EL INFINITO EN MATEMÁTICAS

Alumno: Daniel Tessier

Dirigido por: Tomás Recio

Índice general

Índice de figuras

Agradecimientos

El presente Trabajo de fin de Grado ha sido realizado bajo la supervisión de D. Tomás Recio, a quien me gustaría agradecer toda la labor realizada para que este trabajo haya quedado de esta forma. La gran cantidad de horas invertidas durante dos años, la innumerable cantidad de información que me ha facilitado, . . .

No quiero olvidarme de mi familia que ha sido el principal apoyo para que hoy yo esté aquí habiendo realizado este trabajo, y a todas esas personas que han sido un apoyo durante toda la carrera y sobre todo estos últimos años, en especial Anita.

Resumen

Este trabajo pretende ser una reflexión acerca del infinito en matemáticas, abarcando tres aspectos. El primero de ellos sería la descripción del origen y significado del infinito. En el capítulo 1, sección 1.1, reflexionamos sobre el concepto de infinito tanto en el ámbito coloquial como en el histórico y, en el filosófico. En la sección 1.2, nos centramos en aquellos aspectos del infinito relacionados con los números con cardinales, mientras que en la sección 1.3, introducimos el concepto de infinito geométrico relacionado con aquellos puntos que se encuentran indefinidamente lejos.

El capítulo 2 trata de responder a dos preguntas que creemos son cruciales: suponiendo que la mayor parte de nuestras preocupaciones versan sobre objetos finitos, ¿es necesario usar el infinito? ¿es coherente? ¿es útil? En la sección 2.1 se responde afirmativamente a esta cuestión sobre su utilidad. Así se muestra cómo algunos hechos que no involucran sino aspectos finitos tienen propiedades que puedes demostrarse tanto con el uso del infinito como de manera finitista (números de catalan,...). También en esta misma sección vemos otro ejemplo de la serie de Goodstein y, el teorema 1, que afirma que en dicha serie se alcanza después de un número finito de etapas el valor 0, sorprendentemente, el teorema 2, Kirby-Paris muestra que el teorema 1 no es finitamente demostrable.

En esa mima línea en la sección 2.2 de este capítulo describimos otra situación paradógica que se ha popularizado recientemente a través de un vídeo en youtube, donde se calcula la función Zeta de Riemann obteniendo como resultado $-1/12$.

Tras haber reflexionado sobre las dificultades históricas y actuales del manejo del infinito incluso para los expertos, en el capítulo 3 reflexionamos, en la sección 3.1, acerca de las dificultades que involucra su comprensión y su enseñanza en el nivel de secundaria. Para finalizar este trabajo se describe en la sección 3.2, detalladamente, la aparición explícita o implícita del concepto del infinito en muy diversos contenidos del vigente currículum de secundaria y bachillera así como en el de la LOMCE.

Este TFG concluye con un sección dedicada a diversas conclusiones y

posibles trabajos futuros entorno a este tema.

This work pretends to be a reflexion of the infinity in mathematics, with three principal chapters. The first one is going to be the description of the infinity's origin and meaning. In chapter 1, section 1.1, we think in the infinity's origin concept in a colloquial way as in a historic and philosophical way. In section 1.2, we focus on the principal aspects of the infinity related to cardinal numbers, whereas in section 1.3 we introduct the geometric concept of infinity related to those points which are indefinitely away.

Chapter 2 pretends to answer to two questions that we think are crucial: supossing that our principal concerns are related to finite objects, ¿is it necessary to use the infinity? ¿is it coherent? ¿is it helpful? In section 2.1 this question about its utility is going to be answered in a possitive way, it's going to be shown that some issues, which contain finite aspects, has properties which can be prooved with or without the use of infinity (catalan numbers,...). Also, in this section we show another example of the Goodstein serie and theorem 1, which says that in this serie we arrive, in a finite numbers of steps, to the 0 value. Surprisingly, in theorem 2, Kirby-Paris shows that theorem 1 can't be prooved in a finite way.

In section 2.2 we describe another paradoxical situation that has be recently popularized thanks to a video in youtube, where the Zeta Riemann function is calculated obtaining as a result $-1/12$.

Now that we have reflected on the historical and actual difficulties of the use of infinity even for the experts. In chapter 3, section 3.1 we reflect on the dificulties related to its understanding and its teaching in secondary school. To sum up this work we describe in detail in section 3.2, the express or implied appearance of the infinity concept in very different points of the current curriculum of middle and high school and in the LOMCE as well.

This TFG ends with a section dedicated to different conclusions and possible future works around this topic.

Capítulo 1

El infinito en matemáticas

1.1. ¿Qué es el infinito?

El infinito es un noción que todos utilizamos frecuentemente en nuestra vida cotidiana, pero sobre la que nunca nos paramos a pensar. Muchas veces, cuando hablamos del infinito, se nos viene a la mente una serie de conceptos relacionados con él. Así, imaginamos el infinito como un algo que no tiene fin o nos referimos con este concepto a aquellas cosas sobre las que, al no ver su fin, decimos que son algo infinito, pero no estamos seguros de que en verdad lo sean. Como estos podríamos plantear varios ejemplos más en los que coloquialmente hacemos un uso impreciso del concepto de infinito. Por ello merece la pena preguntarse y precisar: ¿qué es el infinito?

El diccionario de la RAE contiene las siguientes definiciones sobre este concepto:

infinito,ta. *del lat. infinitus*

1. *adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.*

2. *adj. Muy numeroso o enorme.*

3. *m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. "La calle se perdía en el infinito".*

4. *m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.*

5. *m. Mat. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.*

6. *m. Mat. Signo (∞) con que se expresa ese valor.*

7. *adv. m. Excesivamente, muchísimo*

Existen y han existido, a lo largo de la historia, numerosas acepciones matemáticas sobre el infinito –algunas no sólo alejadas, sino, a veces contradictorias entre sí– por lo que es preciso, por lo menos, señalar su existencia y su significado.

Así, se considera que fue en la Grecia Clásica donde aparecieron las primeras preocupaciones sobre la idea del infinito, a pesar de que los griegos no tenían un sistema de numeración posicional[1], que permitiría sugerir fácilmente la existencia de números tan grandes como se quisieran. Aristóteles (384-322 a.C.) ve al infinito como una fuente de contradicción [2]; Euclides no quería utilizar la palabra infinito, la evitaba y la sustituía por "lo que no tiene fin" o "una cantidad mayor que cualquier dada" y expresiones parecidas. Los socráticos asociaban la idea de infinito a algo malo, perverso. El infinito no solo era lo descomunal, lo enormemente grande, lo indefinido,. . . sino que estaba asociado a la idea negativa de desorden, de caos, de imperfección.

Algunos autores de esta época veían en el concepto de infinito la idea de aniquilación o absorción, ya que trabajando con el infinito como si fuese un número muy grande se podía pensar en la validez de las expresiones:

$$a \pm \infty = \pm\infty, \ a \cdot \infty = \infty, \ a^{\infty} = \infty$$

en las que el infinito "engulle" al número a (de cuestiones similares a esta, más adelante, surgirá el Análisis no Standard [31]).

Algunas de estas consideraciones éticas que asocian el infinito con "lo malo" o, por lo menos, con "lo perturbador" se superaron al distinguir entre infinito *actual* y *potencial*.

Infinito actual:

Esta noción del infinito surge al considerarlo como un objeto simple. Esto es, cuando tenemos una "cosa" que es infinitamente grande o numerosa, como los números naturales o los números múltiplos de 27. Por ello, tratamos al infinito actual como si fuese un elemento que surge, por ejemplo, al considerar el resultado de un proceso de paso al límite. Aparece cuando ya hemos llegado, cuando tenemos el resultado total del proceso.

Esta idea, que matemáticos como Cauchy y Gauss negaron, crea ciertas dificultades, pues no conduce a un solo infinito sino a muchos, introduciendo dificultades para su comparación y medición. Si consideramos los múltiplos de 27 y los números naturales, ambos son infinitos, aunque "parece" que el primero es 27 veces más pequeño que el segundo, pero ambos son infinitamente grandes.

[1]Un sistema de numeración se dice posicional cuando cada número se representa asignando a cada dígito un valor, que depende exclusivamente de cada símbolo y de su posición. Un ejemplo de sistema no posicional, como el utilizado en Grecia, es el romano.

En términos lógicos podríamos decir que el primero está contenido en el segundo y, teniendo en cuenta el postulado de Euclides, que establece que el todo es mayor que las partes, ambos infinitos deberían ser distintos, pero no lo son, pues tienen el mismo tamaño.[2]

Cuando hablamos de conjuntos infinitos como los números naturales, los puntos de una recta, o de un plano, de los números racionales,... estamos considerando que cada conjunto es infinito, aunque sus "tamaños" sean distintos. Por lo tanto se necesita una definición para el tamaño de estos conjuntos, pues la apelación a su cardinal no sirve, ya que, según hemos señalado, el mismo "cardinal"(nombre) sirve para designar diferentes tamaños y por tanto se aplica a distintos conjuntos. Para evitar estas dificultades definiremos infinito diciendo que *un conjunto es infinito cuando se pueda establecer una correspondencia biunívoca entre él y una parte propia de él*, que es compatible con la existencia de distintos infinitos.

Aunque, como hemos visto, los matemáticos y, más en general, los hombres, podemos concebir el infinito como algo simple, presente simultáneamente en todo su extensión en nuestra mente, es mucho más común considerar el infinito como una propiedad del devenir de los objetos, relativa a algún aspecto de los mismos, como su numerosidad, su tamaño,... Esto implica la necesidad de introducir y matizar un nuevo aspecto del infinito, como veremos a continuación.

Infinito potencial:
Esta concepción del infinito corresponde a una interpretación, que podríamos calificar como *teológica*, del infinito, al menos así lo hacen Costa Reparaz y Otto López [6]. Argumentan que esta concepción del infinito indica una tendencia, un comportamiento que nunca llega a su fin y, por ello, se puede considerar como perteneciente a una concepción teológica. Invitan al lector a darse cuenta de que esta idea no está lejos de ciertos postulados éticos de perfección.

El infinito potencial está vinculado a la reiteración de un proceso que nunca finaliza, dando lugar a numerosos problemas y paradojas, desde la de Aquiles y la tortuga a la de Zenón, sobre la imposibilidad del movimiento (¿cómo dar infinitos pasos en un tiempo limitado?).

Este concepto de infinito es el que se liga con el proceso de límite, o con la operación de paso al límite. Ambos conceptos sólo existen como tendencia, en potencia, ya que los dos son inaccesibles.

Fue en el siglo XVII cuando se introdujo lo que se podría llamar la concepción moderna del infinito, al considerar que el mundo finito y el infinito

[2] Llamamos tamaño de un conjunto a su cardinal, y el cardinal de ambos conjuntos es el mismo, como demostró Cantor.

están regidos por leyes y preceptos diferentes. Un gran responsable de esto fue Galileo [14], al reconocer por primera vez un hecho importante: que en los conjuntos infinitos, a diferencia de los finitos, un subconjunto propio puede tener la misma cantidad de elementos que el propio conjunto total. También en el siglo XVII tiene lugar la introducción, por Wallis, del símbolo de infinito. No está claro si dicho símbolo le fue inspirado por la idea del número mil, como un número muy grande, y de esta idea se pasó a la de lemniscata, cuyos puntos se pueden recorrer sin llegar al final [6].

La idea de biyección es clave en el desarrollo de los números transfinitos de George Cantor (1851). Esta teoría, la paradoja de Russell (1902) y la aparición de la axiomática formal de Hilbert, entre otros factores, conducen al logicismo, al intuicionismo y al formalismo, tres corrientes que surgen en un esfuerzo por fundamentar la Matemática.

En resumen, el infinito es un concepto que muchas veces contradice la lógica elemental a través de la cual interpretamos el mundo. Es un concepto que se ha desarrollado lentamente y de manera controvertida a lo largo de la historia. Es, por tanto, muy razonable el que los estudiantes, antes de aproximarse a esta noción desde la perspectiva formal de Cantor, tiendan a aplicar el principio ingenuo de que un conjunto siempre es mayor que cualquier subconjunto propio, que es válido para conjunto finitos, pero no para los infinitos.

1.2. El Infinito Numérico

A la hora de hablar de infinito numérico es inevitable hablar de los números naturales, racionales e irracionales.

Arquímedes en uno de sus axiomas estableció que los números naturales son infinitos. Si pensamos en un número natural, el más grande que podamos imaginar N, siempre podemos construir uno mayor el $N + 1$. Los números naturales se inventaron para contar. En cualquier conjunto, cuyos elementos se puedan contar, es posible asociar a cada elemento un número natural: Por eso a los conjuntos en los que cada elemento se puede numerar se les llama *numerables*. Todos los conjuntos finitos son numerables porque podemos contarlos o asociar a cada elemento un número natural distinto. También existen conjuntos numerables infinitos, como los naturales. Así mismo, existen conjuntos infinitos no numerables, como algunos conjuntos numéricos, como $\mathbb{R}$. Tendríamos que pensar en conjuntos con infinitos elementos como, por ejemplo, algunos conjuntos numéricos.

Los números naturales están formados por los pares e impares que también, son infinitos. Por este motivo parecería lógico decir que hay el doble de números naturales que de números pares; sin embargo, como sabemos, esto es falso (veáse el Hotel de Hilbert[17]). En conjuntos infinitos, aunque un conjunto esté contenido en otro, no significa que tenga menos elementos. Gracias a este hecho también se observa que infinito más infinito es infinito (dos veces infinito es infinito), tres veces infinito es infinito y, así sucesivamente.

$$\infty + \infty = \infty$$
$$k \cdot \infty = \infty \text{ si } k \neq 0$$

Cuando parece que uno se va familiarizando con el concepto de infinito numérico aparecen los números irracionales y, con ellos, tenemos un ejemplo de un infinito estrictamente más grande que otro infinito (los racionales tienen un cardinal estrictamente mayor que el de los naturales). Por esto reciben este nombre porque van al contrario de lo que sería una intuición razonable.

