UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Dificultades en el Aprendizaje de las Funciones en Matemáticas

Difficulties in Learning Mathematical Functions

Alumna: Paula González Burón

Especialidad de Matemáticas

Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Curso académico 2014-2015

Santander a 15 de junio de 2015

RESUMEN

El presente documento trata de identificar qué factores son los que principalmente afectan y dificultan el aprendizaje de las funciones en Matemáticas a lo largo de su estudio durante la Educación Secundaria y, más concretamente, en bachillerato.

Para ello, se realiza una lectura reflexiva de diversas investigaciones, las cuales ayudan a concluir cinco dificultades clave. A partir de ellas, se hace un análisis de las mismas con un grupo de estudiantes verificando que dichos obstáculos sí son reales y están presentes en el aula, dando pie a futuras investigaciones sobre cómo puede modificarse el proceso de enseñanza-aprendizaje para mejorar la didáctica que se imparte sobre las funciones durante esta etapa escolar.

ABSTRACT

This document attempts to identify which factors affect and complicate learning functions along their study in secondary education, and in particular, in high school.

For this, it is performed an analysis of several investigations, which helps to infer five key difficulties. From them, it is made an analysis of these difficulties with a group of students verifying that those obstacles are real and they are present in the classroom. All of this report gives the possibility to continue with an investigation about how the teaching-learning process can improve the education about functions and how it should be taught during the school years.

ÍNDICE

MEMORIA

1. Introducción y justificación

La educación es uno de los puntos críticos de la sociedad, en el que hay que poner atención y cuestionar cada cambio que se realiza y cada nuevo recurso que aparece e incorpora y cómo pueden afectarla. En las últimas décadas estos cambios van dirigidos a un gran objetivo: la mejora de la calidad educativa.

Para ello, es imprescindible estar actualizado y tener el suficiente conocimiento para saber si realmente todas estas nuevas incorporaciones pueden o no ayudar a lograr dicho objetivo. De ahí que surja la necesidad de investigar en cuantos errores y dificultades se perciban tanto en el recorrido en el proceso de enseñanza por parte de los profesores como en la consecución de objetivos de los alumnos.

Las matemáticas surgen, hace siglos, por la necesidad de contar y, desde entonces, se han ido estableciendo nuevos conceptos hasta llegar a la forma que actualmente conocemos de ellas. No por ello se debe caer en el descuido de pensar que todos los conceptos que se enseñan son ideas claras y fáciles de asimilar. Todo lo contrario: han tenido que pasar miles de años para llegar hasta el conocimiento de las matemáticas tal y como se conocen y entienden hoy en día. Esto quiere decir que hay que concretar y simplificar todos esos conocimientos para que su adquisición pueda realizarse de manera gradual y con un asentamiento firme durante la vida escolar de un estudiante. Teniendo además en cuenta que los equívocos que se puedan tener en ellas pueden ser origen de otros muchos ya que son la base en la que el resto de ciencias se apoyan.

Dentro de la multitud de obstáculos que los alumnos se pueden encontrar en el ámbito matemático, este trabajo analiza aquellas dificultades relacionadas con el aprendizaje de las funciones ya que son un concepto muy importante en las matemáticas, y por tanto están muy presentes en el currículo de Educación

Secundaria, y tienen un grado de dificultad considerable, debido a la variedad de sistemas de representación en que pueden presentarse.

2. Fases del estudio

El tema principal de este estudio son las dificultades en el aprendizaje de las funciones. Con el objetivo de identificarlas e intentar eliminarlas, se plantean tres fases a lo largo de este trabajo:

A) Conocer cuáles son las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las funciones.
B) Trabajar con ellas en el aula para ver cómo se presentan.
C) Proponer posibles cambios o enfoques en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones para su mejora.

3. Dificultades en el aprendizaje de las funciones

3.1. Análisis de los errores y dificultades

¿Cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje de las funciones?

Para responder a esta pregunta se analizan distintas investigaciones relacionadas con el tema que determine si existen o no dificultades para llegar a definir la cuestión planteada y que dan una idea global de las principales cuestiones a abordar para la mejora de la enseñanza y el estudio de las funciones.

En primer lugar, se introducen algunas reflexiones sobre el papel de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ya que estos forman parte de las producciones de gran parte de los alumnos (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

Los errores, propiamente dichos, son proposiciones que no se adecúan a la realidad, con la característica de que surgen de manera espontánea y son persistentes.

A pesar de la multitud de investigaciones que se han hecho a lo largo del tiempo, a día de hoy aún no se sabe cómo se aprende y se adquieren los conceptos matemáticos (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9), por eso se sigue haciendo hincapié en los errores que se cometen de manera repetitiva y las dificultades encontradas a la hora de la comprensión de ciertas ideas.

Generalmente, existe la tendencia a creer que durante la exposición de conocimientos por parte del docente el alumno simplemente la recibe y graba, pudiendo haber alguna pérdida de información. Pero lo que no se suele tener en cuenta es que muchas veces durante ese proceso lo que los alumnos realmente hacen es construir conocimientos erróneos (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller, & Hecklein).

Esta idea se puede extrapolar al aprendizaje significativo y cómo este tiene que generarse mediante una *secuencia de actos de comprensión, de actos de superación de* errores. De manera que, para que los alumnos realmente entiendan lo que se les está enseñando tienen que enfrentarse por sí solos a las dificultades relacionadas con el concepto (ver Sierpinska, 1990, en Vrancken, Gregorini, Engler, Müller & Hecklein). Teniendo siempre en cuenta que es el profesor quien debe ser consciente de las ideas previas que éstos tienen para poder centrarse en ellas, aclararlas y construir sobre ellas un buen aprendizaje (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

En segundo lugar, se debe hablar del concepto de función, uno fundamental en las matemáticas (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9) y, por tanto, también central en la Educación Secundaria (Bagni, 2004), en todas sus áreas y también en las aplicaciones (como puede ser la descripción de un fenómeno de otra ciencia, (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006)). De ahí la importancia de que los alumnos desarrollen sobre él una comprensión satisfactoria, lo cual no es fácil debido a su complejidad y generalidad.

Como todo concepto matemático, el de función ha ido definiéndose a lo largo de la historia para llegar hasta su forma actual.

A las funciones se las define, por ejemplo, "*como un conjunto de pares ordenados tal que no contiene dos pares distintos con la misma componente*". Sin embargo, Theodore Eisenberg considera que es la menos intuitiva y apropiada desde el punto de vista pedagógico (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9).

Otra definición que se puede encontrar es, por ejemplo:

Una función real de variable real es una correspondencia según la cual a cada elemento de un subconjunto de $\mathbb{R}$*, llamado dominio de una función (Dom f) le corresponde uno y sólo un elemento de otro subconjunto de* $\mathbb{R}$*, llamado conjunto imagen o recorrido de la función (Im f).*

Estas dos definiciones formales pueden encontrarse en cualquier libro de matemáticas pero hay que distinguir entre ellas y cómo debe introducirse el concepto en la Educación Secundaria. Para ello debe evitarse tanta formalidad y se deben simplificar los términos utilizados, viéndose por ejemplo:

Relación entre dos conjuntos numéricos, tal que a cada valor del primero (variable independiente, x) le corresponde un único valor del segundo (variable dependiente, y).

Eso sí, intentando no caer en el descuido, por la utilización de un lenguaje ordinario, de no aportar al lenguaje matemático la precisión que éste requiere (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

Una vez vistas estas definiciones, se puede pasar a definir cuáles son las dificultades que afectan a la comprensión y aprendizaje de las funciones.

En las matemáticas escolares el concepto de función es uno de los más difíciles de controlar en cuanto a la secuencia de aprendizaje debido, sobre todo, a la multitud de conceptos que lleva asociados ya que incluso las funciones más elementales dependen de ellos (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9). Selden et al, (2000), Eisenberg y Dreyfus (1991), Carlson (1998, 2002), Hardy (2008, 2009), Zandieh (2000), entre otros y todos recogidos en (Hitt, 2014), enfocan las dificultades en los conceptos: pendiente, tangente, tasa de variación media e instantánea, velocidad media e instantánea, límite, infinito y derivada. *Comprender una función implica, además, vincular todos estos subconceptos entre sí* (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

Para definir una función existen una gran variedad de registros: descripción verbal, algebraica, tablas, diagramas de flecha, “black box” de entrada-salida, pares ordenados, etc. (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9). Además, cualquiera de ellos está ligado implícita o explícitamente a los otros (Bagni, 2004).

Este es uno de los problemas clave, ya que la no distinción entre un objeto y su representación conduce a situar a un determinado objeto siempre en el mismo contexto debido al registro en el que se realizó su representación, lo que lleva a mecanizar los procesos de conversión. Cabe resaltar que, en este aspecto, la dificultad que más se evidencia es cuando se parte de la representación gráfica, ya que, según recoge Giorgio T. Bagni de Vinner (1983 y 1987), complica la interpretación completa del concepto de función, sobretodo porque los alumnos es a lo primero que lo relacionan sin tener en cuenta el resto de posibilidades que tienen para la representación de las funciones (Bagni, 2004); y que el registro tabular sólo se ve como un paso intermedio y no como una representación por sí misma (Peralta García, 2002).

