Universidad de Cantabria

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

z-ultrafiltros y compactificación de Stone-Čech

Víctor Diego Gutiérrez

Trabajo dirigido en Matemática Fundamental
por
Jesús Araujo Gómez

Santander
2 de julio de 2012

Índice

Introducción

En este trabajo abordamos la construcción de la compactificación de Stone-Čech mediante el uso de z-ultrafiltros. Esta compactificación constituye el mayor espacio compacto en el que se puede incluir de manera densa un espacio topológico con una buena separación de funciones continuas. El problema de la construcción de este espacio se puede abordar desde distintos puntos de vista, por ejemplo mediante el estudio de ideales maximales en el anillo de funciones continuas o desde el análisis de un cierto espacio topológico producto. Una tercera vía la constituye la perspectiva de los cero-conjuntos y de los z-ultrafiltros asociados. Es precisamente este procedimiento al que dedicamos nuestro estudio en estas páginas.

Este trabajo está dividido en dos partes: una primera parte dedicada a los z-ultrafiltros, y una segunda dedicada a la compactificación de Stone-Čech.

En la primera parte, partiremos de la definición de filtro en un conjunto X y, mediante el estudio de sus propiedades y definiciones adicionales, pasaremos a trabajar con z-ultrafiltros y sus propiedades. La definición de estos últimos objetos está relacionada con las funciones continuas del conjunto X; por lo tanto, necesitaremos que el conjunto X sea espacio topológico, de cuya topología dependerán en gran medida los z-ultrafiltros. El estudio de la convergencia de estos objetos nos permitirá relacionarlos con los puntos del conjunto X donde se definen; tendremos que algunos de estos z-ultrafiltros convergerán a puntos de X (éstos serán llamados z-ultrafiltros fijos); y otros de ellos no convergerán a ningún punto de X (éstos serán llamados z-ultrafiltros libres).

En la segunda parte del trabajo construiremos la compactificación de Stone-Čech. Este espacio βX será definido como el conjunto de los límites de todos los z-ultrafiltros, fijos y libres; y sobre βX se definirá una topología basada en el anillo de funciones continuas del espacio X. Esta compactificación se caracterizará por ser el único espacio topológico compacto del cual X es subespacio denso y al cual puede extenderse de manera continua (y por consiguiente única) cualquier función acotada y continua de X en $\mathbb{R}$.

1. Filtros y Ultrafiltros

1.1. Filtros, primeros pasos

Comenzaremos con las primeras definiciones y daremos ejemplos de ellas para facilitar su comprensión.

Definición 1. *Un filtro sobre un conjunto X es un subconjunto no vacío $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. *Si A y B pertenecen a $\mathfrak{F}$, entonces $A \cap B$ pertenece a $\mathfrak{F}$.*
3. *Si A pertenece a $\mathfrak{F}$, y B es un subconjunto de X que contiene a A, entonces B pertenece a $\mathfrak{F}$.*

Ejemplos 1.
1. *Dado un conjunto no vacío X, el conjunto $\{X\}$ forma un filtro sobre X.*
2. *Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$, la familia $\mathfrak{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}$ define un filtro sobre X. Comprobamos que el conjunto $\{1\}$ está contenido en todos los conjuntos del filtro, por lo tanto la intersección de dos cualesquiera de los conjuntos de $\mathfrak{F}$ no será nunca vacío. Y dado uno de los conjuntos, también están en el filtro todos los conjuntos que lo contienen.*
3. *Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real. El conjunto de todos los conjuntos que contienen al punto x forma un filtro sobre $\mathbb{R}$*

Definición 2. *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathcal{P}X$ con la propiedad de que la intersección de cualquier subfamilia finita sea no vacía. Se llama filtro generado por A al menor filtro que contiene a A. Se denota por $A\uparrow$.*

Al conjunto A se le llama generador o base del filtro.

NOTA: Si la intersección de una familia finita de conjuntos de B fuese vacía, no sería posible construir un filtro que los contenga, ya que por definición de filtro, si dos conjuntos están, entonces también está su intersección (y por inducción cualquier subfamilia finita), pero el vacío no puede estar nunca.

La base de un filtro puede ser finita o infinita; y, en ocasiones, podemos encontrarnos con que la única base de un filtro es el filtro mismo (desarrollaremos este tema más adelante). Aquí vemos algunos ejemplos:

Ejemplos 2.

1. *Dados un conjunto X y un subconjunto $A \subset X$, el filtro generado por $\{A\}$ es la familia de todos los subconjuntos de X que contienen a A.*

   En tal caso, el conjunto $\{A\}$ es generador o base del filtro.

2. *Dados dos conjuntos $A, B \subset X$ no disjuntos, el filtro generado por la familia $\{A, B\}$ es el conjunto de todos los conjuntos que contienen a A o B, o a intersecciones finitas de estos conjuntos:*

   Así pues, el conjunto $\{A, B\}$ es generador del filtro, sin embargo, existe otro generador dado por un solo elemento: $\{A, B\} \uparrow = \{A \cap B\} \uparrow$

3. *En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, consideramos el conjunto $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, siendo $C_n := \{x \in \mathbb{N}, x > n\}$. La familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que contiene a uno de los conjuntos C_n forma un filtro sobre $\mathbb{N}$.*

   Para este filtro no es posible establecer una base finita de subconjuntos de $\mathbb{N}$, y constituirá un ejemplo de lo que más adelante denominaremos filtro libre.

1.2. Orden y concepto de ultrafiltro

En esta sección estableceremos una relación de orden entre filtros y la estudiaremos con el objetivo final de obtener un filtro maximal (al cual llamaremos ultrafiltro).

Los filtros son un caso muy particular de conjuntos; por lo tanto podremos utilizar la relación de inclusión de conjuntos para definir una relación de orden entre filtros sobre un mismo conjunto X.

Definición 3. *Dados dos filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ sobre X, decimos que $\mathfrak{F}$ es menor que $\mathfrak{G}$ si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, y lo escribiremos como $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{G}$.*

Del mismo modo, si el filtro $\mathfrak{F}$ está contenido estrictamente en $\mathfrak{G}$, escribiremos $\mathfrak{F} < \mathfrak{G}$.

De este modo podemos establecer una relación de orden. Claramente, este orden no es total, ya que dados dos filtros sobre un mismo conjunto X, es posible que ni el primero esté contenido en el segundo ni el segundo esté contenido en el primero, como es el caso de $\{0\} \uparrow$ y $\{1\} \uparrow$ sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, este orden nos es suficiente para introducir sucesiones de filtros. Podemos escribir, de esta manera:

$$...\mathfrak{F}_{n-1} \geq \mathfrak{F}_n \geq \mathfrak{F}_{n+1}...$$

En las siguientes propiedades comprobaremos cómo estas sucesiones están acotadas por ambos extremos. Es decir, si dados los filtros $\mathfrak{F}_0$ y $\mathfrak{G}_0$ tratamos de construir ciertas sucesiones

$$\mathfrak{F}_0 > \mathfrak{F}_1 > ... > \mathfrak{F}_n > ...$$

$$\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_1 < ... < \mathfrak{G}_n < ...$$

nos encontraremos con que ambas están acotadas.

Proposición 1. *Dado un conjunto X, se cumple que*

1. *Para cada filtro $\mathfrak{F}$, existe un filtro $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{F}$, con la propiedad de que, para todo filtro $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$ se tiene que $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{G}$.*

2. *Para todo filtro $\mathfrak{F}$, existe un filtro $\mathfrak{U} \geq \mathfrak{F}$, con la propiedad de que, para todo filtro $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{F}$ se tiene que $\mathfrak{U} \geq \mathfrak{G}$.*

Esta proposición nos muestra la existencia de filtros maximales y minimales. Como veremos en la prueba, el filtro minimal es común a todos los filtros sobre X, por lo tanto podríamos haber enunciado el punto *1.* de la proposición en los siguientes términos:

$$Existe\ un\ filtro\ \mathfrak{T}\ sobre\ X\ tal\ que\ \mathfrak{T} \leq \mathfrak{F}\ para\ todo\ filtro\ \mathfrak{F}\ sobre\ X.$$

Sin embargo, el maximal no es único para cada filtro no maximal (de hecho, es posible que existan infinitos maximales para cada filtro no maximal).

Demostración. 1. Sea el filtro $\mathfrak{T} = \{X\}$; se tiene que para todo filtro $\mathfrak{G}$, existe un conjunto $A \subseteq X$ tal que $A \in \mathfrak{G}$. Por definición de filtro, $X \in \mathfrak{G}$; entonces tenemos que $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{G}$ o, lo que es lo mismo, $\mathfrak{T} \leq \mathfrak{G}$.

2. Sea $F[X]$ el conjunto de todos los filtros sobre un conjunto X y sea Δ un conjunto de índices totalmente ordenado. Consideremos una cadena ordenada de filtros; es decir, sea $C = \{\mathfrak{F}_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq F[X]$ un conjunto de filtros tal que si $\alpha < \beta$, entonces $\mathfrak{F}_\alpha \leq \mathfrak{F}_\beta$.

   Consideremos ahora el conjunto dado por:

$$\mathfrak{A} := \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{F}_\alpha$$

   Comprobemos que $\mathfrak{A}$ cumple las propiedades necesarias para ser un filtro:

   a) El conjunto vacío no puede estar en $\mathfrak{A}$, ya que el conjunto $\mathfrak{A}$ se define como unión de filtros, y el conjunto vacío no puede estar en ninguno de ellos.

   b) Dados dos conjuntos $A, B \in \mathfrak{A}$, por definición de $\mathfrak{A}$ se tiene que existen $\mathfrak{F}_\alpha$ y $\mathfrak{F}_\beta$ tales que $A \in \mathfrak{F}_\alpha$ y $B \in \mathfrak{F}_\beta$. Como la cadena C está totalmente ordenada, se tiene que $A, B \in \mathfrak{F}_\gamma$, siendo $\gamma := \text{máx}\{\alpha, \beta\}$. Entonces, por ser $\mathfrak{F}_\gamma$ filtro, se tiene que $A \cap B \in \mathfrak{F}_\gamma$, y, por lo tanto, $A \cap B \in \mathfrak{A}$.

   c) Sean los conjuntos $A \in \mathfrak{A}$ y $B \subset X$ tales que $A \subseteq B$. Se tiene que existe un filtro $\mathfrak{F}_\alpha \in C$ tal que $A \in \mathfrak{F}_\alpha$. Por ser $\mathfrak{F}_\alpha$ filtro, se tiene que el conjunto B pertenece a $\mathfrak{F}_\alpha$, luego $B \in \mathfrak{A}$.

   Mediante estas tres propiedades, se tiene que la familia de conjuntos $\mathfrak{A}$ es un filtro sobre X. Además, por construcción, contiene a todos los filtros de la cadena C, por lo tanto, es una cota superior de la cadena.

   Tenemos entonces que, el conjunto $F[X]$ de todos los filtros en X es un conjunto parcialmente ordenado y que toda cadena de filtros tiene una cota superior. Por lo tanto, estamos en situación de aplicar el lema de Zorn: Para todo conjunto no vacío X, existe al menos un filtro maximal en X.

   Esto prueba la existencia de algún filtro maximal en X; ahora bien, esto es tan solo una parte del resultado buscado. Lo que afirmamos en la proposición es que para todo filtro $\mathfrak{F}$ y toda sucesión ascendente comenzada en él, esta sucesión está acotada por un filtro maximal; es decir, que todo filtro se encuentra contenido en un filtro maximal.

Para probar esto, consideremos $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X y S el conjunto de todos los filtros que contienen a $\mathfrak{F}$. Por el mismo razonamiento anterior, se prueba que toda cadena ascendente en S está acotada por el filtro resultante de la unión. Por lo tanto, usando el lema de Zorn, concluimos que el conjunto S tiene al menos un elemento maximal. Llamémosle $\mathfrak{M}$.

Tan solo nos resta probar que el filtro $\mathfrak{M}$ es también elemento maximal de $F[X]$. Supongamos que $\mathfrak{M}'$ es un filtro en X tal que $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}'$. Se tiene entonces que $\mathfrak{M}'$ es mayor que el filtro $\mathfrak{F}$ y por lo tanto $\mathfrak{M}' \in S$. El filtro $\mathfrak{M}$ es maximal en S, por lo que se tiene que $\mathfrak{M}' \leq \mathfrak{M}$, luego $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$.

Así, queda probado que todo filtro está contenido en al menos un filtro maximal. Y equivalentemente, la sucesión $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_1 < ... < \mathfrak{G}_n < ...$ está acotada.

□

Definición 4. *1. Al filtro minimal dado en el punto* 1. *de la proposición anterior, lo llamaremos filtro trivial.*

2. A cualquier filtro maximal dado en el punto 2. *de la proposición anterior, lo llamaremos ultrafiltro.*

Los ultrafiltros (y, como veremos más adelante, los z-ultrafiltros) son un concepto fundamental dentro de la materia que vamos a trabajar. Por lo tanto es importante su comprensión como objeto propio y como herramienta. Para hacer un poco más manejable y facilitar este concepto, enunciamos el siguiente resultado, el cual nos muestra una caracterización de ultrafiltros sobre X.

Proposición 2. *Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es ultrafiltro si y sólo si dado un conjunto $A \subseteq X$ cualquiera, o bien $A \in \mathfrak{F}$ o bien $A^c \in \mathfrak{F}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro sobre X, y sea A un subconjunto de X tal que $A \notin \mathfrak{F}$. Si existiese el filtro generado por $\mathfrak{F} \cup \{A\}$ sería estrictamente mayor que $\mathfrak{F}$, pero $\mathfrak{F}$ es maximal. Existe por tanto una familia finita de conjuntos $\{B_1, ..., B_n\} \subset \mathfrak{F}$ de intersección no vacía tal que $B_1 \cap ... \cap B_n \cap A = \emptyset$, luego $\bigcap_{i=1}^n B_i \subseteq A^c$. Y de la definición de filtro, se deduce que $A^c \in \mathfrak{F}$.

