



Facultad de  
Educación

# GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

CURSO 2014-2015

LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS: UN RECURSO PARA  
DESARROLLAR LA COMPRENSIÓN DE ENUNCIADOS.

THE INVENTION OF PROBLEMS: A RESOURCE TO DEVELOP THE  
UNDERSTANDING OF WORD PROBLEMS.

AUTORA: BEATRIZ FERNÁNDEZ MAZA

DIRECTORA: M<sup>a</sup> JOSÉ GONZÁLEZ LÓPEZ

JUNIO 2015

VºBº DIRECTOR

VºBº AUTOR

## ÍNDICE

---

<b>1. Introducción.....</b>	<b>3</b>
<b>2. Marco teórico.....</b>	<b>4</b>
2.1. Resolución de problemas.....	4
2.2. Etapas en la resolución de problemas.....	5
2.3. Tipos de problemas.....	7
2.4. Factores de estudio en problemas aritméticos.....	13
2.5. Invención de problemas.....	15
<b>3. Objetivo de la investigación.....</b>	<b>18</b>
<b>4. Metodología de la investigación.....</b>	<b>19</b>
4.1. Muestra.....	19
4.2. Instrumentos de investigación: pretest y posttest.....	20
4.3. Propuesta de innovación.....	27
4.3.1. Objetivos.....	28
4.3.2. Metodología.....	28
4.3.3. Sesiones.....	30
<b>5. Análisis de los datos.....</b>	<b>31</b>
<b>6. Interpretación de resultados.....</b>	<b>36</b>
<b>7. Conclusiones.....</b>	<b>38</b>
<b>8. Bibliografía.....</b>	<b>39</b>
<b>9. Anexos.....</b>	<b>41</b>

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

**Resumen.** El presente Trabajo de Fin de Grado muestra los resultados de una investigación llevada a cabo con 21 alumnos del primer nivel de Educación Primaria en cuanto a su capacidad en la comprensión de enunciados y la invención de problemas. En primer lugar, se recupera información acerca de la resolución de problemas, sus etapas y sus tipos, además de la invención de los mismos. Seguidamente, se detalla el objetivo de esta investigación, cuya finalidad es analizar la relación entre la comprensión de enunciados y la invención de problemas. Los estudiantes analizados siguen una propuesta de innovación basada en la invención de problemas, la cual consta de cuatro cuadernos de invención de problemas que se han pasado durante el estudio. Para determinar la evolución de los estudiantes, se realizó una prueba previa (pretest) y otra idéntica realizada al finalizar el mismo (postest). Finalmente, al analizar las diferencias entre el pretest y el postest, llegamos a la conclusión de que a través de la invención de problemas, los alumnos mejoran considerablemente su comprensión de enunciados.

**Palabras claves:** invención de problemas, resolución de problemas, comprensión de enunciados, problemas aritméticos, educación primaria.

**Abstract.** This "Final Year Work" shows the results of an investigation carried out among 21 students from primary school regarding their capacity to understand word and solve mathematical problems. Firstly, apart from inventing problems, information about solving problems, different stages and types is gathered. Secondly, the objective of this investigation, whose aim is to analyze the relationship between instructions understanding and problem solving is detailed. These students followed a proposal of innovation based on inventing problems consisting of 4 workbooks of problem invention, which have been previously seen during the study. To determine the evolution of the students, there was a previous test (pretest) at the beginning of the study and a second test (postest) at the end. Finally, when analyzing the differences between both tests, we reach the conclusion that through inventing problems, the students had considerably improved their understanding of word.

**Key words:** invention of problems, problem solving, understanding of word, arithmetical problems, primary school.

## 1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas debe ser una actividad central del pensamiento matemático, la cual, como afirman Fernández, Castillo y Barbarán (2010) ha generado el interés por entender las dificultades que tienen los escolares en este tema que, cada vez más, se identifica como "fracaso escolar". Generalmente, en las aulas de los centros educativos, referente al área de matemáticas, interviene la mecanización de actividades y no el razonamiento. Como destaca Parra (2007), los alumnos están convencidos de que no es necesario leer los enunciados, basta registrar los números presentes en el enunciado y la o las palabras claves de la pregunta. Sin embargo, esto no es así. Para la resolución de un problema es imprescindible llegar a una buena comprensión del enunciado. Prada (1984-85, citado en Díaz 2010) y Gregorio (2005) consideran importante la comprensión lingüística para poder entender el mensaje y las palabras del enunciado, ya sea oral o escrito. Esta comprensión está interrelacionada con la competencia matemática, cuya habilidad es necesaria para poder resolver un problema que está condicionado por los verbos, las operaciones y el nivel de exigencia. Por tanto, tanto la competencia lingüística como la matemática son imprescindibles en la resolución de problemas, puesto que hay que poner en práctica ambos conocimientos conjuntamente. En definitiva, la comprensión de enunciados tiene una gran relevancia dentro de la competencia matemática, ya que sin dicha habilidad no podemos llegar a resolver una situación problemática.

Por otro lado, la invención de problemas es una actividad en la que se ponen de manifiesto todos los procesos cognitivos necesarios para la resolución de problemas. Al ser la comprensión de enunciados una habilidad imprescindible para la resolución de una situación problemática, a través de la invención se pone en juego dicha habilidad. De esta manera, en la tarea de inventar problemas la competencia matemática y la lingüística se trabajan de forma interrelacionada, desarrollándose ambas en los estudiantes. Esta tarea hace que los alumnos afronten las situaciones matemáticas desde el principio, siendo ellos los creadores de la situación y poniendo así de manifiesto estrategias tanto lingüísticas como matemáticas. Por tanto, este estudio

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

pretende analizar si a través de la invención de problemas se desarrolla la comprensión de enunciados.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en primer lugar, presentamos aspectos teóricos relacionados con la resolución de problemas, etapas en la resolución de problemas, tipos de problemas existentes, factores de estudio en los problemas y con la invención de problemas. Seguidamente presentamos el objetivo concreto de la investigación y damos detalles sobre la metodología de investigación. Como parte de ella, exponemos la propuesta de innovación que hemos llevado a cabo con el propósito de desarrollar la comprensión de enunciados a través de la invención de problemas. Asimismo, exponemos los instrumentos de recogida de datos utilizados, en particular un test que se repite al inicio y al final de la investigación. Una vez analizados los datos presentamos los resultados y conclusiones obtenidos.