En gran medida esto también se debe a que cada vez se prescinde más de las demostraciones matemáticas, sobretodo en la Educación Secundaria Obligatoria, descuidando también el pensamiento lógico, imprescindible en el desarrollo de la competencia matemática (Abrate, Pochulu, & Vargas, 2006).

Por otra parte, a pesar de que, según exponen González-Martín y Camacho (2005), a veces ocasione grandes dificultades ya que en los procedimientos se requiere un alto grado de precisión (Díaz Lozano, Haye, Montenegro, & Córdoba, 2013), en los alumnos predomina el pensamiento algebraico debido, generalmente y tal y como apuntan los autores Blázquez y Ortega (2001), a que el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas a la hora de enseñar las funciones (Carrillo Siles, 2009). Aunque, de entre las distintas posibilidades la más utilizada es, junto con la algebraica, la representación gráfica (Díaz Lozano, Haye, Montenegro, & Córdoba, 2013). Además, a menudo para los alumnos el nexo entre la expresión algebraica y la visualización mediante su gráfico cartesiano es fundamental para determinar si una relación es función, pudiendo dar lugar a equívocos como, por ejemplo, con la función de Dirichlet (función no continua en ningún punto de su dominio), que no se apreciaría como función en cuanto no pueda verse mediante curvas (Bagni, 2004).

Según Fernando Hitt, otro obstáculo asociado a las dificultades en el aprendizaje es la equivalencia de notaciones. Muchas veces se cambia de una notación a otra sin explicar qué relación se establece entre ellas, diciendo solamente que ambas son equivalentes (Hitt, 2014). Como, por ejemplo, en la equivalencia que se establece en el sistema de representación algebraico entre las notaciones *y* y *f(x)* [*y*=*f(x)*] para nombrar las funciones que ligan dos variables (*x* e *y*).

Ligado a esto está la confusión entre lo que es la variable dependiente y la independiente, donde los alumnos también tienen bastantes problemas y que son reflejados, sobre todo, a la hora de dibujar la gráfica de la función (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller, & Hecklein). Asimismo, estas autoras en su estudio relacionan con el concepto de función las dificultades en cuanto a la representación de gráficas que sí son funciones y el concepto de dominio (Vrancken, Gregorini, Engler, Müller, & Hecklein). Esto último podrá verse también reflejado en la encuesta que se realiza a los alumnos a lo largo de este trabajo.

Dentro de las soluciones a plantear cabe preguntarse qué cometido podrían tener las tecnologías en la enseñanza, las cuales no se analizan en este documento debido a la conclusión que sigue a continuación y que el contenido podría extenderse perfectamente a una sola investigación en la que se estudie de qué manera afectan éstas a la enseñanza de forma global, a las matemáticas en general y a las funciones en particular.

Según señala Fernando Hitt, ya muchos han tratado de demostrar que dentro de un medio tecnológico la enseñanza del cálculo es más apropiado que sin él, pero, a día de hoy esto no ha podido ser confirmado ya que los resultados obtenidos han sido similares o, en algunos caso, incluso peores. A esto, añade:

"*La posición de los investigadores empezó a cambiar, intentando elucidar qué habilidades se desarrollaban con tecnología y cuáles sin ella (p. e. Tall, 2000; Guin & Trouche, Ibid) y un elemento muy importante, qué dificultades enfrenta el estudiante en un medio tecnológico.*"(Hitt, 2014).

De manera que, de una manera u otra, el problema, con o sin tecnologías, sigue reinante. Al igual que pasa con el intento de mejora estableciendo una buena exposición, secuenciación y propuesta de tareas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, que tal y como expresa Einsenberg es una simple *fantasía teórica*. Pese a la multitud de estudios que se realizan, se vuelve a concluir que, aún no se sabe cómo aprende la gente realmente (ver Eisenberg en Tall, 1991, Ch.9).

3.2. Clasificación de las dificultades

Tras el análisis de las diversas investigaciones y la relación de autores citados anteriormente, se muestran las principales problemáticas que se presentan en el estudio de las funciones:

- Falta de entendimiento de los conceptos asociados al de función: dominio, pendiente, tangente, tasa de variación media e instantánea, velocidad media e instantánea, límite, infinito y derivada…
- Dificultad en el paso de unos registros a otros y la correcta relación entre ellos. Entre los registros están la descripción verbal, algebraica, tablas, diagramas de flecha, "black box" de entrada-salida o pares ordenados.

- Problemas con los cambios y equivalencia de notaciones.
- Diferenciación entre la variable dependiente y la variable independiente.
- Conflicto en la representación de gráficas que son funciones; confusión con representaciones como las de las raíces cuadradas, circunferencias, hipérbolas, etc.

3.3. Dificultades que se consideran a lo largo de la propuesta

Dentro de las dificultades encontradas, este estudio se centra en las siguientes:

1) Comprensión del concepto de dominio; ya que los alumnos encuentran dificultades al intentar visualizar algo que está fuera del papel (concepto intrínseco de “infinito”) y de los intervalos abiertos o cerrados.
2) Cambios entre los registros verbal, algebraico, tabular y gráfico.
3) Conversión entre las notaciones que se utilizan para nombrar las funciones.
4) Distinción entre variable dependiente e independiente; creyendo que muchas veces el primer problema puede surgir por la falta de comprensión del propio concepto de variable.
5) Identificación de las funciones, es decir, reconocer qué relaciones y gráficas cumplen la condición de ser una función.

4. Análisis de las dificultades de las funciones en el aula

Una vez establecidas las dificultades en el apartado anterior, se procede a la realización de una encuesta que permita determinar si éstas están realmente presentes en el aula y de qué manera, la cual se trabaja con una pequeña selección de alumnos.

Estos obstáculos ayudan a tener varios puntos de referencia para poder empezar a plantearse sobre qué hay que trabajar para que la enseñanza y el aprendizaje de las funciones sean óptimos.

Para ello, a lo largo de este apartado se muestra el contexto académico, el cual determina las características del grupo de estudiantes; el contexto curricular, que marca los contenidos que establece el currículo para el nivel al que va dirigida la encuesta; la creación de la encuesta, donde se deciden qué criterios pueden resultar para valorar los datos que se cuestionan; la realización de la prueba en el aula, cómo se lleva a cabo; y la interpretación de los resultados obtenidos.

4.1. Contexto académico

El centro en el que se va a realizar la encuesta es el IES Santa Clara, situado en el centro de la ciudad de Santander, en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

El actual centro se sitúa en un edificio emblemático, recientemente restaurado. Inició su actividad en 1916 y, actualmente, ofrece estudios de Educación Secundaria, Bachillerato (Científico-tecnológico, Humanidades y Ciencias Sociales, Artes y Bachillerato Internacional) y Formación Profesional (Ciclos Formativos de Grado Medio y Superior y PCPI).

Debido a la variedad de ofertas educativas que ofrece, la procedencia de su alumnado es muy diversa: tanto de centros públicos como de concertados, de distintos lugares de la comunidad autónoma, incluso de comunidades vecinas, y, especialmente durante estos últimos años, de varios países, haciendo de ello un enriquecimiento cultural a su vez. Todo ello, junto a la situación socioeconómica y cultural de este alumnado, hace del IES Santa Clara un centro educativo heterogéneo, plural, de mentalidad abierta y acogedor, sin perjuicio de mantener su seriedad, organización, rigor y espíritu innovador.

El grupo con el que se trabaja está formado por 37 alumnos perteneciente a dos grupos del curso de primero de Bachillerato del ámbito científico-tecnológico.

Sus edades están comprendidas entre los 16 y 17 años y poseen unas capacidades cognitivas y habilidades matemáticas similares.

La elección de este grupo se debe, principalmente, al nivel académico que cursan ya que en él no sólo se ve el concepto de función como tal sino que además se incorporan otros que están directamente relacionados (como el de dominio, imagen, intervalo, etc.). Además, dentro de esta selección de alumnos se diferencia entre dos grupos: A y B. El grupo A está formado por 19 alumnos y se caracteriza porque, en el momento de la realización de la prueba escrita, no han dado el tema de las funciones durante el curso. A diferencia del grupo A, el grupo B, formado por 18 alumnos, sí que ha dado este tema.

4.2. Contexto curricular

El currículo sobre las funciones que establece la LOE está presente en todos los cursos y opciones de matemáticas tanto en Educación Secundaria (bloque de Funciones y gráficas) como en Bachillerato (bloque de Análisis).

En el primer curso de la ESO se empieza conociendo cómo se organizan los datos en tablas y el uso de las coordenadas cartesianas tanto en la gráfica como en la representación de la tabla. Además del conocimiento del concepto de proporcionalidad y la interpretación de gráficas. En segundo, se introducen los elementos de una gráfica y los conceptos de continuidad y monotonía, la representación de las mismas y la introducción del concepto de pendiente. En tercero, ya se establece la relación entre la gráfica y su expresión algebraica. Además de la visualización e interpretación de los sistemas de ecuaciones en una gráfica y el conocimiento y uso de las diferentes formas de interpretar una recta. En cuarto, a pesar de que el apartado de las funciones y gráficas es más extenso en la opción B y todo lo de la opción A está recogido en la B, se introducen otros modelos de funciones y su expresión analítica.