$\Leftarrow$) Sea ahora un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X tal que, dado $A \subseteq X$, o bien A o bien A^c pertenece a $\mathfrak{F}$. Supongamos que existe un filtro $\mathfrak{G}$ que contiene estrictamente a $\mathfrak{F}$, entonces existe $B \subset X$ tal que $B \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{F}$. Tenemos entonces por hipótesis que $B^c \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$; luego $\emptyset = B \cap B^c \in \mathfrak{G}$. No puede, por tanto, existir ningún filtro que contenga estrictamente a $\mathfrak{F}$. $\square$

Corolario 1. *Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, y un elemento $x \in X$, se tiene que el filtro $\{x\} \uparrow$ es ultrafiltro.*

Al filtro dado en el corolario anterior lo llamaremos ultrafiltro principal de x sobre X.

Debemos notar que, para un conjunto X suficientemente interesante (en los siguientes ejemplos veremos qué queremos decir exactamente con esto), todo filtro no maximal está contenido en infinitos ultrafiltros.

Ejemplos 3.

1. *En el conjunto $X = \mathbb{R}$, considerar el filtro $\{(0,1)\} \uparrow$. Este filtro sobre $\mathbb{R}$ está contenido en todos los ultrafiltros principales $\{x\} \uparrow$ con $x \in (0,1)$.*

2. *Tomemos el conjunto $X = \mathbb{N}$ de los naturales. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $A_k = \{n : n > k\}$ de los números mayores que k. Consideramos ahora los conjuntos $B_m = \{A_k : k \leq m\}$.*

   Tenemos entonces que $B_1 \uparrow < B_2 \uparrow < ... < B_m \uparrow < ...$ todos ellos filtros sobre $\mathbb{N}$, y cada uno de ellos está contenido infinitos ultrafiltros.

   Lo que estamos haciendo con estos filtros es construir una sucesión creciente de filtros añadiendo más conjuntos a cada generador. En cada uno de los filtros existen infinidad de ultrafiltros principales (y no principales), como por ejemplo, para $B_m \uparrow$

   $$B_m \uparrow < \{m+1\} \uparrow, \{m+2\} \uparrow ...$$

   donde cada $\{m+1\} \uparrow, \{m+2\} \uparrow ...$ es ultrafiltro principal.

   Sin embargo, ni tan siquiera el "límite" $\mathfrak{F}$ de esta sucesión es un ultrafiltro, ya que ninguno de los conjuntos A_k está contenido en el conjunto de los pares ni en el de los impares. Por lo tanto $\mathfrak{F}$ no es un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$.

   De hecho, se tiene que $\{A_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{2n : n \in \mathbb{N}\} \uparrow$ es un filtro mayor que cualquiera de los anteriores y, sin embargo, continúa sin ser un ultrafiltro.

Proposición 3. *Dado un conjunto X y un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, se tiene que $\mathfrak{F}$ es igual a la intersección de todos los ultrafiltros mayores que él.*

Demostración. Sea un conjunto $A \in \mathfrak{F}$. Sea la familia $\{\mathfrak{U}_i : i \in I\}$ de los ultrafiltros mayores que $\mathfrak{F}$. Tenemos que $A \in \mathfrak{U}_i$, para todo $i \in I$, luego $A \in \bigcap_{i_I} \mathfrak{U}_i$.

Por otro lado, sea $A \in \bigcap_{i_I} \mathfrak{U}_i$. Entonces, tenemos que $A^c \notin \mathfrak{U}_i$ para todo $i \in I$, luego $A^c \notin \mathfrak{F}$. Supongamos que $A \notin \mathfrak{F}$, podemos considerar entonces el filtro generado por A^c y por $\mathfrak{F}$. Existirá por tanto un ultrafiltro $\mathfrak{U}_0$ tal que contenga a dicho filtro. Este ultrafiltro $\mathfrak{U}_0$ contiene a $\mathfrak{F}$, sin embargo $A \notin \mathfrak{U}_0$. Esta contradicción nos muestra que $A \in \mathfrak{F}$.

□

2. Cero-conjuntos, z-filtros y z-ultrafiltros

2.1. Cero-conjuntos

Hasta ahora hemos estudiado los filtros y ultrafiltros sobre un conjunto X cualquiera, sin mayor requerimiento que sea una familia de subconjuntos de X. En este nuevo capítulo introduciremos el concepto de cero-conjunto, que nos servirá para trabajar con una clase específica de ultrafiltros: los z-ultrafiltros.

A lo largo de este capítulo y, en general, en lo que resta de documento, supondremos que el conjunto X está dotado de una topología; y denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de funciones continuas definidas de X en $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{C}^*(X)$ al conjunto de funciones acotadas.

Definición 5. *Dados un espacio X y una función $f \in \mathcal{C}(X)$, se llama cero-conjunto de f al conjunto $f^{-1}(0)$, y se escribe $Z(f)$.*

Más en general, un conjunto $A \subset X$ es un cero-conjunto si es el cero-conjunto de alguna función continua.

Al conjunto de todos los cero-conjuntos de un espacio X lo denotaremos por $Z[X]$; claramente, está formado por conjuntos cerrados.

Para cualquier espacio X, sabemos que $\emptyset$ y X están en $Z[X]$, ya que provienen de cualquier función no nula en ningún punto y de la función nula respectivamente, con independencia de la topología considerada en X.

También se tiene que cualquier cero-conjunto es el cero-conjunto de una función cuya imagen está contenida en $[0,1]$, ya que dada una función $f \in \mathcal{C}(X)$, podemos considerar $g = \min\{|f(x)|, 1\}$. Puede comprobarse fácilmente que $Z(f) = Z(g)$, y que $g(X) \subset [0,1]$.

La propiedad de cero-conjunto se mantiene por uniones e intersecciones finitas; es decir, la unión y la intersección finitas de cero-conjuntos es también un cero-conjunto. Ésto se deduce del siguiente resultado, cuya prueba es sencilla.

Proposición 4. *Dados $Z(f)$ y $Z(g)$ cero-conjuntos de las funciones f y g, se tiene:*

$$Z(f) \cup Z(g) = Z(fg)$$

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(|f| + |g|)$$

Esto implica que tanto la unión como la intersección finitas de cero-conjuntos es también un cero-conjunto.

NOTA: Debemos observar que la función que caracteriza la intersección de cero-conjuntos es $|f| + |g|$, y no simplemente $f + g$; en otro caso, en la suma de las funciones f y g podrían producirse falsos ceros; es decir, ceros que aparecen en la suma pero no en las funciones sumadas.

En el caso de la intersección, también se mantiene la propiedad por intersecciones numerables de cero-conjuntos. Todo esto queda ilustrado en los siguientes ejemplos:

Ejemplos 4. *1. Tomemos el caso $X = \mathbb{R}$, podemos estudiar los siguientes casos:*

a) $Z(0) = \mathbb{R}$

b) $Z(x) = Z(x^n) = Z(nx) = \{0\}$ *para* $n > 0$.

c) *$Z(x - x_0) = \{x_0\}$ para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.*

2. *Sean $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = -x^2 + 1$ funciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, cuyos cero-conjuntos son $Z(f) = Z(g) = \{-1, 1\}$. Por la propiedad anterior, podemos calcular el cero-conjunto intersección de $Z(f)$ y $Z(g)$ como:*

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(|f| + |g|) = Z(2|f|) = Z(|f|) = \{-1, 1\}$$

Si tratásemos de obviar los valores absolutos en la proposición anterior, nos encontraríamos ante:

$$Z(f) \cap Z(g) \neq Z(f + g) = Z(0) = \mathbb{R},$$

lo cual prueba la necesidad de los valores absolutos para este resultado mencionados en la nota anterior.

3. *Cualquier intervalo cerrado $C = [a, b]$ en $\mathbb{R}$ es siempre un cero-conjunto:*

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & si\ x < a \\ 0 & si\ x \in C \\ x - b & si\ x > b \end{cases} \tag{1}$$

4. *Sea $\{Z(f_1), ..., Z(f_n), ...\}$ una familia numerable de cero-conjuntos de funciones ajustadas a $[0, 1]$. Podemos demostrar que la intersección numerable de esta familia es también cero-conjunto, en particular de la función*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$$

Comprobamos que la serie es de términos no negativos y está acotada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ la cual sabemos convergente, luego nuestra función $g(x)$ converge uniformemente y, en consecuencia, es continua. Además cumple que $Z(g) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z(f_n)$.

2.2. z-filtros

Ahora que conocemos lo que son los cero-conjuntos y su estrecha relación con las funciones continuas, podemos dar la definición de z-filtro de manera análoga a la de filtro. Podemos verlo como un caso particular de filtro; sin embargo es un caso muy especial, ya que nos permitirá establecer una relación entre un conjunto X dotado de una familia de filtros y ultrafiltros con el anillo $\mathcal{C}(X)$ de las funciones continuas.

A partir de este capítulo, supondremos que el espacio topológico X es completamente regular. Habrá ciertas ocasiones en las que no nos sea totalmente imprescindible, pero sí en general; de hecho, veremos algunos ejemplos ilustrando la necesidad de esta hipótesis para algunos de los resultados. Recordemos brevemente la definición de espacio completamente regular:

Definición 6. *Un espacio topológico X se dice completamente regular si dados un conjunto cerrado $C \subset X$ y un punto $x \in X$ no perteneciente a C, existe una función continua*

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(C) = 1$.

En ejemplos puntuales estudiaremos también propiedades para X espacio no completamente regular.

Comencemos con la definición de z-filtro.

Definición 7. *Un z-filtro sobre un espacio X es un subconjunto no vacío $\mathfrak{F}$ de $Z[X]$ que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
2. *Si A y B pertenecen a $\mathfrak{F}$, entonces $A \cap B$ pertenece a $\mathfrak{F}$.*
3. *Si A pertenece a $\mathfrak{F}$, y B es un cero-conjunto que contiene a A, entonces B pertenece a $\mathfrak{F}$.*

Cuando hablábamos de cero-conjuntos, sabíamos que no todo subconjunto de X es un cero-conjunto; pero, obviamente, todo cero-conjunto es un subconjunto de X. En el caso de los filtros y z-filtros, no tenemos ninguna de las dos inclusiones:

Así, si tomamos el conjunto $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y el filtro $\mathfrak{F} = (0,1) \uparrow$, tenemos que $(0,1) \in \mathfrak{F}$, pero el conjunto $(0,1)$ no es un cero-conjunto por ser abierto. Por lo tanto $\mathfrak{F}$ no es un z-filtro.

Por otro lado, si tomamos un espacio X (no completamente regular) tal que exista un subconjunto propio A cuyo complementario tenga al menos dos elementos, podemos definir la topología $\tau = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ en X. En esta topología, el conjunto $Z(X) = \tau$. Claramente, la familia $\{A, X\}$ es un z-filtro; sin embargo, existe un conjunto $B \subset X$ tal que $A \subsetneq B \subsetneq X$, luego $\{A, X\}$ no es un filtro.

Estas diferencias se deben, esencialmente, a que los cero-conjuntos y z-filtros dependen de la topología dada en X. A pesar de esto, dado $\mathfrak{F}$ un filtro, es posible encontrar una topología en X en la que $\mathfrak{F}$ sea un z-filtro. Esto se hace evidente si pensamos que con la topologia $\tau = \mathcal{P}(X)$ todas las funciones definidas de X en $\mathbb{R}$ son continuas, luego todo subconjunto de X es cero-conjunto; y, por consiguiente, el conjunto de filtros coincide con el de z-filtros.

También podemos comprobar que esta es la única topología en la que coinciden estos conceptos; ya que si consideramos el filtro $\{X \setminus \{a\}, X\}$ y le exigimos que sea z-filtro, necesariamente el conjunto $X \setminus \{a\}$ va a ser cero-conjunto, luego el conjunto $\{a\}$ va a ser abierto en X. Como el proceso puede repetirse para todo $a \in X$, concluimos que se trata de la topología discreta.

Al igual que hacíamos con los filtros, establecemos una relación de orden parcial entre z-filtros: un z-filtro $\mathfrak{F}$ es mayor que otro $\mathfrak{G}$ si y sólo si $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$; y lo escribimos $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$.

Y, del mismo modo, usamos esto para introducir el concepto de z-ultrafiltro como z-filtro maximal por la relación de orden $\leq$ aquí mencionada.

De aquí deducimos que, al igual que ocurría en el caso de los filtros, todo z-filtro está contenido en al menos un z-ultrafiltro.

Otros conceptos que se definen de manera análoga son los de conjunto generador, y z-filtro generado. Dada una familia A de cero-conjuntos en X con la propiedad de intersección finita no vacía, llamamos z-filtro generado por A al menor z-filtro $\mathfrak{F}$ que contiene a la familia A, y lo escribimos $A \uparrow_z$. A la familia A se la llama generador o base de $\mathfrak{F}$.

Habiendo mencionado estas primeras propiedades básicas de los z-filtros, y de su relación tanto con el espacio topológico X como con los filtros sobre X, damos paso a los primeros resultados:

Proposición 5. *1. Dado un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, la familia de conjuntos definida como $\mathfrak{F}_z := \{F \in Z[X] : F \in \mathfrak{F}\}$ es un z-filtro en X.*

2. Todo z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es generador de algún filtro en X.

3. Dado un filtro $\mathfrak{F}$ en X, se tiene que $\mathfrak{F}_z \uparrow \leq \mathfrak{F}$.

Demostración. 1. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X, debemos comprobar que la familia $\mathfrak{F}_z := \{F \in Z[X] : F \in \mathfrak{F}\}$ cumple las propiedades de la definición de z-filtro.

