Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria

Common errors when learning fractions: A study with 12/13-year-old students in Cantabria

Alumno/a: Darío González del Olmo

Especialidad: Matemáticas

Director/a: Jesús Araujo Gómez

Curso académico 2014-2015

Fecha 16/06/2015

Contenido

1. Introducción

Los errores forman parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a lo largo de toda la etapa educativa, siendo constante su presencia en la adquisición y consolidación del conocimiento por parte de los alumnos. La aparición de respuestas incorrectas suele ser interpretada como señal de carencias en el aprendizaje de los alumnos, considerándolo incluso como un fracaso en la consecución de los objetivos planteados. Por este motivo se hace necesaria la incorporación de actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las producciones de los alumnos, que permitan diagnosticar, detectar, corregir y finalmente superar los errores. En este sentido, la mayoría de las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas insisten en la necesidad de identificar los errores cometidos por los alumnos, determinando sus causas y organizando la enseñanza teniendo en cuenta esta información, es decir, considerarlos como oportunidades de aprendizaje, buscando actividades para depurarlos y contribuir así al proceso de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

Si bien los errores atienden a diversas causas, generalmente están asociados a un esquema cognitivo inadecuado en el alumno, se mantienen en el tiempo y están apoyados en conocimientos erróneamente adquiridos con anterioridad, quedando así excluidas las manifestaciones que son consecuencia de una carencia de conocimiento o de despistes y lapsus. Por ello, todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de errores. (Abrate, Pochulo & Vargas, 2006)

Este estudio se centra en particular en la identificación de errores y dificultades en el aprendizaje de las fracciones. Este tema constituye un pilar fundamental sobre el que sustentar futuros conceptos matemáticos necesarios a lo largo de la etapa educativa, con lo que el estudio permite encontrar errores conceptuales de gran trascendencia en aprendizajes posteriores.

Recordemos que una fracción es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad, es decir, que representa un cociente no efectuado de números. El conjunto matemático que contiene a las fracciones es el conjunto de los números racionales, denotado $\mathbb{Q}$. A pesar de que el estudio de fracciones es sostenido durante años en las primeras etapas educativas, en general los alumnos siguen cometiendo errores en su resolución. Esto es principalmente debido a la multitud de interpretaciones que admiten los racionales: fracciones, decimales o porcentajes. Para que esto no suponga un impedimento en el aprendizaje de éste y otros temas que se apoyan en él, es importante analizar los errores, evitar confusiones y actitudes negativas de los alumnos frente a esta materia.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, los objetivos específicos de este trabajo son:

- Realizar un estudio recopilatorio sobre la idea de error en Matemáticas y su tratamiento en el ámbito educativo
- Identificar, desde la practica realizada en un centro de secundaria, los principales errores que cometen los alumnos de 12/13 años (1º de Educación Secundaria Obligatoria – E.S.O) en Cantabria en el uso y aprendizaje de las fracciones.
- Plantear propuestas de mejora en la enseñanza de las fracciones.

La estructura del trabajo consta de cuatro partes diferenciadas. En la primera parte comenzamos con un breve resumen de la historia de la investigación sobre errores en el aprendizaje, destacando la importancia de su estudio; a continuación, centrándonos en el papel de los errores como motor del desarrollo de conocimiento, presentamos algunos errores de matemáticos notables a lo largo de la historia. Continuamos realizando un análisis de los errores en el aprendizaje de las matemáticas; describiendo formalmente lo que entendemos por error; profundizando en el concepto de fracción y sus representaciones. Para finalizar este primer apartado, estudiamos los errores y las dificultades en el concepto de fracción durante toda la etapa educativa obligatoria.

En la segunda parte, presentamos las preguntas que suscitan esta investigación y describimos la metodología empleada. Posteriormente, en el tercer apartado se muestran los resultados obtenidos en esta investigación, realizada durante el Practicum con estudiantes de 1º de E.S.O. del I.E.S. Valle del Saja de Cabezón de la Sal, y se realiza un análisis de los mismos, comparándolos con la literatura. Por último presentamos algunas propuestas para mejorar el aprendizaje de las fracciones, tratando de superar algunas dificultades; también se incluyen aquí limitaciones y futuras líneas de investigación.

2. Literatura

En este apartado se realiza una revisión bibliográfica de los errores más comunes que cometen los alumnos y los factores que influyen en ellos. En primer lugar se realiza una conceptualización del error, destacando la importancia de su estudio (§2.1). A continuación, se realiza una conceptualización de las fracciones, donde se exponen los conocimientos previos requeridos para su estudio, el tratamiento que el currículo hace de ellas y sus múltiples interpretaciones (§2.2). Por último, se realiza una recopilación de los errores más comunes encontrados en estudios previos sobre el uso de las fracciones (§2.3).

2.1 El error en la educación matemática

El error es la manifestación patente de una dificultad. Podemos observar directamente el error en las producciones de los alumnos, en sus respuestas a las cuestiones y tareas que les demanda el profesor. “Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta” (Rico, 1995)

En matemáticas podemos analizar el error desde distintos puntos de vista. Sin embargo, dado que nuestro objetivo es estudiar su implicación en el ámbito educativo, comenzaremos con una conceptualización del error y la importancia de su estudio; a continuación, se citan algunos errores históricos detectados en el proceso de construcción del conocimiento matemático, y su contribución al desarrollo de las matemáticas, para finalizar con una caracterización de los errores en el contexto educativo

2.1.1 Conceptualización e importancia de su estudio

A lo largo de la historia el error ha sido un factor clave en el desarrollo del conocimiento científico, y por tanto del conocimiento humano. Desde la antigüedad, los errores han sido definidos como la capacidad de considerar verdaderos conceptos y procedimientos que no están convenientemente desarrollados, que incluyen ideas discordantes o interpretaciones y justificaciones falsas. (Abrate et al., 2006)

Del mismo modo, desde hace mucho tiempo los errores han constituido una preocupación constante para el docente, puesto que en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos aparecen sistemáticamente errores. Es por esto que tales procesos deben incluir actividades que susciten la reflexión sobre los propios resultados. El reconocimiento por parte del alumno de estos errores y la necesidad de superarlos contribuye a la obtención de logros de aprendizaje.

Ya en el siglo XVIII, *Roland Charnay (1789),* investigador francés con una gran influencia en la didáctica de las matemáticas a nivel mundial, afirmaba que: *"Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos."*

Pero no fue hasta mediados del siglo pasado cuando Piaget introdujo los modelos constructivistas, que han adquirido un fuerte desarrollo en estos últimos años, y que a diferencia de anteriores modelos, permiten que los errores afloren y se tomen como algo positivo, considerando al error como una buena oportunidad de aprendizaje. El objetivo que se persigue es llegar a erradicar los errores de las producciones de los alumnos, pero se admite que, como medio para conseguirlo, hay que dejar que aparezcan, incluso provocarlos, si se quiere llegar a tratarlos mejor.

En la actualidad, los errores son considerados como parte normal de los procesos de aprendizaje. Rico (1995) hace una revisión de las investigaciones sobre errores en Educación Matemática. Este autor identifica cuatro posibles líneas de investigación, no excluyentes, de especial interés para el aprendizaje de las Matemáticas. Se tratan de resumir a continuación:

1- Análisis, causas y tipologías de errores. Los estudios que avalan esta línea, se apoyan en alguna teoría psicológica o psicopedagógica. También se incluyen aquí aquellas teorías que establecen como causa de los errores la propia naturaleza del razonamiento matemático.

2- Tratamiento curricular de los errores. Aquí se encuentran estudios sobre la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas, en los que los errores tienen un papel clave.

3- Los errores y la Formación del Profesorado. Aparecen en esta línea estudios que tratan de establecer qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con el tratamiento de los errores de los alumnos.

4- Técnicas de análisis de los errores. Por último, aquí se encuadran trabajos de carácter técnico, que implementan y defienden un tipo concreto de análisis de errores. También se incluyen técnicas de análisis desarrolladas por equipos de investigación que evidencian el origen o causa de un determinado error a partir de contrastes de hipótesis.

Finalmente, Rico justifica la importancia del error en educación a través de los trabajos de Karl Popper (1979), Gaston Bacherlard (1978, 1988) e Imre Lakatos (1978), reivindicándolo como parte del proceso de aprendizaje individual. En este sentido, extrae importantes consecuencias para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Rico, 1995):

- Los errores pueden contribuir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

- Los errores no son un fenómeno aislado, ya que están estructurados en un sistema consciente, formando parte de las producciones de los alumnos durante todo su proceso de aprendizaje.

- Se debe abandonar la respuesta sancionadora al error, poniendo la atención en su previsión, tratamiento y consideración en los procesos de aprendizaje.

- Todo proceso de enseñanza es potencialmente generador de errores.

- A partir de sus errores, los estudiantes pueden aprender propiedades, conceptos y procedimientos matemáticos, al percibir aspectos de los que antes no eran conscientes.

- Al cometer un error, los estudiantes muestran lagunas en su conocimiento, y permiten tanto a los compañeros como al profesor completar su conocimiento o hacerle entender por sí mismo aquello que estaba mal.

2.1.2 Errores en la historia.

En este apartado se presentan algunos errores de matemáticos históricos que han contribuido al desarrollo del conocimiento, aparecidos en un artículo publicado por José Mª Orts (1970) y en el libro de Abrate et al (2006):

- El famoso matemático Pierre de Fermat (1601-1665), planteó que todos los números de la forma $2^{2^n} - 1$ (conocidos como números de Fermat), eran primos. Algún tiempo después, Euler (1707-1783), demostró que tal proposición era falsa a través de un contraejemplo. Sin embargo, el trabajo alrededor del problema le permitió intuir la existencia de infinitos números primos, la cual acabo demostrando, además de reconocer que existen infinitos números de Fermat.

- Por su parte Cauchy enunció incorrectamente el teorema de continuidad de la función definida por una serie convergente de funciones continuas. Este error fue precisamente el que sirvió de partida a Weierstrass, Arzelá, Dini, y Bendixson para precisar las condiciones mínimas que permiten afirmar la continuidad de la función limite.

- Por último, mencionaremos a Riemann, quien tratando de resolver el problema de la transformación conforme de un recinto plano sobre el círculo, empleó un razonamiento erróneo, mediante el que postulaba la existencia de la función que hace mínima una cierta integral doble. Pocos años después, Neumann, Schwarz y Poincaré establecieron rigurosamente la existencia de la función conforme y su prolongación analítica, abriendo nuevos cauces de investigación en la teoría.

Cabe recordar también que durante dos milenios los matemáticos consideraron como una verdad absoluta que la geometría euclidiana era la única geometría posible. Así pues, se puede concluir que el desarrollo del conocimiento científico ha estado acompañado de errores a lo largo de la historia. La identificación y análisis de estos errores ha permitido sustituir un conocimiento viejo e institucionalizado en la sociedad por uno nuevo que se revela lleno de fuerza y vigor.