En Bachillerato existen dos asignaturas de matemáticas por curso: Matemáticas, correspondiente al ámbito científico-tecnológico, y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, perteneciente al de Humanidades y Ciencias Sociales. En el primer curso, en Matemáticas I se hace una introducción al concepto de límite y derivada, su aplicación en la representación de funciones y el estudio completo de funciones tanto analítica como gráficamente. En Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I se ve lo mismo, a excepción del estudio completo de las funciones complejas (sólo polinómicas y racionales), pero, sin embargo, a diferencia de en Matemáticas I, se da la interpolación lineal y la aplicación de funciones a los fenómenos sociales y económicos. Y, en segundo, en Matemáticas II, se añaden los límites laterales y el concepto y cálculo de primitivas (integrales) y su aplicación al cálculo de áreas. De la misma manera que en primero, en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se imparten los mismos conceptos que en Matemáticas II además de la aplicación de las integrales a funciones de tipo económico. En general, ambos bachilleratos tienen los mismos contenidos, aunque Matemáticas I y II los trabaja con mayor profundidad ya que no dan los aspectos que se han ido comentado anteriormente.

Dado que se trabaja con un grupo de Matemáticas I, a continuación se exponen los contenidos tal y como son expuestos en el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.

BACHILLERATO – MATEMÁTICAS I[1]

[1] Contenido extraído del Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. (BOC de 12 de agosto).

- Función real de variable real. Definición, elementos y características de una función: Dominio, variables, recorrido., crecimiento y extremos. Distintas formas de determinar una función.
- Operaciones y composición de funciones.
- Clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Aproximación al concepto de límite de una función. Idea intuitiva de límite finito de una función en un punto. Cálculo de límites.
- Tendencia. Asíntotas de una función: verticales (límites infinitos), horizontales (límites en el infinito).
- Continuidad de una función. Discontinuidad y tipos de discontinuidad.
- Aproximación al concepto de derivada. Tasa de variación media e instantánea.
- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica y física. Función derivada.
- Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos relativos de una función en un intervalo.
- Representación gráfica de funciones elementales a partir del análisis de sus características globales: dominio, simetrías y periodicidad, puntos de corte, asíntotas, puntos singulares: máximos y mínimos, intervalos de monotonía.
- Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas analítica o gráficamente, que describan situaciones reales.
- Uso de las funciones conocidas como modelos de fenómenos o situaciones concretas del mundo real.

4.3. Creación de la encuesta

La encuesta se ha ejecutado en forma de cuestionario, formado por siete preguntas, las cuales se han realizado teniendo en cuenta las cinco dificultades encontradas en el aprendizaje de las funciones (indicadas en cada descripción).

El cuestionario completo, tal y como se presentó a los alumnos está disponible en el A*nexo I: Cuestionario*, página 37.

A continuación se expone qué es lo que se pretende valorar con cada una de las cuestiones que conforman el cuestionario:

- Con la primera pregunta se pretende saber si los alumnos conocen el concepto de dominio de una función y si son capaces de relacionarlo con el de variable independiente e imagen (relacionado con la primera dificultad considerada).
  Para ello se realiza una cuestión con cuatro definiciones para decidir si son verdaderas o falsas. Dos de ellas, las segunda y cuarta, son verdaderas definiciones que suelen ser, o al menos se aproximan a, las definiciones de cualquier libro de Secundaria. Mientras que la primera de ellas da una definición errónea debido al uso de las variables (*el dominio es un conjunto de valores que toma la variable independiente*). Y la tercera hace referencia a la definición de función en lugar de a la definición de dominio de una función, que es por lo que se pregunta.

- Con la segunda se quiere tener constancia sobre cuán claro tienen el concepto de variable y si son capaces de identificar, en distintos planteamientos y registros, las variables dependiente e independiente (cuarta dificultad).
  En el primer apartado de esta cuestión se incluye la igualdad entre las dos notaciones más comunes para expresar analíticamente una función con el objetivo añadido de saber si los estudiantes son capaces de comprender la conversión entre ellas. En el segundo si son capaces de

obtener el resultado si la expresión algebraica no se da con una de las variables despejada. Y, en el tercero a través de un enunciado donde las variables ya tienen términos y significados reales (*tiempo, espacio*).

- En la tercera se quiere que expresen sus conocimientos sobre los conceptos de imagen y crecimiento y decrecimiento, asociados al dominio. Además de su capacidad para expresar intervalos mediante la lectura e interpretación de la gráfica, también "fuera del entorno del papel", es decir, cómo continúa más allá del dibujo (primera dificultad).

  Para ello se realizan cinco cuestiones a partir de una gráfica en la cual no se ofrece ninguna información más que ella misma y los ejes cartesianos para poder ver también cómo interpretan los distintos elementos (*asíntotas verticales, punto de inflexión, mínimo*) que aparecen en ella sin estar especificados más allá de la representación de la función.

- La cuarta cuestión se ha diseñado para ver si son capaces de identificar qué gráficas son funciones y cuáles no, mediante dos tipos de expresiones gráficas: la representación en los ejes cartesianos X e Y y la representación mediante conjuntos, menos común entre los métodos de enseñanza (quinta dificultad).

  La pregunta contiene doce gráficas entre las que aparecen:
  - Figuras geométricas: circunferencia (no es función).
  - Rectas: horizontal (sí es función), vertical (no es función) y oblicua a trozos (sí es función).
  - Cónicas: hipérbola (no es función) y parábolas vertical (sí es función) y horizontal (no es función).

- En la quinta, según el análisis que hacen en la pregunta 4, tienen que definir el concepto de función, acorde al criterio que tomen para descartar o no las gráficas (quinta dificultad).

Se hizo de esta manera para que la definición que dieran no condicione su decisión en la identificación de las gráficas. Ésta, al igual que la tercera es una pregunta abierta, en la que los estudiantes tienen que conformar la definición con sus propias palabras.

- En la sexta el objetivo es que los alumnos digan qué es el dominio y cómo se representa (distinción entre intervalos abiertos y cerrados) además de, al igual que en el ejercicio 3, ver cómo interpretan las gráficas fuera de los límites de la representación de las funciones (primera dificultad).

- Y, por último, la séptima busca que se desarrolle la capacidad para pasar de un registro a otro mediante la relación entre los sistemas de representación verbal, algebraico, tabular y gráfico (segunda dificultad). Para ello se ha preparado el ejercicio con dos columnas de manera que tengan que relacionar un elemento de la primera con otro de la segunda, incluyendo dos relaciones (3a y 4e) que son muy propensas a ser equívocas entre ellas.

Para la realización del mismo se han tomado definiciones, modelos de ejercicios, etc. de la información contenida en las siguientes reseñas:

- Libros de texto: (Almodovar, y otros, 1999) y (Pérez & Lobo, 2007).
- Artículos: (Dolores Flores, 2004), (Elia & Spyrou) y (Hitt, Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function, 1998)
- Webs: (Descartes 2D, 2015), (RAE, 2015), (vadenumeros.es, 2015) y (Wikipedia, 2015).

4.4. Realización de la prueba en el aula

La encuesta se efectuó durante mi período de prácticas del *Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria* en el IES Santa Clara durante los meses de marzo y abril de 2015. Se realizó durante una hora de clase de la asignatura de Matemáticas I, el día 10 de marzo de 2015 para el grupo A y el 19 de marzo de 2015 para el grupo B.

Como se indica en el cuestionario el tiempo máximo para realizarlo es de 45 minutos, tiempo establecido según el contenido y la dificultad del mismo para el nivel en el que se desarrolla. Pero, una vez llevado al aula, fueron suficientes alrededor de 30 minutos para que los estudiantes pudieran completarlo.

Además, la encuesta se realiza con carácter nominal pero simplemente por el hecho de que los estudiantes puedan tener un *feedback* sobre las cuestiones a las que se han expuesto. De tal manera que, una vez corregido y durante otra sesión de la asignatura, se entregó a cada uno la prueba realizada, con las anotaciones oportunas pero sin ningún tipo de valoración, y se resolvió en el encerado, contestando también a las preguntas que les iban surgiendo a los alumnos sobre la marcha.

4.5. Interpretación de los resultados

Una vez realizadas las encuestas al grupo de alumnos del IES Santa Clara, se procede a su corrección y posterior análisis de los mismos, información que se encuentra a lo largo de este apartado.

La corrección del cuestionario puede consultarse en el *Anexo II: Cuestionario resuelto* (ver página 41).

Los resultados se han analizado tanto de forma cuantitativa como cualitativa.

En el análisis cuantitativo los resultados se han recogido por grupos (A y B) y preguntas/apartados y se pueden consultar en el *Anexo III: Tablas de resultados* (ver página 47).