Por construcción, todo elemento de $\mathfrak{F}_z$ es un cero-conjunto; y $\emptyset \notin \mathfrak{F}_z$, ya que $\mathfrak{F}_z \subseteq \mathfrak{F}$, y $\mathfrak{F}$ es un filtro.

Del mismo modo, dados dos cero-conjuntos A y B de $\mathfrak{F}_z$, su intersección está en $\mathfrak{F}$ por ser $\mathfrak{F}$ un filtro, y es un cero-conjunto por ser intersección de dos cero-conjuntos.

Y por un razonamiento análogo, todo cero-conjunto que contiene a un elemento de $\mathfrak{F}_z$, está en $\mathfrak{F}_z$ por estar también en $\mathfrak{F}$. Luego queda probado que $\mathfrak{F}_z$ es un z-filtro sobre X.

2. Por ser $\mathfrak{F}$ z-filtro en X, tenemos que la intersección de toda subfamilia finita de elementos de $\mathfrak{F}$ es no vacía. Por lo tanto, forma una familia generadora de algún filtro sobre X.

3. De los puntos 1. y 2., tenemos la existencia del filtro $\mathfrak{F}_z \uparrow$. Para comprobar que es menor que $\mathfrak{F}$, es suficiente ver que todo elemento de $\mathfrak{F}_z$ es también elemento de $\mathfrak{F}$; de este modo, quedaría probado que el menor filtro que contiene a $\mathfrak{F}_z$, estaría también formado por elementos de $\mathfrak{F}$.

Todo ello se deduce claramente del hecho de que $\mathfrak{F}_z = \mathfrak{F} \cap Z[X]$.

□

Ejemplos 5. *Supongamos ahora un esapcio no completamente regular X, comprobaremos que si $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro sobre X, el filtro $\mathfrak{F} \uparrow$ no es necesariamente un ultrafiltro.*

Considerar $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$. En este espacio la familia de conjuntos cerrados coincide precisamente con la de abiertos. Se tiene además que todos ellos son cero-conjuntos, por ser los cero-conjuntos de las funciones χ_X, $\chi_{\{c,d\}}$, $\chi_{\{a,b\}}$ y $\chi_\emptyset$ respectivamente (se comprueba que son continuas todas ellas).

Sobre este espacio topológico consideremos el z-ultrafiltro $\mathfrak{F} = \{a, b\} \uparrow_z = \{\{a, b\}, X\}$. Tenemos sin embargo que el filtro generado por $\mathfrak{F}$ no es un ultrafiltro.

2.3. z-ultrafiltros: caracterización y separabilidad

De la misma manera que, en el capítulo anterior, dimos una caracterización de los ultrafiltros sobre X, la siguiente proposición nos muestra otra caracterización distinta de los z-ultrafiltros.

Proposición 6. *Un z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es un z-ultrafiltro si y sólo si, para todo cero-conjunto A tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathfrak{F}$, se tiene que $A \in \mathfrak{F}$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Suponer $\mathfrak{F}$ z-ultrafiltro sobre X y A cero-conjunto con $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathfrak{F}$. Consideremos el z-filtro $\mathfrak{G}$ generado por la familia $\{A \cap B : B \in \mathfrak{F}\}$. Tenemos que $A \in \mathfrak{G}$ por ser un cero-conjunto que contiene a elementos de $\mathfrak{G}$; y que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, ya que todo elemento B de $\mathfrak{F}$ contiene al elemento $A \cap B$ de $\mathfrak{G}$. Por maximalidad del z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$, sabemos que $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}$, luego $A \in \mathfrak{F}$.

$\Leftarrow$) Para esta implicación, tomaremos un z-filtro $\mathfrak{G}$ cualquiera, tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ y, usando la hipótesis, probaremos que $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$, lo que probará que $\mathfrak{F}$ es maximal. Veámoslo:

Sea $A \in \mathfrak{G}$, como $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, tenemos que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathfrak{F}$. Entonces, por hipótesis, $A \in \mathfrak{F}$, luego $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$. □

Esta caracterización es distinta a la que dábamos de los ultrafiltros. Sin embargo, esto no debe hacernos pensar que los conceptos de ultrafiltro y z-ultrafiltro están muy alejados. De hecho, podríamos escribir la caracterización de ultrafiltro en los siguientes términos:

Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X es un ultrafiltro si y sólo si para todo conjunto A tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathfrak{F}$, se tiene que $A \in \mathfrak{F}$.

La prueba de este último resultado no la escribiremos, ya que es análoga a la demostración anterior. El motivo de dar dos caracterizaciones distintas no es otro que el de no limitar nuestra percepción de estos objetos y poder contar con más herramientas, las cuales nos serán útiles en el futuro.

Ejemplos 6. *1. Si consideramos en $\mathbb{N}$ la topología discreta, se tiene que todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es abierto, y por consiguiente, también cerrado. Luego sobre este espacio topológico, todo filtro (o, respectivamente, ultrafiltro) es z-filtro (o z-ultrafiltro respectivamente).*

2. Dados un espacio X y un elemento $x \in X$, la familia de todos los cero-conjuntos que contienen a x es un z-ultrafiltro; y, al igual que en el caso de los ultrafiltros, se llama z-ultrafiltro principal de x sobre X y lo escribiremos como $\{x\} \uparrow_z$. Comprobémoslo:

Probemos que es z-filtro mediante un rápido repaso de las tres condiciones de la definición:

- a) *No contiene al vacío, ya que todos los elementos de $\{x\} \uparrow_z$ son cero-conjuntos que contienen al menos al punto x.*
- b) *Dados dos cero-conjuntos A y B, se tiene que el conjunto $A \cap B$ es un cero-conjunto por ser intersección de dos cero-conjuntos, y que pertenece a $\{x\} \uparrow_z$, ya que $x \in A \cap B$.*
- c) *Dado un cero-conjunto A que contenga a uno cualquiera de los cero-conjuntos de $\{x\} \uparrow_z$, se tiene que el conjunto A también contiene a x.*

Con esto queda probado que $\{x\} \uparrow_z$ es z-filtro. Para ver que además es z-ultrafiltro, supongamos que existe un z-filtro $\mathfrak{F}$ que contiene a $\{x\} \uparrow_z$. Existe entonces una función $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $A = Z(f) \in \mathfrak{F}$. Consideremos ahora la función $f_x(t) = f(t) - f(x)$. Tenemos que $x \in Z(f_x)$, luego $Z(f_x) \in \{x\} \uparrow_z \subseteq \mathfrak{F}$ y, por tanto, $Z(f) \cap Z(f_x) \neq \emptyset$. Tomemos entonces un elemento $y \in Z(f) \cap Z(f_x)$; se sigue que

$$0 = f_x(y) = f(y) - f(x) = 0 - f(x)$$

Deducimos por tanto que $x \in Z(f) = A$, luego $A \in \{x\} \uparrow_z$.

3. *Consideremos el espacio X dotado de una topología suficientemente gruesa como para que los conjuntos unipuntuales no sean cerrados.*

   Supongamos que el conjunto $\{x, y\}$ es cerrado. Se tiene entonces que los z-ultrafiltros principales $\{x\} \uparrow_z$ e $\{y\} \uparrow_z$ son exactamente el mismo z-ultrafiltro, que coincide teambién con $\{x, y\} \uparrow_z$.

   En general, para que dos z-ultrafiltros principales $\{x\} \uparrow_z$ e $\{y\} \uparrow_z$ coincidan, es necesario y suficiente que $x \in cl\{y\}$ y que $y \in cl\{x\}$, donde clA denota la clausura de un conjunto A en X.

Ahora que sabemos reconocer y usar z-ultrafiltros, vamos a mostrar el siguiente resultado:

Proposición 7. *Dada $\{\mathfrak{U}_n\}$ una familia finita de z-ultrafiltros en X, existe una familia $\{A_n\}$ de cero-conjuntos disjuntos dos a dos tales que $A_n \in \mathfrak{U}_n$ para cada n.*

La demostración de esta proposición la dividiremos en dos pasos. En el primero, lo probaremos para familias de exactamente dos z-ultrafiltros como consecuencia de la caracterización de z-ultrafiltros dada en la proposición anterior. El resto de casos los probaremos por inducción sobre el número de z-ultrafiltros en la familia.

Demostración. Sean $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$ z-ultrafiltros distintos sobre X. Por ser distintos, debe existir o bien $A_1 \in \mathfrak{U}_1 \setminus \mathfrak{U}_2$ o bien $A_2 \in \mathfrak{U}_2 \setminus \mathfrak{U}_1$. Sin pérdida de generalidad, supondremos la existencia de A_1. Por la caracterización anterior de z-ultrafiltro, tenemos que el conjunto A_1 no interseca a todos los elementos de $\mathfrak{U}_2$; por lo tanto, existe un conjunto $B \in \mathfrak{U}_2$ disjunto con A_1. Los conjuntos A_1 y B cumplen las condiciones buscadas.

Supongamos ahora que la tesis se cumple para una familia $\{\mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_n\}$ de n z-ultrafiltros, con la familia de cero-conjuntos $\{A_1, ..., A_n\}$. Y supongamos que tenemos un z-ultrafiltro $\mathfrak{U}_{n+1}$ distinto de cada uno de los z-ultrafiltros anteriores. Dado que el resultado se cumple para $n = 2$, sabemos que existen cero-conjuntos disjuntos B_k y C_k en $\mathfrak{U}_k$ y $\mathfrak{U}_{n+1}$ respectivamente, para cada $k = 1, ..., n$. Sean entonces los cero-conjuntos $A'_k = A_k \cap B_k$ y $C = \bigcap_{k=1}^n C_k$; se comprueba que la familia $\{A_1', ..., A'_n, C\}$ cumple el resultado buscado para los z-ultrafiltros $\{\mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_{n+1}\}$. $\square$

Este último resultado, que en principio podría parecer meramente anecdótico, nos será de vital importancia en el siguiente capítulo, en el cual pasaremos a definir y calcular el límite de cada z-ultrafiltro en X. Y, más adelante, usaremos todo esto para establecer una relación entre el conjunto de los z-ultrafiltros y el conjunto X para construir la compactificación de X. Esta proposición nos será fundamental para probar la propiedad de la biyectividad de esta relación.

3. Puntos adherentes y límites

3.1. Puntos adherentes y límites

Durante los dos capítulos anteriores, hemos trabajado para llegar al concepto de z-ultrafiltro; sabemos reconocerlo y usarlo con cierta facilidad. A partir de este punto, trataremos de usarlo como herramienta para construir la compactificación de Stone-Čech. Esto lo haremos por medio del límite de cada z-ultrafiltro.

Comenzaremos este nuevo capítulo definiendo los conceptos de punto adherente y punto límite respecto a un filtro.

Para estos nuevos conceptos, necesitaremos hablar de la clausura de los subconjuntos en X, por lo tanto, al igual que en el capítulo 2, supondremos siempre el conjunto X dotado de una topología completamente regular (salvo mención expresa de lo contrario).

Definición 8. *1. Se dice que $x \in X$ es punto adherente a un filtro $\mathfrak{F}$ si está en la clausura de todos los conjuntos del filtro.*

2. Se dice que $x \in X$ es punto límite del filtro $\mathfrak{F}$ si todo entorno de x contiene algún elemento de $\mathfrak{F}$. Tal $\mathfrak{F}$ se dirá convergente a x.

3. Si un filtro no tiene puntos adherentes, decimos que es un filtro libre.

4. A los filtros no libres, se les llama filtros fijos.

Estos cuatro conceptos definidos aquí para el caso general de los filtros, se generalizan de forma natural a z-filtros (y en consecuencia, a ultrafiltros y z-ultrafiltros). Así, podemos hablar de punto adherente a un z-ultrafiltro, límite de un ultrafiltro, z-filtros libres...

Ejemplos 7. *1. El ejemplo 2.3 constituye un caso de filtro libre. En él, mencionábamos el filtro generado por la familia de conjuntos* $C_n := \{x \in \mathbb{N} : x > n\}$ *(llamémosle* $\mathfrak{F}$*). Si consideramos la topología discreta en* $\mathbb{N}$*, nos encontramos con que todo subconjunto de* $\mathbb{N}$ *es cerrado, luego podemos asegurar que todo conjunto del filtro es igual a su clausura. Podemos comprobar que la intersección de todos los elementos del filtro es vacía. Por lo tanto, no existe ningún punto común a la clausura de todos y cada uno de los conjuntos del filtro. Se trata de un filtro libre.*

2. Si consideramos el filtro $\mathfrak{G}$ *sobre* $\mathbb{N}$ *con la topología discreta generado por* $\{\{1, 2, 3\}\}$*, comprobamos que los únicos puntos adherentes son el* 1*, el* 2 *y el* 3*. Este filtro es un filtro fijo.*

Vamos a mencionar una de las primeras propiedades sobre puntos adherentes:

Proposición 8. *Dados los filtros* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathfrak{G}$ *sobre* X*, si* $\mathfrak{F} \geq \mathfrak{G}$*, entonces los puntos adherentes de* $\mathfrak{F}$ *son también puntos adherentes de* $\mathfrak{G}$*.*

Demostración. Sean los filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ sobre X con la propiedad de que $\mathfrak{F} \geq \mathfrak{G}$, es decir, $\mathfrak{G}$ está contenido en $\mathfrak{F}$. Dado un punto $p \in X$ adherente a $\mathfrak{F}$ sabemos que está en la clausura de cada conjunto de $\mathfrak{F}$. Y como $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$, p también es adherente a cada conjunto de $\mathfrak{G}$.

□

Si retomamos los filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ dados en los ejemplos anteriores a este resultado, podemos añadir:

Todo filtro que contenga al filtro $\mathfrak{F}$ será también un filtro libre; en particular, todos los ultrafiltros que contienen a $\mathfrak{F}$ son libres. Esto es equivalente a decir que no existe $x \in X$ tal que $\mathfrak{F} \leq \{x\} \uparrow$, pero de esto ya hablaremos en las siguientes proposiciones.