## **2. MARCO TEÓRICO**

### **2.1. Resolución de problemas**

Para situar una investigación sobre este tema, es necesario responder a la pregunta ¿qué es un problema? Según distintas fuentes, un problema puede definirse como " una situación en la que es necesario superar un obstáculo para llegar a un resultado o meta." (Espinoza, 2011, p.19) o "una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone, en principio, de un camino rápido y directo que le lleve a la solución; consecuentemente eso produce un bloqueo." (Echenique, 2006, p.20). En este caso, nos quedamos con la última definición, ya que la autora distingue perfectamente lo que es un problema de un simple ejercicio. La mayoría de las veces los educadores aceptamos como problema a un ejercicio propuesto por el libro de texto en el que se ve claramente lo que hay que hacer, aplicando algoritmos y resolviéndolos en un tiempo relativamente corto. Sin embargo, Echenique (2006) descarta esta situación como un problema. Gregorio (2005) también comparte esta idea, puesto que propone el cálculo mental y la calculadora como principales herramientas, ya que permiten centrarse en la comprensión y resolución de problemas y no en el mero hecho de realizar

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

algoritmos sin comprensión alguna. De esta manera los alumnos crecen en la comprensión y no en la mecanización de ejercicios.

En consecuencia, para la resolución de un problema es imprescindible llegar a una buena comprensión. Concretamente, Prada (1984-85, citado en Díaz 2010) considera muy relevante leer despacio y buscar la interrelación entre los conceptos expresados en el texto, aprender el significado matemático de las palabras del vocabulario matemático y ajustar el movimiento de los ojos al desarrollo del texto, ya que el lenguaje matemático no es lineal. Cuando indica que el lenguaje matemático no es lineal, quiere decir que suelen aparecer factores en la resolución de problemas que dificultan o facilitan el ejercicio. Teniendo en cuenta todos estos factores que comentaremos también más adelante, la resolución de problemas es una tarea costosa y difícil que requiere tiempo, por lo que estos indicadores de complejidad deben ser contrarrestados.

Como vemos, los lectores para realizar un problema con éxito deben ser competentes tanto en la comprensión lingüística como en la matemática. Es imprescindible hacer una buena comprensión del enunciado para posteriormente poner en práctica los conocimientos adquiridos en el área de ciencias y finalmente, combinar ambos conocimientos varias veces hasta llegar a un razonamiento lógico.

Finalmente, cabe destacar que con la resolución de problemas pretendemos desarrollar habilidades que nos permitan hacer frente a cualquier situación desconocida. O como dice Castro (2008), la finalidad es coger confianza en las propias capacidades que tenemos para afrontar problemas, utilizando las estrategias y técnicas simples que conocemos.

## **2.2. Etapas en la resolución de problemas**

La resolución de problemas es compleja, por lo que debemos asegurarnos de que nuestros alumnos solucionen de manera correcta los problemas sencillos que se encuentren en su día a día y para ello, vamos a hablar de dos autores que proponen diferentes fases para su resolución.

Cuando se tienen en cuenta problemas contextualizados en la vida cotidiana de los alumnos, tiene sentido considerar los 4 tipos de cuestiones propuestos por Gregorio (2005), quien expone cuatro etapas diferentes para su resolución. Para dar comienzo a una buena resolución de problemas, considera imprescindible tener una óptima comprensión lingüística, esto es, que el receptor entienda el mensaje y las palabras del enunciado. Por ello, en el primer ciclo, el cual nos compete en esta investigación, debemos proponer textos cortos con una redacción sencilla y lineal y trabajar con dibujos, enunciados orales o gráficos. En segundo lugar, entender el problema supone averiguar la operación matemática a realizar (comprensión matemática). En consecuencia, para una buena comprensión en este campo es necesario trabajar con problemas cercanos a los alumnos, de una sola operación, con lenguaje congruente y una estructura simple (descripción, acción y pregunta). En tercer lugar, una vez entendido bien la comprensión lingüística y la matemática, pasamos a su resolución. En este paso, es relevante tener los conocimientos matemáticos bien adquiridos e interiorizados para poder dar con la solución del problema. Por último, resolver un problema supone interpretar la solución, ya que la resolución de un problema tiene un fin que es llegar al resultado final y razonar sobre el mismo.

En segundo lugar, "si queremos que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas, debemos dedicar tiempo a ejercer como modelos de buenos resolutores y explicitar los procesos de pensamiento que tienen lugar, para que tomen conciencia de ellos" (Echenique, 2006, p.26). Para ello, esta autora adopta las cuatro etapas de Polya (1949) para la resolución de problemas.

- 1) Comprensión del problema. Esto es, entender tanto el texto como la situación que nos presenta el problema.
- 2) Concepción de un plan. Una vez entendido el texto y sabiendo cuál es la meta a la que se quiere llegar, se planifican las acciones que llevarán a ella (qué datos tengo, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones tengo que realizar y en qué orden).

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

- 3) Ejecución del plan. En la anterior fase hemos planificado los pasos a llevar a cabo, por tanto, ahora hay que ponerlos en práctica.
- 4) Visión retrospectiva. En esta última etapa se debe revisar el proceso seguido, para verificar que el problema está bien resuelto y aprender de él.