2.1.3 Caracterización de los errores

Rico (1995) aporta la siguiente caracterización de los errores en el contexto educativo, con la que la mayor parte de los investigadores y especialistas actuales coinciden:

- Su aparición es “sorprendente”. A menudo los errores permanecen ocultos durante un tiempo, y solo surgen ante determinadas tareas.

- Son persistentes, esto puede indicar que se trata de una mala interpretación de los alumnos de una amplia parte del conocimiento y pueden reflejar un uso particular de reglas mnemotécnicas. Su corrección puede requerir una reorganización del conocimiento de los alumnos, ya que previamente esos mismos errores han tenido validez en otros contextos y no se manifestaron como tales.

- Son sistemáticos, ya que responden a procesos mentales incompletos o equivocados, que el alumno utiliza de modo consciente y con confianza. También pueden aparecer errores por azar, pero éstos son menos frecuentes y solo reflejarían una falta de atención o un despiste ocasional.

- Su significado es ignorado, de modo que respuestas claramente incorrectas no se cuestionan. Es decir, los alumnos que cometen un error no tienen consciencia del significado de los signos y conceptos con los que trabajan.

2.2 Fracciones

2.2.1 Conocimientos previos

A este nivel para la enseñanza de las fracciones, es indispensable que el alumno tenga ciertos conocimientos previos. Estos son importantes ya que, para lograr un aprendizaje efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee. Conocimientos que el alumno ha tenido la oportunidad de adquirir en cursos anteriores. Es de esperar incluso que se haya familiarizado ya con el concepto de fracción, ya que la comprensión de este concepto es un propósito planteado desde los primeros años de escolarización (Morales, 2011).

El alumno debe saber, por otra parte, lo que son los números enteros y lo que éstos representan; también debe estar familiarizado con las cuatro operaciones elementales (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) y haber practicado muy bien su uso no sólo en ejercicios, sino también en la resolución de problemas. Así mismo debe conocer la jerarquía y propiedades de las operaciones, como son la propiedad conmutativa, asociativa, distributiva, y los conceptos de elemento neutro y elemento opuesto o inverso. También debe estar familiarizado con el concepto de divisibilidad de números naturales, del Máximo Común Divisor y del Mínimo Común Múltiplo.

2.2.2 Las fracciones en el currículo de secundaria

Los contenidos relacionados con las fracciones en educación secundaria actualmente vienen recogidos en el **RD 1631/2006**, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. En el mismo, puede observarse que dichos contenidos aparecen en todos los niveles que se imparten durante esta etapa

Dentro de los cinco bloques en los que se divide el contenido matemático (*Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas* y *Estadística y probabilidad*), las fracciones se encuentran en el bloque 2: Números. Así, se continúa desarrollando el sentido numérico de los alumnos iniciado en la educación primaria, ampliando los conjuntos de números que se utilizan y consolidando los ya estudiados al establecer relaciones entre las distintas formas de representación numérica, como es el caso de las fracciones, decimales y porcentajes.

Teniendo en cuenta el currículo para Cantabria aparecido en el BOC en 2007, los contenidos que se deben tratar en 1º de la E.S.O. relacionados con las fracciones son muchos, pero nos centraremos en aquellos en los que se tratan de manera directa, lo cual ocurre en el Bloque 2. Números. Tales contenidos son los siguientes:

- Necesidad de las fracciones. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones.
- Lectura y escritura de fracciones. Fracciones propias e impropias. Números mixtos y fracciones equivalentes.
- Ordenación de fracciones: procedimientos gráficos y analíticos.
- Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.

- Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales. Operaciones con números decimales.

2.2.3 La fracción y sus diferentes significados.

En primer lugar debemos señalar que es preciso prestar especial atención a la forma que los estudiantes tienen de entender un concepto, debido a las importantes repercusiones que esto conlleva sobre lo que pueden hacer y aprender posteriormente. Aunque esta observación no es nueva, rara vez se toma en consideración a la hora de plantear los planes de estudio. Así pues, no se trata solamente de analizar cuidadosamente lo que aprenden los estudiantes, sino que además debemos considerar las implicaciones que algunas comprensiones tienen para el aprendizaje relacionado o futuro. Por ejemplo muchos estudiantes entienden “a/b”, como una relación parte-todo, así por ejemplo, “2/5” significa “dos de cinco”; esto no es problemático hasta que los estudiantes tratan de interpretar “5/2”, en este caso los estudiantes a menudo piensan que esto no tiene ningún sentido ya que no puedes tomar 5 de 2. Por no hablar, de como pueden interpretar 8/(5/2). En este mismo sentido, cuando los estudiantes se encuentran con expresiones del tipo “5:2”, pueden entenderlo como un comando que inicia una secuencia de acciones, en este caso dividir, hasta que se satisfaga algún criterio para detenerse, como por ejemplo, que el resto sea 0. Si este es el caso, también encontrarán dificultades a la hora de interpretar expresiones del tipo “(7:3):8”, ya que no tiene sentido desde una perspectiva de acción.

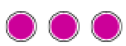
Tomando estas consideraciones, podremos lograr que los significados que queremos que los estudiantes desarrollen, les ayuden a comprender e interpretar ideas que esperamos que sean capaces de ampliar a partir de ellos.

Además, también hay que tener en cuenta que lo que los estudiantes aprenden no sólo depende de cómo se enseña sino que en igual medida se ve influido por lo que ya saben, incluyendo en esto creencias que tienen sobre las matemáticas. Del mismo modo, cada profesor enseña en función de lo que él entiende acerca de la enseñanza y de cómo los estudiantes construyen el conocimiento.

Son varias las fuentes que sugieren que existe un problema entre la forma de enseñar las matemáticas y la coherencia de éstas.

Thompson & Saldanha (2003) en su investigación señalan que una forma bastante habitual de comenzar el estudio de las fracciones, en los niveles iniciales, es hacer que los estudiantes consideren una colección de objetos, algunos de los cuales son diferentes al resto. Como vemos en la siguiente figura:

A pesar de todo, un somero análisis nos revela que, contra lo supuesto, la figura podría tener varias interpretaciones:

1. Si vemos todo el conjunto como una colección, entonces  es un quinto sobre uno. Y la figura representaría tres quintos sobre uno.
2. Si vemos  como una colección, entonces  representa un tercio sobre uno. Y la figura representaría cinco tercios sobre uno
3. Si vemos como un círculo, entonces la figura representa 5 círculos, dado que es un quinto de cinco, la figura representaría tres quintos de cinco.

En general, una fracción se define como un número de la forma *a/b*, donde *a* y *b* son números enteros y *b*≠0, *a/b* se entiende como el resultado de dividir una unidad o un todo en partes iguales (*b*) y luego tomar una cantidad (*a*) de esas partes. Donde *a* se conoce como numerador y *b* como denominador de la fracción.

“Llegar a la comprensión del concepto de fracción es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas” (Llinares, S & Sánchez, M. V., 1997, p.189)

La comprensión del concepto de fracción depende de cómo se entienda cada uno de sus significados, por lo que es importante tener claro cada uno de ellos. Debido a las múltiples interpretaciones que admiten las fracciones, el objetivo de su enseñanza debe ser que los alumnos lleguen a dotar de significado a cada una de ellas, pero también que logren establecer relaciones entre dichas interpretaciones. Además la existencia de tal variedad de interpretaciones hace necesaria una variedad correspondiente de experiencias (Kerslake, D., 1986) Siguiendo el trabajo de (Dickson, Gibson & Brown, 1991), vamos a considerar cinco interpretaciones de las fracciones:

- Como subáreas de una región unitaria (partes de un todo).
- Como subconjuntos de un conjunto de objetos discretos.
- Como puntos de una recta numérica.
- Como resultado de una operación de división.
- Como método de comparación de los tamaños de dos conjuntos, o de dos medidas.

Para finalizar, vamos a señalar algunas características a tener en cuenta en el desarrollo de la competencia con los números racionales:

- Los estudiantes poseen nociones informales de repartos equitativos, medidas y sobre proporciones.
- El desarrollo de la competencia con los números racionales es un proceso largo, que se inicia en la educación primaria, y continúa en secundaria.
- Las relaciones entre las diferentes dimensiones de la competencia matemática se considera clave para el desarrollo en el dominio de los números racionales.

2.3 Errores más comunes en el uso de las fracciones

En primer lugar debemos señalar que los errores generalmente vienen asociados a dificultades en el aprendizaje. En concreto, en el estudio y uso de las fracciones estas dificultades son principalmente debidas a la gran cantidad de significados que poseen, pero también pueden estar asociadas al lenguaje, a creencias previas que los alumnos tienen sobre este campo, o a la complejidad propia de los conceptos matemáticos. También se debe tener en cuenta que el estudio de las fracciones es un proceso largo, que requiere tiempo para su comprensión por parte de los alumnos. Ya en 1964, Madeleine Goutard, desde su experiencia con niños que presentaban dificultades en el aprendizaje de las fracciones y sus propias observaciones en la clase, señalaba que: “Las fracciones no son algo que hay que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas… la clave del éxito en la iniciación al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, la diversidad de puntos de vista”

Atendiendo a las causas que provocan los errores, Llinares & Sánchez (1988) identifican cuatro tipos: aquellos que aparecen de forma aleatoria, por descuido, distracción, etc.; debidos a que el alumno ignora la respuesta y presenta un resultado al azar; los causados por defectos en la comprensión de un concepto; y los debidos a la aplicación sistemática de procedimientos erróneos. En este último caso, nos podemos encontrar que los procedimientos utilizados por los alumnos proceden bien de métodos personales alternativos a los enseñados por el profesor, o bien son debidos al olvido o modificación de algún paso de un algoritmo enseñado.

A partir de esta primera categorización, se ha elaborado una clasificación de los errores más importantes aparecidos en el uso de las fracciones, para lo que se ha realizado una amplia revisión de estudios en este campo, entre los que cabe destacar los de Llinares & Sánchez (1988), Egodawatte (2011), Chamorro (2003) y Godino (2004). A continuación se presenta dicha clasificación:

(1) Errores por descuido o distracción.

(2) Errores por desconocimiento de la respuesta

(2.1) Simplificación incompleta

(2.2) Operaciones con enteros

(2.3) Error en la jerarquía de las operaciones

(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto

(3.1) Error con la conmutatividad de las operaciones

(3.2) Error en la ordenación de fracciones

(3.3) Comparación cualitativa incorrecta

(3.4) No consideran legitimo dividir/restar un número menor por uno mayor

(3.5) Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir

(3.6) Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones

(3.7) Error relacionado con la equivalencia de fracciones

(4) Aplicación sistemática de procedimientos erróneos.