Todo filtro contenido en el filtro $\mathfrak{G}$ es también un filtro fijo; y, ademas, su conjunto de puntos adherentes será un subconjunto no vacío de $\{1, 2, 3\}$.

Vamos a tratar de enfocar nuestro trabajo hacia los z-filtros y z-ultrafiltros; por lo tanto, vamos a dar estas caracterizaciones de punto adherente y punto límite para z-filtros.

Proposición 9. *Dados un espacio X, un punto $x \in X$ y un z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, son equivalentes:*

1. *El punto x es adherente a $\mathfrak{F}$.*
2. *El punto x pertenece a la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{F}$.*
3. $\mathfrak{F} \leq \{x\} \uparrow_z$

De los puntos 1. y 3. de esta proposición, deducimos que un filtro tiene al menos tantos puntos adherentes como z-ultrafiltros principales lo contienen. Sin embargo, puede que haya un número estrictamente mayor de puntos adherentes que de z-ultrafiltros principales, ya que, como vimos en el ejemplo 5.3. del capítulo 2, dos puntos distintos pueden generar el mismo z-ultrafiltro (esto depende únicamente de la topología definida en X).

Demostración. 1. $\Longleftrightarrow$ 2. Como $\mathfrak{F}$ es un z-filtro, todos sus elementos son cero-conjuntos y, por lo tanto, conjuntos cerrados. Luego la clausura de cada elemento es el elemento mismo. De este modo, un punto x es adherente si y sólo si pertenece a todos los conjuntos de $\mathfrak{F}$. O equivalentemente, si x pertenece a la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{F}$.

2. $\Longrightarrow$ 3. El z-ultrafiltro $\{x\} \uparrow_z$ es exactamente la familia de todos los cero-conjuntos que contienen a x. Por lo tanto, si x está en la intersección de todos los elementos de $\mathfrak{F}$, entonces $\mathfrak{F}$ está contenido en $\{x\} \uparrow_z$. O equivalentemente, $\mathfrak{F} \leq \{x\} \uparrow_z$.

3. $\Longrightarrow$ 1. Tenemos que $\mathfrak{F} \leq \{x\} \uparrow_z$ y, claramente, x es punto adherente de $\{x\} \uparrow_z$. Por la proposición 8, deducimos que x es también punto adherente de $\mathfrak{F}$.

□

El siguiente lema nos servirá para facilitarnos las pruebas de algunos resultados.

Lema 1. *Sea el espacio X. Entonces, para cada punto en X existe una base de entornos formada por cero-conjuntos.*

Demostración. Sean $x \in X$ un punto en el espacio y β_x la familia de todos los cero-conjuntos que son entornos de x. Consideremos un entorno V de x (el cual podemos suponer abierto). Tenemos entonces que $X \setminus V$ es un conjunto cerrado que no contiene a x. Como X es completamente regular, existe una función

$$f : X \longrightarrow [0, 1]$$

tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) = \{1\}$. De aquí obtenemos que:

1. $f^{-1}[0, 1/2]$ y $f^{-1}[0, 1/2)$ son entornos de x cerrado y abierto respectivamente. Se tiene que $x \in f^{-1}[0, 1/2) \subset f^{-1}[0, 1/2]$.
2. $f^{-1}[0, 1/2]$ es un cero-conjunto. Para comprobar esto, consideremos la función $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

   Se tiene entonces que $Z(g \circ f) = f^{-1}[0, 1/2]$.
3. $f^{-1}[0, 1/2] \subseteq V$.
   Para verificar esto, debemos fijarnos en que $(X \setminus V) \cap f^{-1}[0, 1/2] = \emptyset$.

Por lo tanto, para todo entorno abierto V de x, podemos construir un cero-conjunto entorno de x que está contenido en V. $\square$

NOTA: De hecho, se tiene que un espacio X es completamente regular, si y sólo si todo punto tiene una base de entornos cero-conjuntos [GJ, Teorema 3,2].

Proposición 10. *Dados un espacio completamente regular X, un punto $x \in X$ y un z-filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{F}$ converge a x.*

2. *Todo entorno de x contiene a algún elemento de $\mathfrak{F}$.*
3. *Todo entorno de x que sea cero-conjunto pertenece a $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Sabemos que los puntos 1. y 2. son equivalentes por la definición de convergencia de un z-filtro. Probemos ahora la equivalencia con el punto 3..

2. $\Longrightarrow$ 3. Sea Z cero-conjunto en X entorno de x. Por hipótesis, existe algún $Z' \in \mathfrak{F}$ contenido en Z. Concluimos que Z pertenece también a $\mathfrak{F}$.

3. $\Longrightarrow$ 2. Sea U un entorno de x. Existe entonces una función continua $f \in \mathcal{C}(X), [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(U^c) \equiv 1$ por ser X completamente regular.

Consideremos el conjunto $A = f^{-1}([0, 1/2])$. Tenemos que A es entorno de x y está contenido en U. Tan solo resta ahora comprobar que A es cero-conjunto. Definamos la función g como

$$g \equiv f - \frac{1}{2}$$

y consideremos la función $h = \text{máx}\{g, 0\}$. Se comprueba que $A = Z(h)$. □

3.2. Condiciones de unicidad de límite de z-ultrafiltros

En esta sección vamos a ir afinando un poco más la relación existente entre filtros sobre X y puntos del conjunto. Para ello, daremos las condiciones necesarias que nos asegurarán la biyección entre z-ultrafiltros fijos y puntos del espacio X.

Lema 2. *Dados A y B cero-conjuntos disjuntos en un espacio topológico X, existen U y V abiertos sobre el mismo espacio tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Sean A y B cero-conjuntos disjuntos en X. Existen entonces dos funciones continuas $f, g \in \mathcal{C}(X)$ tales que $A = f^{-1}(0)$ y $B = g^{-1}(0)$. Consideremos los conjuntos

$$C = \{x \in X : g(x) \geq f(x)\}$$
$$D = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}.$$

Como f y g son funciones continuas, tenemos que los conjuntos C y D son conjuntos cerrados que cumplen que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ y $C \cup D = X$.

Tenemos por tanto que los conjuntos $U = D^c$ y $V = C^c$ cumplen la tesis del lema. □

Vamos a introducir ahora una nueva definición. Este nuevo concepto es un caso particular de z-filtro, y, junto con el resultado dado a continuación, nos servirán más adelante para facilitarnos algunos pasos en las demostraciones.

Definición 9. *Dado un z-filtro $\mathfrak{F}$ en un espacio X, decimos que es un z-filtro primo si para todo par de conjuntos A y B con $A \cup B \in \mathfrak{F}$ se tiene que o bien $A \in \mathfrak{F}$, o bien $B \in \mathfrak{F}$.*

Proposición 11. *Dados el espacio X, un punto $p \in X$ y un z-filtro primo $\mathfrak{F}$ sobre X. Son equivalentes:*

1. *p es un punto adherente de $\mathfrak{F}$.*
2. *$\mathfrak{F}$ converge a p.*
3. *$\bigcap \mathfrak{F} = \{p\}$.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. Sea V un entorno cero-conjunto de p. Como X es completamente regular, tenemos que V contiene un entorno de p de la forma $X \setminus Z$ para algún Z cero-conjunto. Como $V \cup Z = X$, entonces o bien $V \in \mathfrak{F}$, o bien $Z \in \mathfrak{F}$. Sin embargo, Z no puede estar en $\mathfrak{F}$, ya que $p \notin V = cl_X V$. Deducimos entonces que $\mathfrak{F}$ converge a p.

Las implicaciones 2. $\Longrightarrow$ 3. y 3. $\Longrightarrow$ 1. se deducen directamente de la definición de convergencia y punto adherente y del hecho de que cada conjunto de $\mathfrak{F}$ es cerrado. □

El siguiente resultado nos muestra algunas propiedades de adherencia y convergencia para z-filtros y z-ultrafiltros.

Proposición 12. *Dado un espacio X, se cumple que:*

1. *Todo punto límite de un z-filtro es también un punto adherente al z-filtro.*

2. *Un z-ultrafiltro converge si y solo si es z-ultrafiltro principal.*
3. *En un z-ultrafiltro, el conjunto de puntos adherentes coincide con el de puntos límite.*

Demostración. 1. Sea $\mathfrak{F}$ un z-filtro convergente a un punto $x \in X$. Supongamos que x no fuese punto adherente. Tendríamos entonces que existe un cero-conjunto $F \in \mathfrak{F}$ tal que $x \notin F$. Por lo tanto, existe un conjunto abierto $X \setminus F$ que contiene a x. Por el lema 1. tenemos que existe un cero-conjunto F' entorno de x completamente contenido en $X \setminus F$. Como $\mathfrak{F}$ converge a x y F' es un cero-conjunto entorno de x, tenemos que $F' \in \mathfrak{F}$; sin embargo, $F \in \mathfrak{F}$ y $F \cap F' = \emptyset$. Concluimos entonces que x es punto adherente a $\mathfrak{F}$.

2. Del lema 1., se deduce que todo z-ultrafiltro principal converge al punto que lo genera. Para ver la implicación inversa, consideremos un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ convergente a un punto $x \in X$. Por el punto anterior de esta misma proposición, obtenemos que x es punto adherente a $\mathfrak{F}$. Y, por la proposición 9., tenemos que $\mathfrak{F} \leq \{x\} \uparrow_z$. Por último, debemos reparar en que $\mathfrak{F}$ es un z-ultrafiltro, es decir, es un z-filtro maximal; por lo tanto $\mathfrak{F} = \{x\} \uparrow_z$.

3. Sea $\mathfrak{F}$ un z-ultrafiltro. Si x es un punto adherente a $\mathfrak{F}$, por el mismo razonamiento anterior, tenemos que $\mathfrak{F} = \{x\} \uparrow_z$; de donde se deduce que $\mathfrak{F}$ converge a x. Por otro lado, si $\mathfrak{F}$ converge a x, sabemos que x es punto adherente a $\mathfrak{F}$

□

El punto 2 de este resultado nos será especialmente útil, ya que nos dice que todos y cada uno de los z-ultrafiltros convergentes son del tipo $\{x\} \uparrow_z$ para algún $x \in X$.

También debemos recalcar la importancia de la condición de que el espacio topológico X sea completamente regular. Para ello, el siguiente ejemplo nos muestra la necesidad de esta hipótesis:

Ejemplos 8. *Consideremos el conjunto* $X = \{0, 1\}$ *con la topología* $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ *(topología de Sierpinski). Comprobamos que el único cero-conjunto no vacío es el total; por lo tanto, el z-filtro principal generado por el punto* 0 *es un z-filtro no convergente.*

NOTA*: El hecho de que el total sea el único cero-conjunto no vacío, se prueba teniendo en cuenta que todo cero conjunto es un conjunto cerrado; por lo tanto los únicos candidatos a cero-conjuntos son* $\{1\}$ *y* X*.*

Si $\{1\}$ *fuese cero-conjunto, tendría que existir una función continua* f *tal que* $f(1) = 0$ *y* $f(0) = a$ *para algún* $a \in \mathbb{R}$ *distinto de 0.*

Si tomamos un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $0 \in U$ *y* $a \notin U$*, tenemos que* $f^{-1}(U) = \{1\}$ *tiene que ser abierto (por definición de función continua). Por lo tanto,* X *es el único cero-conjunto no vacío.*

Una vez enunciado y probado este resultado, podemos pasar al siguiente teorema. Este teorema es el resultado principal de este capítulo, en el que finalmente conseguimos la biyección entre z-ultrafiltros fijos y puntos de X.

Teorema 1. *Dado el espacio* X*, todo z-ultrafiltro converge a lo sumo a un punto en* X*, y para todo punto en* X *existe un único z-ultrafiltro que converge a dicho punto.*

Dividiremos la demostración en dos partes. En la primera de ellas probaremos la unicidad del punto límite y en la segunda probaremos la existencia y unicidad de z-ultrafiltros.

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{F}$ z-filtro en X, supongamos que converge a dos puntos x e y. Si $x \neq y$, tenemos que existen dos conjuntos abiertos disjuntos A y B con $x \in A$ e $y \in B$. Además, por ser X completamente regular, existen cero-conjuntos F_1 y F_2 entornos de x y de y respectivamente, tales que $x \in F_1 \subseteq A$ e $y \in F_2 \subseteq B$.

   Ahora, por la caracterización de punto límite, tenemos que tanto F_1 como F_2 deben pertenecer a $\mathfrak{F}$, lo cual es absurdo, ya que son conjuntos disjuntos. Deducimos entonces que $x = y$.

2. Dado un punto $x \in X$, el z-ultrafiltro $\{x\} \uparrow_z$ converge a x.

   Veamos la unicidad de z-ultrafiltros. Sea $x \in X$, y supongamos que existen dos z-ultrafiltros convergentes a x. Del punto 2. de la proposición 12, sabemos que un z-ultrafiltro converge si y solo si es un z-ultrafiltro principal. Por lo tanto, consideremos el z-ultrafiltro $\{y\} \uparrow_z$ que converge a y; y, por hipótesis, también converge a x. En el punto anterior de esta demostración probamos que un z-ultrafiltro converge a lo sumo a un punto, por lo tanto tenemos que $x = y$, luego $\{y\} \uparrow_z = \{x\} \uparrow_z$.

$\square$

Este teorema nos da una relación directa de modo natural entre z-ultrafiltros convergentes y los puntos del propio conjunto X. Es decir, existe una biyección entre el conjunto de z-ultrafiltros convergentes y el conjunto X, donde cada z-ultrafiltro está relacionado con el punto al cual converge, y cada punto está relacionado con el z-ultrafiltro principal generado por el punto.