Con estas fases, aseguramos la sistematización de los procedimientos para la resolución de problemas, logrando el éxito en cada uno de ellos, ya que se fomenta el razonamiento y la práctica.

### **2.3. Tipos de problemas**

Hay mucha variedad de problemas con los que nos encontramos durante nuestra escolaridad y que se contemplan en diversas clasificaciones: problemas aritméticos, geométricos, de razonamiento lógico, de recuerdo sistemático, de razonamiento inductivo y de azar y probabilidad. En cambio, por las características que tiene este estudio y la investigación a realizar, nos vamos a centrar únicamente en los problemas aritméticos dividiendo estos en otras subcategorías. Son lo más utilizados en el primer ciclo de Educación Primaria, ya que "presentan datos en forma de cantidades y establecen entre ellos relaciones de tipo cuantitativo, cuyas preguntas hacen referencia a la determinación de una o varias cantidades o a sus relaciones, y que necesitan la realización de operaciones aritméticas para su resolución" (Echenique, 2006, p.30). Diversos autores hacen esta clasificación de problemas según sus criterios, a continuación veremos algunos de ellos.

Echenique (2006) clasifica los problemas según el número de operaciones que son necesarias realizar para su resolución (primer, segundo o tercer nivel). En el primer nivel solamente se requiere la aplicación de una sola operación, en el segundo nivel dos o más operaciones y en el tercer nivel los datos vienen dados en forma de números decimales, fraccionarios o porcentuales. Dentro de los dos primeros niveles hay subcategorías dependiendo de las características que tenga el enunciado o la operación a realizar, las cuales mencionaremos algunas de ellas más adelante. Por otro lado, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia et al., (1997, citado en

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Espinoza, 2011) clasifican los problemas aritméticos en simples y compuestos dependiendo de la información explícita o implícita que proporcione el enunciado. De manera distinta, Puig y Cerdán (1988), estos enunciados los denominan problemas de una etapa y problemas de más de una etapa. Los problemas simples o de una etapa se denominan así porque solo se requiere el uso de una operación aritmética (Castro et al., 1997). En cambio, los problemas compuestos o de más de una etapa son aquellos que para resolverlos hace falta la realización de varias operaciones aritméticas, o el uso de la misma operación varias veces (Puig y Cerdán, 1988).

#### **Problema de una etapa**

*Un equipo de rugby cuenta al iniciar el partido con 15 jugadoras. Antes de finalizar han expulsado a 3. ¿Con cuántas jugadoras ha terminado el equipo?*

$$15 - 3 = 12 \text{ jugadoras} \rightarrow \text{una sola operación}$$

#### **Problema de más de una etapa**

*Ayer Tomás compró una camiseta de 15 euros y una mochila de 23 euros, pero le hicieron un descuento y, en total, solo pagó 35 euros. ¿Cuánto descuento le hicieron?*

$$\left. \begin{array}{l} 15 + 23 = 38\text{€} \\ 38 - 35 = 3\text{€} \end{array} \right\} \text{ dos operaciones}$$

En conclusión, aunque estos autores utilicen una nomenclatura distinta, la explicación y la clasificación de los problemas es la misma. Aquellos problemas que solo requieren el uso de una operación estos autores los han denominado problemas de primer nivel, simples o de una etapa. Por el contrario, aquellos problemas que requieran el uso de dos o más operaciones, dependiendo del autor, los clasifican en problemas de segundo o tercer nivel, compuestos o de más de una etapa.

En este caso, nos quedamos con la denominación que nos propone tanto Echenique (2006) como Puig y Cerdán (1988), ya que la división dentro de los niveles o categorías es más concreta, subdividiéndolos en más

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

apartados. Atendiendo a las características de este trabajo, el nivel que nos interesa conocer en profundidad es el primero o problemas de una etapa, dentro del cual se distinguen dos tipos de enunciados: aditivo-sustractivos y multiplicación-división. De igual manera, seleccionamos los problemas aditivo-sustractivos, ya que son aquellos que se resuelven a través de sumas o restas, nivel en el que hemos realizado la investigación. Un ejemplo de un problema con estas características es el siguiente:

*Pedro tiene 13 amigos de pelo negro. También tiene 7 amigos de pelo rubio.  
¿Cuántos amigos tiene Pedro?*

Como podemos comprobar, el resultado de dicho problema recae en una única operación:  $13 + 7$  (primer nivel) y la operación a realizar se trata de una suma (problema aditivo). En esta división Puig y Cerdán (1988) también distinguen dos partes claramente diferenciadas en la estructura de dichos problemas: la parte informativa y la pregunta del problema. Las cantidades presentes en el problema, o de las cuales se habla en él, son tres: dos de ellas son los datos que están en la parte informativa, y la otra es la incógnita del problema que se encuentra en la pregunta.

Siguiendo con el ejemplo anterior, *13 amigos de pelo negro* y *7 amigos de pelo rubio* son los dos datos del problema y la incógnita se encuentra oculta en la pregunta: *¿cuántos amigos tiene Pedro?*

Dentro de este primer nivel y de los problemas aditivo-sustractivos, Echenique (2006) y Puig y Cerdán (1988) clasifican cuatro grandes categorías como son el cambio, la combinación, la comparación y la igualdad. Se clasifican los problemas de dicha manera dependiendo del componente semántico. A continuación vamos a explicar cada uno de ellos para su mejora aclaración:

#### **a. Problemas de cambio**

En estos problemas se distinguen tres momentos diferentes en los que se parte de una cantidad inicial ( $C_i$ ), la cual se ve modificada, para dar lugar a otra cantidad final ( $C_f$ ). Dos de ellas serán los datos y otra será la incógnita.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Vergnaud (1982, citado en Puig y Cerdán, 1988) califica a estos problemas con la etiqueta de ETE: estado-transformación-estado. En este tipo de problemas las tres cantidades son homogéneas, es decir, si un dato son euros, el otro tiene que ser necesariamente euros y la pregunta ha de dirigirse a los euros también.