(4.1) Sobresimplificación

(4.2) Error en el algoritmo suma

(4.3) Error en el algoritmo multiplicación

(4.4) Multiplicación cruzada incorrecta

(4.5) Común denominador incorrecto

(4.6) División o multiplicación incorrecta

(4.7) Dividir en lugar de multiplicar y viceversa

En la primera categoría (1), *errores por descuido o distracción*, se encuentran los errores que tienen que ver con falta de concentración, despistes en los alumnos. Estos errores aparecen de forma esporádica y aleatoria.

En la segunda categoría (2), *errores por desconocimiento de la respuesta*, se incluyen las respuestas que han quedado en blanco, sin terminar, o aquellos resultados propuestos al azar. Estos errores son atribuidos a carencias en los conocimientos previos. Aquí, se han identificado tres tipos de errores: (2.1) Simplificación incompleta, (2.2) Operaciones con enteros y (2.3) Error en la jerarquía de las operaciones.

(2.1) En el primer tipo, *simplificación incompleta*, Egodawatte (2011) clasificó aquellas respuestas en que los alumnos no terminan la simplificación de una fracción. Una posibilidad es que los estudiantes no saben cómo proceder en adelante. Godino (2006) señala que estos errores son debidos a la lagunas en los conocimientos previos, y que están relacionados con la comparación de fracciones, es decir, con las fracciones equivalentes.

(2.2) Entre los errores en operaciones con enteros, se incluyen errores que los alumnos cometen al operar con enteros. El motivo de estos errores no se atribuye a carencias en los conocimientos sobre números enteros de los alumnos, sino que son producto de despistes o de la precipitación. A continuación se muestra un ejemplo detectado por Abrate et al., (2006).

Ej.: 4/9:2/3=12/16

(2.3) Por último, en esta categoría, se incluyen aquellos errores cometidos por no realizar las operaciones y/o transposiciones en el orden correcto. Un ejemplo de este error es que los alumnos realizan la suma antes de una multiplicación, o que pasan el denominador de una fracción antes de sumar los términos del miembro. Véase el siguiente ejemplo publicado por Castellanos & Moreno (1997), citado por Pérez Istúriz (2014)

Ej. $\frac{5x}{3} + 2 = 3 \quad \rightarrow \quad 5x + 2 = 9$

A pesar de que el error fue detectado inicialmente en la resolución de ecuaciones de primer grado, su origen se encuentra en las operaciones con fracciones, por lo es adecuado incluirlo aquí.

En la categoría de *errores por defectos en la comprensión del concepto* (3), están contenidos aquellos errores en los que no está claro si se deben a fallos en procesos aritméticos o a carencias en los conceptos relacionados con el tema de fracciones. Encontramos siete subcategorías: (3.1) Error con la conmutatividad de las operaciones; (3.2) Error en la ordenación de fracciones; (3.3) Comparación cualitativa incorrecta; (3.4) No considerar legitimo dividir/restar un número menor por uno mayor; (3.5) Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir; (3.6) Extrapolación de calculo de los naturales a las fracciones; (3.7) Error relacionado con la equivalencia de las fracciones.

(3.1) En la categoría de *error con la conmutatividad de las operaciones*, se incluyen aquellos errores cometidos al aplicar la propiedad conmutativa en la resta, invirtiendo el orden de los números en las operaciones: a-b=b-a; o en la división, a:b=b:a. En estos casos parece que los alumnos cometen errores al no saber muy bien en qué casos pueden hacer uso de la propiedad conmutativa. (Godino, 2004)

(3.2) En la siguiente categoría, *error en la ordenación de fracciones*, se incluyen errores en los que los alumnos consideran, por ejemplo, 1/2<1/3, argumentando que 2 es menor que 3. De aquí se puede extraer que quizás el conocimiento de los números naturales pueda ser un obstáculo para el aprendizaje de los números racionales, al extender las propiedades de los primeros a estos últimos. (Godino, 2004)

(3.3) *Comparación cualitativa incorrecta*. Aquí se incluyen errores que comete el alumno llegando a conclusiones equivocadas, al asociar de manera incorrecta algunas ideas. Por ejemplo: designar la mitad de la fracción 1/6 como 1/3, que es en realidad el doble, argumentando que la mitad de 6 es 3 (Godino, 2004). A diferencia del error anterior, en éste el alumno debe relacionar dos representaciones de la fracción, la verbal y la numérica lo que podría ser una dificultad añadida.

(3.4) *No considerar legitimo dividir el número menor por el mayor o restar un número mayor a uno menor*, es un error detectado por A. Brown citado en Hart (1980). En su estudio, cuando pidió “dividir por 20 el número 16”, el 51% de los chicos de 12 años respondieron que no se podía hacer.

(3.5) La siguiente categoría, *relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir*, incluye errores debidos a un aprendizaje erróneo o incompleto de los conceptos de división y de multiplicación de las fracciones. Al igual que en el error (3.2), León (2011) señala que resulta complicado para los alumnos entender que el producto de dos fracciones puede ser menor que cualquiera de ellas, por ser contrario a lo que sucede en los números naturales, con los que el alumno esta más familiarizado. A menudo, los chicos tratan de forzar los algoritmos con fracciones para que se ajusten a lo que dicta su intuición.

(3.6) *Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones* (León, 2011). En esta categoría, al igual que en la (3.2) y (3.5) encontramos que los alumnos siguen utilizando las estrategias válidas con los naturales para la realización de cálculos con fracciones Ej. : 2/3+4/5=6/8 o 4-2/7=2/7. Observamos en estos ejemplos que realizan por separado las operaciones de los numeradores y los denominadores, no considerando la fracción como un número en si mismo, sino como un par de números naturales que no están relacionados entre sí. El origen de estos errores podría estar, como hemos indicado, en la similitud de notación que existe entre las fracciones y los naturales, pero también puede deberse a que los chicos ya conozcan el algoritmo de la multiplicación y lo estén mezclando (Llinares & Sánchez, 1988) .

(3.7) *Error relacionado con la equivalencia de las fracciones*. Según Kerslake (1986) los niños son bastante competentes en reconocer fracciones equivalentes, o dar un equivalente cuando los factores multiplicadores son sencillos. Sin embargo, tuvieron menos éxito en la adición de fracciones o en la búsqueda de una fracción entre dos fracciones dadas. Así que la capacidad de reconocer o construir fracciones equivalentes simples no se ve reflejada en una capacidad para aplicar la equivalencia con el fin de resolver otros problemas. Esto podría deberse a que los niños eran capaces de reconocer las habilidades requeridas en una pregunta sobre la equivalencia, pero no tenían una profundidad suficiente de entender para qué pueden aplicar sus conocimientos. En el siguiente ejemplo: 2/5=8/11=14/17, ante la tarea de búsqueda de fracciones equivalentes, la utilización del método aditivo de los naturales en numeradores y denominadores. (Llinares & Sánchez, 1988)

En la última categoría, *Aplicación sistemática de procedimientos erroneos* (4), se agrupan aquellos errores que se deben a que los alumnos no han comprendido en su totalidad las reglas que deben seguir a la hora de operar con fracciones. Se divide en siete subcategorías: (4.1) Sobresimplificación; (4.2) Error en el algoritmo suma; (4.3) Error en el algoritmo multiplicación; (4.4) Multiplicación cruzada incorrecta; (4.5) Común denominador incorrecto; (4.6) División y multiplicación incorrecta; (4.7) Dividir en lugar de multiplicar.

En la primera de estas categorías, (4.1) *Sobresimplificación*, los alumnos aplican la simplificación del producto a la suma (Egodawatte, 2011), o juntan términos sin considerar las operaciones que deben hacer.

(4.2) *Error en el algoritmo suma*. Tanto Godino (2004) como Abrate et al., (2006) detectaron errores en el algoritmo suma de las fracciones, produciéndose principalmente al mezclar este algoritmo con el de multiplicación. Mata & Porcel (2006) realizan un análisis en el que muestran diversas modificaciones que los alumnos realizan a partir de este algoritmo. Veamos un ejemplo:

$$\frac{2}{6}+\frac{2}{3}=\frac{4}{18}$$

(4.3) La siguiente categoría, *Error en el algoritmo multiplicación*, incluye errores en los que el alumno calcula el mínimo común múltiplo igualando los denominadores de las fracciones para posteriormente multiplicar los numeradores. Veamos el siguiente ejemplo publicado por Abrate et al., (2006), que Llinares & Sánchez (1988) ya habían encontrado.

$$\frac{1}{3}*\frac{2}{9}=\frac{3}{9}*\frac{2}{9}=\frac{6}{9}$$

(4.4) *Multiplicación cruzada incorrecta*. Cuando los estudiantes se encuentran con un natural multiplicando una fracción, a menudo multiplican tanto numerador como denominador por dicho número natural (Egodawatte, 2011).

$$3 * \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

(4.5) *Común denominador incorrecto*. Este error, detectado por Egodawatte (2011), puede manifestarse de varias maneras: por un error en las operaciones de calculo; debido a la elección del menor denominador como mínimo común múltiplo; o al considerar la suma de los denominadores como tal.

(4.6) En esta categoría, *División o multiplicación errónea*, se incluyen aquellos errores que los alumnos cometen al utilizar el algoritmo de la división o de la multiplicación de fracciones. A menudo los chicos mezclan ambos algoritmos, como vemos en el siguiente ejemplo publicado por Llinares & Sánchez (1988):

$$\frac{7}{12} * \frac{1}{2} = \frac{12}{14}$$

Como se puede observar, realizan la multiplicación cruzada con las fracciones, al igual que en el algoritmo de división. Sin embargo no realizan el procedimiento completo, lo que supondría una confusión entre ambos algoritmos, sino que colocan el resultado inverso.

(4.7) Para finalizar esta clasificación presentamos el último error, *Dividir en lugar de multiplicar*. Al igual que el anterior, éste también se encontró en la investigación de Llinares & Sánchez (1988). En este error los alumnos utilizan el algoritmo de división en las multiplicaciones y viceversa.

3. Preguntas de investigación y metodología

A continuación se presentan las preguntas que surgen tras la revisión bibliográfica, y la metodología que se utilizará para responderlas.

3.1 Preguntas de investigación

Se ha visto en la literatura la importancia del estudio de los errores para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que dichos errores pueden distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los estudiantes. En esta investigación nos centraremos en los errores más comunes en el estudio de las fracciones. Concretamente, trataremos de comprobar si los errores detectados en la literatura se siguen manteniendo en los alumnos de 12 años de Cantabria, es decir, aquellos que se encuentran cursando 1º de E.S.O y ya están familiarizados con las fracciones desde sus años de primaria. Además, se tratará de identificar las causas que llevan a los alumnos a cometer esos errores. Como finalidad última, este trabajo pretende facilitar la labor docente, poniendo al profesor en conocimiento de los resultados de la investigación realizada en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes, siendo los errores de los alumnos el dato más revelador sobre las dificultades, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales. Esto permitirá al profesor poner más atención en aquellos aspectos en los que sabe que el alumno probablemente falla.