Debemos notar que, para esta relación no podemos relajar las condiciones que pedimos. En particular, si tan solo exigimos la condición de z-filtro, si bien es cierto que un z-filtro convergente $\mathfrak{F}$ converge a un solo punto, sin embargo, no es cierto que dado un punto en X exista un solo z-filtro que converja al punto. Veamos un ejemplo:

Ejemplos 9. *Consideremos el espacio topológico $X = \mathbb{R}$ con la topología usual. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ un número real, consideremos las familias de cero-conjuntos*

$$\mathfrak{F}_1 := \{Z(f) : \exists\ U \text{ entorno de } x_0 \text{ tal que } f(U) = 0\}$$

$$\mathfrak{F}_2 := \{Z(f) : f(x) = 0\}$$

Se comprueba que tanto $\mathfrak{F}_1$ como $\mathfrak{F}_2$ son ambos z-filtros en $\mathbb{R}$. Para comprobar que $\mathfrak{F}_1$ converge a x_0, usaremos alguna de las propiedades básicas de la topología usual de $\mathbb{R}$. Para todo U entorno abierto de x_0, existe un intervalo abierto V contenido en U tal que $V \subsetneq clV \subsetneq U$; y, como vimos en el ejemplo 4,3, para cualquier clV intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es posible encontrar una función continua cuyo cero-conjunto sea precisamente clV. Por lo tanto, para todo entorno abierto de x_0, existe un elemento del z-filtro que se encuentra totalmente contenido en el entorno.

Para comprobar que $\mathfrak{F}_2$ es también convergente a x_0, tan solo debemos observar que $\mathfrak{F}_1 \leq \mathfrak{F}_2$.

De esta forma obtenemos dos z-filtros distintos que convergen a un mismo punto de $\mathbb{R}$.

NOTA: Esto también constituye un ejemplo de que un z-filtro dado no es igual a la intersección de todos los z-ultrafiltros que lo contienen, propiedad que vimos que se cumplía para los filtros.

4. Compactificación de Stone-Čech

4.1. Introducción y resultados previos

En este capítulo, vamos a construir la compactificación de Stone-Čech de un espacio X, como el conjunto de "límites" de todos los z-ultrafiltros de X. Nótese que, hasta ahora, cada vez que hablábamos de límites de z-filtros o z-ultrafiltros, nos referíamos solo a los z-filtros y z-ultrafiltros fijos. Sin embargo, en este capítulo construiremos los puntos adicionales de la compactificación como los puntos límite de los z-ultrafiltros libres. Así, si consideramos el conjunto de todos los z-ultrafiltros, podremos identificar cada punto de la compactificación de Stone-Čech con cada z-ultrafiltro de X.

Esta construcción puede interpretarse de la misma manera que la construcción del conjunto de los números reales. Si consideramos todas las sucesiones de Cauchy en el conjunto de los números racionales, tenemos que algunas de ellas son convergentes y otras no. Los números reales se definen como las clases de equivalencia de todas estas sucesiones.

En nuestro caso, los z-ultrafiltros toman el papel de las sucesiones de Cauchy. Las sucesiones convergentes serán los z-ultrafiltros fijos, que darán lugar a un punto del conjunto X, al igual que las sucesiones convergentes de $\mathbb{Q}$ nos dan como límite números racionales. Y las sucesiones no convergentes serán los z-ultrafiltros libres, que, al igual que las sucesiones no convergentes, nos darán nuevos puntos exteriores a X o a $\mathbb{Q}$ respectivamente.

Por ello, resultará evidente la necesidad de generalizar la definición de límite de un z-filtro a puntos exteriores del espacio X donde se define. De este modo, dados un espacio T y un subespacio X denso, diremos que $t \in T$ es límite de un z-filtro $\mathfrak{F}$ definido en X (o que $\mathfrak{F}$ converge a t) si todo entorno de t contiene algún elemento de $\mathfrak{F}$.

En este capítulo y, ocasionalmente, en lo que resta de documento, haremos uso del siguiente resultado (recordemos que un espacio topológico es normal si, para todo par de cerrados disjuntos P y Q existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $P \subset U$ y $Q \subset V$).

Teorema 2. Teorema de extensión de Tietze. *Si un espacio topológico T es normal, entonces para cualquier conjunto cerrado $C \subseteq T$ y cualquier función continua $f : C \to [0,1]$, existe una extensión continua de f a T; es decir, una aplicación $\hat{f} : T \to [0,1]$ continua tal que $\hat{f}\big|_C = f$.*

Lema 3. *Todo espacio topológico compacto completamente regular es normal.*

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto completamente regular. Consideremos dos conjuntos cerrados disjuntos $P, Q \subset X$. Como el espacio X es completamente regular, para cada $p \in P$ existe una función continua $f_p : X \to [0,1]$ tal que $f_p(p) = 0$ y $f_p(Q) = \{1\}$.

Consideremos ahora la familia de conjuntos abiertos dados por

$$\{f_p^{-1}([0, \frac{1}{3})) : p \in P\}.$$

Esta familia de abiertos constituye un recubrimiento abierto de P; y, como P es compacto (por ser cerrado contenido en un compacto), tenemos que existe una familia $\{f_p : p \in \hat{P}\}$ con $\widehat{P}$ de funciones tales que los conjuntos $\{f_p^{-1}([0, \frac{1}{3})) : p \in \hat{P}\}$ forman un recubrimiento abierto finito de P.

Del mismo modo, la familia de conjuntos $\{f_p^{-1}((\frac{2}{3}, 1]) : p \in \hat{P}\}$ forma un recubrimiento abierto finito del conjunto Q.

Sean los conjuntos

$$U := \bigcup_{p \in \hat{P}} f_p^{-1}([0, \frac{1}{3}))$$

$$V := \bigcap_{p \in \hat{P}} f_p^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$$

Tenemos que U y V contienen a P y Q respectivamente y son abiertos. Deducimos por tanto que el espacio X es normal. □

Comenzaremos con un teorema, que nos da ciertas propiedades equivalentes para un cierto espacio T en el que X es denso. Su utilidad resultará evidente en el teorema que escribiremos inmediatamente después.

Para ello, necesitamos recordar antes la definición de $C^* - encajado$. Decimos que un espacio X está $C^* - encajado$ en T toda función en $\mathcal{C}^*(X)$ puede extenderse a una función en $\mathcal{C}^*(T)$ (en particular, el teorema de extensión de Tietze nos garantiza que todo subconjunto cerrado de un espacio normal está $C^* - encajado$ en el espacio).

Teorema 3. *Sea X denso en T. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *Toda función continua τ de X en cualquier espacio compacto Y tiene una extensión continua $\overline{\tau}$ de T en Y.*
2. *X es $C^* - encajado$ en T.*
3. *Dos cero-conjuntos disjuntos cualesquiera en X tienen clausuras disjuntas en T.*
4. *Dados dos cero-conjuntos Z_1 y Z_2 en X, se tiene que*

$$Cl_T(Z_1 \cap Z_2) = Cl_T(Z_1) \cap Cl_T(Z_2).$$

5. *Todo punto de T es el límite de un único z-ultrafiltro en X.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2. La función f en $C^*(X)$ es una función continua en el subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (por ser $f$acotada). Por lo tanto, 2. es un caso particular de 1..

2. $\Longrightarrow$ 3. Es una consecuencia directa del teorema de extensión de Tietze.

3. $\Longrightarrow$ 4. Si $p \in cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$, entonces, para todo entorno cero-conjunto $V \subset T$ de p, tenemos que

$$p \in cl_T(V \cap Z_1) \ \ y \ \ p \in cl_T(V \cap Z_2).$$

De aquí se deduce que $V \cap Z_1$ interseca a $V \cap Z_2$ o, equivalentemente, V interseca a $Z_1 \cap Z_2$. Luego tenemos que

$$p \in cl_T(Z_1 \cap Z_2).$$

Hemos probado entonces que $cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$ está contenido en $cl_T(Z_1 \cap Z_2)$.

Para comprobar la inclusión opuesta, tan solo es necesario notar que $Z_1 \cap Z_2 \subseteq Z_1$, por lo tanto, si $cl_T(Z_1 \cap Z_2) \subseteq cl_T(Z_1)$. Siguiendo el mismo razonamiento para Z_2 obtenemos que $cl_T(Z_1 \cap Z_2) \subseteq cl_T(Z_1) \cap cl_T(Z_2)$.

4. $\Longrightarrow$ *5.* El espacio X es denso en T; por lo tanto sabemos que todo punto t en T es el límite de algún z-ultrafiltro en X (la familia $\mathfrak{F} := \{Z : Z \in Z[X], t \in cl_T Z\}$ define un z-ultrafiltro en X, en cuya adherencia se encuentra t).

Por otro lado, sabemos que dos z-ultrafiltros distintos contienen cero-conjuntos disjuntos (proposición 7.); y, por hipótesis, un punto t no puede pertenecer a la clausura de esos dos cero-conjutnos disjuntos.

Deducimos entonces que dos z-ultrafiltros distintos no pueden converger a un mismo punto $t \in T$.

5. $\Longrightarrow$ *1.* Dado $t \in T$, sea $\mathfrak{F}$ el único z-ultrafiltro convergente a t. Escribimos

$$\tau^{\#}\mathfrak{F} = \{E \in Z[Y] : \tau^{-1}(E) \in \mathfrak{F}\}.$$

Esto define un z-filtro en el espacio compacto Y (el z-filtro imagen de $\mathfrak{F}$ por la aplicación τ); y, por la compacidad de Y, el z-filtro $\tau^{\#}\mathfrak{F}$ tiene al menos un punto adherente.

Tenemos ademas que el z-ultrafiltro es un z-filtro primo, por lo tanto $\tau^{\#}\mathfrak{F}$ también lo es. Por la proposición 11. tenemos que $\tau^{\#}\mathfrak{F}$ tiene límite en Y, y este punto límite $\overline{\tau}t$ viene dado por

$$\{\overline{\tau}t\} = \bigcap \tau^{\#}\mathfrak{F}.$$

Esto nos define una función $\overline{\tau}$ de T en Y, donde $\overline{\tau}(t) = \overline{\tau}t,\ \forall t \in T$.

En el caso en que $t \in X$, tenemos que $t \in \bigcap \mathfrak{F}$; luego $\tau p \in \bigcap \tau^{\#}\mathfrak{F}$. Se deduce entonces que $\overline{\tau}$ coincide con τ en X. La función $\overline{\tau}$ es una extensión de τ.

Dado F un cero-conjunto de Y, escribimos $Z := \tau^{-1}[F]$. Si $t \in cl_T Z$, entonces $Z \in \mathfrak{F}$ y, por consiguiente, $F \in \tau^{\#}\mathfrak{F}$. Se deduce entonces que $t \in cl_T Z$ implica que $\overline{\tau}t \in F$.

Para probar la continuidad de $\overline{\tau}$ en el punto $t \in T$, consideremos un entorno V cero-conjunto arbitrario de $\overline{\tau}t$ y veamos que la imagen por $\overline{\tau}$ de un entorno U de t está contenida en V. Consideremos $V' \subseteq Y$ el conjunto complemetario de V. Definimos entonces $Z' := \tau^{-1}[V]$. Tenemos entonces que

$$Z \cup Z' = X$$

y, por tanto

$$cl_T Z \cup cl_T Z' = T.$$

Como $\overline{\tau}t \notin V'$, tenemos que $t \notin cl_T Z'$. Deducimos entonces que $U = T \setminus cl_T Z'$ es un entorno de t. Además, todo punto $p \in U$ pertenece a $cl_T Z$, luego $\overline{\tau}p \in V$. $\square$

4.2. Construcción de la compactificación de Stone-Čech

Teorema 4. *Todo espacio X (completamente regular) tiene una compactificación βX con las siguientes propiedades equivalentes.*

1. *Toda función continua τ de X en un compacto cualquiera Y tiene una extension continua $\overline{\tau}$ de βX en Y.*
2. *Toda función f en $C^*(X)$ tiene una extensión f^β en $C(\beta X)$.*
3. *Dos cero-conjuntos disjuntos cualesquiera en X tienen clausuras disjuntas en βX.*
4. *Dados Z_1 y Z_2 dos cero-conjuntos en X,*
$$Cl_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2) = Cl_{\beta X} Z_1 \cap Cl_{\beta X} Z_2.$$
5. *Distintos z-ultrafiltros en X tienen distintos límites en βX.*

Además, βX es único en los siguientes terminos: si una compactificación T de X satisface alguna de las propiedades anteriores, entonces existe un homeomorfismo de βX en T que deja fijos los puntos de X.

La función $\overline{\tau}$ dada en el punto 1. del teorema como extensión de la función τ, es conocida como la extensión de Stone de τ en Y.

Demostración. Comenzaremos probando la unicidad de βX. Por el teorema anterior sabemos que las propiedades 1. - 5. son equivalentes; por lo tanto, si T satisface una cualquiera de ellas, las satisface todas. Por la propiedad 1., si consideramos la aplicación identidad (aplicación continua) de X en T, entonces dicha aplicación tiene una extensión de Stone de βX en T, ya que X es denso en T. Similarmente, podemos decir que también tiene una extensión de Stone de T en βX. Como cada una es la inversa de la otra, se sigue que estas extensiones son homeomorfismos.

Veamos ahora la construcción de βX. Va a haber una correspondencia biyectiva entre los z-ultrafiltros de X y los puntos de βX. En los capítulos anteriores hemos ido definiendo y probando la correspondencia entre los z-ultrafiltros fijos y los puntos de X. Por lo tanto, podemos usar el propio conjunto X como conjunto de los índices de los z-ultrafiltros fijos. Ampliamos de la forma adecuada este conjunto de índices para cubrir el conjunto de todos los z-ultrafiltros. Es decir

Los puntos de βX se definen como elementos de ese conjunto ampliado de índices.
La familia de todos los z-ultrafiltros en X es expresada como

$$(A^p)_{p\in\beta X}$$

Nótese que si $p \in X$, A^p representa la familia de cero-conjuntos que contienen a p, es decir, el z-ultrafiltro $\mathfrak{F} = \{p\} \uparrow_z$ convergente a p. En general, el elemento A^p representará el único z-ultrafiltro convergente a p.