Mientras que el cualitativo se realiza de manera global y se desarrolla a continuación.

- En la primera pregunta los resultados, en general, han sido positivos. Para poder realizar el análisis mejor se hará por apartados:
  - Apartado a: Se pretendía relacionar la definición de dominio con la de variable. Aunque el porcentaje de aciertos, sobretodo en el grupo B (72,2%), es bueno, se aprecia dificultad en la distinción entre variable dependiente e independiente, aunque también cabe la posibilidad de que sea porque no se relacionen los conceptos de dominio y variable.
  - Apartado b: En esta el grupo A ha tenido peores resultados que el B, debido quizá al grado de conocimientos adquiridos antes de la realización del cuestionario. Confunden qué es una imagen y el concepto de imagen o recorrido de una función.
  - Apartado c: En esta no ha habido muchos equívocos pero, dado el análisis global, puede deberse a que los términos “ley de correspondencia” y “conjuntos” no les son familiares ni para el concepto de dominio ni para el de función.
  - Apartado d: Quizá es la definición más común, la que están más acostumbrados a ver, de ahí que sea la que mayor porcentaje de aciertos tiene (84,2 y 94,4%).

A pesar de los resultados, la primera dificultad, relacionada con el concepto del dominio, sigue estando presente en el grupo. Además, curiosamente debido a su edad y al nivel de estudios en el que están, cinco de los alumnos del grupo A contestaron como si sólo tuvieran que marcar una opción válida, es decir no leen los enunciados por lo que quizá debería tenerse más en cuenta en estos niveles también la comprensión lectora en matemáticas.

- La segunda pregunta, pese a lo que se esperaba, ha sido la que peores resultados ha tenido.
    - Apartado a: Las notaciones *y* y *f(x)* son las más comunes para nombrar las funciones, sin embargo se ve que no todos los alumnos son capaces de identificarlas. Es más, muchos de ellos identifican *f(x)* como variable.
    - Apartado b: La mayoría asigna *x* a la variable independiente e *y* a la dependiente pero sin explicar por qué ni cómo, dejando ver que simplemente lo conocen porque es tal y como se les ha enseñado pero que no saben qué representa ni cuál es el significado de cada una. Solamente un alumno (grupo A) despeja bien y dice que *y* es la variable dependiente, sin embargo dice que todo el cociente resultado de despejar y es la variable independiente. Por tanto ninguno de los alumnos ha sido capaz de resolver este apartado.
    - Apartado c: Esta cuestión tampoco ha obtenido buenos resultados ya que son muy pocos los que han llegado al resultado correcto. La solución correcta es que la variable independiente es el tiempo (h) y la dependiente el espacio (km). En general no son capaces de relacionar la fórmula de la velocidad que relaciona el espacio y el tiempo, de manera que buscan el nombre de cada variable en el enunciado, diciendo por ejemplo que la variable dependiente es el camino recorrido (es correcto) pero que la velocidad es la independiente.

- En la tercera cuestión ha habido multitud de respuestas, siendo algunas de ellas también consideradas como buenas dada la información que se proporciona en la gráfica.

- Apartado a: Han sido muchos los alumnos que no han visto la asíntota vertical en *-2*, diciendo por tanto que las imágenes de f(x) sobre el eje x comienzan en $-\infty$.
- Apartado b: Al igual que en el apartado anterior y como ha pasado en la pregunta 1 también, algunos de los alumnos han tenido dificultades en entender qué son las imágenes de la función para los valores de *x*, confundiéndolo con la imagen o recorrido de la función. Quien ha tenido claro estos conceptos ha sido capaz de realizar la pregunta sin ningún problema.
- Apartado c: Al contrario que en el apartado a, muchos alumnos deciden que la gráfica acaba en $x=7$ y no en $+\infty$. Algo curioso dadas las respuestas que tuvieron primero y que en este caso la tendencia es mucho más marcada y visible.
- Apartado d: Éste ha tenido pocos aciertos (27,8 y 31,6%) pero se debe, en gran parte, a que no han visto el intervalo *(1, 1,5)* como intervalo de decrecimiento.
- Apartado e: Dentro de esta pregunta, es la que más fallos ha tenido (89,5 y 88,9%). La mayoría sí identifica el punto de inflexión en $x=0$ como un valor que ni crece ni decrece, sin embargo no lo hacen con el valor del mínimo $x=1,5$.

  En el caso del punto de inflexión ha habido más de una respuesta que decía que la función ni crece ni decrece en el entorno del mismo: *(-0,5, +0,5)*, por lo que el acierto en esta parte de la pregunta pueda deberse a que es una zona que los alumnos pueden entender como horizontal dentro de la gráfica. Hay que tener en cuenta que ninguno de ellos, según lo que se les ha impartido en clase hasta el momento de la realización del cuestionario, conoce qué es un punto de inflexión.

  Mientras que para el mínimo, puesto que no está en un valor entero de *x* alguno ha tenido problemas para identificarlo. Realmente no debía haber sido un problema ya que el punto se podía haber nombrado con la letra *P*, por ejemplo, y decir que el resultado es

$x=x_p$. Sin embargo y a pesar del curso en el que se encuentran y los años que llevan dedicados a las matemáticas, no están acostumbrados al uso del lenguaje matemático.

En general, esta cuestión refleja la dificultad que tienen al expresar intervalos, destacando dos cosas:

1) No saben/recuerdan que el crecimiento y el decrecimiento se expresa siempre mediante intervalos abiertos (uso de paréntesis y no de corchetes), lo que implica que no saben qué significado tienen los intervalos abiertos y cerrados.
2) No escriben los intervalos en orden, viéndose por ejemplo: *(0, -2)* o *(-0,5, 2)*∪*(1,5, 7)*.

- En la cuarta los resultados obtenidos han sido bastante favorables.
  Los apartados en los que más problemas han tenido han sido en los dos últimos, cuya representación de las funciones está expresada mediante conjuntos y no en los ejes cartesianos, a los que están más acostumbrados. Es curioso como muchos, siendo ambas función, identifican solamente a una como tal y en la mayoría de los casos es la del último apartado, el *l*. La reflexión que se hace sobre esto es que puede deberse a que la relación entre conjuntos en este último apartado parece más "ordenada" que en la anterior.

- En la quinta sólo en torno a un 43% de los alumnos en ambos grupos son capaces de realizar una buena definición del concepto de función.
  La mayoría de los fallos vienen dados al decir que para un valor de *x* se obtienen valores (plural) de *y*, cuando realmente lo que caracteriza a una función es que un valor de *x* solo se corresponde con un valor de *y*.
  Además, muchos de los estudiantes empiezan definiéndola como *"la gráfica que…"*, dejando ver que lo primero en que piensan cuando se les habla de las funciones es en las gráficas, dejando de lado y como algo secundario el resto de registros en que se pueden expresar.

A continuación, se muestran dos definiciones que han dado (erróneamente) y que se repiten bastante entre las respuestas:

Una función es dos conjuntos de elementos que se unen entre sí para crear una imagen.

Una función está formada por un conjunto inicial y otro final, cuyas imágenes no pueden coincidir.

- En la sexta, teniendo en cuenta que muchos de los fallos vienen derivados de la incorrecta identificación de las funciones (la mayoría son los que aparecen como no sabe/no contesta en las tablas de resultados), los resultados son bastante buenos.

  De nuevo vuelven a verse los errores en la distinción entre intervalos abiertos y cerrados y la no interpretación de las gráficas fuera de los límites del papel.

  Llama la atención que la gran mayoría de los alumnos ponga que el dominio es $(-\infty, +\infty)$ en lugar de $\mathbb{R}$, cuando es algo que se suele dar desde los primeros cursos en que se empiezan a ver las funciones y dominios.

  Al igual que en la pregunta 4, los que más debate han tenido han sido los apartados *k* y *l*. Los estudiantes que fueron capaces de identificarlos como función no lo han sido para expresar su dominio.

- Y, por último, en la séptima se han tenido mejores resultados que los esperados dadas las dificultades que plantea la pregunta pero, al ser una pregunta para relacionar, hay que tener en cuenta que algunas de las soluciones han podido ser por descarte.

  Realmente sí se han encontrado las dificultades esperadas confundiéndose las cuestiones *2* y *5* con las respuestas *b* y *c*, y las *3* y *4* con *a* y *e*.

Cabe destacar que, además de las cinco dificultades que se han identificado y comprobado que existen en el aula, al menos en la muestra tomada, se considera que también hay que tener en cuenta lo siguiente:

- La confusión que los alumnos tienen entre qué es la imagen de una variable y la imagen o recorrido de una función.
- Y la distinción entre intervalos abiertos y cerrados y su significado. No tienen claro que para expresar el crecimiento y el decrecimiento solamente se utilizan intervalos abiertos, debido a que no se tienen en cuenta los puntos de cambio (máximos y mínimos, por ejemplo).

Sin olvidarse de la comprensión lectora en matemáticas, la cual debería trabajarse con agudeza desde los primeros cursos de la Educación de los alumnos ya que la incomprensión de los problemas que se les plantean es una dificultad añadida a cualquier área dentro de las Matemáticas.