Un discípulo de Pitágoras llamado Hippassus de Metantopo intentó medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos la unidad. Según el teorema de Pitágoras: $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Intentó buscar un número racional de tal forma que el cuadrado resultara 2, pero se dio cuenta de que esto no era posible[3]. Hoy, este número se representa por $\sqrt{2}$.

Comenzando por esta construcción de Hippassus conocemos muchos otros números irracionales, que son aquellos con infinitas cifras decimales y no periódicas. Al preguntarse cuántos números irracionales hay, una primera intuición podría ser que no son muchos, pues son números "raros". Pero como bien sabemos hoy en día, también hay infinitos números irracionales. La parte que atenta más contra nuestra razón o intuición es que el infinito de los números irracionales es mayor que el infinito de los números racionales. Llegados a este punto cabe preguntarse, ¿cómo un infinito puede ser más grande que otro si el tamaño no tiene sentido en el infinito?

Para responder a esta pregunta vamos a suponer que podemos denotar todos los números decimales comprendidos entre 0 y 1 de la forma:

$$\begin{array}{c}
0, d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}d_{15}d_{16}d_{17}\cdots \\
0, d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}d_{25}d_{26}d_{27}\cdots \\
0, d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}d_{35}d_{36}d_{37}\cdots \\
0, d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}d_{45}d_{46}d_{47}\cdots \\
\cdots
\end{array}$$

Es una lista formada por infinitos números decimales, tantos como números naturales hay. Pero siempre podremos encontrar otro número decimal que no esté en la lista, por ejemplo, el número:

[3] Hasta ese momento todos los números se consideraban racionales porque su expresión era "bella"(exacta, decimal exacta o decimal periódica)

$$0, c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$$

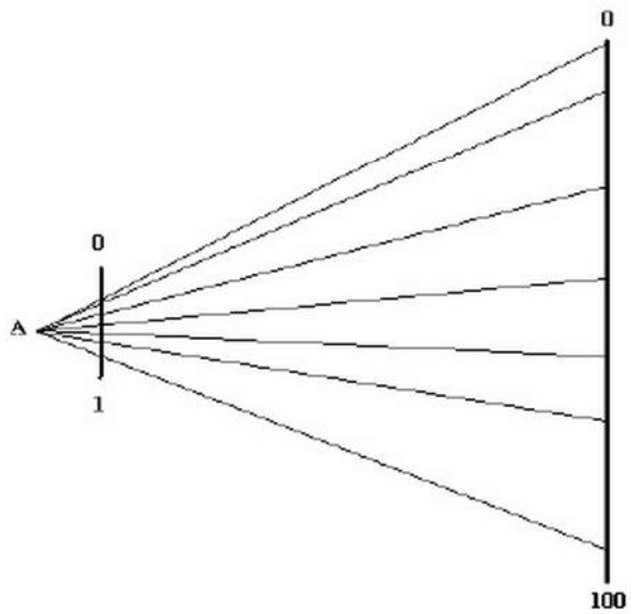
de forma que $c_1 \neq d_{11}; c_2 \neq d_{22}; c_3 \neq d_{33}, \cdots$ Es fácil observar que es distinto en el primer decimal para el primer número de la lista, en el segundo para el segundo y, así sucesivamente. Esta sería una demostración válida para probar que el conjunto de los números decimales (con los irracionales) no es numerable. Si volvemos a observar la lista, hay infinitos números que no están en ella, aparte de los naturales y también son infinitos. Esta idea se le ocurrió a George Cantor y gracias a ella podemos ver que existen infinitos más grandes que otros.

Una aportación esencial la introdujo David Hilbert en su discurso en París de 1900, en el que propuso 23 problemas matemáticos que esperaban ser resueltos en el siglo que entonces comenzaba. El primero era la Hipótesis del Continuo, que plantea descubrir si existen infinitos conjuntos intermedios comprendidos entre el infinito de los números reales y el infinito de los números naturales. Como ya se ha visto existen muchos más números reales irracionales que racionales. Para comprenderlo nos podría ayudar un razonamiento más intuitivo:

Ejemplo 1. *Imaginemos un dado numerado del* 1 *al* 10*, cada dígito asociado a cada una de sus* 10 *caras. ¿Es más probable que los resultados aleatorios sigan un patrón o que no? Entiéndase por patrón, por ejemplo, a* 259625962596...

Esta vez nuestra intuición no se equivoca, el número de irracionales frente a racionales es tan grande que si los pudiésemos representar en una recta y elimináramos los racionales (incluyendo a los enteros), sería muy difícil apreciar los huecos en dicha recta. Aún más sorprendente es que la hipótesis del continuo no pueda ni probarse ni refutarse con los axiomas de la matemática.

Al hablar de los números reales y de infinito es donde menos tenemos que fiarnos de nuestra intuición. Si se pregunta al lector cuál es la distancia entre el 0 y el 1, la respuesta más común sería decir 1 y, utilizando el mismo razonamiento, la distancia entre 0 y 100 sería 100. Pero el concepto de distancia no está relacionado con la cantidad de puntos (números reales) de un segmento real, es decir las distancia y la cantidad de puntos son independientes. Existen infinitos puntos entre 0 y 1, al igual que entre 0 y 100, pero lo más sorprendente es que estos infinitos... ¡son iguales! Esto significa que hay los mismos números decimales entre 0 y 1 que entre 0 y 100. Lo que a simple vista puede parecer muy sorprendente es fácil de comprobar mediante una biyección, relacionando los números de los dos segmentos de la siguiente forma:



Cada punto del segmento $[0, 100]$ puede ser relacionado con un valor del segmento $[0, 1]$ de manera única, por la correspondencia representada en la figura que, va de A al punto en cuestión del segmento $[0, 100]$. Luego decir que un segmento dibujado en un folio contiene el mismo número de puntos que el segmento que une la Tierra con la Luna, la Tierra con cualquier galaxia, es cierto. Este números de puntos en ambos casos es infinito, dicho infinito es mucho más grande que el número de números naturales, enteros o racionales aunque este sea también infinito.

1.3. El Infinito Geométrico

Para los filósofos y los geómetras de la Grecia antigua el infinito no tenía una existencia auténtica. El tratamiento del infinito representó para los griegos uno de los problemas de mayor trascendencia, no solamente por las implicaciones que tenía en las matemáticas que ellos hacían, sino porque este concepto estaba estrechamente relacionado con sus concepciones ideológicas. Los pitagóricos en la antigua Grecia dieron con una situación en la cual era totalmente inevitable dilucidar el concepto de infinito. Nos referimos a la prueba del siguiente teorema: "La diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables".

Dos segmentos a y b son conmensurables si existe un tercer elemento, x, tal que $a = nx$ y $b = mx$, para algunos enteros positivos m y n.

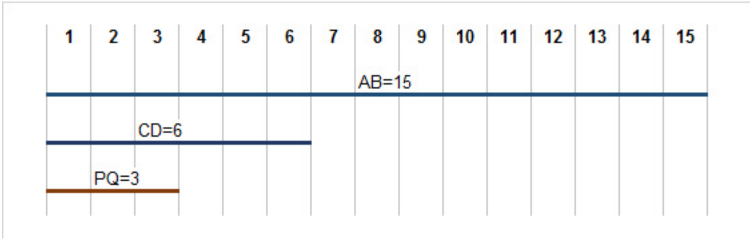


Figura 1.1: AB y CD son conmensurables

Si tomamos un objeto elemental de la geometría de Euclides, como puede ser una "línea recta", nos daremos cuenta de por qué había tantas disquisiciones asociadas con la idea de infinito en geometría. Euclides la define como la extensión más "económica" entre un punto y otro. En este sentido, una recta se asemejaba más a lo que hoy en día conocemos como un segmento que a lo que un matemático considera actualmente que es una recta. En todo caso, para Euclides y sus seguidores una recta se podía prolongar tanto como fuese necesario. Análogamente, también estaban limitadas conceptualmente en aquella época la idea de superficie plana, de parábola,... Es decir, para los Euclidianos una recta, el plano y los sólidos, eran finitos, pero prolongables a voluntad.

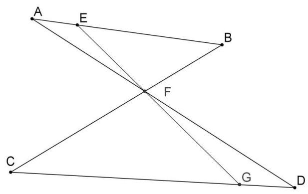
Intuitivamente podríamos concluir que una recta tiene dos puntos en el infinito, los que corresponden a los dos sentidos de la misma.

Esta idea aparece involucrada en el enunciado del quinto postulado de Euclides, contenido en el Libro I de sus Elementos que, como es bien sabido, ha sido objeto de debate hasta fechas muy recientes. El postulado enuncia que si una secante corta a dos rectas, formando ángulos internos situados a un mismo lado de la secante y cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas indefinidamente (es decir, tanto como sea necesario), se cortarán en el mismo lado en que se encuentran los ángulos de suma menor que dos rectos. Una versión moderna del mismo postulado sería que, dado un punto exterior a una recta, por este pasa una única recta paralela a la anterior. Actualmente se sabe que este postulado no se puede demostrar mediante los demás, abriendo la puerta a la existencia de diferentes geometrías, según se adopten distintas versiones de este postulado.

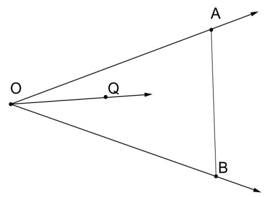
Estas geometrías no euclídeas sólo pudieron surgir hasta la aparición de la geometría proyectiva, que habría de servir de marco general a todas ellas. La geometría proyectiva nació en el siglo XVII como resultado de la conjunción de la ciencia de la perspectiva, fruto a su vez de la geometría práctica, y de la teoría de cónicas de Euclides y, sobre todo, de Apolonio de Pérgamo(262?-180?). Para decirlo brevemente, fueron la invención de la perspectiva central y sus prolongaciones geométricas las que hicieron posible la irrupción y la consideración desapasionada en la geometría euclídea de los elementos situados en el infinito. La evolución de las ideas sobre el infinito geométrico involucra la resolución del problema de la perspectiva, es decir, de la representación en un plano de figuras 3-dimensionales. Un momento seminal y decisivo para esta cuestión fue la invención de la "perspectiva lineal" en el Renacimiento.

Figura 1.2: Cuadro de Durero

Otra fuente de consideraciones acerca del infinito en geometría tiene que ver con el hecho de que dos segmentos cualesquiera tengan la misma cantidad de puntos. Como hemos señalado anteriormente, este hecho contraría nuestra intuición, tal vez porque si un segmento de longitud menor lo sobreponemos a otro de longitud mayor de tal manera que coincidan por uno de sus extremos, se deduce que existen puntos en el segmento mayor que no están en el menor. Sin embargo, siempre puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos segmentos cualesquiera disjuntos. En este sentido, la construcción geométrica más utilizada suele comenzar considerando que a cada punto E, del segmento $\overline{AB}$ le corresponde un único punto G del segmen-



to $\overline{CD}$, y recíprocamente, a cada punto G del segmento $\overline{CD}$, le corresponde un único punto E del segmento $\overline{AB}$. Para asegurar que la prolongación de $\overline{EF}$ corta a $\overline{CD}$ hay que usar el teorema de la barra transversal(Teorema de la “barra transversal”[35]. Sea Q en el interior de $\angle AOB$. Entonces el rayo $\vec{OQ}$ corta al segmento $\overline{AB}$.)



Como vemos el infinito en geometría ha jugado y juega un papel importante, tanto en relación con la comensurabilidad como por su papel en el desarrollo de las geometrías no euclídeas como por su contribución a la resolución de la paradoja de Galileo sobre el cardinal de distintos segmentos.

Capítulo 2

¿Para qué sirve el infinito?

Según Leopold Kronecker, Dios creó los numeros enteros y el resto, como por ejemplo, el infinito, fueron creados por el hombre. Por eso cabe preguntarse si -en la medida en la que sólo nos interesamos por los objetos mundanales, es decir, finitos- ¿el infinito es necesario?, ¿es útil? En este capítulo intentaremos esbozar algunas respuestas a estas preguntas.

El infinito aparece en matemáticas de muchas maneras distintas. Así, ciertos objetos matemáticos son finitos (pueden ser contados o enumerados), como por ejemplo los vértices de un cuadrado, los naturales pares inferiores a 5,... Otros objetos matemáticos son infinitos, como los enteros tomados en su conjunto, los puntos de una recta,... Ciertas afirmaciones ponen en juego sólo objetos finitos: un hexágono tiene nueve diagonales, 17 es primo,... Otras ponen en juego al menos un objeto infinito: hay más puntos en una recta que números enteros,... Ciertas afirmaciones ponen en juego una infinidad de objetos finitos (por ejemplo los números naturales), pero considerados, cada vez, en número finito: "Un polígono de n lados posee $n(n-3)/2$ diagonales". Es una afirmación finita, para cada n. Lo mismo ocurre con la afirmación "Existen infinidad de números primos"que es equivalente a "Ningún entero es el mayor número primo".

En este capítulo, cada vez que empleemos la palabra infinito entenderemos *infinito actual* ("infinito verdadero": infinidad de objetos considerados simultáneamente), y no infinito potencial (serie indefinida de objetos finitos).

Siguiendo a P. Dehornoy[8], desde el punto de vista de su utilidad, el infinito en matemáticas puede decirse que posee dos funciones principales: el infinito como herramienta de demostración y el infinito como herramienta de descubrimiento. Veamos a continuación algunos ejemplos en ambos sentidos.