Para definir la topología en βX bastará con definir la convergencia; esto lo haremos obligando a que cada punto $p \in \beta X$ resulte como límite de un único z-ultrafiltro A^p en X.

Definiremos la topología en βX dando una base de cerrados. Recordemos brevemente lo que es una base de cerrados de un espacio topológigo:

Dado un espacio X y B una familia de subconjuntos de X, B es una base de cerrados si:

1. $\emptyset \in B$
2. Dada una subfamilia finita de conjuntos en B, su intersección está en B.

Los conjuntos cerrados en esta topología serán los que puedan expresarse como intersección de cerrados básico.

De aquí se seguirá que, para Z cero-conjunto cualquiera en el espacio topológico X, podamos escribir

$$\overline{Z} = \{p \in \beta X : Z \in A^p\}$$

es decir, $p \in \overline{Z}$ si y solo si $Z \in A^p$. Debe notarse que la notación $\overline{Z}$ no tiene por qué representar la clausura de Z; mas adelante estudiaremos cuál es la relación exacta entre estos conceptos. Como caso particular, el conjunto X pertenece a todos los z-ultrafiltros, tendremos que $\overline{X} = \beta X$.

Sabemos que $Z_1 \cup Z_2 \in A^p$ si y sólo si $Z_1 \in A^p$ o $Z_2 \in A^p$; por lo tanto

$$\overline{Z_1} \cup \overline{Z_2} = \overline{Z_1 \cup Z_2}.$$

Por otra parte, como el conjunto vacío no pertenece a ningún z-ultrafiltro, tenemos que $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Deducimos entonces que la familia de conjuntos del tipo $\overline{Z}$ con Z cero-conjunto, es cerrada con respecto a la unión finita y contiene al conjunto vacío. Con todo, podemos escribir

La familia de conjuntos del tipo $\overline{Z}$ con Z cero-conjunto de X forma base de cerrados de una topología en βX.

Tenemos por tanto que βX es espacio topológico, con la topología generada por los complementarios de los conjuntos del tipo $\overline{Z}$ para Z cero-conjunto.

Comprobemos que X es subespacio topológico de βX; es decir, existe un subconjunto de βX identificable de manera natural con X. Tenemos que $p \in \overline{Z} \cap X$ si y solo si $Z \in A^p$ siendo A^p z-ultrafiltro fijo, es decir, $p \in Z$. Se deduce entonces que $\overline{Z} \cap X = Z$ para todo Z cero-conjunto. Si consideramos la aplicación

$$id_{\beta X}\big|_X : X \longrightarrow X$$

identidad de X como subespacio de βX en el propio espacio X, tenemos que la familia de cero-conjuntos forman base de cerrados en X, ya que, como ya vimos, los cero-conjuntos son intersección de un cerrado básico de βX con el subespacio X.

Por otro lado, tenemos que un espacio Hausdorff es completamente regular si y solo si la familia de cero-conjuntos forma base de cerrados [GJ, Teorema 3,2]. Luego el espacio topológico X y el subespacio X de βX son homeomorfos. Tenemos por tanto que X es subespacio *topológico* de βX.

Veamos ahora que X es denso en βX.

Sea Z cero-conjunto en X. Por definición de $\overline{Z}$, se tiene que $Z \subset \overline{Z}$. Además $\overline{Z}$ es cerrado (porque así se ha construido la base de cerrados). Por ello, $cl_{\beta X} Z \subseteq \overline{Z}$. Por otra parte, $cl_{\beta X} Z = \bigcap_{Z \subset Z'} \overline{Z'}$ y, como $Z \subseteq \overline{Z'}$ y $Z \subset X$, tenemos que $Z \subset \overline{Z'} \cap X = Z'$. Por consiguiente, $\overline{Z} \subset \overline{Z'}$. Deducimos por tanto que $\overline{Z} \subset \bigcap_{Z \subset Z'} \overline{Z'} = cl_{\beta X} Z$.

Así pues, tenemos que $Cl_{\beta X} Z = \overline{Z}$ para todo cero-conjunto. De ello se sigue que, en particular

$$cl_{\beta X} X = \overline{X}$$

por ser X el cero-conjunto de la función continua nula. Ademas, usando la definición directa de $\overline{X}$, tenemos que coincide con βX porque X pertenece a todos los z-ultrafiltros. Concluimos por tanto que

$$cl_{\beta X} X = \beta X.$$

Tenemos ya construido el espacio topológico βX, y hemos probado que el subconjunto X es subespacio topológico denso en βX. Vamos ahora a definir más exactamente cuáles son los conjuntos cerrados en βX. Debemos notar que, líneas más arriba, hemos razonado que lo que hemos definido como $\overline{Z}$ coincide con la clausura en βX para los Z cero-conjuntos.

Sea $A \subset X$ un conjunto en X, no necesariamente cero-conjunto. Por definición de clausura, tenemos que la clausura en βX de A es el menor cerrado en βX que contiene a A. O, dado que la familia de $\overline{Z}$ es base de cerrados

$$cl_{\beta X} A = \bigcap_{A \subseteq \overline{Z}} \overline{Z}$$

considerando siempre Z como cero-conjunto de X. Como el conjunto A está totalmente contenido en el espacio X, tan solo debemos buscar cuales son los cero-conjuntos Z que contienen a A. Podemos escribir por tanto

$$cl_{\beta X}A = \bigcap_{A \subseteq Z} \overline{Z}$$

Como $Z_1 \cap Z_2 \in A^p$ si y solo si $Z_1 \in A^p$ y $Z_2 \in A^p$, tenemos que βX cumple la propiedad 4. del teorema; y, en virtud del teorema anterior, cumple todas las propiedades requeridas.

Finalmente, tan sólo nos queda probar que βX es compacto. Para ello, veremos primero que es Hausdorff. Sean p y q dos puntos distintos en βX. Por la proposición 7, existen dos cero-conjuntos disjuntos A y B tales que $A \in A^p$ y $B \in A^q$. Ahora, por el lema 2, sabemos que existen abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, con $U \cap V = \emptyset$. Se tiene que existen abiertos U_0, V_0 en βX con $U_0 \cap X = U$ y $V_0 \cap X = V$. Además, si $U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$ tendríamos que, por densidad, $(U_0 \cap V_0) \cap X \neq \emptyset$, luego $(U_0 \cap X) \cap (V_0 \cap X) \neq \emptyset$ ó, equivalentemente, $U \cap V \neq \emptyset$. Tenemos entonces que

$$p \in \overline{A} \subseteq U_0$$
$$q \in \overline{B} \subseteq V_0$$

Se deduce por tanto, que βX es Hausdorff.

Finalmente, consideremos cualquier colección B de cerrados básicos $\overline{Z} = Cl_{\beta X}Z$ con la propiedad de intersección finita (con intersección no vacía de cualquier subfamilia finita). Deducimos de aquí que la familia B es base para algún z-filtro en X y, por lo tanto, está contenida en un z-ultrafiltro A^p. Se cumple que

$$p \in \bigcap_{Z \in A^p} \overline{Z} = \bigcap_{Z \in A^p} Cl_{\beta X}Z \subseteq \bigcap_{Z \in B} Cl_{\beta X}Z,$$

luego esta última intersección es no vacía. Se sigue que βX es compacto.

□

El espacio topológico βX construido en este último teorema se conoce como Compactificación de Stone-Čech del espacio X. Como hemos mencionado en el teorema, esta compactificación se caracteriza por ser aquella en la que pueden extenderse de forma continua las funciones continuas acotadas de X.

El espacio βX nos servirá enseguida para estudiar y extender dichas funciones. Pero también tiene usos más inmediatos, permitiéndonos generalizar alguno de los resultados que ya conocíamos para z-ultrafiltros fijos y puntos de X, extendiéndolos a cualquier z-ultrafiltro y cualquier punto de βX. Por ejemplo, dado un z-filtro $\mathfrak{F}$ en X y un punto $p \in \beta X \setminus X$, podemos decir que p es punto adherente a $\mathfrak{F}$ si y solo si $\mathfrak{F} \subseteq A^p$.

También podemos generalizar la propiedad de intersección finita. Antes, teníamos que la intersección de todos los elementos de un z-filtro o un z-ultrafiltro era no vacía si y solo si se trataba de z-filtros o z-ultrafiltros fijos. Al considerar el espacio βX, tenemos que si un z-filtro o z-ultrafiltro son libres, entonces su intersección está contenida en $\beta X \setminus X$, pero no será nunca vacía.

Esto es perfectamente congruente con el hecho de que, en un espacio compacto, si tenemos una familia de conjuntos cerrados tal que la intersección de cualquier subfamilia es no vacía, entonces la intersección de todos los conjuntos es también no vacía.

Si aplicamos esto a lo comentado anteriormente, y consideramos el conjunto $C := \bigcap_{Z \in \mathfrak{F}} \overline{Z}$, se cumple que el conjunto de puntos adherentes a $\mathfrak{F}$ como filtro coincide con el conjunto de puntos adherentes a C como conjunto. Esto lo podemos generalizar de la siguiente manera:

Proposición 13. *Dado un z-filtro $\mathfrak{F}$ cualquiera en el espacio X, definimos el conjunto $C_{\mathfrak{F}}$ como $C_{\mathfrak{F}} := \bigcap_{Z \in \mathfrak{F}} \overline{Z}$. Se tiene entonces que*

1. *$C_{\mathfrak{F}}$ es cerrado no vacío.*
2. *Si X está dotado de la topología discreta, el conjunto de puntos en βX adherentes a $\mathfrak{F}$ y el conjunto $C_{\mathfrak{F}}$ en βX coinciden con el subconjunto de puntos de βX cuyos z-ultrafiltros principales (en βX) contienen a las clausuras de los elementos de $\mathfrak{F}$.*

Como consecuencias inmediatas a esta proposición, tenemos que, cuando X está dotado de la topología discreta, todo z-filtro tiene una base formada por un solo elemento, que coincide precisamente con la intersección de todos los elementos del z-filtro. Y que un z-ultrafiltro tiene un único punto adherente, que coincide con su límite.

Tenemos también que, como $C_{\mathfrak{F}}$ es cerrado en βX, entonces es igual a su clausura y, por tanto, si $C_{\mathfrak{F}}$ tiene al menos dos puntos, entonces $\mathfrak{F}$ no es un z-ultrafiltro, ya que estará contenido en al menos dos z-ultrafiltros distintos.

Por otro lado, si tenemos que $C_{\mathfrak{F}}$ es unipuntual, no podemos asegurar que $\mathfrak{F}$ sea z-ultrafiltro, ya que, como vimos en el ejemplo 8., un z-filtro puede estar estrictamente contenido en un único z-ultrafiltro.

Demostración.

1. Dado que βX es compacto, los elementos $\overline{Z}$ con $Z \in \mathfrak{F}$ son conjuntos cerrados y la intersección de cualquier subfamilia finita de elementos de $\mathfrak{F}$ es no vacía, tenemos que la intersección de todos los $\overline{Z}$ es también no vacía y cerrada.

2. Comprobemos primero que la adherencia del z-filtro y el conjunto $C_{\mathfrak{F}}$ son el mismo conjunto.

   Por definición de $C_{\mathfrak{F}}$, todo punto adherente a $C_{\mathfrak{F}}$ es también adherente a todos los elementos de $\mathfrak{F}$.

   Por otro lado, si p es un punto adherente a todos los elementos de $\mathfrak{F}$, tendremos que dicho punto p pertenece a la clausura en βX de cada cero-conjunto de $\mathfrak{F}$ y, por ser todos ellos cerrados en un espacio compacto, tenemos que p pertenece a su intersección, es decir, $p \in \bigcap_{Z \in \mathfrak{F}} \overline{Z} = C_{\mathfrak{F}}$.

   Para comprobar que ambos conjuntos son iguales al conjunto de puntos x de βX tales que $\mathfrak{F} \subseteq \{x\} \uparrow_z$, tomemos un punto $p \in C_{\mathfrak{F}}$. Tenemos que p pertenece a todo conjunto del tipo $\overline{Z}$ para todo $Z \in \mathfrak{F}$. Por su lado, $\{p\} \uparrow_z$, como z-ultrafiltro de βX, es la familia de todos los cero-conjuntos en βX que contienen a p; en particular, $\{\overline{Z} : Z \in \mathfrak{F}\}$ es una subfamilia de $\{p\} \uparrow_z$ (como z-ultrafiltro en βX). Luego $\overline{\mathfrak{F}} \subseteq \{p\} \uparrow_z$ (denotando como la clausura de un z-filtro $\overline{\mathfrak{F}} := \{\overline{Z} : Z \in \mathfrak{F}\}$).

   Por otro lado, dado un z-ultrafiltro $\{p\} \uparrow_z$ en βX, se tiene que p es adherente al z-ultrafiltro y, por tanto, adherente a cada uno de sus elementos. Si $\mathfrak{F}$ es un z-filtro cuya clausura está contenida en $\{p\} \uparrow_z$, en particular p será adherente a cada elemento de $\overline{\mathfrak{F}}$. Deducimos por tanto que ambos conjuntos coinciden.