5. Propuestas de mejora para la enseñanza-aprendizaje de las funciones

Las dificultades que existen en el aprendizaje de las funciones pueden solventarse haciendo hincapié en determinados puntos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como se ve a diario en las clases, el estudio de las matemáticas sigue estando muy focalizado en una parte tremendamente teórica, aislando muchas veces la ciencia del mundo real. Los alumnos están acostumbrados a trabajar con expresiones algebraicas, gráficas y tablas de datos pero, una vez más, se demuestra que realmente no son capaces de analizar, interpretar y trabajar con toda la información que se les da (Bell, y otros, 1985). Esto hace que haya que plantearse si la manera en que se están enseñando las matemáticas es adecuada o no y qué carencias tiene. La visión global de una clase de matemáticas hasta el día de hoy, exceptuando contadas puestas en práctica por determinados profesores, es la exposición de conocimientos y el trabajo de los mismos centrándose sobre todo en los cálculos y en la aplicación mecánica de fórmulas y métodos de solución. Por lo que es importante la introducción de aplicaciones más prácticas y cercanas a situaciones reales.

Para ello, y con ayuda del libro *The Language of Functions and Graphs* (Bell, y otros, 1985), se proponen unas tareas que pueden servir como ejemplo de cómo se puede llevar esto a cabo en el aula a la vez que se trabajan las dificultades que a lo largo de este trabajo se han definido y verificado que están presentes en las aulas.

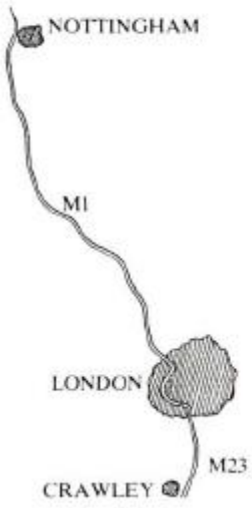
5.1. Tareas propuestas

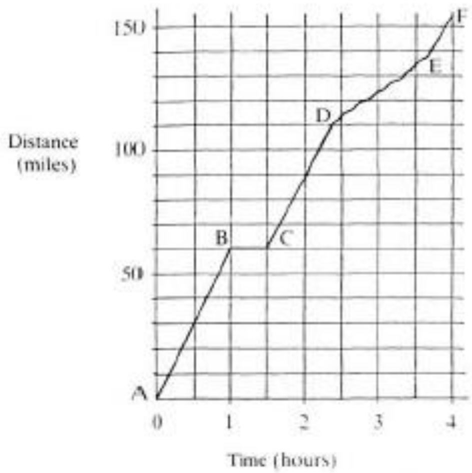
Con las tareas que se proponen como ejemplo para desarrollar lo ya comentado en el apartado anterior se pretende que, mediante ejemplificaciones de situaciones reales y cercanas a los alumnos, los estudiantes entiendan todos aquellos conceptos relacionados con el de función con los que se sienten confusos y aprendan a interpretar la información y los datos que se les proporcionan aplicando aquellos conocimientos que están intrínsecamente relacionados con las funciones. Todo ello con el objetivo de prevenir los errores que se han ido mencionando a lo largo del trabajo.

- Ejercicio 1:

EL VIAJE

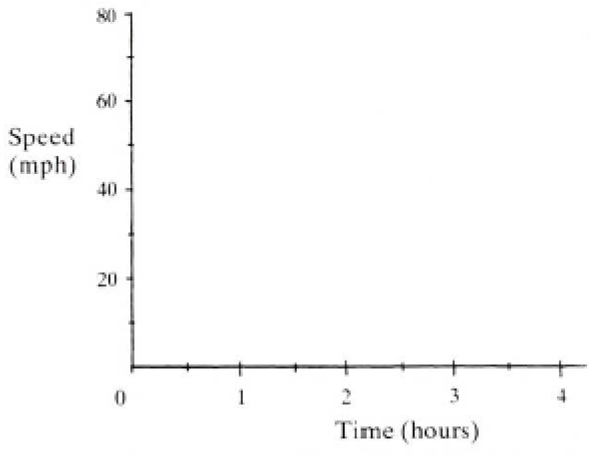
El mapa y la gráfica que se muestran describen un viaje en coche desde Nottingham hasta Crawley, usando las carreteras M1 y M23.





a) Describe cada etapa del viaje, utilizando el mapa y la gráfica. En particular, describe y explica qué pasa desde A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F.

b) Usando la información proporcionada, realiza una gráfica que muestre cómo varía la velocidad del coche durante el viaje.



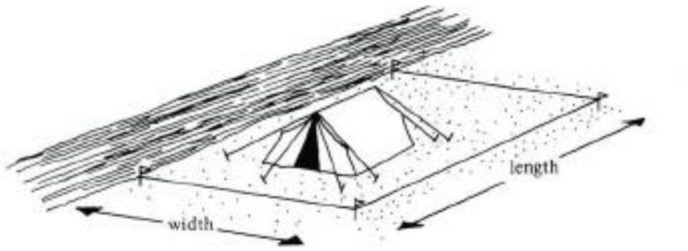
Este primer ejercicio ayuda a trabajar la lectura de mapas e interpretación de la información a través de una gráfica; ver la vinculación y el paso de unos sistemas de representación a otros (verbal y gráfico); identificar, distinguir y relacionar las variables dependiente e independiente, tanto en la gráfica de toma de datos como en la que el propio alumno tiene que realizar; y reconocer una situación real y cotidiana como una función.

- Ejercicio 2:

CAMPING

Al llegar al camping, a un grupo de campistas se les da una cuerda de 50 metros de longitud y cuatro postes con los que tienen que delimitar una parcela rectangular para su tienda de campaña.

Deciden poner su tienda junto al río, tal y como se muestra en la figura. De manera que sólo tienen que utilizar la cuerda para marcar tres lados del rectángulo.



a) Si deciden que el ancho sea de 20 metros, ¿Cuál será el perímetro de la parcela?
b) Describe con palabras, de la forma más completa posible, cómo cambia la longitud de los límites al variar el ancho de la parcela dentro de todos los valores posibles (considerando los valores mínimo y máximo de la anchura).
c) Calcula el área de la parcela para una anchura de 20 metros y otros valores diferentes.

d) Dibuja una gráfica que muestre cómo varía el área cuando cambia la anchura de la parcela (considerando los valores mínimo y máximo de la anchura).

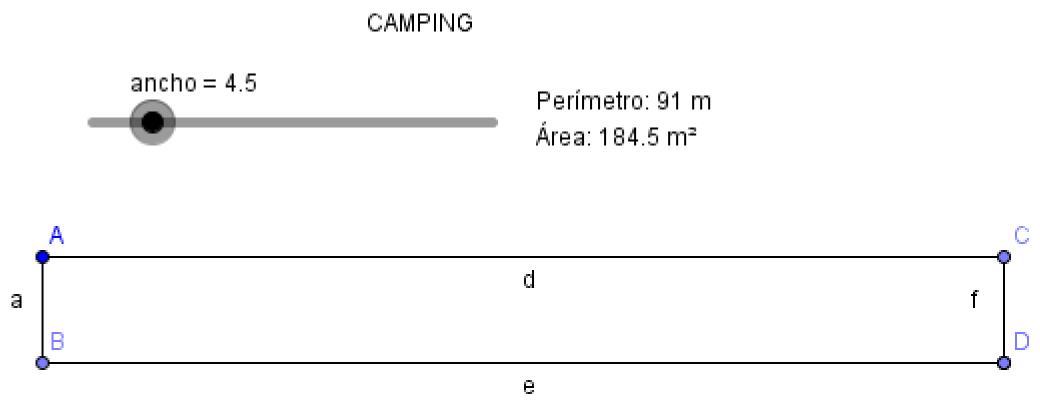
Los campistas están interesados en saber cuáles serían la anchura y longitud óptimas para obtener el mayor área posible.

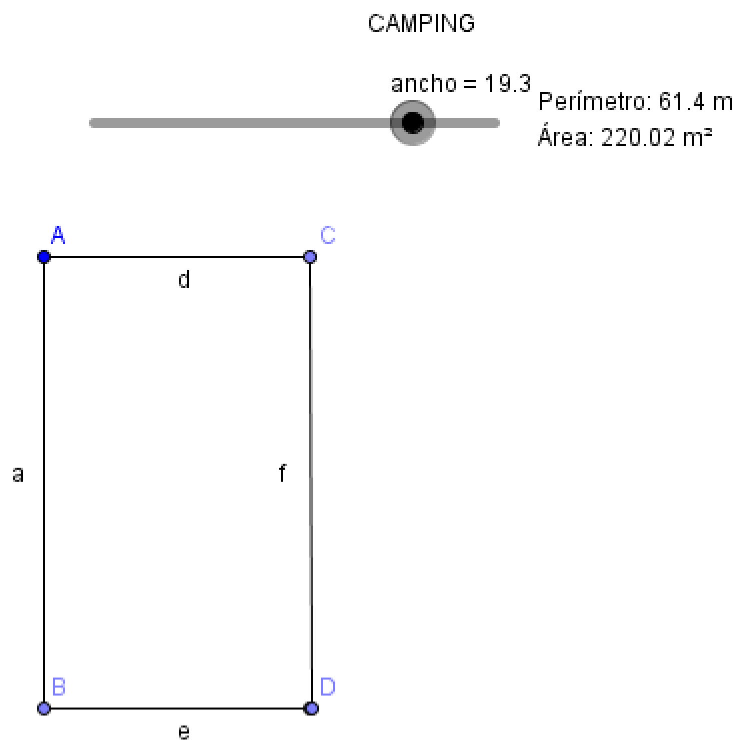
e) Describe con palabras un método para hallar dicha anchura y longitud.
f) Usa el método que has descrito en el apartado anterior para calcularlas.