2.1. El infinito como herramienta de demostración

¿Puede el infinito ser necesario para demostrar propiedades de los objetos finitos?

Según P. Dehornoy, la respuesta es afirmativa: aunque sólo nos interesemos por los objetos finitos, el recurso al infinito es imprescindible para realizar ciertas demostraciones.

Es bien sabido que el proceso de exploración y creación del matemático debe, necesariamente, validarse a través de una demostración (serie de afirmaciones que llevan, paso a paso, de la hipótesis a la conclusión). Evidentemente, si la hipótesis o la conclusión mencionan el concepto del infinito, entonces no es posible prescindir del mismo. Pero si la hipótesis y la conclusión no ponen en juego más que lo finito, entonces se dan dos situaciones posibles:

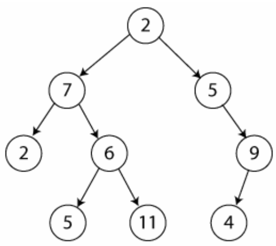
1. La demostración no pone en juego más que conceptos finitos

   Ejemplo 2. *Un polígono de n lados tiene $a_n = n(n-3)/2$ diagonales.*

   Demostración. De cada uno de los n vértices salen $n-3$ diagonales. Como cada diagonal es contada dos veces $2a_n = n(n-3)$. □

2. La demostración pone en juego aspectos infinitos (en las etapas intermedias).

   Ejemplo 3. *Tenemos $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ árboles binarios de n vértices.*



   Demostración. Sea C_n el número de árboles binarios de n vértices, enumerados por los números de Catalan. Si suponemos que $C_0 = 1$ y $C_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$ $(n > 0)$ y $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$.

Entonces $(f(t))^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i})t^n$.

Multiplicando por t: $t(f(t))^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t_n = f(t) - 1$.

Entonces $t(f(t))^2 - f(t) + 1 = 0$, luego $f(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1 \pm (1-2t+\dots)}{2t}$.

Escogemos la segunda raíz $f(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$.

Ahora haciendo la serie binomial de $\sqrt{1+x}$:

$(1+x)^{1/2} = \cdots = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/4)^n (2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$.

Luego fijado $x = -4t$:

$\sqrt{1-4t} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/4)^n (2n-2)!}{n!(n-1)!}(-4t)^n = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^n$.

$f(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} t^n$.

Como $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t_n$, hemos probado que $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

□

Aquí se usa el infinito al considerar todos los a_n a la vez.

Ante esta situación, cabe la posibilidad de preguntarse si se pueden evitar ejemplos como los de este segundo tipo, es decir, si toda afirmación verdadera que sólo pone en juego objetos finitos puede ser demostrada utilizando sólo objetos finitos, es decir, mediante métodos finististas. La respuesta a esta pregunta la podemos obtener mediante una demostración alternativa para este mismo ejemplo desarrollada por Mercedes H. Rosas. La idea principal de la demostración consiste en demostrar una recurrencia [34].

Demostración. Mercedes se imagina que los árboles son como nuestros árboles genealógicos, donde cada padre tiene exactamente dos hijos, el derecho y el izquierdo. Denomina $B(n)$ al número de árboles binarios con n padres y se propone demostrar que los árboles binarios satisfacen la siguiente recurrencia:

$$(n+1)B(n) = 2(2n-1)B(n-1) \ (n > 1)$$

Se construye un árbol con n padres (de $B(n)$ maneras) y se selecciona en él al hijo menos favorito. Eliminamos a éste y a su padre y se pone al hermano en lugar del padre.

Se obtiene de este modo un árbol con n vértices donde uno de ellos, el que corresponde al hermano que se ha cambiado está señalado. Pero para tener la biyección es importante diferenciar si el hijo señalado era el izquierdo o el derecho. Luego al tener dos posibilidades aparece un factor 2 en el lado derecho de la ecuación.

$B(n) = \frac{2(2n-1)}{n+1}B(n-1) = \frac{2(2n-1)}{n+1}\frac{2(2n-3)}{n}B(n-2) = \frac{2(2n-1)}{n+1}\frac{2(2n-3)}{n}\ldots \frac{2(2n-2k+1)}{n-k+1}\ldots 3\cdot 1 = \frac{2n(2n-1)2(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

La demostración de que $B(n) = C_n$ no tiene mayor complicación, luego esta sería otra demostración alternativa de que los números de Catalan vienen dados por la fórmula anterior. $\square$

Como acabamos de ver la importancia del infinito en las demostraciones es incontestable, pero cabría la posibilidad de pensar que no es utilizado para nada más fuera de estas.

Como hemos visto el uso del infinito no es necesario, es decir, es suficiente únicamente con utilizar herramientas o propiedades finitas. El objetivo en este apartado será ver si en estas situaciones, en las que sólo intervienen propiedades de objetos finitos, el infinito puede ser útil como herramienta de descubrimiento.

Veremos que sí, el uso del infinito da medios suplementarios para descubrir y demostrar propiedades de los objetos finitos.

Como ejemplo de ello nos serviremos del teorema de los números primos:

Ejemplo 4. *(Teorema de los números primos)*

El número de números primos $\leq n$ es aproximadamente $\frac{n}{\log(n)}$

Este resultado fue conjeturado por Gauss en 1792, pero fue demostrado únicamente por métodos infinitistas (análisis complejo) por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1896 y, por último, se demostró por métodos finitistas por Erdös y Selberg en 1949.

Así pues, de esta forma comprobamos cómo el uso del infinito da medios suplementarios para descubrir y demostrar propiedades de lo finito.

Si se permitiera una banalidad, podríamos decir que toda utilización de los números reales y del análisis es una utilización de lo infinito.

Hilbert en su problema número 2 ("Problemas de Hilbert")[29] y en el"Programa de Hilbert"[30] (década de 1920) plantea la respuesta a esta cuestión. Una formulación razonable es considerar que ser finitamente demostrable es ser demostrable en el sistema axiomático de Peano *PA* mediante propiedades básicas de la suma y el producto sobre $\mathbb{N}$ y recurrencia. Gödel (1930), sin embargo, muestra que esto no es posible, en su famoso "Primer Teorema de la incompletitud"[43] que señala la existencia forzosa de una afirmación que es a la vez verdadera y no finitamente demostrable. El ejemplo que propone Gödel es la codificación de afirmaciones análogas a la paradoja del mentiroso.

Llegados a este punto, cabe la posibilidad de preguntarnos si existe un ejemplo concreto de la imposibilidad de demostraciones finitistas de afirmaciones verdaderas, pero relativas a afirmaciones naturales, por ejemplo, de aritmética. Veamos que sí:

Ejemplo 5. *Series de Goodstein*

Tomamos un entero n que se pueda escribir en una base p iterada (escribiendo todos los exponentes en base 2 de manera iterada), por ejemplo, $n = 26$ y $p = 2$.

En la base 2 sería: $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$, pero en base 2 iterada: $26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$

Sean ahora dos números $p < q \in \mathbb{N}$ y tomamos la transformación $T_{p,q}$ que consiste en sustituir p por q en la escritura en base p iterada del número considerado.

En nuestro ejemplo, si tomamos el número $p = 2$ y $n = 26$, tenemos: $26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$ y, tomando la transformación $T_{2,3}$ (sustituir 2 por 3 en la escritura en base 2 iterada), resultando: $3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7625597485071$

El concepto de serie de Goodstein (a partir de un número d arbitrario), viene definido de la siguiente manera:

Dado el número d, lo expresamos en base 2 iterada, aplicamos al resultado la transformación $T_{2,3}$; a este número le restamos una unidad y lo escribimos en base 3 iterada, le aplicamos la transformación $T_{2+1,3+1} = T_{3,4}$, volvemos a restar una unidad, y así sucesivamente.

$d \xrightarrow{T_{2,3}} \cdots \xrightarrow{-1} \cdots \xrightarrow{T_{3,4}} \cdots \xrightarrow{-1} \cdots \xrightarrow{T_{4,5}} \cdots$

Volviendo a nuestro ejemplo, si partimos de 26, aplicamos al desarrollo en base 2 iterada de 26 la transformación $T_{2,3}$ y obtenemos: 7625597485071; al restarle una unidad nos queda 7625597485070, y así sucesivamente.

Se puede apreciar que, la serie tiende (muy) rápido hacia infinito. Sin embargo, el teorema de Goodstein contradice cualquier tipo de intuición razonable.

Teorema 1. *(Goodstein, 1942): Cualquiera que sea* d*, la serie de Goodstein partiendo de* d *alcanza, después de un número finito de etapas, el valor* 0.

Ante este teorema cabe preguntarse si se podrá demostrar dicho teorema utilizando el infinito, a pesar de que éste parece afirmar justamente lo contrario [18]. Veamos que esto así, de acuerdo con un esquema de demostración siguiendo a P. Dehornoy [8].

Demostración. Los ordinales de Cantor (1880-1886) son una extensión de la secuencia de los números naturales con la propiedad de que, cada familia no vacía de tales ordinales tiene siempre un elemento más pequeño:

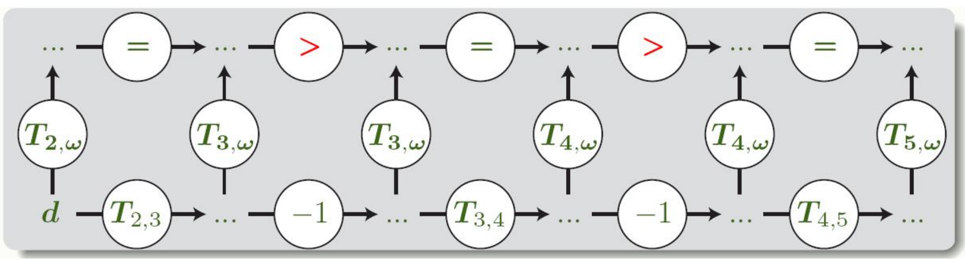
$0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots, 2\omega = \omega+\omega, 2\omega+1, \cdots, 3\omega, \cdots, \omega^2 = \omega\cdot\omega, \omega^2+1, \cdots, \omega^2+\omega, \cdots, \omega^3, \cdots, \omega^\omega, \cdots, \omega^{\omega^\omega}, \cdots$

Zermelo y Von Neumann (1905-1920) aseguran la existencia de los ordinales de Cantor (con las propiedades esperadas) en el momento que se postula la existencia de, al menos, un conjunto infinito.

Sabemos que no existe una sucesión infinita estrictamente decreciente de números ordinales, esto es, si tuviéramos una sucesión:

$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$, de ordinales, en el conjunto $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\}$ no existiría un elemento con la propiedad de ser menor que el resto, contradicción. Entonces, cualquier sucesión estrictamente decreciente de ordinales es finita.

Con esto, consideremos entonces la sucesión de Goodstein, con origen en d,y hagamos las siguientes operaciones que se detallan en la figura siguiente.



La línea de abajo es la construcción tal y como hemos señalado, en la línea de arriba el resultado es el resultado de aplicar las transformaciones indicadas, en las que aparece el ordinal infinito más pequeño ω. La demostración de la desigualdad estricta que aparece en rojo en la parte alta de la figura (que es evidente en el caso finito pero no lo es tanto en el caso infinito) puede consultarse en [18]. Necesariamente, dado que la sucesión de ordinales que aparece en la parte superior del cuadro es estrictamente decreciente, tiene que llegar a 0 después de un número finito de pasos y, la única posibilidad, es que en la parte inferior llegue al 0 al mismo tiempo. $\square$

Por ejemplo, si $d = 4$ la sucesión de Goodstein correspondiente llega a 0 en $3 \cdot 2^{402653211} - 3$ etapas.

Puede surgir la pregunta lógica de si es posible demostrar el Teorema de Goodstein sin usar el recurso del infinito. Sorprendentemente la respuesta es no, como indica el siguiente teorema.

Teorema 2. *(Kirby-Paris, 1982): El Teorema de Goodstein es una afirmación verdadera, que sólo pone en juego objetos finitos, pero **no** es finitamente demostrable.*

Luego por este teorema, el problema no es demostrable a partir de los axiomas de la aritmética de Peano, lo que equivale a decir que no es demostrable por recurrencia, y por lo tanto, no es demostrable sin el infinito.

Veamos la idea general utilizada para demostrar este teorema:

La idea subyacente utilizada para demostrar este teorema es que la función crece tan deprisa que sobrepasa toda función cuya existencia sea demostrable a partir de los axiomas de Peano.

Existen diversos resultados análogos al teorema de Kirby-Paris... e incluso peores. Por ejemplo, H.Friedman obtiene resultados análogos para el Teorema de Goodstein, basados en resultados de teoría de grafos finitos, demostrables a partir de la existencia de varios super-infinitos, pero no sin ellos. Por este motivo estos resultados son muy similares a los del teorema de Kirby y Paris con respecto a las nociones de infinito iterado. Friedman llega a la conclusión de que el Teorema de Goodstein es demostrable con un ultra-infinito, pero no con un infinito simple ni, por supuesto, sin infinito.

Como conclusión de todo lo anterior podemos decir que, existen afirmaciones concretas, poniendo en juego sólo objetos finitos, que son demostrables desde el momento que postulamos la existencia de objetos (ultra)-infinitos, pero **no** lo son sin ellos.

Aunque sólo nos interesemos por lo finito, lo infinito o incluso lo ultra-infinito es (en ciertos casos) una herramienta de demostración indispensable.

A la hora de preguntarse por los resultados efectivos, surge una (importante) pega:

Aunque el problema de Goodstein sólo ponga en juego enteros, sigue siendo marginal e inefectivo y no contiene ningún tipo de razonamiento algorítmico.