□

NOTA: Si el espacio X no tuviese la topología discreta, la prueba del punto 2. no sería correcta, ya que en general, dado un cero-conjunto C en X, su clausura en βX no tiene porqué ser un cero-conjunto en βX. Veamos unos ejemplos al respecto:

Ejemplos 10. *Como hemos argumentado en la prueba del resultado anterior, aunque ciñéndonos al caso particular de $\mathbb{N}$, dado Z un cero-conjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ (se tiene que $Z = Z(\chi_{Z^c})$), tendremos que $\overline{Z} = Z(\overline{\chi_{Z^c}})$, por lo que la clausura en $\beta\mathbb{N}$ de Z es cero-conjunto en $\beta\mathbb{N}$.*

Comprobemos lo que ocurre en el caso de $\mathbb{R}$. Considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ (en general puede hacerse la misma construcción con cualquier conjunto discreto no acotado sin puntos de acumulación). Suponer ahora que el conjunto $\overline{\mathbb{N}} \subset \beta\mathbb{R}$ es cero-conjunto; existe entonces una función $g \in \mathcal{C}^*(\beta\mathbb{R})$ con $Z(g) = \overline{Z}$, en particular $Z(g) \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{N}$. Así, el conjunto $\mathbb{N}$ sería el cero-conjunto de de la función $g\big|_{\mathbb{R}}$.

Consideremos ahora una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 < |x_n - n| < \frac{1}{n}$$

y tal que

$$|g\big|_{\mathbb{R}}(x_n)| < \frac{1}{n}.$$

El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto en $\mathbb{R}$ y no tiene puntos de acumulación. Entonces, es el cero-conjunto en $\mathbb{R}$ de una cierta función $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. Como $0 < |x_n - n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$Z(f) \bigcap Z(g\big|_{\mathbb{R}}) = \emptyset,$$

luego

$$cl_{\beta\mathbb{R}} Z(f) \bigcap cl_{\beta\mathbb{R}} Z(g\big|_{\mathbb{R}}) = \emptyset.$$

Se tiene entonces que, por compacidad, existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$g(\overline{Z(f)}) > \epsilon,$$

pero teníamos que, si $1/n_0 < \epsilon$

$$g(\overline{Z(f)} \setminus \{1, \ldots, n_0\}) < \epsilon.$$

Proposición 14. *Sea Z cero-conjunto en X. Si existe un conjunto $T \subset X$ compacto tal que $Z \subseteq T$, entonces*

$$cl_{\beta X} Z \subset X$$

Es decir, su clausura en βX está totalmente contenida en X. Además, se tiene que $cl_{\beta X} Z \subset cl_{\beta X} T \subset X$.

Ejemplos 11.

1. *En el espacio $X = (0,1)$, si consideramos el conjunto $B := (1/3, 2/3)$, tenemos que existe un espacio $T = [1/3, 2/3]$ compacto que contiene al conjunto B, luego $cl_{\beta X} B \subset (0,1)$. Esto quiere decir que todo z-ultrafiltro en X que contenga al conjunto B es un z-ultrafiltro fijo.*
2. *Si extendemos el ejemplo anterior a todos los conjuntos en $(0,1)$ que no tengan los puntos $\{0,1\}$ en su clausura (clausura usual, como subconjunto de $\mathbb{R}$), van a tener su clausura de βX totalmente contenida en $(0,1)$.*

   Esto quiere decir que todos los puntos de $\beta X \setminus X$ serán el resultado de z-ultrafiltros que tengan elementos del tipo $(0, \varepsilon)$ ó $(1 - \varepsilon, 1)$.
3. *Si consideramos ahora el conjunto $X = \mathbb{N}$, tenemos que la clausura en βX de cualquier conjunto acotado será el propio conjunto.*

   Para buscar elementos del subconjunto $\beta X \setminus X$ tenemos que buscar en los z-ultrafiltros cuyos elementos sean todos no acotados.

4.3. Propiedades de espacios compactos

Proposición 15. *Dado T un espacio localmente compacto, un subespacio X abierto es también localmente compacto.*

Demostración. Para probar esto, tan solo debemos notar que todo punto $x \in X$ está dentro de algún entorno contenido en X, por ser X abierto. Y, al estar también en T, tenemos que todo entorno de x contiene un entorno compacto. Luego X es localmente compacto. □

Proposición 16. *Sea T un espacio topológico. Si X es denso en T y p un punto en X, entonces todo entorno compacto de p en X es entorno de p en T.*

Demostración. Sea U el interior en X de un entorno compacto de $p \in X$. Entonces, la clausura de U en X es compacta. Recordemos que si $A \subset B$ y $C \subset A$ es compacto en A, luego C también es compacto en B. Tenemos por tanto que la clausura de U es cerrado en T. Deducimos entonces que la clausura de U en X es igual a la clausura de U en T.

Sea V un conjunto abierto en T tal que $V \cap X = U$. Como X es denso, tenemos que $cl_T V = cl_T U \subset X$, por lo tanto, $V = U$.

De este modo, dado el entorno compacto $cl_X U$ de p en X, comprobamos que es igual a $cl_T V$ que, a su vez, es entorno compacto de p en T. □

Como corolarios a este último resultado tenemos que:

1. Si X es denso en T y p es un punto aislado de X, entonces p es punto aislado en T.
2. Si X es localmente compacto y denso en T, entonces X es abierto en T.

De ahí se sigue el siguiente resultado:

Proposición 17. *1. S está $C^* -$ encajado en X si y solo si $cl_{\beta X} S = \beta S$.*

2. Todo subconjunto compacto de X está $C^* -$ encajado en X.

3. Un punto aislado en X es aislado en βX. Además, X es abierto en βX si y solo si X es localmente compacto.

4. Si S es un conjunto abierto y cerrado en X, entonces $cl_{\beta X} S$ y $cl_{\beta X} X \setminus S$ son abiertos complementarios en βX.

Demostración. 1. Sea S un subespacio de X (no necesariamente denso). Evidentemente, S está $C^* -$ *encajado* en X si y solo si lo está en βX. Sabemos además que el conjunto $cl_{\beta X} S$ es un conjunto compacto de βX y, por tanto, está $C^* -$ *encajado* en él, por el teorema de extensión de Tietze. Bajo estas condiciones, $cl_{\beta X} S$ satisface las mismas propiedades que βS: $cl_{\beta X} S$ es una compactificación de S en la cual S está $C^* -$ *encajada*.

2. Este punto es un caso particular del punto 1. de esta misma proposición. Si S es compacto, tenemos que $cl_{\beta X}S = S = \beta S$, luego S está $C^* - encajado$ en X.
3. Este punto se deduce de las proposiciones 15. y 16., y de los corolarios inmediatos mencionados en esta sección.
4. Sabemos que la unión de $cl_{\beta X}S$ y $cl_{\beta X}X \setminus S$ es el espacio βX, ya que

$$cl_{\beta X}S \cup cl_{\beta X}(X \setminus S) = cl_{\beta X}(S \cup (X \setminus S))$$

   y del punto 3 del teorema de construcción de la compactificación de Stone-Čech deducimos que son disjuntos.

   Para comprobar que son abiertos, tan solo debemos comprobar que son cerrados por ser clausura de conjuntos, y por lo tanto abiertos.

□

5. Compactificaciones de algunos espacios

En este capítulo vamos a concretar la teoría mediante la presentación de algún ejemplo de compactificación de Stone-Čech, o al menos alguna de sus propiedades.

5.1. El espacio $\beta\mathbb{N}$

Como el espacio $\mathbb{N}$ es un espacio localmente compacto, la proposición 17. nos garantiza que el subespacio $\mathbb{N}$ es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{N}$, y además todos los puntos de $\mathbb{N}$ son aislados en $\beta\mathbb{N}$. En otras palabras, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún entorno de n que no interseca a ningún otro punto de $\beta\mathbb{N}$ (el propio conjunto $\{n\}$).

Los puntos de $\beta\mathbb{N}$ son límites de z-ultrafiltros en $\mathbb{N}$; por lo tanto, dado un punto $p \in \beta\mathbb{N}$, todo entorno de $\{p\} \uparrow_z$ interseca a $\mathbb{N}$. Por otro lado, si tenemos $Z \in \{p\} \uparrow_z$ entonces $cl_{\beta\mathbb{N}}Z$ es un entorno abierto de p. Se deduce entonces que $\beta\mathbb{N}$ es totalmente disconexo, ya que, dados p y q dos puntos distintos, podemos elegir un cero-conjunto $Z \in A^P \setminus A^q$, entonces $cl_{\beta\mathbb{N}}Z$ es un conjunto a la vez abierto y cerrado que contiene a p pero no a q.

Así pues la clausura en $\beta\mathbb{N}$ de cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es simultáneamente abierto y cerrado. Se deduce entonces fácilmente que ningún punto de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ puede aproximarse mediante una sucesión en $\mathbb{N}$.

El conjunto N_1 de los números impares es homeomorfo a $\mathbb{N}$; por lo tanto, $cl_{\beta\mathbb{N}}N_1 = \beta N_1$. Luego $cl_{\beta\mathbb{N}}N_1$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Podemos repetir este mismo razonamiento para el conjunto N_2 de los números pares. Por lo tanto, tenemos que el espacio $\beta\mathbb{N}$ es expresable como la unión disjunta de 'copias' de él mismo. En este caso lo hemos expresado como unión de dos copias, sin embargo, podemos generalizarlo a n dividiendo los naturales en n subespacios homeomorfos tomando congruencias módulo n.

Podemos también extender esta descomposición a un número infinito de copias. Sean A_n ($n \in \mathbb{N}$) infinitos conjuntos disjuntos dos a dos, de cardinal infinito cada uno de ellos. Cada clausura $cl_{\beta\mathbb{N}}A_n$ es un conjunto abierto y cerrado en $\beta\mathbb{N}$, y homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Tomemos ahora su unión:

$$T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} cl_{\beta\mathbb{N}}A_n$$

Como $\beta\mathbb{N}$ es compacto, no puede ser expresado como unión infinita de abiertos disjuntos; y, así, tenemos que T no cubre todo el espacio $\beta\mathbb{N}$. Sin embargo, sí se tiene que T es denso en $\beta\mathbb{N}$; de hecho, $\mathbb{N} \subset T \subset \beta\mathbb{N}$, y por tanto $\beta T = \beta\mathbb{N}$.

Sea ahora $p_n \in cl_{\beta\mathbb{N}}A_n \setminus \mathbb{N}$ un punto no natural en la clausura de A_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos el conjunto

$$D := \{p_1, p_2, ...\}$$

De que los conjuntos A_n sean disjuntos y de que cada conjunto $cl_{\beta\mathbb{N}}A_n$ sea abierto y cerrado, se sigue inmediatamente que D es un espacio discreto de $\beta\mathbb{N}$, luego D es a su vez homeomorfo a $\mathbb{N}$. Es más, D está $C^* - encajado$ en T: para extender una función f dada en D, tan solo debemos asignar el valor constante $f(p_n)$ a cada conjunto $cl_{\beta\mathbb{N}}A_n$. Por lo tanto D está $C^* - encajado$ en βT o, equivalentemente, en $\beta\mathbb{N}$. Como D está $C^* - encajado$ en $\beta\mathbb{N}$, tenemos que $cl_{\beta\mathbb{N}}D = \beta D$; y como D está totalmente contenido en el conjunto cerrado $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, tenemos que βD está también contenido en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Como βD es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$, tenemos probado que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ (considerando en $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ la topología de subespacio de $\beta\mathbb{N}$).

Sea f una función en $C^*(\mathbb{N})$ que alcance todos los valores racionales del intervalo $[0, 1]$. Tenemos por tanto que todo número real en $[0, 1]$ está en la clausura de $f(\mathbb{N})$. Por lo tanto, el conjunto compacto $f^\beta(\beta\mathbb{N})$ está contenido y cubre el conjunto compacto $[0, 1]$. Tenemos por tanto que el cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es al menos c, el cardinal del conjunto de los números reales. (De hecho, aunque no lo veremos, se tiene que el cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es 2^c).

Ejemplos 12. *Dado que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_{>0}$ son equipotentes, tenemos que existe una aplicación $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{>0}$ biyectiva. Consideremos p/q con $p, q \in \mathbb{N}$ la expresión irreducible de cada elemento de $\mathbb{Q}_{>0}$, y definamos cada conjunto B_n del siguiente modo*

$$B_n := \{p/q \in \mathbb{Q}_{>0} : q = n\}$$

Tenemos entonces que existen infinitos conjuntos B_n, uno para cada n natural; y que cada B_n tiene un numero infinito de elementos, ya que para cada q natural existen infinitos naturales primos con q.

Definamos ahora los conjuntos A_n como

$$A_n := \alpha^{-1}(B_n)$$

de modo que la familia de conjuntos $A_n \subset \mathbb{N}$ cubren completamente y de forma disjunta el espacio $\mathbb{N}$.

Dado que A_n es un conjunto de infinitos números naturales, es homeomorfo a $\mathbb{N}$. Tenemos también que los puntos de $\mathbb{N}$ son todos aislados; por lo tanto, si un z-ultrafiltro converge a un punto $m \in \mathbb{N}$ natural, necesariamente ha de contener el elemento $\{m\}$. Tenemos por tanto que existen z-ultrafiltros libres en A_n convergentes a puntos de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

Tomemos de cada clausura de los conjuntos A_n un punto p_n no natural. Definamos a continuación el conjunto D formado por todos ellos, $D := \{p_1, p_2, ...\}$. Del mismo modo que hemos hecho al principio de esta sección, tenemos que, como el conjunto D es discreto, forma a su vez un espacio discreto (homeomorfo a $\mathbb{N}$), luego toda función $f : D \to \mathbb{R}$ que definamos será continua. Definamos por ejemplo, la función $f(p_n) := n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La unión de todas las clausuras de los conjuntos A_n no cubre por completo el espacio $\beta\mathbb{N}$ ya que, como vimos anteriormente, el espacio compacto $\beta\mathbb{N}$ no puede darse como unión infinita disjunta de abiertos. Sin embargo, podemos extender de forma única y continua la función f definida en D a todo el espacio $\beta\mathbb{N}$ (por estar D $C^* -$ encajado en $\beta\mathbb{N}$). Extendamos el valor constante de $f(p_n)$ a todo el conjunto compacto $cl_{\beta\mathbb{N}}A_n$ para cada n. De este modo extendemos de forma continua f a lo largo de $T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} clA_n$. Y como $\beta T = \beta\mathbb{N}$ (por ser T denso en $\beta\mathbb{N}$), podemos seguir extendiendo de forma continua la función f en todo el espacio $\beta\mathbb{N}$ (extensión de Stone de T en $\beta T = \beta\mathbb{N}$).