Por ejemplo:

*Ayer en la hucha tenía 14 euros ( $C_i$ ). Hoy mi madre me ha dado la paga de la semana y tengo 24 euros ( $C_f$ ). ¿Cuánto dinero me ha dado mi madre?*

En dicho problema, 14 euros es la cantidad inicial, la paga que proporciona la madre es la cantidad de cambio y 24 euros es la cantidad final.

Tanto Echenique (2006) como Puig y Cerdán (1988) han creado una tabla para expresar de forma más clara todas las posibilidades que hay en la realización de los problemas de cambio. El cuadro inventado por Echenique (2006) es el siguiente:

	$C_i$	Modificación	$C_f$	$C_i$ crece	$C_i$ decrece	Operación
Cambio 1	x	x	?	x		+
Cambio 2	x	x	?		x	-
Cambio 3	x	?	x	x		-
Cambio 4	x	?	x		x	-
Cambio 5	?	x	x	x		-
Cambio 6	?	x	x		x	+

## b. Problemas de combinación

En esta categoría se incluyen los problemas que describen una relación entre conjuntos ( $P_1$ ) y ( $P_2$ ) que unidos forman el todo (T), respondiendo así al esquema parte-parte-todo. La pregunta puede darse acerca de una de las partes o del todo, por lo que en este caso solamente hay dos tipos posibles de problemas de combinación.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

	$P_1$	$P_2$	T	Operación
Combinar 1	x	x	?	+
Combinar 2	x	?	x	-

Un ejemplo de un problema con estas características es el siguiente:

*En una clase hay 10 chicos ( $P_1$ ) y 14 chicas ( $P_2$ ). ¿Cuántas personas hay en total ( $T$ )?*

### c. Problemas de comparación

Estos problemas presentan una relación de comparación entre dos cantidades a través de un comparativo de superioridad (más que...) o de inferioridad (menos que...). Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidad de referencia ( $C_r$ ), cantidad comparada ( $C_c$ ) y diferencia (D). Dos de ellas serán los datos y otra será la incógnita. La cantidad de referencia aparece a la derecha de la expresión "más que" o "menos que" y la cantidad comparada a la izquierda. A continuación, gracias al cuadro realizado por Echenique (2006) os mostramos las distintas posibilidades que hay de problemas de comparación.

	$C_r$	D	$C_c$	Más que	Menos que	Operación
Comparar 1	x	x	?	x		+
Comparar 2	x	x	?		x	-
Comparar 3	x	?	x	x		-
Comparar 4	x	?	x		x	-
Comparar 5	?	x	x	x		-
Comparar 6	?	x	x		x	+

Un ejemplo de problema de comparar 2 es:

*Pedro tiene 20 años ( $C_c$ ) y Juan tiene 45 ( $C_r$ ). ¿Cuántos años tiene Pedro menos que Juan?*

### d. Problemas de igualación

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecidos por medio del comparativo de igualdad "tantos como... igual que...". La estructura de este tipo de problemas es igual a la de los problemas de comparación: cantidad de referencia ( $C_r$ ), cantidad comparada ( $C_c$ ) y diferencia ( $D$ ), y al igual que los anteriores, la incógnita puede ser cualquiera de ellas. Las posibilidades de los problemas de igualación son las siguientes:

	$C_r$	$D$	$C_c$	$C_r$ crece	$C_r$ decrece	Operación
Igualar 1	x	x	?	x		+
Igualar 2	x	x	?		x	-
Igualar 3	x	?	x	x		-
Igualar 4	x	?	x		x	-
Igualar 5	?	x	x	x		-
Igualar 6	?	x	x		x	+

Teniendo en cuenta la opción de igualar 5 un ejemplo de un problema de igualación es el siguiente:

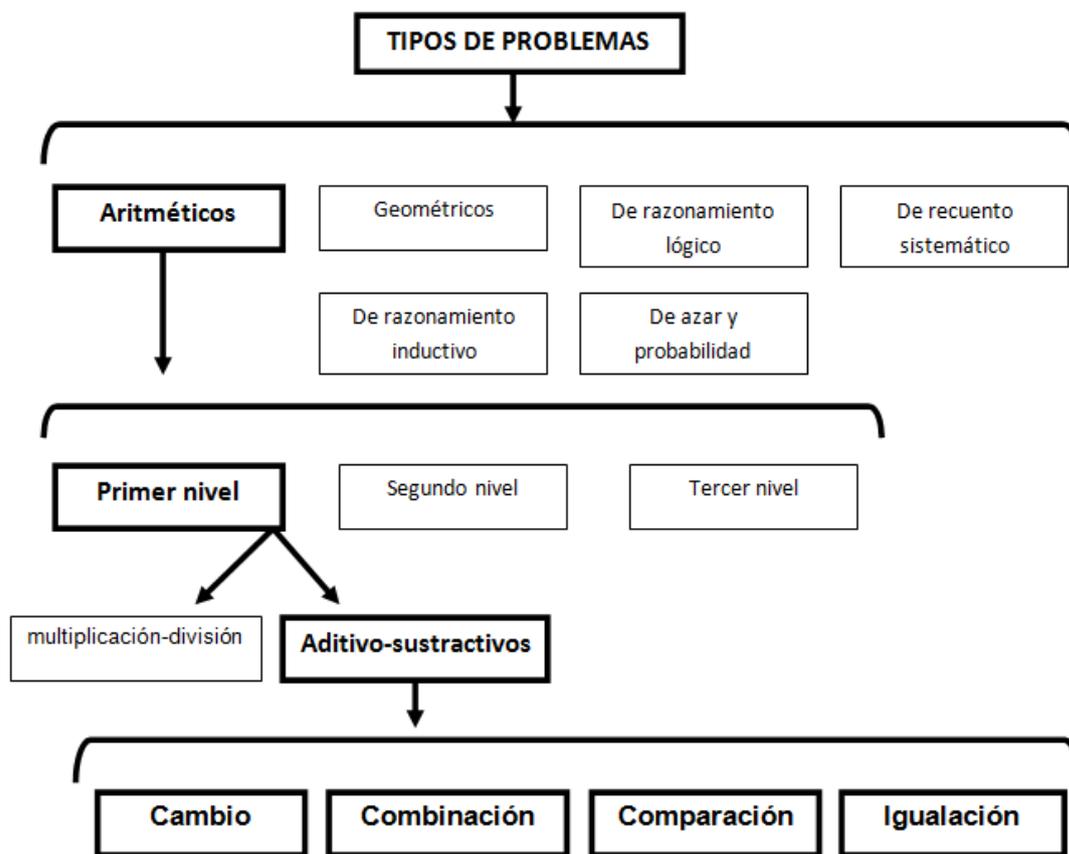
*María tiene 15 cromos ( $C_c$ ). Si María gana 5 cromos más ( $D$ ), tendrá tantos como Juan ( $C_r$ ). ¿Cuántos tiene Juan?*