Surgen las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cometen los alumnos de 12/13 años (1º de ESO) de Cantabria los errores aparecidos en el apartado § (2.3), errores más comunes en el uso de las fracciones?
- ¿Qué factores se identifican como causantes de estos errores?

3.2 Metodología

La parte experimental de este trabajo ha consistido en la realización de un cuestionario por parte de los alumnos y su posterior análisis en busca de errores, y las causas de éstos. Esta recogida de datos se ha realizado en el I.E.S Valle del Saja, situado en Cabezón de la Sal (Cantabria). Dicho cuestionario ha sido realizado por los alumnos de los 4 grupos de 1º de ESO que existen en este instituto, en la asignatura de Matemáticas, tras la impartición de la unidad didáctica correspondiente a Fracciones, en el bloque de Números.

El cuestionario ha sido elaborado con la idea de que los alumnos lo pudieran realizar en la hora de clase de matemáticas, por lo que no es muy extenso sin embargo se han introducido distintos tipos de ejercicios con el objeto de tratar de detectar todos los errores encontrados en la literatura, salvo los errores relacionados con las fracciones impropias, ya que en este instituto se ha decidido no enseñar esta parte para evitar errores relativos a su escritura, que muy a menudo es interpretada por los alumnos como la multiplicación entre un número natural y uno fraccionario.

El cuestionario se pasó a 67 alumnos de 12/13 años (34 chicas y 33 chicos). Para asegurar la fiabilidad de los resultados, los alumnos no sabían que iban a realizar una prueba. Por otra parte, el tipo de alumnos era heterogéneo, encontrando en el grupo algunos alumnos con necesidades educativas especiales y/o repetidores Antes de que los alumnos comenzaran a realizar el cuestionario, se les indicó que no consultaran apuntes ni libros para su realización, ya que lo que se investiga es la forma de pensar del estudiante y lo que ha aprendido al respecto. Así mismo, se les informó que dicho cuestionario no tendría repercusión en la nota de clase, con el fin de evitar que se pusieran nerviosos. De todos modos, al no poder pasar los cuestionarios simultáneamente por los cuatro grupos, para que se llevaran a cabo en presencia del autor, y tener que realizarlo en dos días consecutivos y a diferentes horas, los alumnos pertenecientes a los últimos dos grupos, ya eran conocedores de que realizarían un cuestionario sobre fracciones. Por último, mencionar que hay dos profesores encargados de dar clase de matemáticas a los grupos de 1º, repartiéndose dos grupos para cada uno. Este hecho podría influir de algún modo en la forma de aprender de los alumnos y por tanto en los errores que éstos cometen. En todo caso, como ambos profesores utilizan una metodología muy similar y comparten recursos y hojas de ejercicios en sus clases, no vamos a tomar en consideración esta posible influencia.

En esta investigación, se ha utilizado un tipo de análisis mixto (Ercikan & Roth, 2006) de los datos, que consiste en una combinación de análisis cualitativo y cuantitativo. Aunque el estudio es principalmente cuantitativo, se requiere del análisis cualitativo como apoyo para lograr una mejor comprensión de los datos cuantitativos. En la primera pregunta de investigación, se persigue identificar el porcentaje de alumnos que cometen errores, para lo que se requiere la aplicación de métodos estadísticos y por tanto, la utilización de datos cuantitativos. En la segunda cuestión, que pretende detectar los factores que influyen en dichos errores, se requiere un análisis más en profundidad que identifique las causas que llevan a los alumnos a cometer estos errores, para lo que es más conveniente el análisis cualitativo.

3.3 Cuestionario y fundamentación

Para conseguir dar respuesta a las preguntas planteadas, se diseñó el cuestionario que se puede consultar en el Anexo I. En él encontramos cinco tipos de ejercicios. El primero, compuesto de varios apartados en los que aparecen planteadas operaciones con fracciones, está pensado fundamentalmente para detectar aquellos errores relacionados con la realización de operaciones algebraicas. Se espera que sirva para detectar aquellos errores englobados en el apartado (4) de la clasificación, “aplicación sistemática de procedimientos erróneos”, aunque previsiblemente aparecerán también errores englobados en las otras categorías.

En los otros ejercicios, 2, 3, 4 y 5, se trata de que el alumno razone y ponga en práctica los conocimientos y conceptos adquiridos sobre el tema. Encontrando actividades de tipo test, como en el ejercicio 3, y otras que no requieren la realización de operaciones. Se espera que surjan principalmente errores incluidos en la categoría (3), por defectos en la comprensión del concepto, aunque nuevamente no se descarta la aparición de errores relacionados con las otras categorías.

Por otra parte, al principio del cuestionario se piden los datos de los alumnos y la nota que suelen obtener en la asignatura de matemáticas.

En un principio, el cuestionario contenía más ejercicios, pero tras mostrárselo a los profesores del primer curso de secundaria, se decidió disminuir la cantidad de ellos, por razones de tiempo, y eliminar aquellos relacionados con las fracciones impropias, como se ha mencionado anteriormente.

4. Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos del cuestionario completado por los alumnos de primero de E.S.O. del IES Valle del Saja (Cantabria) participantes en el estudio. En primer lugar recordaremos al lector la clasificación de errores utilizada. Nótese también que han sido añadidos algunos errores detectados por el autor, no previstos en la clasificación.

(1) Errores por descuido o distracción.

- (1.1) Olvido o aparición de términos o signos
- (1.2) Confusión en la operación

(2) Errores por desconocimiento de la respuesta

- (2.1) Simplificación incompleta
- (2.2) Operaciones con enteros
- (2.3) Error en la jerarquía de las operaciones
- (2.4) Por intuición o invención de la respuesta

(3) Por defectos en la comprensión del concepto

- (3.1) Error con la conmutatividad de las operaciones
- (3.2) Error en la ordenación de fracciones
- (3.3) Comparación cualitativa incorrecta
- (3.4) No consideran legitimo dividir/restar un número menor por uno mayor
- (3.5) Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir

(3.6) Extrapolación de calculo de los naturales a las fracciones

(3.7) Error relacionado con la equivalencia de las fracciones

(3.8) Relacionar un entero con una fracción partida de cero

(4) Aplicación sistemática de procedimientos erróneos.

(4.1) Sobresimplificación

(4.2) Error en el algoritmo suma

(4.3) Error en el algoritmo multiplicación

(4.4) Multiplicación cruzada incorrecta

(4.5) Común denominador incorrecto

(4.6) División o multiplicación incorrecta

(4.7) Dividir en lugar de multiplicar o viceversa

A continuación describimos aquellos errores que han sido añadidos por el autor:

Olvido o aparición de términos (1.1). Los errores son consecuencia de los cambios de fila al realizar las operaciones, o de una escritura poco legible que provoca la confusión de unos números con otros. En este sentido se han encontrado varios casos de alumnos que confunden la escritura de los números 3, 5 y 8.

Confusión en la operación (1.2). Este error es debido también a una mala escritura, que hace que los alumnos cambien el operador de multiplicación por el de resta y viceversa.

Intuición o invención de la respuesta (2.4). Se incluyen aquí los errores en que los estudiantes incurren al no conocer el procedimiento o carecer de algún conocimiento, proponiendo un resultado aleatorio únicamente basado en la intuición. También comprendemos aquí aquellas respuestas en blanco o incompletas.

Relacionar un entero con una fracción partida de cero (3.8). Este tipo de error no parece muy habitual en los alumnos de 12/13 años. Sin embargo se ha detectado un alumno entre todos los del estudio que cometía este error persistentemente, es por ello que se refleja en el estudio.

4.1 Análisis de resultados

En este análisis de resultados, centraremos nuestra atención en los errores englobados en las dos últimas categorías, por ser estos sistemáticos y predominantes en lo relativo al uso de las fracciones, dejando de lado consideraciones más superficiales:

El error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, y no solamente como consecuencia de una falta especifica de conocimiento o de un despiste. Socas (1997) citado por Gómez, J. L. L. (2009).

En primer lugar presentamos el porcentaje de alumnos que cometieron errores en cada una de las 4 categorías propuestas. El 26,9% de los alumnos cometieron errores englobados en la primera categoría, *Errores por descuido o distracción.* Hubo un 91% de los alumnos que tuvieron alguno de los errores pertenecientes a la categoría (2), *Errores por desconocimiento de la respuesta.* En la categoría (3), *Errores por defectos en la comprensión del concepto,* encontramos que un 94% de los chicos efectuaron errores incluidos en ella. Y por último ha habido un 77,6% de alumnos que cometieron errores clasificados en la categoría (4), *Aplicación sistemática de procedimientos erróneos*.

A continuación mostraremos el porcentaje de errores de cada tipo que se han encontrado en cada una de las actividades. En primer lugar se muestra el porcentaje de alumnos que realizaron correctamente el ejercicio y posteriormente se presenta un desglose del porcentaje de errores aparecidos en cada una de las categorías. Se realiza de este modo ya que en un mismo ejercicio se han detectado varios errores de diferentes categorías.

La actividad 1, estaba pensada para detectar errores de la categoría (4), ya que estaba compuesta de nueve apartados, en cada uno de los cuales el alumno debía resolver la operación con fracciones planteada, para lo que debía servirse de sus conocimientos sobre los algoritmos operacionales. Sin embargo también se esperaba detectar errores relativos a las otras categorías.

Ejercicio 1.a $3 - 2 * \frac{3}{5}$	
Solución correcta	35.8%
(1) Errores por descuido o distracción	4%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	42%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	32%
(4) Aplicación sistemática de errores	22%

El 64,2% de los alumnos encuestados no llegó a la solución correcta al resolver esta primera operación. El 42% de los errores cometidos fueron de la categoría (2), Errores por desconocimiento de la respuesta. Concretamente el error más repetido por los alumnos fue el E2.3, *Error en la jerarquía de las operaciones*. Se cree que muchos alumnos cometieron este error al encontrarse con dos enteros restando, por lo que realizaron esta operación antes que la multiplicación debido a su mayor simplicidad. Véase como ejemplo la resolución de Alexsander (12 años)

Figura 1: Error en la jerarquía de las operaciones (Alexsander 12 años)

a. $3 - 2 * \frac{3}{5} \; : \; 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{5}$

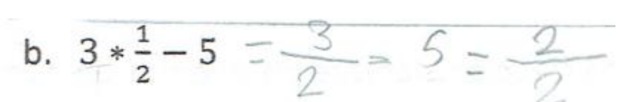
El 32% de los errores se englobaban en la categoría (3), siendo el E3.1 el más frecuente, y estando fuertemente relacionado con el E3.4. Muchos alumnos conmutaron la resta para evitar un resultado negativo o bien porque realizaban primero la multiplicación y posteriormente añadían el termino que faltaba restando. Se encontró que un 22% de los errores pertenecían a la categoría (4). En este caso, los errores estuvieron relacionados fundamentalmente con el algoritmo de multiplicación, aunque también aparecieron errores en el algoritmo suma. Finalmente un 4% de los errores se debieron a descuidos o distracciones de los alumnos, dejando la operación en blanco en algunos casos.