Por este motivo, cabe plantearse si existen resultados centrales y efectivos cuya demostración requiera el uso de lo (ultra)-infinito.

- En la teoría, quizás: teoría de la reescritura, lambda-cálculo, ...
- En la práctica, ¡no! (al menos por el momento).

Al hablar de los objetos finitos podemos diferenciar tres tipos de casos: aquellos ejemplos en los que el infinito no es necesario ni útil, los ejemplos donde el infinito es necesario como medio de demostración, pero en la práctica estos ejemplos son poco concretos y, por último, aquellos casos en los que el infinito, incluso el ultra - infinito, aunque no es necesario, es útil e incluso puede llegar a ser decisivo como medio de descubrimiento.

Conclusión:

Aunque sólo nos interesemos por lo finito y por lo efectivo, y no creamos en la existencia de lo (ultra)-infinito, sería lamentable privarse de las intuiciones que aporta.

2.2. El infinito como fuente de contradicciones

En esta sección, siguiendo el artículo [23] veremos que "jugar" demasiado con el infinito no siempre conlleva el obtener buenos resultados o satisfactorios. Todo puede empezar con una simple operación nada novedosa, como puede ser la suma de todos los números naturales. Se puede llegar a pensar que si simplemente, empezamos añadiendo los números naturales, 1+2+3+... y así sucesivamente hasta el infinito, podríamos conseguir un número muy grande, tan grande que la mayoría de las respuestas que obtendríamos a priori serían que ese número es el infinito. Por este motivo fue toda una sorpresa para muchas personas cuando, en un vídeo reciente, un par de físicos pretendían probar que la suma de esta serie es $-1/12$.

Hasta la fecha más de 3 millones de personas han visto este vídeo[1], en el cual juegan un papel crucial la física moderna y la teoría cuántica. La respuesta a priori a la suma de la serie, tan absurda como suena, ha sido verificada en numerosos laboratorios a una gran cantidad de números decimales.

[1] https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww

Incluso los creadores del vídeo, Brady Haran, un periodista, y Ed Copeland y Antonio Padilla, físicos en la Universidad de Nottingham en Inglaterra, admiten que hay una cierta cantidad de magia detrás de este resultado o, lo que algunos matemáticos han denominado como "trucos sucios", en su presentación. Todo esto ha llevado a la aparición de varias quejas en la red.

Pero hay un amplio acuerdo por el cuál, mediante un enfoque más riguroso del problema, se obtiene el mismo resultado, como se muestra por una fórmula en el segundo volumen del libro de "Joseph Polchinski" denominado "String Theory"[28].

Entonces, la pregunta parece clara: ¿qué está pasando con el infinito? En palabras de Edward Frenkel:[2] "Este cálculo es uno de los secretos mejor guardados en matemáticas".

El gran matemático del siglo XVIII Leonhard Euler, nacido en Suiza, aunque la mayoría de sus trabajos los desarrolló entre Berlin y S.Petersburgo (Rusia), fue el primero que comenzó este camino. Euler quería conocer si se podía encontrar una respuesta a un sinfín de sumas de números, como por ejemplo, $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n + \cdots$, o el cuadrado de esta suma.

Como veremos más adelante, estas son todas versiones distintas de lo que hoy en día se conoce como la función Zeta de Riemann[3]. La función Zeta de Riemann es uno de los temas más misteriosos y célebres de la matemática, importante en la teoría de números primos, entre otras cosas. Fue uno de los hilos de la trama, por ejemplo, en la novela de 2006 de Thomas Pynchon, "Against the Day"[32]

En 1979, Euler utilizó una caja de trucos matemáticos para resolver el problema de la suma de números naturales del 1 al infinito, hoy denominada serie divergente, porque los términos de la misma siguen creciendo sin límite a medida que se avanza. Es evidente que, si se detiene la suma en cualquier lugar, por ejemplo, en un trillón (10^{18}), o en un gúgol (10^{100}), la suma será enorme. El problema con el infinito es que no te puedes parar, nunca llegarás, es más un viaje que un destino. Como el Dr.Padilla dice al Sr.Haran al final de su vídeo: "Tienes que afrontar el infinito, Brady".

El método en el vídeo es esencialmente el mismo que el de Euler. No contiene operaciones más complicadas que la suma o la diferencia (aunque lo que se sume y se reste sean más series infinitas) y una pequeña noción de álgebra, conocida por cualquier alumno de instituto.

Euler no es el único en preguntarse cómo puede tener esto sentido. El matemático noruego Niels Henrik Abel, cuya noción sobre una suma de Abel

[2]Profesor de la universidad californiana de Berkeley y autor de "Love and Math: The Heart of Hidden Reality"[12]

[3]Bernhard Riemann llegó alrededor de un siglo después de Euler.

[39] juega un importante papel aquí, escribió una vez, "Las series divergentes son la invención del diablo y es una lástima basar en ellas cualquier demostración".

En términos modernos, el Dr.Frenkel explicó que, la esencia de los cálculos puede ser interpretada como una suma infinita con tres partes separadas: una de la cuáles se dispara al ir hacia infinito, otra tiende a cero y la última, a menos 1/12. Según explica en el vídeo, los términos infinitos se cancelan entre ellos.

Lo más sorprendente de todo es que funciona 100 años después, Riemann usó un método más riguroso y avanzado, utilizando número reales e imaginarios, para calcular la función Zeta y obtuvo el mismo resultado: $-1/12$. [13]

Así que, "Euler adivinó bien", dice el Dr.Frenkel.

Aquellos que no sean matemáticos, probablemente no les preocupe tanto el infinito, excepto que surge una y otra vez en los cálculos, como la energía del electrón, que sabemos es finita, o en la teoría de cuerdas, que los físicos quieren esperar sea finita.

En este caso, nuestra comprensión de la gran solidez de la realidad depende de una manera consistente para asignar valores a las sumas infinitas.

En el proceso conocido como la *regularización*, que es una parte de muchos cálculos en la teoría cuántica, los físicos hacen algo similar a lo que Euler realizó, llegando a un número real que se corresponde con la cantidad que quieren saber y a un término infinito, el cuál desprecian. El proceso funciona tan bien que las predicciones teóricas de la electrodinámica cuántica, la versión de lujo de la fuerza familiar del electromagnetismo, están de acuerdo con los experimentos con una precisión de una parte en un trillón. Es una cantidad notable teniendo en cuenta que las cantidades infinitas se han tirado, o "barrido bajo la alfombra", en palabras del profesor Richard Feynman, del instituto californiano físico-tecnológico, el cuál ayudó a inventar gran cantidad de este material, pero pensó era más que débilmente escandaloso.

Del mismo modo, no es de extrañar que el factor 1/12 aparezca bastante en las ecuaciones de teoría de cuerdas, según el Dr.Frenkel. Por qué funciona todo sigue siendo todavía un misterio. Según el Dr.Frenkel: "La Física cuántica necesita su propio Riemann para llegar y dar una explicación rigurosa de estos misterios".

Para él y otros, esto es sólo un ejemplo más de lo que el gran físico Eugene Wigner llamó "la irrazonable efectividad de las matemáticas". ¿Por qué estos confusos y abstractos conceptos como las funciones zeta o los números imaginarios, los productos en nuestra mente de una partida de ajedrez, tienen tal relevancia en la descripción del mundo?

Las exploraciones de Riemann sobre la geometría en espacios curvos en

1854, sentaron las bases de la teoría de Einstein de la gravedad o la relatividad general, medio siglo después.

Más adelante, en la década de 1800, hubo matemáticos dispuestos a saltar por la ventana cuando Georg Cantor (matemático ruso), se propuso clasificar los tipos de infinito. En un discurso pronunciado en 1908, el matemático francés Henri Poincaré comparó "Cantorismo", como el lo llamó, con una enfermedad.

Los matemáticos de hoy en día, están de acuerdo en que hay un número infinito de números naturales (1,2,3 y así sucesivamente) en el último peldaño de la infinitud. Por encima de éste, sin embargo, está el peldaño de los números reales, que es más grande en el sentido de que hay un número incontable de ellos para cada número natural. Y así sucesivamente.

Los cosmólogos no saben si el universo es físicamente infinito en espacio y tiempo, o si estas son todavía preguntas sensatas. Tampoco si algún día encontrarán órdenes superiores de infinito que sean extremadamente eficaces en la comprensión de la existencia.

Aquí es donde se nos "desgarra"la imaginación, y tal vez un buen momento para comprobar que seguimos teniendo nuestras carteras encima.

Capítulo 3

El papel del infinito en Secundaria-Bachillerato

3.1. Dificultades de su comprensión y su enseñanza

En este capítulo desarrollaremos algunas consideraciones didácticas sobre el concepto del infinito matemático, relacionadas con los problemas que su introducción ocasiona en los alumnos en los distintos niveles de la escolaridad. Ya Piaget [27], en su estudio sobre la adquisición de los distintos conceptos fundamentales por parte del alumno, hace referencia a la dificultad de la asimilación de las nociones del infinito y continuidad por parte del alumno hacía los 11 ó 12 años de edad.

También podemos mencionar que el aprendizaje "significativo"[1], en el sentido indicado por Ausubel , de los conceptos matemáticos, es problemático cuando el estudiante no tiene una experiencia previa que le permita construir determinados conceptos a partir de ésta. Tal es el caso del concepto de infinito.

Generalmente, la forma de enseñar este concepto consiste en utilizar metáforas didácticas basadas en conjuntos "muy grandes", para fijar la idea de infinitud. Esto permite crear la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano y próxima a la descrita por la Real Academia Española.

Este procedimiento, sin embargo, podría malformar el concepto matemático. La ambigüedad del lenguaje coloquial haría que el concepto del infinito se convirtiera en una idea vaga e intuitiva, que se parecería muy poco a la idea matemática de infinito como algo muy concreto y bien definido.[1]Un ejemplo

[1]Un ejemplo más de la dificultad con el manejo coloquial de la noción de infinito a un nivel mucho más elevado la hemos ejemplificado en la sección 2.3

de ello podría ser la sección 2.2.

Creemos que la concepción del infinito no se trabaja adecuadamente en la enseñanza de la Matemática y, por ello, pensamos que la naturaleza infinita de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$, lo mismo que la de los conjuntos usuales de la geometría euclidiana estudiados en los distintos niveles de la escolaridad, requiere, por parte del profesor, un conocimiento profundo de la problemática relacionada con la enseñanza del infinito.

Así, en varios cursos, es habitual trabajar con diversos conceptos que involucran, como tema destacado y conflictivo, la noción de infinito; y, aunque el infinito surja en estos contextos de manera poco intuitiva, es empleado sin una explicitación específica, como si su existencia formara parte del sentido común.

La mayoría de los libros asumen el hecho de que los estudiantes tienen ya una noción del concepto de infinito y, por lo general, lo comienzan a utilizar al definir límites de procesos infinitos y límites infinitos, pero sin hacer una introducción adecuada del concepto. Para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que se olvida fácilmente si no se le da el valor que corresponde y es uno de los más difíciles de enseñar y aprender.

Varias investigaciones sobre el desarrollo cognitivo del estudiante acerca del concepto de infinito se preocupan básicamente de analizar dificultades de tipo psicológico provocadas por la manipulación del infinito de manera improvisada. Para detallar un poco más estas investigaciones vamos a comenzar describiendo el concepto intuitivo del infinito que se usa en matemáticas, para, después, referirnos a diversos estudios sobre la enseñanza del infinito, citando analogías o diferencias entre ellos.

A continuación, repasaremos los distintos estudios llevados a cabo por distintos autores sobre las diversas intuiciones que tienen los alumnos acerca del infinito.

Concepto intuitivo del infinito matemático

Creencias sobre la naturaleza de los procesos infinitos:

A través de varios ejemplos podemos llegar a la conclusión que las distintas variables relacionada con la idiosincrasia[2] del estudiante tienen mucho que ver con el aprendizaje de conceptos matemáticos y, en particular, con el del infinito, del estudiante. Estos ejemplos son:

- argumentos que dan por buena o no la igualdad: $0{,}999\cdots = 1$

[2] Conjunto de características hereditarias o adquiridas que definen el temperamento y carácter distintivos de una persona o de un colectivo.

Sierpinska [37], [38] clasifica las distintas posturas de los estudiantes en función de sus distintas actitudes hacia el infinito. Concluye que cada estudiante construye sus propios argumentos “matemáticos”para explicar su respuesta.

Arrigo y D’Amore [3], en su investigación afirman que, tras muchos años de enseñanza del análisis, siempre hay ciertas dudas, sobre el concepto de infinito, que permanecen en el estudiante. Por ello este aprendizaje termina limitándose fundamentalmente a la adquisición de determinadas reglas y técnicas de manera mecánica.

Tall y Schwarzenberger [42] también estudian estos conflictos cognitivos que tienen los estudiantes al enfrentarse a la igualdad $0{,}999\cdots = 1$. Por este motivo Tall [40], [41], propone que el infinito se enseñe a través del infinito como medida utilizando los infinitesimales[3] (análisis no-estándar) y recomienda hacer entrevistas a los estudiantes para conocer las creencias que tienen sobre la naturaleza de distintos conceptos matemáticos.

- Diferencias entre procesos psicológicos y procesos matemáticos. Gardner [15], utilizando ejemplos de procesos infinitos estudia las dificultades de los estudiantes para creer que “el infinito es el mayor de los números”. Gardner afirma que los errores debidos a estas dificultades, se repiten con frecuencia, debido a que no se tiene en cuenta que dichos errores no son, en origen, de carácter matemáticos. Por ello Gardner distingue entre “la psicología de los procesos infinitos” y “las matemáticas de los procesos infinitos”.