Cabe destacar que a veces esta clasificación no es tan clara como se presenta, por lo que puede haber problemas híbridos, aquellos que crean confusión en su clasificación o que pueden tener más de una opción.

*En un autobús van 20 personas. En una parada bajan las 8 mujeres. ¿Cuántos hombres quedan en el autobús?*

Este problema es de clasificación dudosa, ya que tiene la modificación de la acción de la cantidad inicial y final y la relación entre conjuntos de hombres y mujeres: es un híbrido de cambio y de combinación. Por tanto ambas clasificaciones son válidas.

Finalmente, presentamos un cuadro resumen para clarificar los tipos de problemas con los que vamos a trabajar en esta investigación.



#### 2.4. Factores de estudio en los problemas aritméticos

Dejando a un lado la clasificación realizada por diversos autores y de las cuales nos interesa conocer para poder posteriormente clasificar los problemas utilizados en dicha investigación, nos vamos a centrar en los distintos factores que son de interés en el estudio de los problemas aritméticos.

Puig y Cerdán (1988) resaltan la dificultad que tienen los problemas variando la posición de la cantidad desconocida y la colocación del resultado de la operación a uno u otro lado del signo igual. En el último caso, son significativamente más difíciles las que tienen la operación a la derecha ( $c = a + ?$ ) que aquellas puestas a la izquierda ( $a + ? = c$ ). Dependiendo de la colocación de la incógnita y de la operación a realizar existen los siguientes factores: Las proposiciones canónicas de adición y sustracción ( $a + b = ?$  ó  $a - b = ?$ ) son menos difíciles que las no canónicas ( $a + ? = c$  ó  $a - ? = c$ ), además de que las proposiciones canónicas de adición suelen ser más fáciles que las

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

de substracción. Dentro de las proposiciones de substracción son más difíciles las que tienen el minuendo desconocido ( $? - b = c$ ) (Puig y Cerdán, 1988).

Los factores hay que tenerlas en cuenta, ya que determinan la complejidad o simplicidad de un problema. Castro (1995, citado en Espinoza, 2011) hace referencia a la importancia de las proposiciones interrogativas, debido a que pueden producirse de distintas maneras, siendo éstas más simples o más complejas dependiendo de si solamente hay que averiguar un valor o cantidad asignada, como por ejemplo, *¿cuántas canicas tiene Ana?*, o comparar dos cantidades, *¿cuántas canicas tiene Ana más que Miguel?* Además hay una tercera que proponen Silver y Cai (2005, citado en Espinoza, 2011), en la cual la pregunta establece una condición entre dos elementos, por ejemplo: *¿Si María tiene 5 años más que Víctor, cuántos años tiene Víctor?*

Como hemos añadido anteriormente, es muy importante tener en cuenta la variable semántica, yendo de menos dificultad a más: el cambio, la combinación, la comparación y la igualación. Aunque en los problemas de resta resultan ser más costosos los de combinación. De igual manera, Díaz (2010) y Gregorio (2005) acentúan como factores los exponentes, los subíndices o los paréntesis que pueden aparecer, además del lenguaje que puede ser más condensado o no, cada palabra es fundamental para la comprensión completa del problema. De igual manera, el enunciado del problema, atendiendo a las relaciones y el orden existente entre las palabras, la presentación de los datos, la ubicación de la pregunta, el número de frases empleadas, la longitud y complejidad de las mismas, los verbos utilizados, el tamaño de los números y la relación que tiene con la experiencia de los alumnos/as o la decodificación matemática, entre otros, son útiles para explicar la dificultad del problema.

Puig y Cerdán (1988) clasifican las dificultades sintácticas en función de la finalidad perseguida y de la metodología utilizada, utilizando diferentes recursos como los que hemos nombrado anteriormente. Por ejemplo, el uso de dibujos o materiales manipulables en los problemas verbales resultan ser más sencillos, al menos en el primer nivel de Educación Primaria. También, específicamente, una variable relevante para analizar las situaciones

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

problemáticas es la relación existente entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados en la operación a realizar.

*Belén se comió 10 gominolas. Tenía 25. ¿Cuántas gominolas le quedan?*

En dicho problema, la operación que hay que realizar para resolver la situación es una resta, pero los datos están expuestos en orden inverso. Por ello, hay alumnos que suman para obtener la solución, ya que descontextualizan el problema y consideran que con esos datos colocados en dicho orden la única operación posible es una suma.