Ejercicio 1.b $3 * \frac{1}{2} - 5$	
Solución correcta	28.4%
(1) Errores por descuido o distracción	2.9%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	17.39%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	59.42%
(4) Aplicación sistemática de errores	20.29%

Esta operación, no fue resuelta correctamente por un 71,6% de los alumnos. Tan sólo un 2,9% de los errores fueros debidos a despistes, y un 17,39% pertenecen a la categoría (2), donde de nuevo el E2.3 fue el más común, aunque como se observa, el porcentaje de errores en esta categoría disminuyó considerablemente con respecto al primer ejercicio. Probablemente esto sea debido al orden de las operaciones, ya que mientras en el 1.a, de izquierda a derecha, primero aparecía la resta y luego la multiplicación, en este se presentaba al contrario.

Un 59,42% de los errores se produjeron debidos a defectos en la comprensión del concepto (3). En este caso los errores más frecuentes fueron el 3.4 *No consideran legitimo dividir/restar un número mayor por uno menor* y el 3.6 *Extrapolación de calculo de los naturales a las fracciones*. Ambos errores están relacionados con los conocimientos que los alumnos poseen sobre los naturales. Véase el siguiente ejemplo de Paula (12 años)

Figura 2: Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones (Paula 12 años)

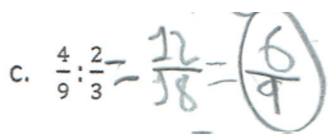


Finalmente un 20,29% de los errores fueron ocasionados por la aplicación sistemática de procedimientos erróneos, de nuevo relacionados con el algoritmo suma y multiplicación de fracciones. Como se observa el porcentaje de errores en esta categoría es muy similar a los producidos en el ejercicio 1.a.

Ejercicio 1.c $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$	
Solución correcta	52.2%
(1) Errores por descuido o distracción	2.7%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	78.38%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	5.41.%
(4) Aplicación sistemática de errores	13.51%

El 47.8% no ha sabido hacer frente a esta operación correctamente. Como se muestra en la tabla, el 2.7%, cometieron errores de la categoría (1), un 5.41º% fueron de la categoría (3) y un 13.51% de la (4), en este último apartado relacionados con el algoritmo división como es evidente. En la categoría donde más errores se encontraron fue en la (2), con un 78.38% de los errores, siendo la mayoría de ellos errores por simplificación incompleta. Este alto porcentaje, que resalta fuertemente, puede ser debido a que el ejercicio se encuentra al principio del cuestionario, por lo que los alumnos lo realizan con mayor rapidez. Además no se les había insistido mucho en que tenían que simplificar todos los resultados, cosa que se hizo con posterioridad. Veamos la siguiente resolución, hecha por Borja (12 años)

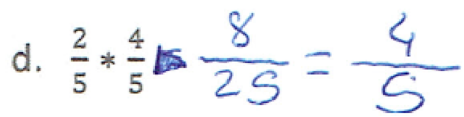
Figura 3: Simplificación incompleta (Borja 12 años)



Ejercicio 1.d $\frac{2}{5}*\frac{4}{5}$	
Solución correcta	86.6%
(1) Errores por descuido o distracción	0%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	18.2%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	0%
(4) Aplicación sistemática de errores	81.8%

Solamente un 13.4% de los alumnos no consiguieron realizar este ejercicio correctamente. Un 18.2% de los errores aparecieron en la categoría (2), produciéndose por simplificación incompleta o por dejar la respuesta en blanco. El 81.8% de los errores restantes, se agruparon en la categoría (4), produciéndose por el uso erróneo del algoritmo de multiplicación, pero también se encontró el E4.1 *Sobresimplificación*. En este caso los alumnos dividen por sus divisores el numerador y el denominador de la fracción resultante de manera independiente, como se muestra en el siguiente ejemplo de Patricia (13 años)

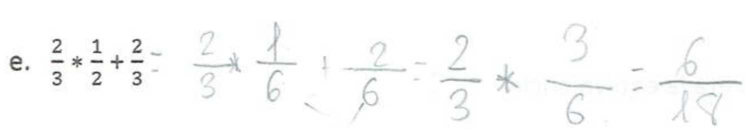
Figura 4: Sobresimplficación (Patricia 13 años)



Ejercicio 1.e $\frac{2}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	
Solución correcta	46.3%
(1) Errores por descuido o distracción	4.7%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	30.2%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	16.3%
(4) Aplicación sistemática de errores	48.8%

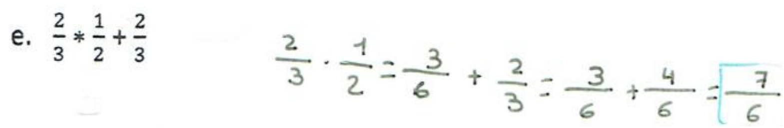
Un 53.7% de los alumnos no ha llegado a la solución correcta de la operación. Un 4.7% de los errores se produjeron *por descuido o distracción* (1). El 30.2% de los alumnos que fallaron cometió errores de la categoría (2), entre los que resaltaban los *errores con la jerarquía de las operaciones* E2.4, como se muestra en la siguiente actuación de Paula (12 años)

Figura 5: Error en la jerarquía de las operaciones (Paula 12 años)



Un 16.3% cometió errores por defectos en la comprensión del concepto, en su mayor parte relacionados con los conocimientos que los alumnos tienen sobre los naturales. Y un 48.8% de los errores, pertenecían a la categoría (4), *Aplicación sistemática de errores*, encontrando tanto errores en el algoritmo suma como en el de multiplicación. Así se puede observar en el siguiente ejemplo de Adrián, en el cual mezcla ambos algoritmos:

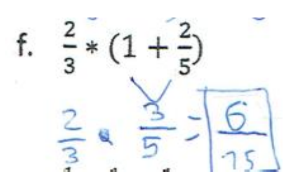
Figura 6: Error en el algoritmo suma (Adrián 12 años)



Ejercicio 1.f $\frac{2}{3} * (1+\frac{2}{5})$	
Solución correcta	55.2%
(1) Errores por descuido o distracción	12.1%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	12.1%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	30.3%
(4) Aplicación sistemática de errores	45.5%

El 44.8% de los alumnos cometió algún error al realizar este ejercicio. Un 12.1% de los errores detectados son de la categoría 1, y ese mismo porcentaje es también el de errores detectados en la categoría 2. Un 45.5% de los errores en este ejercicio correspondieron a la categoría (3), entre los que cabe destacar el E3.6 *Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones*. En concreto, los alumnos suman directamente el entero uno al numerador de dos quintos. Como se observa en la resolución de Marcos (12 años)

Figura 7: Extrapolación del calculo de los naturales a las fracciones (Adrián 12 años)



O bien expresan el uno en forma de fracción, para sumar posteriormente como en los enteros, numerador más numerador y denominador más denominador. Como realiza Guillermo (12 años)

Figura 8: Extrapolación del calculo de los naturales a las fracciones (Guillermo 12 años)

$$\text{f.}\quad \frac{2}{3} * \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{18}$$

Un 30.3% de los errores se ubicaron en la categoría (4), entre los que encontramos diversas modificaciones del algoritmo suma, empleadas por los alumnos. Mostramos dos ejemplos, de Alba (12 años) y Elvis (13 años)

Figura 9: Error en el algoritmo suma (Alba 12 años)

$$\text{f.}\quad \frac{2}{3} * \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{1} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{6}{15}}$$

Figura 10: Error en el algoritmo suma (Elvis 13 años)

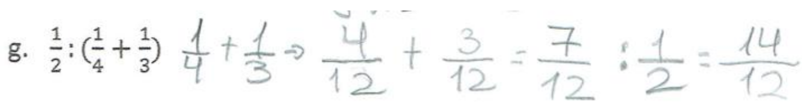
$$\text{f.}\quad \frac{2}{3} * \left(1 + \frac{2}{5}\right) \quad \frac{5}{5} + \frac{10}{5} \;\text{E4.12}\; = \frac{15}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{15}$$

Ejercicio 1.g $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$	
Solución correcta	43.3%
(1) Errores por descuido o distracción	4.2%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	4.2%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	41.6%
(4) Aplicación sistemática de errores	50%

Un 56.7% de los alumnos no realizo bien este ejercicio. En las categorías (1) y (2) se englobaron el 8.4% de los errores. Un 41.6% de los errores correspondieron a la categoría (3), entre los que destaca el E3.1 *Error con la conmutatividad de las operaciones*. Fueron numerosos los alumnos que realizaron correctamente la

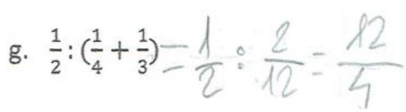
suma del paréntesis, pero después lo dividieron entre ½ y no al revés como indicaba la operación. Esto podría deberse a que los alumnos realizan primero el paréntesis y después vuelven a añadir lo de fuera, pero sin tener en cuenta el lugar en el que estaba. Veamos el siguiente ejemplo de Andrea (12 años).

Figura 11: Error con la conmutatividad de las operaciones (Andrea 12 años)



Un 50% de los errores se debieron a fallos en los algoritmos, es decir pertenecientes a la categoría (4). La mayoría de estos errores se produjeron en el algoritmo suma, E4.2, A continuación se muestran un ejemplo de Paula (12 años).

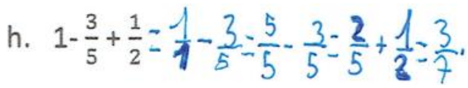
Figura 12: Error en el algoritmo suma (Paula 12 años)

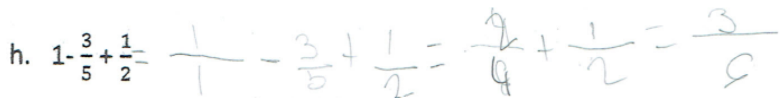


Ejercicio 1.h $1-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$	
Solución correcta	50.7%
(1) Errores por descuido o distracción	9.3%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	14.8%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	50%
(4) Aplicación sistemática de errores	25.9%

En este ejercicio, el 49.3% de los alumnos cometió algún error. El 9.3% de los errores fueron de categoría (1). Un 14.8% correspondieron a la categoría (2). En la categoría (3) se agruparon el 50% de los errores, donde los más frecuentes fueron el E3.1, *Error con la conmutatividad de las operaciones*, y el E3.6, *Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones*. Como muestra, se presentan dos soluciones donde aparecen estos errores.