Con esta segunda tarea el alumno puede aprender a tratar los datos como una función y expresarlos en distintos registros, como son el verbal y el algebraico, teniendo en cuenta además el dominio de dicha función; obtener la capacidad para reconocer qué variables son óptimas para ser la dependiente e independiente; y, de nuevo, reconocer una situación cercana a él como una función.

Por último, cabe decir que, de entre las posibles tareas a realizar para desarrollar un correcto proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones, sería bueno introducir alguna en la que además los alumnos puedan entrelazar las TICs con las Matemáticas. Un programa con el que se pueden implementar muchos ejercicios adecuados al uso y estudio de las funciones es Geogebra (Geogebra, 2015), un programa matemático interactivo libre que fusiona geometría, cálculo y álgebra.

Un ejemplo de ello sería, utilizando el segundo ejercicio propuesto (Camping), la realización de una simulación que represente el ancho del rectángulo de la parcela, obteniendo, en otra ventana gráfica, el perímetro y el área del mismo.





6. Conclusiones

Está claro que los errores pueden provenir de distintos orígenes pero no se debe caer en la equivocación de pensar que surgen circunstancialmente o por accidente. De manera que la detección de errores es imprescindible si se quiere evitar que el alumno adquiera conceptos mal construidos en el estudio de las matemáticas.

La ausencia de conocimiento es uno de los principales focos por los que se originan y es por eso que desde el inicio de su estudio es muy importante que tengan claros todos los términos, conceptos y relaciones necesarios para el estudio de, en este caso, las funciones.

El concepto de función es además de gran importancia ya que se puede reconocer en infinidad de situaciones reales y es por ello que se imparte durante todos los cursos de la Educación Secundaria y no solamente en aquellos cursos que van más dirigidos a una trayectoria académica científica. Personas que no se dedican al ámbito de la ciencia y la tecnología también han de ser capaces de tener una clara visión de qué son las funciones y para qué pueden utilizarlas (véase por ejemplo como una manera de organizar la información).

Para todo esto es que se debe plantear un cambio en el modo en el que se enseñan las funciones y en el tipo de tareas que se incluyen en este proceso pero no solo en la Educación Secundaria, sino desde la Educación Primaria hasta los estudios universitarios. La organización de la vida escolar debería ser la primera en marcar en el currículo de las Matemáticas y en los métodos y procesos de enseñanza los componentes y principios para el desarrollo del estudio de las funciones de forma sencilla, cercana a los alumnos y adecuada a su edad y lenguaje.

7. Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa MAría.

Almodovar, J. A., García, P., Gil, J., Vázquez, C., Santos, D., & Nortes, A. (1999). *Órbita 2000, Matemáticas Curso 3º ESO.* Madrid: Santillana.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Departamento de Matemáticas, Universidad de Roma "La Sapienza" (Italia). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7, 1*.

Bell, A., Binns, B., Brekke, G., Burkhardt, H., Crust, R., Fraser, R., . . . Trott, C. (1985). *The Language of Functions and Graphs. An Examination Module for Secondary Schools.* Manchester: Shell Centre for Mathematical Education.

Carrillo Siles, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Revista digital: Innovación y experiencias educativas*.

Descartes 2D. (5 de Marzo de 2015). Obtenido de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funciones_formas_de_expresar/elementos.htm

Díaz Lozano, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones. *I CEMACYC.* República Dominicana.

Dolores Flores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Noviembre, año/vol. 7, número 003. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México*, 195-218.

Elia, I., & Spyrou, P. (s.f.). How students conceive functions: A triarchic conceptual-semiotic model of the undertanding of a complex concept. *Departamento de Educación, Universidad de Chipre (Chipre) y Departamento de Matemáticas, Universidad de Atenas (Grecia)*.

Geogebra. (6 de Marzo de 2015). Obtenido de http://www.geogebra.org

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav (México)*.

Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Departamento de matemáticas, Universidad de Quebec*.

Peralta García, J. X. (2002). Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular:el caso de la función lineal. *Memorias de la XXII semana Regional de Investigación y Docencia en Matemática. Intituto tecnológico de Sonora.*

Pérez, S., & Lobo, B. (2007). *Matemáticas 3º Secundaria, Serie Trama, Proyecto Ánfora.* Oxford University Press.

RAE. (5 de Marzo de 2015). Obtenido de http://lema.rae.es/drae/srv/search?id=H31FmMZAjDXX2hLz5ddV

Tall, D. (editor), (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer.

vadenumeros.es. (5 de Marzo de 2015). Obtenido de http://www.vadenumeros.es/primero/dominio-y-recorrido-de-funciones.htm

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Müller, D., & Hecklein, M. (s.f.). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral*.

Wikipedia. (6 de Marzo de 2015). Obtenido de http://es.wikipedia.org/wiki/Variable_(matem%C3%A1ticas)

8. Referencias legales

Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. (BOC del 25 de mayo).

Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. (BOC de 12 de agosto).

ANEXOS

Anexo I: Cuestionario

CUESTIONARIO

Fecha: Tiempo máximo: 45 minutos

Nombre: Grupo:

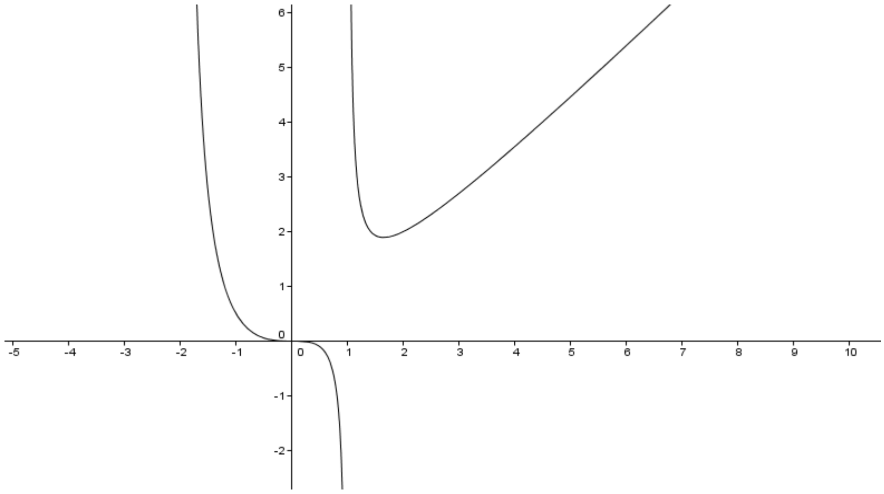
1.- ¿Qué se conoce como dominio de una función *f(x)*? Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- ☐ Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
- ☐ Conjunto de elementos que tienen imagen.
- ☐ Ley de correspondencia entre dos conjuntos numéricos.
- ☐ Conjunto de valores de x para los que la función $f(x)$ está definida.

2.- Identifica las variables dependiente e independiente en los siguientes casos:

- La relación: $f(x) = y$
- La expresión: $2x^2 + 5xy - 1 = 0$
- El enunciado: Camino recorrido en kilómetros por un ciclista que va a una velocidad de 15km/h.

3.- En la siguiente gráfica:



a) ¿Para qué valor o valores de *x* las imágenes de la función *f(x)* son positivos?

b) ¿Para qué valor o valores de *x* las imágenes de la función *f(x)* son negativos?

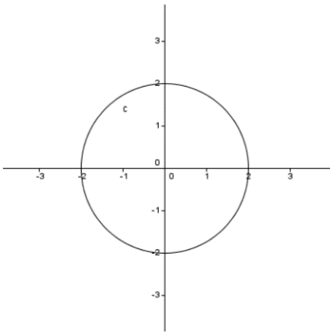
c) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* es creciente?

d) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* es decreciente?

e) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* ni crece ni decrece?