Los factores de estudio de los problemas aritméticos presentados en este epígrafe y los tipos de problemas presentados en el apartado anterior, serán de gran ayuda en la definición de las categorías de análisis de este estudio. En la siguiente sección comenzaremos a abordar la invención de problemas como vehículo para mejorar la resolución de problemas.

## **2.5. Invención de problemas**

Algunos autores (Polya, 1979; Cázares, 2000 y English, 1997, citado en Espinoza, 2011) ponen de manifiesto la importancia que tiene la invención de problemas dentro de la resolución de problemas, ya que varias investigaciones reconocen en sus etapas de solución del problema actividades relacionadas con dicha actividad.

Antes de continuar con este apartado, resulta relevante tener claro lo que se entiende por invención de problemas. Este término es usado para referirse a la creación de nuevos problemas o la reformulación de problemas dados (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996, citado en Espinoza, 2011). Esto es, se puede dar antes, durante y después de resolver un problema dado (Castro, 2008).

La invención de problemas se caracteriza como un "método capaz de desarrollar la actividad mental en la resolución de problemas, garantizando la autonomía de las sucesivas construcciones." (Fernández et al., 2010, p.223).

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

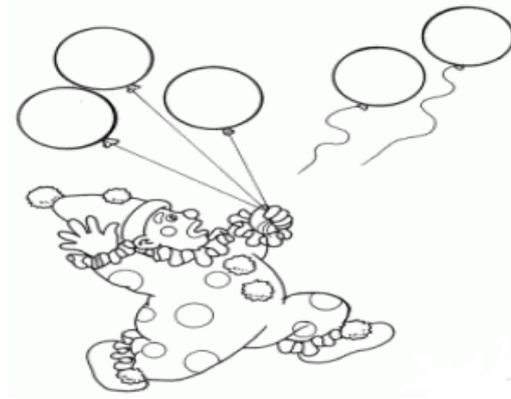
Además, Silver (1994, citado en Castro), Ayllón y Gómez, (2014) y Espinoza, Lupiáñez y Segovia, (2013) están de acuerdo en que la invención de problemas se caracteriza por ser una actividad creativa, orientada a la indagación, con la cual se mejora la capacidad de los estudiantes, la comprensión matemática, la motivación, el interés, la autonomía, la disposición y las actitudes. Por tanto, esto contrarresta el miedo por la materia. Es una actividad intelectual y eficiente, donde los procesos cognitivos son necesarios para su creación (Ayllón y Gómez, 2014).

Gracias a la invención de problemas, los docentes pueden examinar y valorar la comprensión de los conceptos matemáticos que tienen los discentes, debido a que tienen que hacer uso de los conocimientos previos para poder resolverlos, poniendo en juego sus habilidades matemáticas, la profundización de los conceptos, el uso de los números y cantidades, etc. Además, cabe destacar que se pueden utilizar las experiencias de los estudiantes para proponer actividades de este tipo, conectando así la actividad con la realidad y situaciones más cercanas (Espinoza et al., 2013) y (Ayllón y Gómez, 2014).

Dentro de la invención de problemas, podemos encontrar situaciones libres, semiestructuradas y estructuradas (Espinoza et al., 2013). En las situaciones libres no hay instrucciones a seguir para la invención, en las semiestructuradas se les proponen enunciados con base tanto ilustrativa o de forma textual y por último, en las estructuradas, se reformulan los problemas dados. Centrándonos en esta investigación en concreto, las situaciones con las que hemos trabajado son las semiestructuradas. Los estudiantes hacen sus producciones a partir de una ilustración que presenta o no información numérica o de un enunciado. Parten de situaciones familiares para motivarles y números diferentes. Son actividades muy ricas para hacer en equipos porque favorecen el intercambio, planteando más de un problema entre los componentes (Parra, 2007). Dos ejemplos de dos situaciones semiestructuradas son las siguientes:

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

a. Partiendo de una ilustración, deben construir el enunciado:



b. Partiendo de un enunciado dado, deben inventar la pregunta:

Ana tiene 6 canicas. Miguel tiene 4 canicas más que Ana.

¿.....?

Por otro lado, Gregorio (2005) también propone algunos tipos de problemas para trabajar en el primer ciclo de Educación Primaria y con los que se puede jugar en la invención de problemas. Plantea situaciones abiertas y variadas que tengan datos insuficientes, varias soluciones o datos que no son necesarios para su resolución, por ejemplo. Los alumnos pueden inventarse el dato desconocido y resolverlo o colocarle varias soluciones a elección de una solo. También parte de situaciones con una solución dada, de un enunciado dado o de una pregunta dada, a través de los cuáles deben inventarse lo restante que falte o de situaciones en las que tengan que cambiar los datos, la información del problema o la pregunta y resolverlo de la misma manera que el anterior. A su vez, propone situaciones de completar problemas, en los cuales exponen al principio los datos desordenados y posteriormente deben ser colocados en su sitio adecuado y situaciones para desarrollar la originalidad, en los cuales se debe inventar un problema con un vocabulario específico dado, la operación que hay que hacer o incluso la solución del mismo. o invención de problemas de manera libre. Por último, al igual que (Espinoza, et al., 2013) en sus situaciones libres, Gregorio (2005) acaba proponiendo también lo mismo, donde prima la libertad y la invención propia y personal.