Ahora más en general, tenemos a estos dos autores fundamentales

1. **Fischbein:**

   Fischbein [9], define la intuición como el sentido común elemental, forma de conocimiento primitiva, opuesta a interpretaciones y concepciones científicas. Según él, en la enseñanza, los métodos intuitivos deben prevalecer a los formales y, a su vez, considera que una secuencia de actividades debe ir a la par con el desarrollo formal en torno a un cierto concepto, para no provocar concepciones erróneas.

   De acuerdo con Fischbein, también hay que ser consciente de que en matemáticas se usan conceptos y proposiciones cuya validez ha sido establecida lógicamente y no empíricamente y, por ello, se aceptan hechos

[3] Cantidad infinitamente pequeña

que contradicen la forma natural de pensamiento. Debido a que este pensamiento se haya fuertemente arraigado hay que tener un cuidado didáctico especial.

En Fischbein, Tirosh y Hess [10] y Fischbein, Tirosh y Melamed [11] se llevan a cabo diversas investigaciones sobre la intuición del infinito, llegando a dos conclusiones principales:

- supone una gran dificultad conseguir la manipulación formal de este concepto, así como aceptar los aspectos contradictorios que involucran.
- la intuición y, por consiguiente, las respuestas intuitivas de los estudiantes, están poco relacionadas con la edad o la enseñanza recibida previamente.

Peñalva y Turégano [26] obtienen las mismas conclusiones.

Fischbein identifica otros obstáculos en los estudiantes: se trata del mismo problema que tenían los griegos con la "inconmensurabilidad", es decir, no admiten la existencia de ningún número irracional y, mucho menos, de infinitos racionales e irracionales en un intervalo. En la misma línea, Peñalva y Turégano [26] comprueban que los números irracionales no forman parte del conocimiento básico de los estudiantes, porque la "inconmensurabilidad" conlleva un número infinito de aproximaciones de medida.

2. **Tirosh**

En su Tesis Doctoral [44] e investigaciones anteriores [46], [47], Tirosh trata de comparar distintos conjuntos infinitos con la intención de cambiar las ideas preconcebidas de los estudiantes sobre el infinito actual e implantar, en la mente de los estudiantes, un conocimiento formal sobre la Teoría de Conjuntos de Cantor. En sus investigaciones llega a numerosas conclusiones, que podrían resumirse en:

- pocos alumnos son capaces de utilizar adecuadamente la correspondencia 1-1 para establecer la cardinalidad de un conjunto,
- suelen pensar que todos los conjuntos infinitos, por el hecho de ser infinitos, tienen el mismo número de elementos,
- creen que todos los métodos utilizados para comparar conjuntos finitos se pueden utilizar, también, para los conjuntos infinitos,
- los conocimientos intuitivos que suelen emplear los alumnos para razonar sobre el infinito son el origen de diversos conflictos conceptuales.

Este último punto significa que numerosos estudiantes plantean conflictos entre criterios intuitivos utilizados para comparar cantidades infinitas y las definiciones formales teóricas.

Desafortunadamente Tirosh no puede afirmar, en sus investigaciones, con suficiente grado de confianza, el que los métodos que propone sean eficaces cambiar la intuición de los alumnos a la hora de manejar conjuntos infinitos.

Dificultades de la enseñanza del infinito:

En las últimas décadas, con el desarrollo de investigaciones en Educación Matemática y en Didáctica de las Matemáticas, numerosos estudios han puesto en evidencia que, en los últimos años de la educación secundaria e, incluso, en la universidad, los estudiantes encuentran serias dificultades que implican el infinito.

Vinner [48], [49], cree que el origen de muchas dificultades de los estudiantes sobre el concepto del infinito se deben a la compartimentación del conocimiento, es decir, a la existencia de dos aspectos de un mismo concepto, ambos conocidas por el sujeto, relacionados entre sí, pero que aparecen de manera disociada en el esquema mental del estudiante. Si, además, estas ideas son contradictorias, al utilizarlas conjuntamente se produce un conflicto o confusión. Peñalva y Sánchez [25], intentando minimizar esta problemática en la mente del estudiante, invitan a insistir en el **uso-comprensión** simultáneo de todos los conceptos y no, únicamente, en el de uno de ellos.

Es de nuevo Tirosh [45] quien expone un ejemplo claro sobre este particular: los problemas que tienen gran número de estudiantes al comparar el cardinal de los números naturales y el cardinal de los números enteros y, añade, que estos problemas pueden surgir por la visualización conjunta de ambas colecciones de números, en la que se aprecia que uno de ellos es claramente mayor que el otro.

Penalva [24] identifica el origen de alguno de estos conflictos en los estudiantes tienen su origen en “recursos didácticos” utilizados por el profesorado en una determinada época de escolaridad. Por ejemplo, Peñalva se refiere a algunas representaciones gráficas o al lenguaje coloquial asociado a propiedades de conjuntos, como por ejemplo, la inclusión.

Otras investigaciones sobre esta misma temática son las de: Sierpinska [36]; Moreno-Armella y Waldegg [22]; Waldegg [50]; Montoro y de Torres Curth [21] y Monaghan [20] entre otras muchas que, serían demasiadas para detallar en este trabajo.

Aún así creemos importante hacer, por último, una referencia al concepto de límite y a su enseñanza que, como explican diversos trabajos sobre la didáctica del infinito, es una de las ideas matemáticas que implica más dificultades de apredizaje. Las investigaciones arriba citadas proponen una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza también, Ázcarate et al. [4] manifiestan que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe tanto a su riqueza y complejidad como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática. Como se señala en los estudios de Cornu [5], los alumnos tienen "concepciones espontáneas personales"que provienen de su experiencia cotidiana. Las concepciones espontáneas son muy resistentes al cambio y permanecen durante mucho tiempo, de manera que pueden contener factores contradictorios que se manifiestan en diversos contextos.

3.2. El infinito en el currículum de la LOE y la LOMCE

La escolaridad y el proceso de enseñanza y aprendizaje se desarrolla a lo largo de etapas delimitadas por edades y contenidos, que comienzan en la etapa preescolar (o tal vez desde la escuela maternal) y culminan en la Universidad o en los estudios de postgrado. Estas etapas están en estrecha relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes y, para poder hacer estudios, dar ideas, aportaciones y reflexiones didácticas, es importante saber situar la etapa cognitiva en que se encuentran los estudiantes.

Desde el comienzo de la formación escolar se empieza a conocer y a convivir con el infinito, en concreto, con la idea de infinito potencial. Esta idea simple aparece en múltiples contextos como mostraremos a continuación: decimales, números, figuras geométricas, funciones, . . . hasta alcanzar, en los cursos más avanzados, la idea de infinito actual y su manipulación.

En las siguientes secciones se pretende reflejar las distintas apariciones del infinito (potencial y actual) en el currículo de Cantabria de las Matemáticas de la Educación Secundaria (LOE) y en la LOMCE. Esto incluye la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

En nuestra descripción, se hará especial hincapié en los conceptos nuevos, estudiados por el alumno en cada curso, relacionados con el infinito. En los distintos epígrafes se resaltará qué concepto puede implicar una mayor dificultad para el alumno y, en algunos casos, se propondrá alguna idea para facilitar su asimilación por parte del mismo. Todo ello ha sido extraído de los documentos oficiales que se incluyen en el anexo A de este trabajo.

3.2.1. El infinito en la LOE

Primer Curso de ESO

Aunque este es el primer curso de la etapa más avanzada de la enseñanza obligatoria, los alumnos ya se han tenido que enfrentar con la idea de infinito en las enseñanzas primarias y aún infantiles -como hemos detallado en la sección anterior- por lo que llega este primer curso con ciertas ideas y prejuicios sobre su naturaleza.

En teoría el alumno ya ha tenido que estudiar los **números decimales**[4] en la Educación Primaria, pero como cada alumno puede venir de un centro diferente es importante nivelar entre los alumnos el dominio entre las operaciones con dichos números así como el dominio de la relación entre fracciones y decimales. En este punto la mayor dificultad para el alumno puede consistir en la manipulación de expresiones decimales no exactas, es decir, con **infinitos decimales** y en admitir que un número con, aparentemente, infinitos decimales, se puede escribir con un número finito de cifras en una fracción.

Creemos que el otro punto donde el alumno se enfrenta con el infinito en este curso es en la diferenciación entre **segmento, recta y semirrecta**, es decir, la diferencia entre lo infinito y lo finito en el sentido dimensional. Para explicar esta distinción una opción podría ser la consideración de las rectas y semirrectas como concatenar de infinitos segmentos.

Segundo Curso de ESO

En este curso se vuelve a hacer hincapié en la relación entre fracciones y decimales, ya descrita en el curso anterior. Quizás aquí la única novedad sea la introducción de **los porcentajes** con las fracciones y los números decimales y el hecho de que algunas fracciones, que se corresponden a un número con un número de infinitos decimales, se expresan en la vida cotidiana mediante el redondeo a un porcentaje finito. Por ejemplo, habitualmente 1/3 se suele expresar como un 33 %.

La gran novedad de este curso seguramente sea el **estudio gráfico de una función**, es decir, el estudio del comportamiento de la misma para distintos valores de la variable. El alumno tendrá que interpretar cuándo una función crece o decrece y en qué casos es un crecimiento o decrecimiento indefinido. Si nos referimos a la continuidad o discontinuidad de una función surge la misma cuestión relativa a en qué puntos la función es continua o

[4]En lo que sigue podremos en negrita aquellos términos que aparecen en el contenido de cada uno de los cursos y que tienen una mayor relación con el infinito desde nuestro punto de vista

discontinua, para terminar argumentando si una función es continua en todo phv$\mathbb{R}$ menos en número finito de puntos o es discontinua en un número infinito de puntos.

En este curso la utilización de calculadoras gráficas o programas de ordenador para construir funciones y poder facilitar al alumno la asimilación de estos conceptos citados anteriormente será de gran importancia y de gran ayuda, aunque no es fácil precisar cuál es el papel de estos utensilios en la enseñanza de las ideas de infinito o límite.

Tercer Curso de ESO

Aunque en el primer curso ya se han estudiado las relaciones entre fracciones y decimales, no es hasta este curso cuando se aprende cómo transformar cualquier número decimal (periódico) en una fracción y viceversa. En el primer curso el alumno puede tener problemas al asimilar o entender que un número decimal periódico con aparentemente **infinitos decimales** es igual a una fracción finita, pero en este curso aprende a transformar ese número con infinitos decimales en su fracción equivalente, observará como la partes infinitas del número decimal se cancelan lo que, al comienzo, puede resultar un poco extraño de comprender para el alumno.

También se empiezan a estudiar distintas operaciones entre números decimales y fracciones. En este punto lo más interesante para el alumno puede ser estudiar una operación entre fracciones que sean equivalentes a un **número decimal con infinitas cifras** y ver cómo el resultado con fracciones no es el mismo que el resultado con los números decimales, porque en un número racional tenemos toda la información sobre el número, pero el número decimal asociado a esta fracción con infinitas cifras sólo lo podemos escribir de forma finita, por lo que cometemos un error de redondeo.

Otra novedad en este curso es la utilización de la recta númérica como sistema de representación de números racionales e irracionales. Mediante su utilización el alumno podrá comparar dos o más números racionales, ya que la recta es un **objeto geométrico infinito** y se pueden representar tantos números racionales como se quiera. La dificultad para el alumno puede radicar en comprender cómo en un espacio tan reducido en la recta, como puede ser el segmento entre 4/9 y 5/9, caben infinitos números racionales. En este punto puede resultar de gran ayuda la utilización de programas como Geogebra[16]

, por la existencia de una herramienta de “zoom”[7] sobre un intervalo (véanse Figuras 3.1 y 3.2)

Aunque los alumnos pueden haber iniciado el contacto con algunos números **irracionales**en cursos anteriores, no es hasta este curso cuando se pone

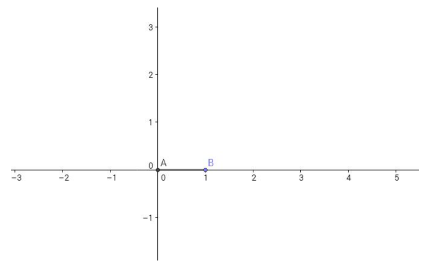


Figura 3.1: Segmento

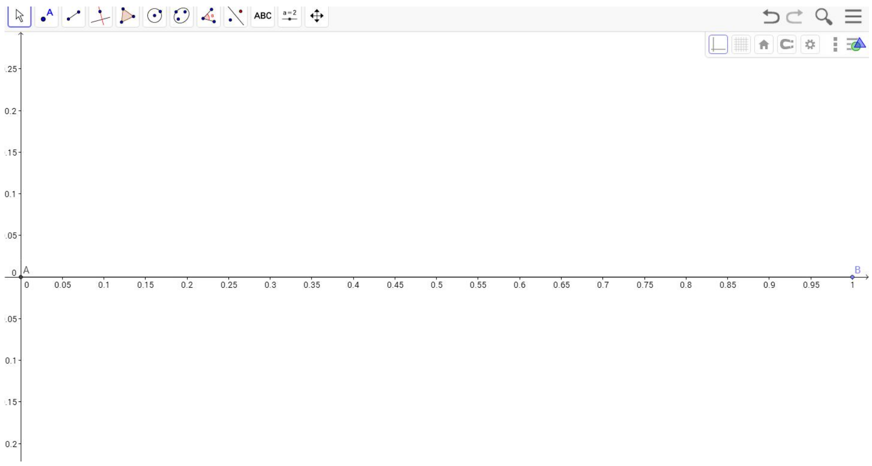


Figura 3.2: Segmento ampliado

nombre a números como: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$. Todos ellos son **números con infinitos decimales no periódicos**.