5.2. El espacio $\beta\mathbb{Q}$

Al igual que ocurría en $\mathbb{N}$, el espacio $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo. Dados dos puntos p y q, existen entornos disjuntos abiertos y cerrados U y V que los contienen respectivamente. Por lo tanto, $U\cap\mathbb{Q}$ y $V\cap\mathbb{Q}$ son conjuntos disjuntos cerrados en $\mathbb{Q}$. Se puede conseguir así un conjunto E abierto y cerrado en $\mathbb{Q}$ que contiene a $U\cap\mathbb{Q}$, pero disjunto con $V\cap\mathbb{Q}$. Luego el conjunto $cl_{\beta\mathbb{Q}}E$ es también abierto y cerrado, y contiene a p pero no a q.

Cualquier aplicación $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una aplicación continua, y se puede considerar definida como $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{Q}$; por lo tanto, existe una extensión de Stone $\overline{\tau}$ definida de $\beta\mathbb{N}$ en $\beta\mathbb{Q}$. Supongamos que la imagen de τ cubre todo el espacio $\mathbb{Q}$. Al ser $\overline{\tau}$ una aplicación continua, y el espacio $\beta\mathbb{N}$ un espacio compacto, tenemos que el conjunto imagen $\overline{\tau}(\beta\mathbb{N})$ es también compacto; y, además, contiene al conjunto $\mathbb{Q}$ denso en $\beta\mathbb{Q}$, por ser $\overline{\tau}$ extensión de τ. Por lo tanto, tenemos que la imagen de $\beta\mathbb{N}$ es un conjunto compacto que contiene a un subconjunto denso de $\beta\mathbb{Q}$; luego $\overline{\tau}$ es sobreyectiva.

Por otro lado, en virtud del punto 1. de la proposición 17., tenemos que la clausura en $\beta\mathbb{Q}$ de $\mathbb{N}$ es $\beta\mathbb{N}$. Es decir

$$cl_{\beta\mathbb{Q}}\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}.$$

Se deduce por tanto que los conjuntos $\beta\mathbb{N}$ y $\beta\mathbb{Q}$ son equipotentes.

Como $\beta\mathbb{Q}$ es compacto, tenemos que todo entorno de un punto cualquiera, contiene un entorno compacto. Sin embargo, ningún entorno compacto puede estar totalmente contenido en $\mathbb{Q}$. Esto implica que el conjunto $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\beta\mathbb{Q}$. Aquí vemos una gran diferencia con los casos en los que X es localmente compacto, en que se tiene que $\beta X \setminus X$ es cerrado.

5.3. El espacio $\beta\mathbb{R}$

Repitiendo el razonamiento desarrollado para el espacio $\beta\mathbb{Q}$, tenemos que el espacio $\beta\mathbb{R}$ es la imagen por una aplicación continua del espacio $\beta\mathbb{N}$. En este caso, al definir la aplicación $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tan solo exigimos que la imagen sea densa en $\mathbb{R}$; luego $\overline{\tau}(\beta\mathbb{N})$ será un compacto que contiene a un subconjunto denso en $\beta\mathbb{R}$. Y del mismo modo que antes, tenemos también que

$$cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}.$$

Por lo tanto, al igual que antes, deducimos que los espacios $\beta\mathbb{R}$, $\beta\mathbb{Q}$ y $\beta\mathbb{N}$ son equipotentes.

Llamemos $\mathbb{R}^+$ al subespacio de los reales no negativos, y $\mathbb{R}^-$ al subespacio de los reales no positivos. Como son subespacios no disjuntos, tendremos que sus clausuras en $\beta\mathbb{R}$ serán también no disjuntas (en particular, el punto 0 pertenece a su intersección).

Los subespacios $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ están C^*-*encajados* en $\mathbb{R}$, ya que dada una función f en $\mathcal{C}^*(\mathbb{R}^+)$, puede extenderse de manera continua a $\mathbb{R}$ definiendo $f(x) = f(0)$ para todo $x < 0$ (y equivalentemente para $\mathbb{R}^-$). Tenemos por tanto

$$cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ = \beta\mathbb{R}^+$$

$$cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- = \beta\mathbb{R}^-$$

Tenemos también que los espacios $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ son homeomorfos; y, por tanto, también lo son $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+$ y $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^-$ y, finalmente, $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$.

Por la proposición 14., todo entorno de un punto de $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ contiene algún subconjunto no acotado de $\mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{R}^+$ es localmente compacto, es abierto en $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+$, de donde deducimos que $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es compacto.

Claramente, tenemos también que

$$cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \cup cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- = cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}$$

La función arcotangente en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ tiene una extensión continua a $\beta\mathbb{R}$. Esta extensión $\overline{\arctan}$ se define en un espacio compacto (en $\beta\mathbb{R}$) y es continua; por lo tanto, el conjunto $\overline{\arctan(\beta\mathbb{R})}$ es compacto en $\mathbb{R}$. Se deduce por tanto que el valor $\pi/2$ pertenece a la imagen de $\overline{\arctan}$ y, obviamente, se alcanzará en $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$; o, más exactamente, en $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$. Y, del mismo modo, $-\pi/2$ se alcanzará en $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$.

Tenemos entonces que los espacios $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$ son disjuntos, y su unión es $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. De ello se deduce que el espacio $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ no es conexo.

Comprobemos ahora que el espacio $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es conexo. Si no lo fuese, tendríamos que existiría un función continua definida en dicho conjunto cuya imagen sería exactamente $\{0,1\}$. Esta función f tendría su extensión de Tietze $\hat{f}$ en $\mathcal{C}(cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+)$, por ser $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ un conjunto cerrado contenido en el conjunto compacto $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+$. $\hat{f}$ debe asumir valores arbitrariamente cercanos a 0 y a 1 para valores suficientemente grandes de $x \in \mathbb{R}^+$ ya que, en caso contrario, si $\hat{f}(\mathbb{R}^+) \subseteq [a,b]$ con $a,b \in (0,1)$, tendríamos que la imagen de su extensión a $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+$ estaría también contenida en $[a,b]$. Luego tenemos que $(0,1) \subset \hat{f}(\mathbb{R}^+)$; por lo tanto, fijado un $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $(0,1) \subseteq \hat{f}[n,\infty)$.

Como $\mathbb{R}^+$ es conexo, $\hat{f}$ debe tomar el valor $1/2$ en un conjunto no acotado de $\mathbb{R}^+$ y, por tanto, en puntos de $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$. Esta contradicción muestra que $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ es conexo.

Ejemplos 13. *Como decíamos más arriba, todo punto de $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ contiene conjuntos no acotados de $\mathbb{R}$ en base a que si un z-ultrafiltro $\mathfrak{F}$ tuviese un cero-conjunto Z acotado tendríamos que $\mathfrak{F}$ converge a algún punto de $Z \subset \mathbb{R}$ por ser Z compacto.*

En esta sección también hemos usado el hecho de que los z-ultrafiltros libres de $\mathbb{R}$ pueden dividirse en dos subconjuntos: el formado por z-ultrafiltros que nacen de conjuntos de $\mathbb{R}^+$ y el formado por z-ultrafiltros que nacen de conjuntos de $\mathbb{R}^-$. La causa de este hecho es que todo z- ultrafiltro libre contiene a uno y solo uno de los cero-conjuntos

1. $(-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$
2. $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$

Comprobémoslo:

Claramente, todo z-ultrafiltro sobre $\mathbb{R}$ contiene al menos a uno de los dos conjuntos, ya que su unión es todo el espacio $\mathbb{R}$. Supongamos que un z-ultrafiltro libre contiene a ambos conjuntos. Tenemos entonces que el conjunto $\{0\}$ pertenece al z-ultrafiltro por ser intersección de dos cero-conjuntos pertenecientes. Luego nuestro z-ultrafiltro debe ser forzosamente el generado por el punto $0 \in \mathbb{R}$; se deduce por tanto que no puede ser libre.

Ahora que hemos dividido los z-ultrafiltros libres en dos subconjuntos, podemos identificarlos mediante la siguiente relación de equivalencia R:

Un número real es R-equivalente solamente a sí mismo. Dos puntos p y q de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ son equivalentes entre sí si ambos pertenecen a $\beta\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ o ambos pertenecen a $\beta\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$.

Considerando el espacio cociente $\beta\mathbb{R}/R$, tenemos que al espacio $\mathbb{R}$ le hemos añadido dos puntos. Si identificamos la clase de equivalencia de los z-ultrafiltros libres provenientes de $\mathbb{R}^+$ con el punto $+\infty$; y la clase de los z-ultrafiltros libres provenientes de $\mathbb{R}^-$ con el punto $-\infty$, tenemos que

$$\beta\mathbb{R}/R = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Lo que hemos construido es una compactificación de $\mathbb{R}$ por dos puntos. Sabemos que el espacio $\beta\mathbb{R}/R$ es espacio topológico compacto por ser espacio cociente de un espacio topológico compacto.

Obviamente, en esta compactificación no pueden extenderse de forma continua todas las funciones continuas acotadas definidas en $\mathbb{R}$; sin embargo, sí podrán hacerlo aquellas para las que existan los límites de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$, ya que la función $\overline{f}$ será constante en los conjuntos $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+$ y $cl_{\beta\mathbb{R}}\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{R}^-$.

Si, por el contrario, tomamos la relación R' definida como

Un número real es R'-equivalente solamente a sí mismo. Todos puntos de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ son equivalentes entre sí.

El espacio cociente $\beta\mathbb{R}/R'$ será homeomorfo a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es decir, lo que tenemos es la compactificación de Alexandroff, una compactificación de $\mathbb{R}$ por un punto. En este caso, las funciones $f \in \mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ que pueden extenderse de forma continua a $\beta\mathbb{R}/R'$ serán aquellas en las que sus límites a $+\infty$ y a $-\infty$ coincidan; es decir

$$\{f \in \mathcal{C}^*(\mathbb{R}) : \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\}.$$

Para comprobar que hay funciones extensibles a $\beta\mathbb{R}$ pero no a $\beta\mathbb{R}/R$ y, extensibles a $\beta\mathbb{R}/R$ pero no a $\beta\mathbb{R}/R'$, tan solo debemos considerar las funciones:

$$f(x) = \sin(x)$$

extensible a $\beta\mathbb{R}$, pero no a $\beta\mathbb{R}/R$ ni a $\beta\mathbb{R}/R'$.

La función g definida como

$$g(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

se extiende a $\beta\mathbb{R}$ y a $\beta\mathbb{R}/R$, ya que es continua y existen sus límites en ambos extremos de la recta real. Sin embargo, estos límites no coinciden, por lo que no puede ser extendida a $\beta\mathbb{R}/R'$.

Su extensión $\overline{g}$ a $\beta\mathbb{R}/R$ vendrá dada por

$$\overline{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \textit{si } x \in \mathbb{R} \\ 1(= \lim_{t\to+\infty} g(t)) & \textit{si } x = +\infty \\ -1(= \lim_{t\to-\infty} g(t)) & \textit{si } x = -\infty \end{cases} \tag{3}$$

Por otro lado, la siguiente función h, es extensible a estos tres espacios:

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

y su extensión $\overline{h}$ se definirá como

$$\overline{h}(x) := \begin{cases} h(x) & si\ x \in \mathbb{R} \\ 1(= \text{lím}_{t\to\pm\infty} h(t)) & si\ x \notin \mathbb{R} \end{cases} \tag{4}$$

Para extender la función $f(x) = \sin(x)$ al espacio $\beta\mathbb{R}$, consideremos los conjuntos:

$$A_r := \sin^{-1}(r)$$

Se comprueba que todos ellos son cero-conjuntos, por ser los ceros de las funciones

$$\sin(x) - r$$

para todo $r \in [-1, 1]$. La extensión $\overline{f} = \overline{\sin}$ vendrá dada como $\overline{f}(x) = \sin(x)$ si $x \in \mathbb{R}$, $\overline{f}(x) = r$ si $x \in B_r$, siendo B_r el conjunto de todos los z-ultrafiltros sobre $\mathbb{R}$ que contienen al cero-conjunto A_r. Nótese que los conjuntos A_r forman una partición disjunta de $\mathbb{R}$, por lo que un punto p en $\beta\mathbb{R}$ pertenecerá a un único conjunto $B_r = \overline{A_r}$. Por lo tanto, nuestra construcción de $\overline{f}$ está bien definida sobre los puntos de B_r. Sin embargo, una descripción completa para los puntos restantes de $\beta\mathbb{R}$ no puede proporcionarse en términos tan precisos.

Hemos visto anteriormente dos compactificaiones de $\mathbb{R}$ basadas en sendos cocientes de la compactificación de Stone-Cech del espacio. El proceso puede generalizarse hasta afirmar que cualquier compactificación de un espacio completamente regular puede verse como un cierto cociente de la compactificación de Stone-Čech del espacio. Desde este punto de vista podemos afirmar que dicha compactificación constituye el ejemplo universal de compactificación por excelencia.

6. Bibliografía

[D] J. Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[E] R. Engelking. *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[GJ] L. Gillman, M. Jerison. *Rings of Continuous Functions*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[W] S. Willard. *General Topology*, Addison–Wesley, 1970.

[Di] C. A. Díaz. *La compactificación de Stone-Čech en la categoría de los campos fibrados de un grupo finito*, Universidad Nacional de Colombia, http://www.bdigital.unal.edu.co/2707/1/carlosaugustodiazrojas.2010.pdf