Como vemos, la invención de problemas es variada con una gran cantidad de posibilidades para trabajar la comprensión de enunciados. En esta investigación, vamos a centrarnos en las propuestas de Echenique (2006). Esta autora plantea un taller de resolución de problemas para cada uno de los cursos de primaria. Centrándonos en el primer nivel de Educación Primaria, el cual nos interesa en esta investigación, Echenique presenta algunos procesos heurísticos que utiliza para el desarrollo de la invención de problemas. En un primer momento, considera que son necesarias estrategias que faciliten la escucha y/o lectura analítica, para posteriormente pasar a la resolución de problemas. De esta manera, se fomenta la comprensión del enunciado como nos propone Gregorio (2005) en su primera etapa. Para ello, se pueden desarrollar actividades como: decir lo mismo pero de otra forma, separar datos e incógnitas, ¿qué datos son necesarios para poder contestar a la pregunta?, contarse un problema, inventar problemas, etc. Tiene una amplia variedad de actividades a través de las cuales se fomenta la comprensión de enunciados y la competencia matemática sobre la resolución de problemas. Algunas de ellas se pondrán en práctica en esta investigación.

En un porcentaje alto, se evidencia que aquellos estudiantes que son capaces de inventar problemas son buenos resolutores matemáticos y en consecuencia, son buenos en la comprensión de textos. Sin embargo, aunque muchos autores creen idónea la invención de problemas para mejorar la competencia matemática, en España las investigaciones relacionadas con este tema son escasas. Todavía es una actividad que no está en auge en las clases de los centros escolares, no conocen su existencia y por tanto, no se pone en práctica. Es por ello que se necesitan más evidencias de la mejora que implica la invención de problemas, para fomentar esta actividad y darle importancia dentro de la resolución de problemas y de la competencia matemática.

### **3. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN.**

El principal objetivo que tiene esta investigación es determinar si a través de la invención de problemas se mejora en alumnos del 1º nivel de Educación

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Primaria la comprensión de enunciados durante los procesos de resolución de problemas contextualizados.

Trabajaremos con problemas de los tipos siguientes:

- Problemas de cambio, combinación y comparación, tanto de adición como de sustracción, con estructura sencilla (la pregunta al final del enunciado y la incógnita dentro de esta).
- Problemas que contienen situaciones semiestructuradas de cambio (elaboradas por Echenique, 2006).

#### **4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.**

En esta investigación han participado un total de 21 alumnos del 1º nivel de Educación Primaria. Las conclusiones que obtengamos provendrán de analizar los cambios que se perciben entre un pretest y un postest que realizan los estudiantes. Entre ellos, se realiza la propuesta de innovación para fomentar la invención de problemas. Concretamente, en la intervención se proponen cuatro cuadernos de invención de problemas con 10 situaciones problemáticas cada uno, que los estudiantes realizan en grupos de trabajo un día a la semana, con una duración de 45 minutos.

##### **4.1. Muestra**

El contexto de estudio es un centro público de la comunidad autónoma de Cantabria, situado en el municipio de Santa María de Cayón. En esta investigación nos planteamos mejorar la comprensión de enunciados de los alumnos del primer curso de Educación Primaria, grupo C. De un total de 96 alumnos del primer nivel de Educación Primaria afiliados a este centro escolar, se seleccionaron 21 alumnos de una clase. Este aula fue seleccionado gracias a la participación de la docente, ya que se mostró receptiva con el estudio llevado a cabo. Además, viendo el problema existente que tienen los alumnos en la resolución de problemas, consideró oportuno ser partícipe de esta investigación para así conocer y aprender otro tipo de metodología dentro de las matemáticas en cuanto a este aspecto.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

#### 4.2. Instrumentos de investigación: Pretest y postest

Se elabora una prueba que se pasará como pretest y postest. Esto nos permite ver la evolución de cada estudiante.

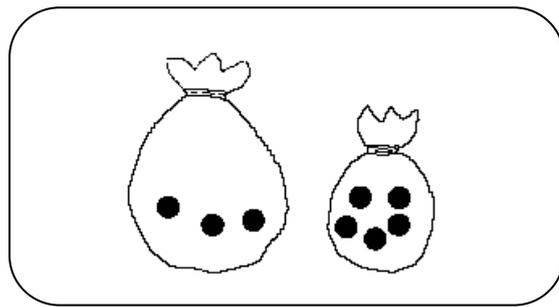
Tabla 1. *Esquema del diseño Pretest-Postest empleado en la investigación.*



Al comienzo de la investigación se reparte el pre-test que incluye tres actividades, dentro de las cuales hay una o dos tareas de cada. Estas actividades son extraídas de distintas fuentes.

La primera actividad es la tarea 1 del libro de Echenique (2006) para el primer nivel de Educación Primaria, la cual se llama: *decir lo mismo, pero de otra forma*. Trata de desarrollar en los alumnos la capacidad para comprender y expresar el carácter "reversible/alternativo". A través de este ejercicio, vamos a comprobar la capacidad de comprensión del enunciado que los discentes tienen y la reversibilidad desarrollada en su mente, logrando entender un mismo significado expresado de forma distinta. En general, se pretende mejorar tanto la capacidad lógica como la expresión escrita.

A continuación, vamos a analizar con detalle el ejercicio extraído del documento de Echenique (2006) e insertado en el pretest y el postest relacionados con esta dinámica.



- En la bolsa pequeña hay más bolas que en la bolsa grande.

En la grande hay.....  
.....

- En la bolsa grande hay dos bolas menos que en la bolsa pequeña.

En la pequeña hay.....  
.....

Como observamos, la tarea se centra en la comprensión de enunciados sin necesidad de utilizar un problema con datos. Sin embargo, puede clasificarse como un problema de comparación por la relación existente entre dos cantidades con la apariencia de las expresiones "más que" y "menos que". Aunque en este tipo de problemas hay ausencia de datos y de incógnita, en realidad el razonamiento lógico es el mismo, captando en ambas situaciones qué dos cantidades comparo, siendo una la cantidad de referencia y otra la cantidad comparada. Esto es, en la primera oración propuesta, *en la bolsa pequeña hay más bolas que en la bolsa grande*, la cantidad comparada es la bolsa pequeña y la cantidad de referencia es la bolsa grande, aunque no haya números o símbolos, el contenido sigue siendo el mismo. La única diferencia es la ausencia de la diferencia. En este caso, el ejercicio descrito tiene apoyo visual para mejorar así su comprensión, debido a la edad de los cuestionados; variable que facilita el desarrollo del problema.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Cabe señalar que al principio de este ejercicio se propone un ejemplo para un mejor entendimiento de los cuestionados.