Un nuevo concepto en este curso será el de sucesión y, con ellas, las **sucesiones infinitas**. Un tipo de sucesión que involucra implícitamente el concepto de infinito es el de las **sucesiones recurrentes**, porque la forma de definir estas sucesiones hace que podamos prolongar el proceso indefinidamente y así obtener infinitos términos de la sucesión. La serie de Goodstein (véase sección 2.1 ejemplo 5) sería una sucesión recurrente.

También se introduce el término progresión y con él dos tipos distintos: geométrica y aritmética. Desde el puntos de vista del infinito esta distinción no tiene demasiada importancia, quizás el único detalle sea que en una progresión geométrica sus términos crecen más rápido y por lo tanto tienden antes al infinito.

El alumno, al conocer los números racionales e irracionales, es importante que tenga claras las propiedades y características de cada uno de ellos y del resto de conjunto numéricos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$. Todos los **conjuntos numéricos** tienen **infinitos términos**, pero no todos tiene el mismo tamaño matemáticamente hablando. Esta idea es muy importante que quede clara en el alumno para evitar posibles conflictos en los próximos cursos.

Aunque en el curso anterior se puede haber estudiado el crecimiento, decrecimiento, continuidad, discontinuidad de una gráfica analizando una determinada situación, no es hasta este curso cuando se define formalmente lo que es una función y sus propiedades y características. Aprenderá a decir cuál es el dominio de la función, si es continua o no en ese dominio, si la función es creciente o decreciente y, en cada caso si el crecimiento o decrecimiento es infinito o no.

En la parte de Estadística se introduce el concepto de experiencia aleatoria y con él numerosos ejemplos en los que el alumno tendrá que manejar distintos tipos de espacios muestrales y podrán presentársele situaciones en las que el **espacio muestral sea infinito**, por ejemplo, si tiramos dos agujas la probabilidad de que no se corten al caer o la altura de una persona elegida al azar de un determinado colectivo.

Cuarto Curso de ESO (Opción A)

En este curso el alumno ya debe optar entre dos modalidades de matemáticas diferentes. En esta opción A el alumno se orienta más por las matemáticas que se verán en Bachillerato en la rama de Ciencias Sociales.

En esta opción se introducen por primera vez los intervalos y las diferentes formas de expresarlos y, con ello, el alumno tendrá que saber distinguir entre el concepto de intervalo abierto o cerrado, la **idea de infinitud** implícita al considerar los extremos de un intervalo abierto,...

Además, se volverá a insistir en la representación de los distintos tipos de números sobre la recta real, ya vista en el curso anterior. Por este motivo, el alumno ya debe sentirse seguro representando números racionales e irracionales con **infinitos decimales** sobre un **conjunto geométrico infinito**, como es la recta.

También en el curso anterior el alumno ha tenido que resolver sistemas de ecuaciones, pero en este curso se ve por primera vez la resolución gráfica de los mismos, aunque en muchos casos, a pesar de no estar en el currículo, hay profesores que ya introducen esta resolución gráfica, junto con la algebraica, en tercero de ESO. En todo caso el alumno tendrá que perfeccionar su técnica para reconocer sistemas compatibles indeterminados, con **infinitas soluciones** y para saber cómo interpretarlos geométricamente, lo que conlleva entender que podemos tener una serie de objetos geométricos con **infinitos puntos en común**.

Otro punto en el que aparece el infinito y que, en principio, no debería ser nuevo para el alumno, tiene que ver con la interpretación de un fenómeno descrito mediante una gráfica. El alumno ya estudió el comportamiento y las características de las gráficas en el curso anterior. Por este motivo el identificar en una gráfica una **función que tiende a infinito**, que es continua en todo phv$\mathbb{R}$, que **crece infinitamente**,etc, no le supondrá un esfuerzo extra. Por la misma razón, el estudio de modelos funcionales del tipo exponencial o cuadrático sólo será un ejemplo más dentro del estudio de comportamiento y características de las gráficas.

Cuarto Curso de ESO (Opción B)

En esta opción B el alumno se empieza a decantar por las matemáticas del ámbito científico y, por tanto, con mayor contenido y exigencia.

En este contexto debemos decir que aunque en el curso anterior ya se han visto algunos ejemplos de números irracionales, no es hasta este curso cuando se profundiza en este tipo de números. La comprensión de los irracionales puede entrañar algo más de dificultad para el alumno que la de los números racionales, puesto que, en el caso irracional, estos números parece que tienen una expresión decimal con **infinitos decimales** sin ningún patrón aparente, por ejemplo, sin periodicidad. Esta es una problemática con mucho trasfondo si nos propusiéramos indagar más sobre el tema, por ello, vamos a citar únicamente algunas problemáticas que Recio expone[33]. "La enseñanza de los números naturales, enteros y racionales, tiene su dificultad específica, pero nada comparable a la que representa la introducción del concepto de número irracional..En particular, llega a señalar que "una fuente de problemas conceptuales en la enseñanza de los número irracionales la proporciona la noción de continuo geométrico y su relación con el continuo numérico, es decir, la percepción de la correspondencia entre números reales y puntos de una recta."

En este curso el alumno puede tener una idea más clara de qué números forman los números reales, al definir formalmente el conjunto de los irracionales. Asimilar distintas formas de escribir un número real, con infinitos decimales, en forma de fracción y, su aproximación en caso de querer introducirlos o operar con ellos mediante una calculadora.

Al margen de esta problemática creemos que es importante incidir en la representación de los números sobre un **objeto geométrico infinito** como es la recta, resaltando en ella los nuevos números irracionales que se introduzcan en este curso.

Como en la otra opción, en esta también, el alumno estudia por primera vez los intervalos, su significado y las distintas formas de expresarlos. Tendrá que distinguir entre intervalos abiertos y cerrados, y manejar la **idea de infinitud** que está implícita en los extremos de un intervalo abierto, ...

Asociada a la idea de **crecimiento infinito** o continuidad en todo phv$\mathbb{R}$
, en este curso se introducen las primeras ecuaciones exponenciales sencillas. Al hablar de exponenciales también se introduce su operación inversa, el logaritmo y, con él, sus propiedades. Esto conlleva el estudio del comportamiento asintótico, límites, ... de estas nuevas funciones, lo que involucra la manipulación de la **idea de infinito**.

Otro concepto novedoso de este curso es el de inecuación de una variable y su interpretación gráfica. El alumno tendrá que aprender a manipular sistemas de inecuaciones de una variable y a identificar su solución con regiones acotadas (finitas) o **regiones no acotadas (infinitas)**.

Finalmente, en este curso, se repasará la interpretación de gráficas a través de los fenómenos descritos por la misma, lo que puede exigir la manipulación de la **idea de infinito**.

Primer Curso de Bachillerato (Modalidad de Ciencias y Tecnología) Matemáticas I

Vamos a suponer, como debería ser normal, que el alumno que llegue a esta asignatura ha cursado Matemáticas B el año anterior. Por ese motivo nos limitaremos a evaluar las novedades de esta materia con respecto al contenido de las matemáticas del Cuarto Curso (opción B).

Como se puede ver en el Anexo, el primer bloque, relativo a los números reales, no introduce, respecto de la idea de infinito, ninguna novedad para el alumno.

Análogamente, el bloque de contenido que se refiere a las sucesiones numéricas también incide sobre ideas del infinito que se han manejado en cursos anteriores. Lo que sí supone una novedad es la introducción del número e, con **infinitos decimales no periódicos**, así como la del logaritmo neperiano.

En lo que se refiere al bloque de resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado, la novedad en este curso es el estudio de inecuaciones con varias incógnitas y las inecuaciones de segundo grado. Por este motivo será mucho más habitual que el alumno se encuentre con sistemas de inecuaciones cuyas soluciones, a la hora de hacer la interpretación gráfica, producen **regiones no acotadas en el plano**, en el espacio, etc, lo que conlleva a la idea de un **infinito multidireccional**.

En el siguiente bloque (aspectos geométricos en el plano) el infinito surge otra vez al considerar las posiciones relativas de dos rectas, rectas paralelas, **rectas que se cortan en el infinito**,...

Una novedad de este curso es la introducción de las cónicas. Es interesante observar cómo la intersección de un plano -que es un **objeto geométrico infinito**- con un cono produce siempre una cónica, aunque, según el ángulo con el que se corte, la **sección será infinita** (hipérbola, parábola) o finita(círculo, elipse).

La idea de infinito vuelve a aparecer cuando se profundiza, en este curso, en el concepto de función real de variable real, estudiando si el dominio es todo el **plano infinito** o no, la continuidad de la función, su crecimiento o decrecimiento,... Lo mismo ocurre cuando se estudian con mayor detalle algunas funciones, como las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas.

Otro concepto novedoso y muy importante de este curso es el de **límite de una función**. Por este motivo es muy importante que la idea y el proceso de límite queden bien asentados en la cabeza del estudiante. Esto le va a permitir enfrentarse con los bloques siguientes del currículo de este curso relacionados con la tendencia de una función. Aunque ya se había introducido este estudio en el curso anterior, en este curso se profundiza sobre ellos, asentando la noción de **límite en el infinito**, al hablar de las asíntotas.

Nos volvemos a referir en este curso al concepto de continuidad de una función, hablando de si una función es continua en todo phv$\mathbb{R}$, si es **discontinua en un número infinito de puntos** y, dentro de los tipos de discontinuidad, si se trata, por ejemplo, de una **discontinuidad evitable de salto infinito**.

El **concepto de derivada**, que se introduce por primera vez en este curso, también lleva implícito el concepto de infinito, ya que podríamos decir que es el límite de la rapidez de cambio promedio de la propia función en el entorno de un punto: en efecto, lo que hacemos es tomar dos valores de la variable independiente x_0 y $x_0 + h$, unir los respectivos valores de la función $f(x_0)$ y $f(x_0+h)$ y, al hacer tender x_0+h a x_0, observaremos que ese segmento se va aproximando a la recta tangente en x_0, su derivada.

Por último, en este curso, el alumno aprenderá a **representar gráficamente una función elemental** a partir de cierta información global (dominio, simetrías, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, tendencia en las asíntotas,...) que muchas veces implica una idea de infinito, cuyo dominio permitirá al alumno asimilar todavía mejor estos conceptos.

Segundo Curso de Bachillerato(Modalidad de Ciencias y Tecnología) Matemáticas II

En este curso, el último de Bachillerato para el alumno, se introduce el Teorema de Rouché-Frobenius y, con él, se estudian el **número de solucio-**

nes de un sistema. En función del rango de la matriz ampliada se estudia si la solución es única o si, por el contrario, posee **infinitas soluciones**. También se estudian otro métodos para descubrir si un sistema es compatible o no y, si posee infinitas soluciones o no.

También se profundizará más en un aspecto ya visto en el curso anterior, como es la **posición relativa de dos rectas** y, se añadirá a esta interpretación la noción de plano. De esta forma se estudiará, por ejemplo, cómo dos rectas se pueden **cortar en el infinito**, un plano puede ser paralelo a una recta,...

En el curso anterior se introduce el concepto de límite y se calculan algunos límites sencillos. En este curso ya se profundiza en este concepto, se estudian los **límites laterales** y, su relación con el límite. De esta forma, se verá lo que es **aproximarse a un número infinitamente** por la izquierda o por la derecha, el valor de un límite cuando una variable crece muy rápidamente, es decir, tiende a infinito,...

Se insistirá al alumno en las **asíntotas de una función** y como se comporta ésta cuando se aproxima a las asíntotas, si tiende a infinito, si tiende a una constante,...

Al referirnos a la continuidad, cabe destacar que en este curso se introducen los conceptos de **continuidad lateral** y su relación con la continuidad, que es similar a la relación del concepto de límites laterales con el concepto de límite. Se estudiará si una función es continua en phv$\mathbb{R}$, o no, si es discontinua en un número finito o infinito de puntos, si la discontinuidad es no evitable de salto infinito, ...

En este curso se profundiza en el concepto de **función derivada**, derivabilidad en un punto, derivadas laterales y su relación con la derivada. Para esto es inevitable hablar de límites y, por lo tanto, que entre en juego el infinito actual.

Se verá qué relación tiene la derivada con las propiedades locales de una función, monotonía, extremos, ... De esta forma, con la derivada se podrá saber, por ejemplo, si una función **crece o decrece infinitamente**.

En este curso se hace una pequeña introducción al concepto de integral, hablando del área encerrada bajo una curva y, para ello, se sumarán áreas de rectángulos cada vez más pequeños bajo la curva y se mostrará como **el límite de esta suma** es lo que se conoce por, integral definida. Una vez introducido este concepto, también se mostrará al alumno el concepto de primitiva de una función y cómo existen **infinitas funciones primitivas** para una única función.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I

Antes de empezar a destacar la principales apariciones del infinito en este curso, es importante repasar las nociones sobre este tema que el alumno conoce ya. Lo más normal es que el alumno llegue a esta asignatura habiendo seguido la Opción A el curso anterior, lo que supondremos en lo que sigue.

En esta asignatura se empezará haciendo una diferenciación entre los **números racionales y los irracionales** como el número e. A pesar de que todos ellos pueden ser números con infinitos decimales, el alumno tendrá que saber distinguir entre ambos por su representación decimal.

El alumno, en el Cuarto Curso ya estudió la representación de números en la recta real y los distintos tipos de intervalos, pero en el curso al que nos estamos refiriendo se profundizará en estos conceptos y se introducirá la noción de **semirrecta**, otro objeto geométrico infinito que, a diferencia de la recta, sólo tiende a infinito por unos de sus extremos. También se verán **intervalos infinitos**, intervalos abiertos,... y su relación con el infinito.