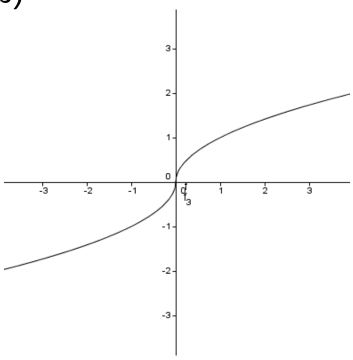
4.- Indica si las siguientes gráficas y relaciones son funciones o no.

a)



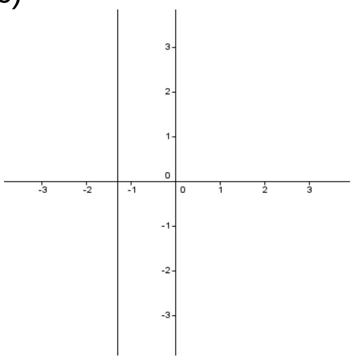
☐ Sí ☐ No

b)



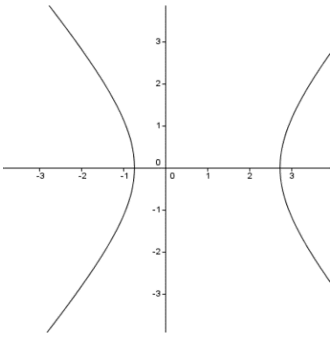
☐ Sí ☐ No

c)



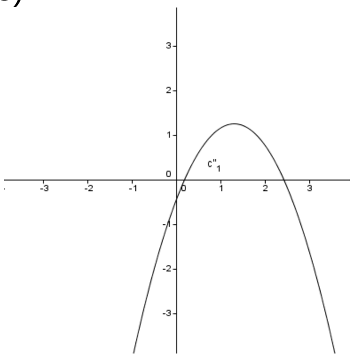
☐ Sí ☐ No

d)



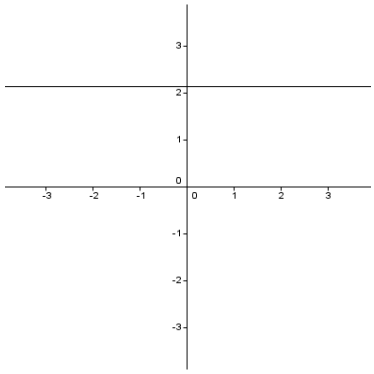
☐ Sí ☐ No

e)



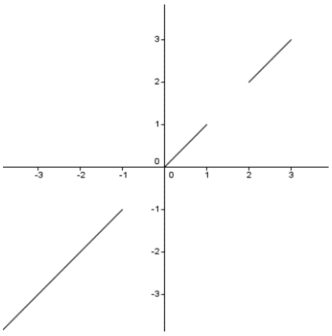
☐ Sí ☐ No

f)



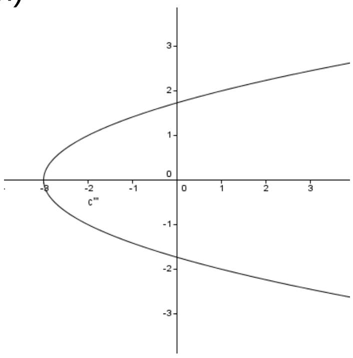
☐ Sí ☐ No

g)



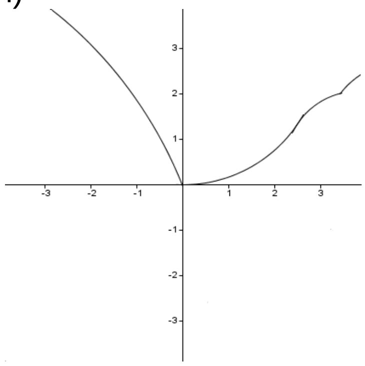
☐ Sí ☐ No

h)



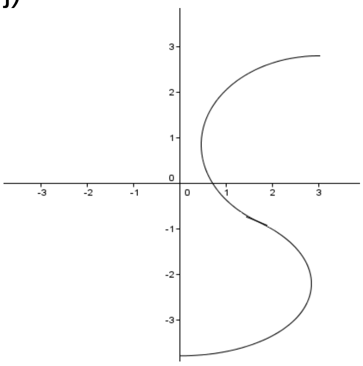
☐ Sí ☐ No

i)



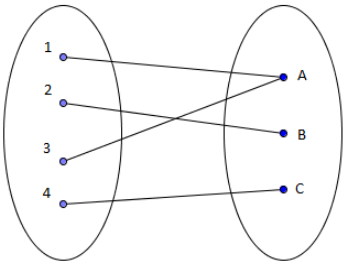
☐ Sí ☐ No

j)



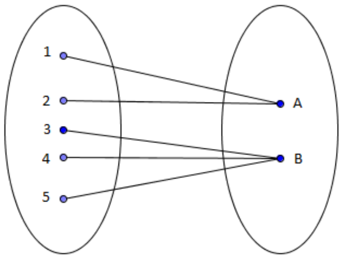
☐ Sí ☐ No

k)



☐ Sí ☐ No

l)



☐ Sí ☐ No

5.- De acuerdo con lo anterior, da una definición del concepto de función.

6.- En las respuestas afirmativas de la pregunta 4, indica el dominio.

7.- A continuación se muestran varias funciones representadas según las definiciones posibles: verbal, algebraico, tabla de valores y gráfico. Relaciona un elemento de la columna izquierda con otro de la columna derecha.

1) Alberto sale de su casa para ir al colegio. Sale andando pero al oír la sirena echa a correr.

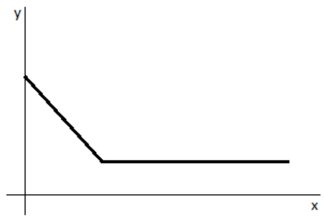
2) Hay que construir un recinto rectangular con 20m de valla metálica. ¿Cómo dependerá el área cercada por la valla de la longitud del recinto?

3)

4)

5) Espectadores que acuden un día a una sesión de cine y el dinero recaudado por las entradas, si la sala tiene 120 butacas y una entrada cuesta 5€.

a)



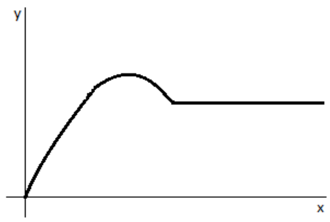
b)

x	0	2	4	7	12
y	0	10	20	35	60

c) $f(x) = -x^2 + 10x$

d)

e)



Anexo II: Cuestionario resuelto

CUESTIONARIO

Fecha: Tiempo máximo: 45 minutos

Nombre: Grupo:

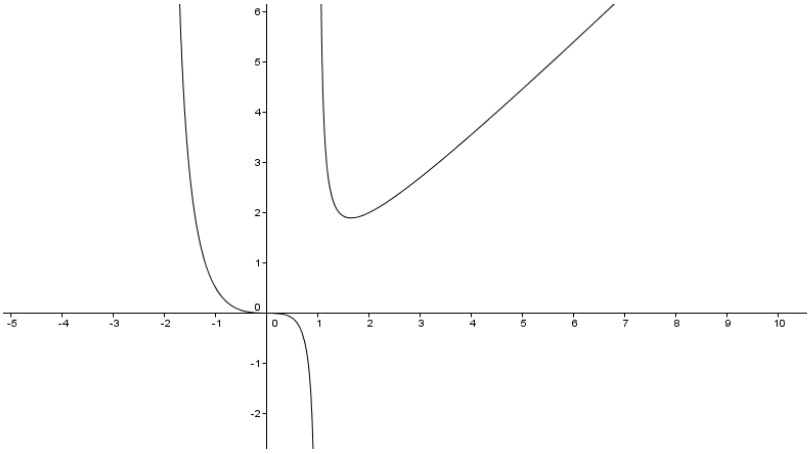
1.- ¿Qué se conoce como dominio de una función *f(x)*? Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- ☐ Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. Falsa
- ☐ Conjunto de elementos que tienen imagen. Verdadera
- ☐ Ley de correspondencia entre dos conjuntos numéricos. Falsa
- ☐ Conjunto de valores de *x* para los que la función *f(x)* está definida. Verdadera

2.- Identifica las variables dependiente e independiente en los siguientes casos:

- La relación: $f(x) = y$ *x* independiente, *y* dependiente
- La expresión: $2x^2 + 5xy - 1 = 0$ Si se despeja *x*: *y* independiente, *x* dependiente. Si se despeja *y*: *x* independiente, *y* dependiente.
- El enunciado: Camino recorrido en kilómetros por un ciclista que va a una velocidad de 15km/h. *Tiempo* variable independiente, *espacio* variable dependiente.