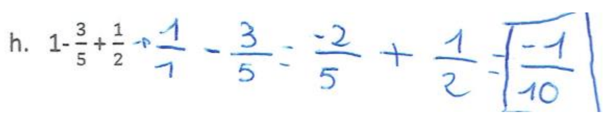
Figura 13: Error con la conmutatividad de las operaciones y Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones


(Mario, 13 años)


(Hugo, 13 años)

Por último, un 25.9% de los errores se catalogaron en la categoría (4), siendo el error en el algoritmo suma el más habitual. Veamos la siguiente resolución presentada por Alba (12 años)

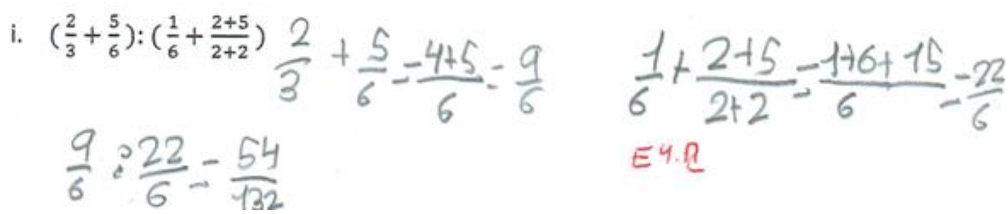
Figura 14: Error en el algoritmo suma (Alba, 12 años)



Ejercicio 1.i $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{2+5}{2+2}\right)$	
Solución correcta	17.9%
(1) Errores por descuido o distracción	8.5%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	30.9%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	12.7%
(4) Aplicación sistemática de errores	47.9%

Tan solo el 17.9% de los alumnos consiguió realizar correctamente esta operación. Un 8.5% de los errores se encontraban en la categoría (1). En la categoría (2), se agruparon el 30.9% de los errores, la mayoría de los cuales se debieron a que los alumnos no terminaron la operación o ni siquiera la empezaron. En la categoría (3) aparecieron el 12.7% de los errores, siendo el error con la conmutatividad de las operaciones el más común. Y finalmente, la mayoría de los errores, el 47.9% se concentraron en la categoría (4), lo cual era de esperar dado que era el apartado donde más operaciones se requerían. Algunos de estos errores vinieron originados por la escritura de una suma, tanto en el numerador como en el denominador, en una de las fracciones, notación a la que los niños no estaban habituados. Sin embargo, aunque se esperaba que los alumnos cometieran un error de sobresimplificación en este ejercicio, este no se produjo. Veamos a continuación un ejemplo de operación errónea realizado por Ismael (13 años)

Figura 15: Error en el algoritmo suma (Ismael, 13 años)



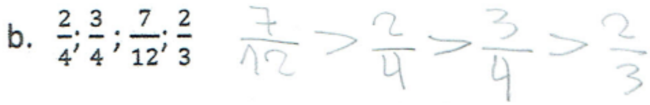
Continuamos ahora con los resultados del ejercicio 2, compuesto por dos apartados en los que los alumnos debían ordenar algunas fracciones.

Ejercicio 2	
Solución correcta	52.2%
(1) Errores por descuido o distracción	0%
(2) Errores por desconocimiento de la respuesta	33.33%
(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto	50%
(4) Aplicación sistemática de errores	16.67%

Fundamentalmente los errores se agruparon en las categorías (2) y (3), con un 33.33% y un 50% respectivamente. En la categoría (2), la mayoría de los errores de debieron a que los alumnos no realizaron el ejercicio, posiblemente por carencias en los conocimientos previos o por que no sabían cómo proceder. En la categoría (3), se dieron fundamentalmente los errores E3.2 *Error en la ordenación de fracciones* y E3.7 *Relacionados con la equivalencia de fracciones*. Véanse los siguientes ejemplos de resolución.

Figura 16: Error relacionado con la equivalencia de fracciones y error en la ordenación de las fracciones

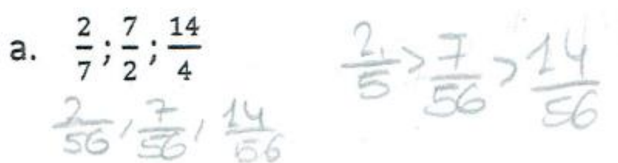
Alberto (12 años)



Alejandro (13 años)

En la categoría (4) los errores encontrados fueron en el cálculo del denominador común, ya que no se requería realizar más operaciones. Veamos el siguiente resultado presentado por Vanessa (12 años)

Figura 17: Común denominador incorrecto (Vanessa, 12 años)



Finalmente presentamos los resultados obtenidos en los ejercicios 3, 4 y 5.

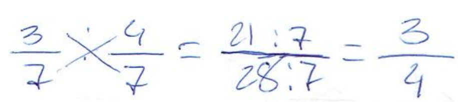
El ejercicio 3 estaba formado por cuatro apartados en los que el alumno debía responder verdadero/falso. Un 56.72% de los alumnos respondió correctamente al primer apartado, $\frac{1}{3}$ *es la mitad de* $\frac{1}{6}$. El resto de los alumnos cometió el error E3.3 *Comparación cualitativa incorrecta*. En el apartado b), $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, tan solo el 16.42% de los alumnos respondió de manera incorrecta, incurriendo en el error E3.2, *Error en la ordenación de fracciones*. En estos dos apartados se le pide al alumno que compare dos fracciones. Los resultados pudieran interpretarse como que a los alumnos les cuesta más llegar a la respuesta cuando la representación de los datos es verbal, como ocurre en el apartado a).

Un 43.28% de los alumnos respondió correctamente al apartado c), *Al multiplicar 5 por una fracción siempre obtenemos un número mayor que 5*. Hubo un 50.75% que cometió el error E3.5 *Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir*. Y un 5.97% que dejo el ejercicio sin contestar.

Por último, el apartado d) $\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{11}{17}$, fue respondido adecuadamente por un 91.04% de los alumnos. Un 5.97% dejó la respuesta en blanco y un 2.99% cometió el error E3.7 *Error relacionado con la equivalencia de fracciones*. El numerador de la última fracción debía haber sido 14 en lugar de 11, con lo que la diferencia entre numeradores y denominadores hubiera sido de 6 unidades, lo que seguramente hubiera provocado más errores en los alumnos, ya que como vimos en el primer ejercicio muchos se apoyan en sus creencias sobre los naturales y las aplican a las fracciones.

En el ejercicio 4, se pedía encontrar un número entre las fracciones 3/7 y 4/7, con el objeto de que los alumnos hicieran uso de la equivalencia de fracciones. Un 47.76% contestaron de manera errónea, cometiendo errores de la categoría 2, es decir que bien dejaban la respuesta en blanco o bien proponían un resultado al azar basado en su intuición, como se observa en el siguiente ejemplo de Carlota (14 años).

Figura 18: Error por intuición o invención de la respuesta (Carlota, 14 años)



Para finalizar, en el ejercicio 5 los alumnos debían completar las siguientes fracciones equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{12} = \frac{14}{\quad}$

Un 41.79% de ellos lo resolvió convenientemente, mientras que el 33.8% cometió errores de la categoría (2), y un 22.39% de la categoría (3).

4.2 Interpretación de resultados

En este apartado se comentan los resultados obtenidos de acuerdo a la clasificación expuesta en el capítulo de literatura: (1) errores por descuido o distracción, (2) errores por desconocimiento de la respuesta, (3) por defectos en la comprensión del concepto y (4) aplicación sistemática de procedimientos erróneos. Es importante destacar que a estas edades los conceptos no están consolidados y los errores son diversos, lo que dificulta su categorización.

(1) Errores por descuido o distracción.

En la literatura no se señalaba ningún error concreto en esta categoría. Tras el análisis de los datos recogidos se han añadido dos tipos de errores: (1.1) Olvido o aparición de términos y (1.2) Confusión en la operación.

(1.1) *Olvido o aparición de términos*. Un 15% de los alumnos cometieron este tipo de error, cuya causa como hemos señalado anteriormente suele ser una escritura poco legible que provoca confusiones de unos números con otros, o que al operar primero una operación, por ejemplo entre paréntesis, se olvidan del resto del enunciado como se puede observar en el siguiente ejemplo de Inés (12 años):

g. $\frac{1}{2}:(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})$ $\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$

(1.2) *Confusión en la operación*. Un 16.4% de los chicos efectuaron este error. Al igual que el error anterior, éste es consecuencia también de una mala escritura, provocando que los alumnos confundan los operadores, es decir que por ejemplo multipliquen en lugar de restar.

(2) Errores por desconocimiento de la respuesta.

(2.1) *Simplificación incompleta*. El 50.7% de los chicos reprodujo este error, no simplificando las fracciones. Como señalaba Godino (2004), parece que la causa de estos errores radica en las dificultades que tienen los alumnos con las fracciones equivalentes, ya que cuando los factores de simplificación eran sencillos prácticamente no aparecía este error. Véase el siguiente ejemplo de Manuel (12 años):

$$\frac{9}{6}:\frac{23}{12}=\frac{108}{138} \quad \frac{108}{138}=\frac{54}{69}$$

(2.2) *Operaciones con enteros*. Un 34.3% de los alumnos cometieron este error, detectado en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de enteros al igual que en las investigaciones de Abrate et al. (2006). Muchos de estos errores podrían deberse a que el alumno centra su atención en las fracciones y la forma de resolverlas, descuidando las operaciones más simples. En el siguiente ejemplo de Diego (12 años), se observa que utiliza adecuadamente el algoritmo de la división de fracciones pero falla en la multiplicación de enteros.

$$\frac{9}{6} : \frac{23}{12} = \frac{108}{173} = \frac{108}{173}$$

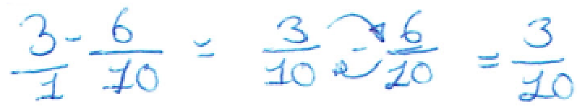
(2.3) *Error en la jerarquía de las operaciones*. Al igual que en las investigaciones de Castellanos & Moreno (1997), se ha detectado este error en el contexto de las operaciones con fracciones, habiendo un 34.3% de estudiantes que lo cometen. Este error se incluyó en esta categoría ya que con la revisión de la bibliografía no se pudo determinar si se debía a un error aritmético o a un error de concepto. Tras el estudio tampoco se puede concluir su clasificación. Pudiera ser que se debiera a una cuestión de prioridad en los métodos aprendidos, ya que durante su etapa de primaria los alumnos aprenden que, si hay una fracción y un número que están sumando, deben realizar la operación. Aunque en algunos casos parece que responde solamente a una cuestión de comodidad o conveniencia, como se ilustra en el siguiente ejemplo de Alba (12 años)

a. $3 - 2 * \frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{1} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

(2.4) *Intuición o invención de la respuesta*. Un 56.7% de los alumnos cometieron errores en esta categoría, dejando incompleta o en blanco la respuesta de los ejercicios. Estos errores pueden ser debidos a carencias en los conocimientos previos de los alumnos.