También se enseñará al alumno a hacer distintos tipos de redondeos y a **aproximar números reales con infinitos decimales** mediante un número racional con un número finito de decimales.

Se introducirán por primera vez los **logaritmos**, las ecuaciones logarítmicas y las **exponenciales**. De esta forma el alumno verá ejemplos concretos de ecuaciones que crecen muy rápido y tienden a infinito de la misma manera.

Otro concepto novedoso del curso será la aparición de las **ecuaciones de segundo grado o grado superior** y su interpretación gráfica. Para ello el alumno tendrá que aprender a estudiar o repasar, si ya los conoce, conceptos tales como el comportamiento asintótico, intervalos de crecimiento/decrecimiento,...

En el Tercer y Cuarto Curso el alumno es introducido a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales, pero apenas se llega a ver su clasificación por soluciones y resolución, por lo que en este curso se profundiza sobre los **sistemas y su interpretación gráfica**, teniendo que aprender a distinguir entre sistemas con una solución y sistemas con infinitas soluciones.

En este mismo curso se volverá a insistir en la **expresión gráfica de una función y sus aspectos globales**: función continua en todo phv$\mathbb{R}$, función creciente/decreciente, comportamiento asintótico,... Se analizarán diversos ejemplos tales como las funciones exponenciales o logarítmicas, las funciones periódicas (se repiten hasta el infinito), el valor absoluto (crecimiento/decrecimiento infinito), la función parte entera (discontinuidades infinitas), ...

Al alumno se le presentará por primera vez el concepto de **límite de una función en un punto**, a través de una idea intuitiva, como puede ser una aproximación infinita al punto a través de infinitos reales sin llegar a ese número; también se calcularán varios límites de funciones sencillas. Asociado al límite se verá el **concepto de continuidad y discontinuidad** y con ellos se analizará el comportamiento de la función, como por ejemplo la noción de discontinuidad no evitable de salto infinito. También se verá la relación entre el límite de una función en un punto con la asíntota en ese punto.

La **noción de derivada** se introduce por primera vez en este curso, por lo que el alumno tendrá que tener una idea, una interpretación geométrica del concepto para asimilarlo mejor. Habrá que dejar claro al alumno la idea de que la derivada está relacionada con el concepto de límite, refiriéndonos a la distancia entre dos puntos cuando ésta tiende a 0.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

En este curso el alumno se enfrenta por primera vez a las inecuaciones lineales con una o dos incógnitas y, si nos referimos a su interpretación gráfica, tendrá que asimilar la idea de **región que define una inecuación**, siendo ésta una conjunto infinito (no acotada). También se estudiará la idea región factible de sistemas de inecuaciones lineales, pudiendo ser dicha región acotada o no acotada.

Aunque el alumno en el curso anterior había calculado límites de funciones sencillas, no es hasta este curso cuando se introduce una **definición formal de límite**. Para ello tendrá que producirse una primera aproximación a este concepto mediante el repaso de ejemplos vistos en el curso anterior sobre tendencia de funciones, comportamiento asintótico, montononía,... De esta forma se introducirá el concepto de límite de una función en un punto y las distintas posibilidades si la aproximación es por la izquierda o por la derecha (límites laterales). Se estudiarán las distintas propiedades de los límites y cómo resolver alguna indeterminaciones.

También se repasa y amplía el **concepto de continuidad** (continuidad de una función en un punto). Se profundiza más sobre los tipos de discontinuidades que existen, por ejemplo, **discontinuidades** no evitables de salto infinito. El alumno estudiará la continuidad de una función que está definida a trozos, observando si la función es continua en los puntos que unen los distintos "trozos".

Se sigue profundizando en el **concepto de derivada de una función en un punto**, concepto que está relacionado con el infinito actual y su proceso de paso al límite.

Lo normal es haber empezado a estudiar y representar gráficamente, f**unciones polinómicas y racionales** en la etapa final del curso anterior, pero realmente es en este curso cuando se analizan sus propiedades globales, es decir, si son continuas o no en todo phv$\mathbb{R}$, su comportamiento asintótico, tendencias en el infinitos,...

Finalmente, en este curso se introduce el **concepto de primitiva** de una función y, a su vez, el de integral indefinida. Al estudiar sus propiedades elementales encontramos la presencia del infinito, por ejemplo, al comprobar como para una misma función existen **infinitas integrales indefinidas**. Del mismo modo, con la suma de áreas de rectángulos cada vez más pequeños, es decir una **suma infinita de rectángulos** infinitamente pequeños, para calcular áreas planas y su relación con la integral definida.

3.2.2. El infinito en la LOMCE

Recientemente el Gobierno de España ha promulgado una nueva ley para la mejora de la calidad de la educación, introduciendo diversos cambios en el desarrollo y la estructura del currículo [19](LOMCE). Tal vez una de las grandes novedades con respecto al currículo actualmente en vigor es la aparición, en la descripción de cada una de las materias del currículo, de una tercera columna que explica y detalla más qué es lo que se pretende conseguir en el alumno en cada bloque de contenidos. Pero los aspectos referidos a la aparición del infinito en cada curso, son muy similares a los del currículo actualmente en vigor, por lo que no consideramos necesario detallar este tema.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo hemos contemplado distintos aspectos del infinito en el ámbito de las matemáticas. En el capítulo 1 hemos reflexionado acerca del concepto de infinito, del origen del infinito tanto histórica como psicológicamente, de los distintos tipos de infinito con sus diferentes matices,... En numerosas ocasiones el problema era que el infinito se relacionaba con la intuición y de ahí se llegaba al error. Por este motivo hoy en día, es importante que al manipular o manejar el concepto de infinito, desconfiemos siempre en su justa medida del proceso, puesto que nuestra intuición en el proceso nos puede jugar una mala pasada.

En el capítulo 2 hemos descrito algunos de los diversos roles, muchas veces sorprendentes o contradictorios, que el infinito juega en las matemáticas, nos ha sorprendido especialmente el teorema de Kirby-Paris que habla de la imposibilidad de demostrar una afirmación verdadera en los que sólo se ponen en juego objetos finitos, mediante una demostración finita, es decir, una demostración en la que de igual forma sólo se pongan en juego objetos finitos. En el segundo bloque del capítulo vuelve a aparecer una vez más como mediante el uso del infinito atendiendo un poco a la intuición y no a las propiedades del mismo, puede llevar a resultados aparentemente "mágicos".

En el tercer capítulo hemos descrito las dificultades pedagógicas. Nuestra conclusión es que el currículo contiene gran cantidad de puntos que aparentemente pueden no contener la palabra "infinifo.^{en} ellos, pero una gran cantidad requieren una noción más o menos básica de la noción de infinito por parte del alumno.

Bibliografía

[1] *Aprendizaje significativo*, Wikipedia, `http://es.wikipedia.org/wiki/Aprendizaje_significativo`.

[2] Aristóteles, *Metafísica*, Libro XI, `http://www.filosofia.org/cla/ari/azc10.htm`.

[3] Arrigo, G.; D'Amore (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática, 11*, 1, 5-24.

[4] Azcárate, C.; Bosch, D.; Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Editorial Síntesis.

[5] Cornu, B. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Tesis de doctorado de tercer ciclo. Universitè de Grenoble, 1983.

[6] Costa Reparaz, E.; Otto López, B. (1999). Ideología y matemáticas: El Infinito. *XIII Jornadas de ASEPUMA.* `http://www.uv.es/asepuma/XIII/comunica/comunica_30.pdf`.

[7] *Comando ZoomAcerca (Geogebra)*, `http://wiki.geogebra.org/es/Comando_ZoomAcerca`.

[8] Dehornoy, P. *A quoi sert l'infini.* Conferencia pronunciada en *Mathematic park*, Paris IHP, enero 2012. Disponible en `http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/Talks/DymS.pdf`.

[9] Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht: Reidel.

[10] Fischbein, E.; Tirosh, D.; Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 10, 3-40.

[11] Fischbein, E.; Tirosh, D.; Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of the mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*. 10, 491-512.

[12] Frenkel, E. (2013). *Love and math: The heart of hidden reality*. Ed: Basic Books.

[13] Función Zeta de Riemann. *Wikipedia*, `https://es.wikipedia.org/wiki/Funcion_zeta_de_Riemann`.

[14] *Galileo*, `http://asclepio.revistas.csic.es/index.php/asclepio/article/viewFile/4/4`

[15] Gardner, R.C. (1985). *Social psychology and second language learning: The role of attitudes and motivation*. London: Edward Arnold Publishers.

[16] *GeoGebra*, `https://www.geogebra.org/`.

[17] El Hotel Infinito de Hilbert. *Wikipedia*, `http://es.wikipedia.org/wiki/El_hotel_infinito_de_Hilbert`.

[18] Artigue, M.; Arzarello, F.; Epp, S. (2015). Goodstein Sequences: The Power of a Detour via Infinity. *Klein Project Blog*, `http://blog.kleinproject.org/?p=674`.

[19] *LOMCE: Currículo básico de ESO y Bachillerato*, `http://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf`.

[20] Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-258.

[21] Montoro, V; Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en el aprendizaje de la matemática. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 45, 357-364.

[22] Moreno-Armella, L; Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (5), 211-231.

[23] Overbay, D. (2014). In the End, It All Adds Up to $-1/12$. *The New York Times*, 3 Feb. `http://www.nytimes.com/2014/02/04/science/in-the-end-it-all-adds-up-to.html`.

[24] Penalva, C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito.* Tesis Doctoral, Universidad de Valencia.

[25] Penalva, C.; Sánchez, J. (1994). Problemática de la enseñanza de conceptos del cálculo. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,* 14/15, 25-26.

[26] Penalva, C.; Turégano, P. (1990). Alumnos universitarios ante el infinito: intuición y formalización. *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.* Sevilla. http://unesdoc.unesco.org/images/0009/000901/090151sb.pdf

[27] Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* Nueva York: Norton (libro original publicado en 1941).

[28] Polchinski, J. (1998). *String Theory. (Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String, Vol. 2: Superstring Theory and Beyond).* Cambridge University Press.

[29] *Problemas de Hilbert*, Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/Problemas_de_Hilbert.

[30] *Programa de Hilbert*, Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/Programa_de_Hilbert.

[31] *Infinitesimal*, Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal.

[32] Pynchon, T. (2006). *Against the Day.* Editorial: Penguin Press.

[33] Recio, T. (1998). *Cálculo simbólico y geométrico.* Madrid: Editorial Síntesis, 101-113.

[34] Rosas, Mercedes H. (2003). Los número de (Euler)-Catalan. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No.1, pág. 47

[35] Salat Figols, R.S. (2011). El infinito en matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, Volumen 77, pág 75-83.

[36] Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*, (1) 5-68.

[37] Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obtacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

[38] SIERPINSKA, A. (1994). *Understanding in mathematics* London: The Palmer Press.

[39] Suma de Abel. *Wikipedia*, `https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_divergente#Sumaci.C3.B3n_de_Abel`.

[40] TALL, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3/4, 49-63.

[41] TALL, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 495-511. New York: MacMillan Publishing Company.

[42] TALL, D.; SCHWARZENBERGER, R. (1978). Conflicts in the concept of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

[43] *Teoremas de incompletitud de Gödel*, Wikipedia, `http://es.wikipedia.org/wiki/Teoremas_de_incompletitud_de_Godel`.

[44] TIROSH, D.; FISCHBEIN, E.; DOR, E. (1985) The teaching of infinity. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 501-506). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, Subfaculty of Mathematics, OW & OC.

[45] TIROSH, D. (1990). Inconsistencies in students'mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

[46] TIROSH, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorial theory. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, págs. 199–214. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[47] TIROSH, D. (1999). Finite and infinite set: definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Eduation in Science and Technology,* 30, 3, págs. 341–349.

[48] VINNER, S. (1990). Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3/4, 85-98

[49] VINNER, S. (1994). Students' misconceptions and inconsistencies of thought. añadir datos de correo 9-6-15 *Proceeding of the International Congress on Mathematical Education.* 109-113.

[50] Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance á l'instruction. *Annales de Didactiques es de Sciencies Cognitives* 5. 19-36.

Anexo A

Currículo LOE

En este anexo se exponen los diferentes puntos del currículo de la LOE asociados a cada curso de la Enseñanza Obligatoria y el Bachillerato. La forma de representarlos es la siguiente:

- Sólo se exponen aquellos puntos que contienen el concepto del infinito o están relacionados con él.
- Se resaltan en negrita aquellas partes del punto asociadas a dicho concepto.
- Al final de cada punto, en cursiva, se puntualiza la relación del infinito con el punto en el que nos encontremos.

Primer Curso

-**Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. Operaciones con números decimales** (Bloque: Números). *Utilización de expresiones decimales y no exactas, infinitos decimales,...*

-Elementos básicos (Punto, **recta, semirrecta**, segmento, ángulo) para la descripción de la figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. *Diferenciación entre recta y segmento, entre lo infinito y lo finito*

Segundo Curso

-**Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes.** Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. (Bloque: Números). *Números con infinitos decimales, periódicos o no,...*

-Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: **crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad**. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. (Bloque: Funciones y gráficas). *Determinar el crecimiento/decrecimiento de una función, crecimiento/decrecimiento indefinido. Función continua en todo* phv$\mathbb{R}$.