3.- En la siguiente gráfica:



a) ¿Para qué valor o valores de *x* las imágenes de la función *f(x)* son positivos? $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$

b) ¿Para qué valor o valores de *x* las imágenes de la función *f(x)* son negativos? $(0, 1)$

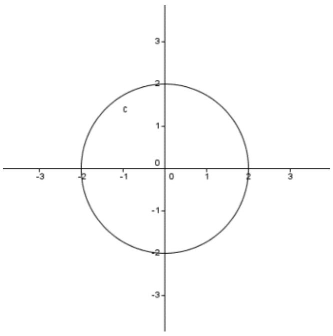
c) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* es creciente? $(1{,}5, +\infty)$

d) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* es decreciente? $(-2, 1) \cup (1, 1{,}5)$

e) ¿Para qué valor o valores de *x* la función *f(x)* ni crece ni decrece? x=0; x=1,5

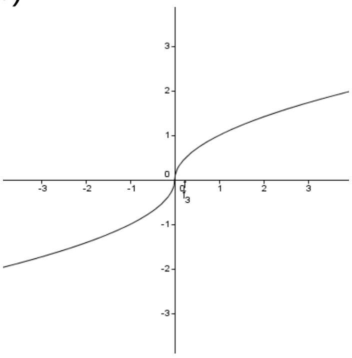
4.- Indica si las siguientes gráficas y relaciones son funciones o no.

a)



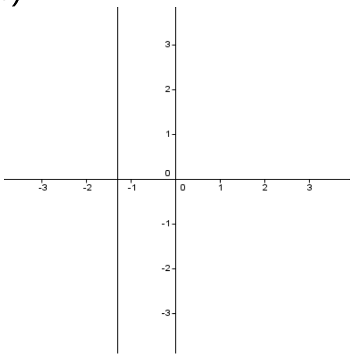
☐ Sí ☐ No

b)



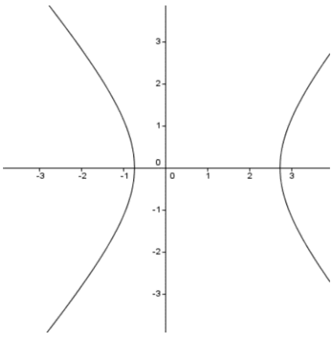
☐ Sí ☐ No

c)



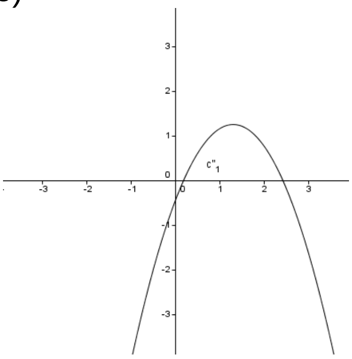
☐ Sí ☐ No

d)



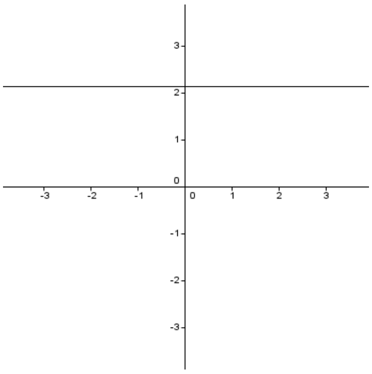
☐ Sí ☐ No

e)



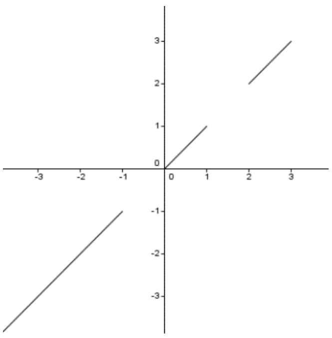
☐ Sí ☐ No

f)



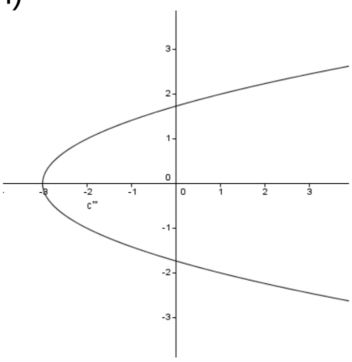
☐ Sí ☐ No

g)



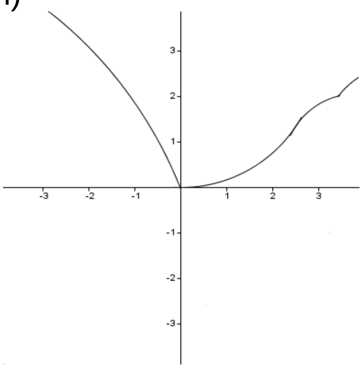
☐ Sí ☐ No

h)



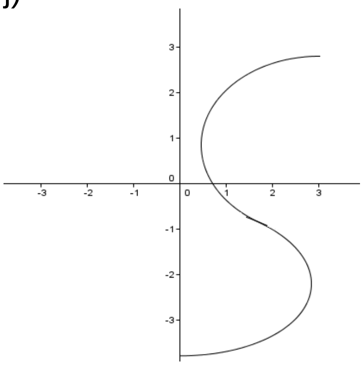
☐ Sí ☐ No

i)

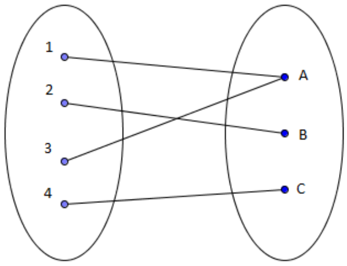


☐ Sí ☐ No

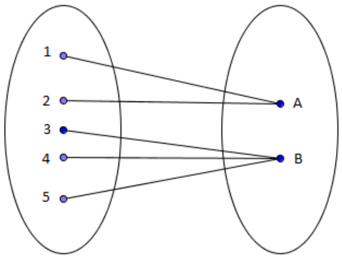
j)



k)



l)



j)		k)		l)	
☐ Sí	☐ No	☐ Sí	☐ No	☐ Sí	☐ No

5.- De acuerdo con lo anterior, da una definición del concepto de función.

Relación entre dos conjuntos tal que a cada valor del primero, variable independiente (x), le corresponde un único valor del segundo, variable dependientes (y).

6.- En las respuestas afirmativas de la pregunta 4, indica el dominio.

b) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{R}$

g) $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [2, 3]$

i) $\mathbb{R}$

k) $[1, 4]$

k) $[1, 5]$

7.- A continuación se muestran varias funciones representadas según las definiciones posibles: verbal, algebraico, tabla de valores y gráfico. Relaciona un elemento de la columna izquierda con otro de la columna derecha.

1) Alberto sale de su casa para ir al colegio. Sale andando pero al oír la sirena echa a correr.

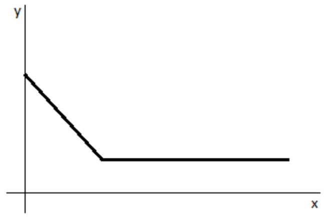
2) Hay que construir un recinto rectangular con 20m de valla metálica. ¿Cómo dependerá el área cercada por la valla de la longitud del recinto?

3)

4)

5) Espectadores que acuden un día a una sesión de cine y el dinero recaudado por las entradas, si la sala tiene 120 butacas y una entrada cuesta 5€.

a)



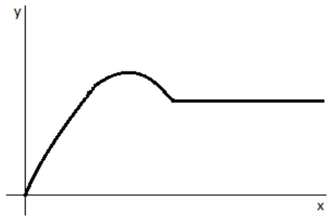
b)

x	0	2	4	7	12
y	0	10	20	35	60

c) $f(x) = -x^2 + 10x$

d)

e)



Solución: 1d; 2c; 3a; 4e; 5b.

Anexo III: Tablas de resultados

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 1	a	31,6	68,4	-	72,2	27,8	-
	b	21,1	78,9	-	66,7	33,3	-
	c	57,9	42,1	-	83,3	16,7	-
	d	84,2	15,8	-	94,4	5,6	-

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
P 2	a	31,6	57,9	10,5	33,3	61,1	5,6
	b	-	84,2	15,8	-	94,4	5,6
	c	10,5	84,2	5,3	16,7	77,7	5,6

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 3	a	52,6	47,4	-	72,2	27,8	-
	b	47,4	52,6	-	72,2	27,8	-
	c	42,1	57,9	-	55,6	44,4	-
	d	31,6	68,4	-	27,8	72,2	-
	e	10,5	89,5	-	11,1	88,9	-

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 4	a	100	-	-	100	-	-
	b	100	-	-	100	-	-
	c	84,2	15,8	-	83,3	16,7	-
	d	68,4	31,6	-	94,4	5,6	-
	e	100	-	-	100	-	-
	f	78,9	21,1	-	100	-	-
	g	84,2	15,8	-	88,9	11,1	-
	h	68,4	31,6	-	72,2	27,8	-
	i	68,4	31,6	-	83,3	16,7	-
	j	68,4	31,6	-	83,3	16,7	-
	k	31,6	68,4	-	16,7	83,3	-
	l	36,8	63,2	-	50	50	-

	Grupo A			Grupo B		
	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 5	42,1	52,6	5,3	44,4	50	5,6

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 6	b	94,7	5,3	-	94,4	-	5,6
	e	52,6	42,1	5,3	94,4	-	5,6
	f	78,9	-	21,1	83,3	-	16,7
	g	57,8	21,1	21,1	66,6	16,7	16,7
	i	57,8	5,3	36,9	72,2	-	27,8
	k	10,5	10,5	79,0	-	11,1	88,9
	l	10,5	-	89,5	-	27,8	72,2

		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 7	1	94,7	5,3	-	94,4	5,6	-
	2	78,9	21,1	-	94,4	5,6	-
	3	52,6	47,4	-	66,7	33,3	-
	4	57,9	42,1	-	72,2	27,8	-
	5	78,9	21,1	-	94,4	5,6	-