(3) Errores por defectos en la comprensión del concepto.

(3.1) *Error con la conmutatividad de las operaciones*. Como señala en sus investigaciones Godino (2004), los alumnos cometen errores al no saber muy bien en qué casos pueden hacer uso de la propiedad conmutativa. Concretamente en este estudio el 52,2% de los niños cometieron este error en al menos una ocasión. Este error parece, en ocasiones, relacionado con el E3.4, ya que el 32.5% de los alumnos que cometieron alguno de estos dos errores cometió también el otro. Cuando hay que restar un número mayor a uno menor por ejemplo, como vemos en la siguiente resolución realizada por Sofia (13 años).



(3.2) *Error en la ordenación de fracciones*. Este error señalado por Godino (2004) también apareció en la recogida de datos, obteniendo que un 31.3% de los alumnos lo cometían. Sus causas pueden ser diversas, como el propio Godino indica: quizás el conocimiento de los naturales pudiera ser un obstaculo para el aprendizaje de los racionales, o pudiera deberse a que los estudiantes retroceden a una representación en *área*, en la que ½ y ¼ se visualizan como números en abstracto, lo que dificultaría la comprensión por parte de los alumnos, de que la mitad de una cantidad puede ser menor que una cuarta parte de otra, como señalan Dickson el al., (1991) en su investigación. Además, la dificultad de la comparación de dos fracciones puede variar en función de los números que figuren en los numeradores y denominadores.

(3.3) *Comparación cualitativa incorrecta*. Este tipo de error se ha detectado en un 40.3% de los alumnos. Se trata de un error relacionado con el anterior, de hecho el 33% de los alumnos que cometen uno de los dos errores también cometen el otro. Así mismo se observa que este error supera en casi diez puntos porcentuales al anterior, lo que podría deberse a que el alumno debe relacionar en este caso dos representaciones diferentes de la fracción, una dificultad añadida que ya señalaban Dickson et al., (1991) en su estudio.

(3.4) *No considerar legítimo dividir/restar un número menor por uno mayor*. Un 28.4% de los alumnos encuestados efectuó este error. Este porcentaje es menor de lo esperado tras la lectura de la literatura, pues el estudio de A. Brown, citado por Hart (1980), revelaba que un 51% de los niños de 12 años no se ha percatado de que cualquier número entero puede ser dividido entre cualquier otro dando un resultado exacto expresable mediante una fracción. En este sentido Dickson, et al., (1991) también sostenían que el 67% de los niños de esta edad tenían dificultades con este concepto.

(3.5) *Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir*. Encontramos que éste es un error que cometen el 49.3% de los alumnos encuestados, resultado algo superior al obtenido por Dickson et al., (1991) en su trabajo, donde apuntaban que entorno al 37% de los niños de 12 años cometían este error. Su causa podría deberse a las creencias previas que los alumnos poseen sobre los naturales como apuntaba León (2011) en su trabajo.

(3.6) *Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones*. Este error, cometido por el 38.8% de los alumnos se revela como uno de los más importantes, ya que de cometerlo los chicos podrán incurrir también en los errores (3.2), (3.3), (3.5) y (3.7), como de hecho el 96.3% de los estudiantes así lo hicieron. La causa, como señala León (2011), sería que los chicos siguen utilizando las estrategias válidas con los naturales para la realización de sus cálculos con fracciones. Aunque también podría atribuirse, como afirman Llinares & Sánchez (1988), al conocimiento del algoritmo de la multiplicación, provocando la mezcla de éste con el de la suma. Véase el siguiente ejemplo de Daniela (12 años).

$$\frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{2+6}{9} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

Así mismo, debemos mencionar que el porcentaje de alumnos que cometieron este error es muy similar al registrado por Hart (1981), citado por Dickson et al., (1991), quien encontró que entorno al 30% de los escolares ingleses de 13 años cometían este error en la suma.

(3.7) *Error relacionado con la equivalencia de fracciones*. En el 35.8% de los alumnos se detectó este error, porcentaje sensiblemente inferior al esperado, ya que Dickson et al., (1991) sostienen en su estudio que la idea de equivalencia en situaciones abstractas solamente es comprendida plenamente por una minoría de chicos de 15 años. En el siguiente ejemplo puede observarse cómo Mara (12 años) es capaz de completar la primera fracción equivalente pero se bloquea con la segunda, proponiendo un resultado al azar.

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{14}{48}$$

Por otro lado, los resultados coinciden con lo descrito por Llinares & Sánchez (1988), quienes afirmaban que ante una tarea de búsqueda de fracciones equivalentes varios niños recurrían al método aditivo de los naturales en numeradores y denominadores.

(3.8) *Relacionar un entero con una fracción partida de cero*. Este tipo de error parece superado en este nivel, pues tan sólo un alumno lo realizó. Podría deberse a diversos motivos, pero parece claro que el alumno no esta relacionando la fracción con su significado de división.

(4) Aplicación sistemática de procedimientos erróneos.

(4.1) *Sobresimplificación*. Tan solo un 7.4% de los alumnos cometió este error. Su origen, como apunta Egodawatte (2011), podría deberse a que los alumnos aplican la simplificación del producto a la suma de fracciones. Aunque tambien se han detectado algunos alumnos que simplificaban las fracciones dividiendo numerador y denominador por distintos factores, como se puede observar en el siguiente ejemplo de Patricia (13 años) $\frac{8}{25} = \frac{4}{5}$

(4.2) *Error en el algoritmo suma*. Encontramos que un 56.7% de los alumnos cometió errores de diversa índole en el algoritmo suma, lo que confirma los resultados del estudio realizado por Haseman (1980), citado por Dickson et al., (1991), quien afirmaba que los procedimientos computacionales para la manipulación de fracciones eran introducidos demasiado prematuramente, tras encontrarse con que tan sólo un 19% de su muestra, con chicos de 13 años, realizaba correctamente una suma de fracciones. Así mismo, Dickson et al., (1991) manifestaba, en su estudio, que sumar por separado los numeradores y los denominadores de una fracción es un error frecuente cuya causa podría encontrarse en la manera en la que se representan las fracciones (diagrama parte-todo) en sus primeros años de estudio.

(4.3) *Error en el algoritmo multiplicación*. De nuevo los resultados de la investigación, con tan sólo un 10.4% de estudiantes que cometen este error, coinciden con la revisión bibliográfica, ya que como sostenía Bright (1978), citado por Dickson et al., (1991), las dificultades de la mecánica de sumar fracciones sin denominador común superan las dificultades conceptuales de la multiplicación.

(4.4) *Multiplicación cruzada incorrecta*. Como señalaba Egodawatte (2011) en su investigación, encontramos que el 4.5% de los alumnos, al encontrarse con un natural multiplicando una fracción, multiplicaban tanto numerador como denominador por dicho natural, como se observa en el siguiente ejemplo de Rosa (12 años)

$$\text{b. } 3 * \frac{1}{2} - 5 = \frac{2}{6}$$

Nuevamente este error podría atribuirse a una falta de relación entre los naturales y su representación como fracción.

(4.5) *Común denominador incorrecto*. Un 31.3% de los estudiantes realizó incorrectamente el cálculo del mínimo común múltiplo. Sus causas son diversas, como señala Egodawatte (2011), desde un error en el cálculo, a la elección del menor número como m.c.m, o considerar la suma como el m.c.m. En los dos últimos casos parece que el alumno ha olvidado el algoritmo para calcularlo o lo recuerda parcialmente.

(4.6) *División y multiplicación incorrecta*. Un 13.4% de los estudiantes efectuó este error, cuya procedencia parece estar en una equivocación entre los algoritmos de la multiplicación y de la división, es decir, los alumnos no recuerdan bien los algoritmos, mezclándolos. Véase el siguiente ejemplo de Ana (13 años)

$$\frac{1}{2} \div \frac{7}{12} = \frac{14}{12}$$

(4.7) *Dividir en lugar de multiplicar*. En este caso los alumnos parecen recordar los algoritmos de división y multiplicación de fracciones pero los intercambian: es posible que recuerden que en uno de los algoritmos se multiplicaba en cruz y lo relacionen con el de la multiplicación por ser la forma del operador. Véase el siguiente ejemplo de Aida (12 años)

$$\frac{2}{5} * \frac{4}{5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

5. Propuestas y mejoras

Vamos a identificar tres áreas principales de dificultad en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, que tienen que ver con la interpretación de ciertos aspectos de la idea de fracción, a saber: considerar la división como un aspecto de la fracción; entender la fracción como un número; y la equivalencia de fracciones.

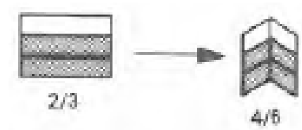
Si bien el uso del modelo parte-todo, parece adecuado para la introducción de las fracciones en los primeros años, al mismo tiempo parece obstaculizar la ampliación de los significados de fracción. Parece probable que las tres áreas de dificultad con las fracciones antes mencionadas son resultado de la incapacidad de establecer una conexión entre el modelo geométrico y la forma simbólica abstracta de una fracción, requiriendo un importante reajuste para lograrlo, lo cual no es posible con algunos niños. Es por ello que se propone abandonar este modelo geométrico en cursos superiores, y presentar la idea de fracción en un contexto más amplio.

Veamos ahora como se podrían reducir algunas de las dificultades señaladas anteriormente:

- Muchos alumnos encuentran dificultades al considerar la división como un aspecto de la fracción. Cuando se les presenta una fracción del tipo 3/4, muchos responden que no se puede dividir un número por uno mayor, es decir, no están considerando que 3/4=3:4. Esta dificultad también provoca que utilicen la propiedad conmutativa para la división, es decir, que consideren 3/15=15/3. A través del uso de la calculadora se podría enfatizar la no conmutatividad de la división, y también serviría para conectar las representaciones de fracción, decimal y división, 1/2=0´5=1:2. También se podrían presentar estas fracciones en situaciones cercanas al alumno, como por ejemplo, repartir un litro de leche en tres vasos. La realización de actividades prácticas puede ayudar a los chicos a reconocer en la fracción su significado de división.