-**Uso de las calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas**. (Bloque: Funciones y Gráficas) *Infinitos decimales y aproximación, coma flotante. Funciones con crecimiento/decrecimiento infinito, funciones continuas en todo* phv$\mathbb{R}$

Tercer Curso

-**Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.** (Bloque: Números). *Números con infinitos decimales. Transformación de un número con infinitos decimales en su fracción generatriz.*

-**Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo**. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada. (Bloque: Números). *Números con infinitos decimales: números periódicos e irracionales*

-**Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales.** (Bloque: Números). *Representación de números racionales e irracionales. Recta real: mecanismo infinito de representación de racionales e irracionales.*

-**Algunos ejemplos de irracionales:** decimales ilimitados no periódicos, radicales cuadráticos, otros de uso más frecuentes. Conocer algún procedimiento sencillo para obtenerlos. (Bloque: Números). *Decimales infinitos y no periódicos.*

-**Análisis de sucesiones numéricas.** Métodos y estrategias para buscar regularidades en sucesiones numéricas: término general. **Sucesiones recurrentes.** (Bloque: Álgebra). *Noción de sucesión, infinitos términos. Sucesión recurrente como un proceso infinito.*

-**Progresiones aritméticas y geométricas**. Término general. Suma y producto de los primeros términos. (Bloque: Álgebra). *Noción de progresión infinita.*

-**Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.** (Bloque: Álgebra). *Conjunto de infinitos números.*

-Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. (Bloque: Funciones y gráficas). *Reconocer el comportamiento de una función, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$*, comportamiento asintótico,...*

-Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. (Bloque: Funciones y gráficas). *Reconocer el comportamiento de una función, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$*, comportamiento asintótico,...*

-Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Uso del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. (Bloque: Estadística y probabilidad) *Espacio muestral infinito en geometría.*

Cuarto Curso de ESO(Opción A)

-Intervalos. Significado de diferentes formas de expresar un intervalo. (Bloque: Números). *Intervalos abiertos o cerrados, finitos o infinitos,...*

-Representación de números en la recta real. (Bloque: Números). *Representación de racionales e irracionales con infinitos decimales, recta real como conjunto geométrico infinito.*

-Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante sistemas. (Bloque: Álgebra). *Sistemas compatibles indeterminados, con infinitas soluciones; rectas paralelas.*

-Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, **gráfica** o expresión analítica. Análisis de resultados. (Bloque: Funciones y gráficas). *Interpretación de una función que tiende a infinito, continuidad o discontinuidad,...*

-Estudio, descripción y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Uso de tecnologías de la información para su análisis. (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones que crecen o decrecen indefinidamente, continuas en todo* phv$\mathbb{R}$.

Cuarto Curso de ESO(Opción B)

-Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales. (Bloque: Números). *Números con infinitos decimales, no periódicos.*

-**Representación de números en la recta real. Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo.** (Bloque: Números). *Representación de números con infinitos decimales en un objeto geométrico infinito. Intervalos abiertos y cerrados.*

-**Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso.** (Bloque: Números). *Números con infinitos decimales y su aproximación.*

-**Uso de la calculadora para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica. Cálculos aproximados.** Reconocimiento de situaciones que requieran la expresión de resultados en forma radical. (Bloque: Números). *Aproximación de números con infinitos decimales.*

-**Ecuaciones exponenciales sencillas.** (Bloque: Álgebra). *Función con crecimiento infinito. Continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$.

-**Logaritmo de un número. Propiedades de los logaritmos.** (Bloque: Álgebra)*Límite por la derecha en el* 0*. Función continua en todo* phv$\mathbb{R}$
.

-**Resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones con una incógnita. Interpretación gráfica.** Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones, presentando ordenada y claramente los planteamientos, así como los procesos seguidos para resolverlos. (Bloque: Álgebra). *Regiones no acotadas en el plano. Rectas paralelas.*

-**Interpretación de un fenómeno descrito mediante** un enunciado, tabla, **gráfica** o expresión analítica. Análisis de resultados. (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones con crecimiento o decrecimiento infinito, continuas en todo* phv$\mathbb{R}$*o no,...*

-La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. **Análisis de distintas formas de crecimiento en** tablas, **gráficas** y enunciados verbales. (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones con crecimiento o decrecimiento infinito, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$*o no, comportamiento en las asíntotas.*

-**Funciones definidas a trozos**. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones con crecimiento o decrecimiento infinito, su comportamiento en las asíntotas.*

-**Reconocimiento del crecimiento, los extremos, las discontinuidades, la periodicidad y la tendencia en gráficas.** (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones con crecimiento/decrecimiento infinito, máximos o mínimos absolutos o relativos, continuidad o no en todo* phv$\mathbb{R}$*, tendencia en las asíntotas,...*

-**Reconocimiento de otros modelos funcionales: función lineal, cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica**. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. **Uso de las tecnologías**

de la información en la representación, simulación y análisis gráfico. (Bloque: Funciones y gráficas). *Funciones con crecimiento/decrecimiento infinito, comportamiento en las asíntotas, continuas o no en* phv$\mathbb{R}$.

Matemáticas I (Modalidad de ciencias y tecnología)

-**Números reales**: necesidad de su estudio para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. **Desigualdades. Distancias en la recta real**. **Intervalos y entornos**. (Bloque: Aritmética y Álgebra)*Números muy grandes, números racionales e irracionales con infinitos decimales, recta real como objeto geométrico infinito, intervalos infinitos, intervalos abiertos,...*

-**Sucesiones numéricas. El número "e". Logaritmos decimales y neperianos.** (Bloque: Aritmética y Álgebra)*Sucesiones con infinitos términos, números con infinitos decimales,...*

-**Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado.** (Bloque: Aritmética y Álgebra)*Funciones que tienden a infinito, comportamiento asintótico,...*

-Ecuaciones de la recta. **Posiciones relativas de dos rectas.** (Bloque: Geometría)*Rectas paralelas, rectas casi paralelas que se cortan en el infinito,...*

-Plano métrico: **Paralelismo** y perpendicularidad entre rectas. Distancias entre puntos, puntos y rectas y dos rectas. Ángulo formado por dos rectas. (Bloque: Geometría)*Rectas paralelas*

-**Cónicas**. Ecuaciones y elementos de la circunferencia, elipse, **hipérbola y parábola.** (Bloque: Geometría)*Interseción de un plano con un cono. Idea de infinito al generar una hipérbola o una parábola.*

-**Función real de variable real. Definición, elementos y características de una función: Dominio, variables, recorrido,crecimiento y extremos**. Distintas formas de determinar una función. (Bloque: Análisis)*Dominio en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, crecimiento/decrecimiento infinito, ...*

-**Clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas,** valor absoluto, parte entera, trigonométricas, **exponenciales y logarítmicas**. (Bloque: Análisis)*Dominio en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, crecimiento/decrecimiento infinito, periodicidad, ...*

-**Aproximación al concepto de límite de una función. Idea intuitiva de límite finito de una función en un punto. Cálculo de límites.** (Bloque: Análisis)*Infinitos racionales e irracionales en el concepto de límite en un punto*

-**Tendencia. Asíntotas de una función: verticales (límites infinitos), horizontales (límites en el infinito).** (Bloque: Análisis) *Significado* *de "tender a"(aproximarse a un número mediante infinitos números), aproximación de una función a una asintóta,...*

-**Continuidad de una función. Discontinuidad y tipos de discontinuidad.** (Bloque: Análisis)*Función continua en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, discontinuidad no evitable de salto infinito, ...*

-Aproximación al concepto de derivada. Tasa de variación media e instantánea. (Bloque: Análisis)

-**Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica y física.** Función derivada. (Bloque: Análisis)*Recta tangente en un punto (objeto geométrico infinito),...*

-**Crecimiento y decrecimiento de una función.** Extremos relativos de una función en un intervalo. (Bloque: Análisis)*Crecimiento o decrecimiento infinito*

-**Representación gráfica de funciones elementales a partir del análisis de sus características globales: dominio, simetrías y periodicidad, puntos de corte, asíntotas, puntos singulares: máximos y mínimos, intervalos de monotonía.** (Bloque: Análisis)*Continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, comportamiento asintótico, ...*

Segundo curso de bachillerato(Modalidad de Ciencias y Tecnología) Matemáticas II

-**Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales**. El método de Gauss y la regla de Cramer. (Bloque: Álgebra Lineal)*Rango de la matriz, infinitas soluciones o no, ...*

-Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. **Obtención e interpretación de las ecuaciones de rectas y planos. Posiciones relativas entre rectas y planos.** (Bloque: Geometría)*Infinito geométrico, paralelismo, rectas que se cruzan, ...*

-**Resolución de problemas de posiciones relativas: incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.** (Bloque: Geometría)*Infinito geométrico*

-**Concepto de límite de una función. Límites laterales y su relación con el límite. Propiedades de los límites. Cálculo de límites.** (Bloque: Análisis)*Límite actual, aproximacion infinita a un número,...*

-**Asíntotas y comportamiento de la curva en relación con las asíntotas.** (Bloque: Análisis)*Comportamiento asintótico*

-**Continuidad de una función en un punto. Continuidad lateral y**

relación entre ambas. Continuidad de una función en un intervalo. **Tipos de discontinuidad.** (Bloque: Análisis)*Función continua en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, límite lateral para la continuidad lateral, ...*

-**Función derivada.** Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. (Bloque: Análisis)*Infinito acutal para la definición de derivada con el límite.*

-**Derivabilidad de una función en un punto. Derivadas laterales y su relación con la derivada. Derivabilidad y continuidad.** (Bloque: Análisis)*Infinito actual (límites)*

-**Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función: monotonía, extremos relativos y absolutos; curvatura, puntos de inflexión; representación gráfica.** (Bloque: Análisis)*Función creciente/decreciente indefinidamente*

-**Primitiva de una función e integral indefinida. Relación entre ambos conceptos. Propiedades.** (Bloque: Análisis)*Infinitas integrales indefinidas para una misma función*

-**Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva.** (Bloque: Análisis)*Suma de áreas de rectángulos cada vez más pequeños (infinitos rectángulos)*

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I

-**Caracterización de los números racionales e irracionales. El número** e**.** (Bloque: Aritmética y álgebra)*Números con infinitos decimales*

-**La recta real. El orden en** phv$\mathbb{R}$**. Conjuntos en la recta real: semirrectas, intervalos,** conjuntos acotados. (Bloque: Aritmética y álgebra)*La recta como un objeto geométrico infinito, infinitos números en la recta, intervalos,...*

-**Aproximación decimal de un número real.** Estimación, redondeo y errores. (Bloque: Aritmética y álgebra)*Aproximación de números con infinitos decimales*

-**Logaritmos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.** (Bloque: Aritmética y álgebra)*Ecuaciones que crecen muy rápidamente hacia* $\pm\infty$

-**Ecuaciones de segundo grado. Interpretación gráfica. Ecuaciones de grado superior a dos.** Factorización como recurso para resolver ecuaciones. (Bloque: Aritmética y álgebra)*Interpretación del comportamiento asintótico, crecimiento/decrecimiento infinito,...*

-**Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación según soluciones. Interpretación gráfica.** Sistemas equivalentes. Transformaciones elementales de equivalencia. Método de Gauss. (Bloque: Aritmética y álgebra)*Sistemas con infinitas soluciones*

-**Expresión de una función en forma** algebraica, por medio de tablas o **de gráficas. Aspectos globales de una función.** (Bloque: Análisis)*Función continua o no en todo* phv$\mathbb{R}$*, creciente/decreciente indefinidamente, comportamiento asintótico,...*

-**Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, periódicas, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos**. Búsqueda e interpretación de situaciones concretas. (Bloque: Análisis)*Periodicidad, funciones definidas a trozos (infinitamente), ...*

-**Idea intuitiva de límite de una función en un punto. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad.** (Bloque: Análisis)*Límite: aproximación infinita, continuidad en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no, discontinuidades infinitas,...*

-**Tendencia de una función. Asíntotas.** (Bloque: Análisis)*Monotonía de una función, comportamiento asintótico, ...*

-**Cálculo de límites de funciones sencillas. Aplicación al estudio de asíntotas y de la continuidad en un punto.** (Bloque: Análisis)*Límites en el infinito, comportamiento asintótico, ...*

-**Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica.** Función derivada. (Bloque: Análisis)*Límite en* 0*, recta tangente en el punto, ...*

-**Representación de funciones polinómicas y funciones racionales**. (Bloque: Análisis)*Monotonía, comportamiento asintótico, continuidad, ...*

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

-**Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas: Región factible**. (Bloque: Álgebra)*Franjas no acotadas, rectas paralelas,...*

-**Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función.** (Bloque: Análisis)*Función con crecimiento/decrecimiento infinito, comportamiento asintótico,...*

-**Límite de una función en un punto. Límites laterales. Propiedades. Resolución de indeterminaciones.** (Bloque: Análisis)*Límites laterales, aproximación infinita.*

-**Determinación de ramas infinitas y asíntotas de una función.** (Bloque: Análisis)*Comportamiento asintótico de una función, límite en el infinito,...*

-**Concepto de continuidad. Continuidad de una función en un punto. Continuidad de funciones definidas a trozos. Tipos de discontinuidad de una función.** (Bloque: Análisis)*Funciones continuas en todo* phv$\mathbb{R}$ *o no*

-**Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.** (Bloque: Análisis)*Discontinuidades no evitables de salto infinito, comportamiento asintótico, ...*

-**Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica.** Cálculo de derivadas de funciones elementales. (Bloque: Análisis)*Infinito actual (proceso de paso al límite)*

-**Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.** (Bloque: Análisis)*Función continua o no en todo* phv$\mathbb{R}$*, monotonía, comportamiento asintótico, ...*

-Primitiva de una función e **integral indefinida. Propiedades elementales.** (Bloque: Análisis)*Infinitas integrales indefinidas para una misma función*

-**Integral definida. Propiedades.** Regla de Barrow. **Cálculo de áreas planas.** (Bloque: Análisis)*Suma de áreas de rectángulos cada vez más pequeños, es decir, sucesión de rectángulos que tienes a infinito*