294-8903-3.

SAMPER, C., LEGUIZAMÓN, C., & CAMARGO, L. 2001. Razonamiento en geometría. *Revista EMA*, 6(2), pp.141-158. ISSN: 0122-5057.

SM (aut.). 2012. *Proyecto Conecta2.0: Matemáticas 4º Ed. Primaria*. Madrid: Ediciones SM. ISBN: 9788467554571.

SM (aut.). 2008. *Proyecto Nuevo Planeta Amigo: Matemáticas 5º Ed. Primaria*. Madrid: Ediciones SM. ISBN: 9788467532289.

SM (aut.). 2008. *Proyecto Nuevo Planeta Amigo: Matemáticas 6º Ed. Primaria*. Madrid: Ediciones SM. ISBN: 9788467532630.

SOCAS, M. 1997. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En: L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori, pp. 125-154. ISBN: 84-85840-65-8.

SOCAS, M. 2008. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas: Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En: *Actas del XI Simposio de la SEIEM: La Laguna, 4 – 7 de Septiembre*. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 19-52. ISBN: 978-84-612-5856-7.

TURÉGANO, P. 2006. Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 21, pp. 35-48. ISSN: 0214-4824.

VINNER. S., & HERSHKOWITZ, R. 1983. On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83(1), pp. 20-25.

VINNER, S. 1991. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Holanda: Kluwer, pp. 65-81.