- Del mismo modo, muchos alumnos encuentran dificultades en considerar la fracción como un número, para superarlas se puede apoyar el aprendizaje en las representaciones de las fracciones en la recta numérica, para el alumno no resulta muy complicado de entender partiendo del modelo parte-todo. Algunos ejercicios que podríamos utilizar para reforzar esta significación podrían ser, del tipo 2*_=7 o pedir números que se encuentren entre dos enteros consecutivos. Resulta pues, muy importante que el profesor acentúe la transición desde el mundo de los números enteros a los racionales, en este sentido el uso de la calculadora ayuda a establecer un vínculo entre los enteros y las fracciones. También se debe considerar el trabajar con los números fraccionarios en otros temas, no directamente relacionados, ya que en la mayor parte de estos, el resultado que se pide siempre es un entero.

- En el aprendizaje de las fracciones equivalentes, la mayoría de los alumnos son capaces de reconocerlas cuando se presentan de forma geométrica o cuando el factor de multiplicación entre fracciones es un número sencillo (2, 3, 4, 5). Pero aparecen diferencias entre la habilidad para construir fracciones equivalentes y la habilidad para ordenar fracciones, aquí en muchas ocasiones los alumnos no saben si las fracciones son equivalentes o una es múltiplo de la otra. Esto pone de manifiesto la importancia del elemento identidad, 4/4 por ejemplo, para ir de una fracción a otra, multiplicando y dividiendo por el mismo número. Los chicos tienden a pensar que solo han multiplicado por 4, por lo que con frecuencia argumentan que 12/16>3/4, ya que relacionan a menudo multiplicar con aumentar y dividir con disminuir. Esta falta de sentido que le dan a la idea de equivalencia puede explicar errores en el algoritmo suma, ya que reforzaría la idea de que 3/4+2/3=5/7. De nuevo el uso de gran variedad de casos de equivalencia hace que aumente la capacidad de los chicos para hacer frente a tareas simples que involucren el uso de fracciones equivalentes. Por ejemplo, se podrían mostrar líneas paralelas con fracciones equivalentes marcadas mediante puntos en cada línea, de modo que se observe la equivalencia. También podría recurrirse al plegado de papel para inculcar la noción de equivalencia.



(Dickson, Gibson, & Brown, 1991)

Así mismo, el uso de la calculadora para que los alumnos evalúen fracciones equivalentes (2/3; 8/12; 10/15) proporcionaría una experiencia extra de equivalencia.

- Así pues, a un nivel introductorio parece necesario proporcionar abundantes experiencias de las diferentes representaciones de las fracciones, con el objeto de establecer los fundamentos de los aspectos de medición y operador. Dado que las fracciones son comúnmente utilizadas en ambas formas. Por ejemplo, el modelo *recta numérica*, si bien puede ser causa de dificultades, también ofrece ciertas ventajas. Hace aparecer de forma más natural las fracciones impropias y resalta el hecho de que las fracciones forman una extensión del conjunto de los números naturales. Además conduce de forma natural al empleo de las fracciones en medidas de todo tipo y hace que sea más sencillo comprender las operaciones de adición y sustracción. Por otro lado, las operaciones de multiplicación y división se comprenden mejor en tanto que operadores (Dickson et al., 1991).

- Debemos señalar también, que el significado de fracción, el manejo de sus algoritmos y la multiplicidad de contextos, son dificultades frecuentes en el proceso de aprendizaje de las fracciones. En este sentido Godino (2004) afirma que: “su estudio está condicionado por la progresiva comprensión de las operaciones aritméticas y de las situaciones de medición de magnitudes no discretas. Los números racionales son el primer conjunto de experiencias numéricas de los niños que no están basadas en los algoritmos de recuento como los números naturales”.

Dado que parece que la mayoría de los alumnos olvidan parte de los procedimientos que se les han enseñado y tratan de “repararlos”, cometiendo errores, pues en muchos casos apenas si existe una comprensión conceptual que oriente y sirva de ayuda en estas “reparaciones”. Una estrategia viable para el aprendizaje de las fracciones podría ser la resolución de problemas, donde los alumnos desarrollen habilidades para comprender y plantear problemas, así como la capacidad de realizar las operaciones que se requieren y de interpretar los resultados; huyendo del aprendizaje de procesos rutinarios y procedimientos algorítmicos que estimulan la mecanización y la memorización sin sentido, minimizando el razonamiento lógico, la búsqueda de soluciones, la crítica y la fundamentación de opiniones.

- Por último, parece probable que el aprendizaje de las fracciones resultaría más sencillo para los alumnos, si los profesores desarrollan sus habilidades de escuchar a los niños y de animarlos a hablar de su interpretación de las fracciones y los problemas que encuentran asociados a ellas. Así mismo una enseñanza más práctica y proporcionar a los alumnos una amplia experiencia en el uso de las fracciones, en distintos ámbitos, mejorarían el aprendizaje. Esto, hoy en día resulta fácil y sencillo gracias a los ordenadores y multitud de applets que trabajan diferentes significados de las fracciones, por ejemplo la aplicación KBruch, como señala Real (2012) en su estudio.

A continuación se proponen algunas sugerencias de mejora para futuras investigaciones:

- Realización de entrevistas individuales con los niños, ya que al hablar y escucharles sería más sencillo detectar la naturaleza de los errores que cometen y las estrategias que utilizan. Las pruebas de diagnóstico, nos dan información sobre el tipo de errores cometidos, pero no dan una idea sobre la forma que el niño tiene de pensar.

- Investigar la manera en que las fracciones se introducen en la escuela primaria, ya que es aquí donde los alumnos se enfrentan por primera vez a ellas. Y sería interesante descubrir si esa primera aproximación se basa solamente en el modelo parte-todo, o si por el contrario, los maestros amplían el concepto de fracción más tarde.

- Extender la investigación a otros niveles de secundaria, para contrastar la evolución de la comprensión y el razonamiento matemático, así como para observar la evolución en el tipo y la frecuencia de errores que cometen los alumnos.

- Ampliar el objeto de la investigación al estudio de razones, decimales y porcentajes, ya que esto formaría un estudio global sobre los números racionales y sus diferentes representaciones.

- En el cuestionario, se podrían incluir algunos problemas de contextualización real, para estudiar la forma de razonamiento de los chicos. También se podrían establecer las preguntas en orden ascendente de dificultad o incluso realizar otro modelo de cuestionario invirtiendo el orden de dificultad, con el objetivo de comprobar si estos factores influyen o no en la aparición de errores.

Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

Aracil, J. M. O. (1970). *Breves comentarios sobre algunos errores matemáticos*. *Gaceta matemática: revista publicada por el Instituto" Jorge Juan" de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española*, (1), 11-21. http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5953

Astolfi, J. P. (2004). *El "error", un medio para enseñar.* Díada/SEP Biblioteca para la actualización del Magisterio. México. 7-25.

Beato, J. (2010). *Errores correctos en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (63): 35-41.

Dickson, L., Gibson, O., & Brown, M. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Ministerio de Educación y Ciencia.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in Algebra.* Department of Curriculum, Teaching and Learning. Tesis doctoral. Universidad de Toronto.

Engler, A., Gregorini, M.I., Muller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática.* Revista Premisas, (23): 23-29.

Erickan, K. & Roth, W. M. (2006). *What good is polarizing research into qualitative and quantitative.* Educational Researcher, 35(5): 14-23.

Escolano, E. & Gairín, J.M. (2005). *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria*. Unión: Revista iberoamericana de educación matemática, (1): 17-35.

Gairín, J. M. (2001). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Contextos Educativos: Revista de educación, (4): 137-159.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2011). *Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas.* Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. Granada.

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gómez, J. L. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gómez, C. M. (1999). *Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones.* Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (31): 87-95.

Hart, K. M. (1980). *Secondary School Children's Understanding of Mathematics. A Report of the Mathematics Component of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme.*

Hurtado Orduz, M. E. (2012). *Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto*. Tesis doctoral. Universidad Nacional de Colombia.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON Publishing Company, Ltd., Darville House, 2 Oxford Road East, Windsor, Berkshire SL4 1DF, England..

León, G. (2011). *Unidad didáctica: Fracciones.* Trabajo Fin de Master. Granada.

Linares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón: desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 187-220). Pearson Educación.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo.* Sevilla: Sintesis.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Aprender a enseñar, modos de representaciónm y número racional.* Universidad de Sevilla.

Meza, A., & Barrios G. (2010) *Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones.* Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Morales, C. P. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota.* Tesis Doctoral. Universidad nacional de Colombia.

Pérez Istúriz, M. (2014). *Errores más comunes en a resolución de ecuaciones de primer grado con alumnos de 12/13 años en Cantabria.* Trabajo Fin de Master. Santander.

Porcel, E., & Mata, L. (2006). *Análisis de los errores cometidos en el algoritmo de la Suma de Fracciones por ingresantes a la Fa.C.E.N.A.* http://www.iaea.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-018.pdf

Real, M. (2012). *Estudio de los números racionales con KBruch*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (69): 101-107.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ríos, Y (2009). *Competencias procedimentales adquiridas durante la aplicación de situaciones didácticas referidas a las fracciones*. Telos, 1(23): 310-331. Venezuela. Universidad Rafael Belloso Chacín.

Sánchez, M. V. (2001). *Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones: estudio de casos: implicaciones para la formación de maestros.* En Gómez, J. M. B., & González, E. F. (2001). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Ministerio de Educación.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). *Fractions and multiplicative reasoning. Research companion to the principles and standards for school mathematics*. En Kilpatrick, J., Martin, G. & Schifter, D. (Eds.), Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics (págs. 95-114).

Anexo I

Cuestionario de Matemáticas

Fracciones

Rellena los siguientes datos:

Nombre y apellidos: …………………………………………………………………………………………………

Sexo: Chico ☐ Chica ☐ Edad: ………. Curso: …………

¿Qué nota obtienes normalmente en Matemáticas? Da un número del 1 al 10

Responde a las siguientes cuestiones:

1- Calcula y simplifica las siguientes fracciones:

a. $3 - 2 * \frac{3}{5}$

b. $3 * \frac{1}{2} - 5$

c. $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$

d. $\frac{2}{5} * \frac{4}{5}$

e. $\frac{2}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

f. $\frac{2}{3} * (1 + \frac{2}{5})$

g. $\frac{1}{2} : (\frac{1}{4} + \frac{1}{3})$

h. $1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

i. $(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) : (\frac{1}{6} + \frac{2+5}{2+2})$

2- Ordena las siguientes fracciones de mayor a menor, utilizando los signos: <, > o =.

a. $\frac{2}{7}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{14}{4}$

b. $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{2}{3}$

3- Responde verdadero o falso:

a. $\frac{1}{3}$ es la mitad de $\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

c. Al multiplicar 5 por una fracción siempre obtenemos un número mayor que 5

d. $\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{11}{17}$

4- Encuentra un número entre 3/7 y 4/7.

5- Completa la equivalencia

$$\frac{2}{3} = \frac{}{12} = \frac{14}{}$$