Los problemas de comparación son complejos, por lo que la lectura de dicho enunciado también lo es. Gracias a trabajar con esta tarea la comprensión de enunciados, resulta ser clave para superar con éxito un problema aritmético o en su defecto, uno de comparación. La capacidad de expresar de formas alternativas y equivalentes una solución, un enunciado y una relación numérica dada es fundamental para procesar la información que nos proporciona una situación problemática.

La segunda y tercera actividad son extraídas de una página web, en la cual docentes vinculados al área de matemáticas cuelgan recursos útiles para las aulas. Concretamente, el segundo ejercicio, llamado *elige un dato*, es creado por la autora Carolina Lozano Antón. En dicha página propone cuatro problemas para el primer nivel de Educación Primaria. En cada uno de ellos se manifiesta una situación problemática incompleta, esto es, falta un dato para poder encontrar la solución. En consecuencia, propone tres opciones distintas de la cual solamente una de ellas es la correcta.

Un problema de los que propone dicha autora correspondiente a esta dinámica es el siguiente:

- *Mi amiga María tiene 23 rotuladores y yo tengo otros pocos. ¿Cuántos rotuladores tenemos entre las dos?*
  - a) *Yo tengo 36 rotuladores.*
  - b) *Los rotuladores de mi hermana son más bonitos.*
  - c) *Mi hermana ha perdido 13 rotuladores.*

Como se muestra en la parte redondeada, el enunciado no da la información de cuántos rotuladores tengo yo. Los alumnos deben captar esta ausencia del dato y en las opciones siguientes escoger la correspondiente a dicha información (en este caso, la opción correcta es la a, ya que las demás

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

no dan ningún tipo de información útil para su resolución). Por tanto, el ejercicio quedaría de la siguiente manera:

- *Mi amiga María tiene 23 rotuladores y yo tengo otros pocos. ¿Cuántos rotuladores tenemos entre las dos?*
  - a) *Yo tengo 36 rotuladores.*
  - b) *Los rotuladores de mi hermana son más bonitos.*
  - c) *Mi hermana ha perdido 13 rotuladores.*

Gracias a esta tarea, los alumnos ponen en práctica las etapas de la resolución de problemas propuestas por Echenique (2006). En primer lugar, deben comprender el problema, ver qué situación nos presenta para posteriormente planificarlo, observando así qué datos tengo y cuáles me faltan, qué puedo calcular con cada una de las opciones... Y por último, aunque el ejercicio no pida explícitamente la solución en forma numérica, mentalmente pones en práctica los datos que tienes y resuelves el problema, revisando el proceso seguido.

Una vez expuesta la dinámica de este ejercicio, vamos a analizar los tipos de problemas utilizados en el pretest y en el postest. Las dos situaciones problemáticas publicadas son las siguientes:

### 1º Problema

Mi hermana tenía 26 canicas, se le han perdido unas cuantas. ¿Cuántas canicas tiene ahora mi hermana?

- a) Las que ha perdido son todas azules.
- b) Mi primo tiene 10 canicas.
- c) Mi hermana perdió 12 canicas.

Este es un problema de cambio, ya que tiene tres cantidades homogéneas (canicas) y se distinguen tres momentos diferentes en los cuales

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

hay una modificación. La  $C_i$  se corresponde a las 26 canicas que tiene "mi hermana", el cambio son las canicas que ha perdido que en este caso es la opción c) *perdió 12 canicas*, y por último, en la pregunta se cuestiona acerca de la *incógnita*. La operación se trata de una resta por lo que la  $C_i$  decrece. En este caso, fijándonos en el cuadro de Echenique (2006) estamos ante una situación de cambio 2.

Tabla 1. *Repetición del cambio 2 propuesto por Echenique (2006).*

	$C_i$	Modificación	$C_f$	$C_i$ crece	$C_i$ decrece	Operación
Cambio 2	x	x	?		x	-

En definitiva, se trata de un problema aritmético sencillo de cambio, de resta. Los factores del mismo tiempo también son simples, apareciendo la incógnita en la pregunta, la cual está descrita al final, averiguándose simplemente una cantidad y la aparición de los datos están expuestos en orden para proceder a calcular la resta ( $C_i - D = ?$ ). Esta última razón podría haber determinado la dificultad del problema, sin embargo resulta ser sencillo al estar ordenado. El tamaño de los números es correcto para el primer nivel de Educación Primaria, los verbos son simples y la longitud del enunciado es mínima.

## 2º Problema

Mi primo ha comprado 5 pinturas de colores por 3€ y una goma de borrar.  
¿Cuánto dinero se ha gastado en total?

- a) La goma es de color rojo.
- b) La goma cuesta 2€.
- c) Un rotulador cuesta 1€.

Se trata de un problema de combinación porque aparece una relación entre conjuntos que unidos forman el todo. Los datos están descritos en el

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

enunciado (averiguando uno de ellos entre las opciones) y la incógnita se encuentra en la pregunta. La relación está inmersa en las pinturas de colores de 3€ ( $P_1$ ) con la goma de borrar de 2€ (opción b y  $P_2$ ), que unidas estas dos partes forman el todo que es el dinero gastado en total (T). En este tipo de problemas solamente hay dos posibilidades de la situación y en este concretamente, es el combinar 1 del cuadro de Echenique (2006).

Tabla 1. *Repetición del combinar 1 propuesto por Echenique (2006).*

	$P_1$	$P_2$	T	Operación
Combinar 1	x	x	?	+

Una vez hecha la clasificación semántica y viendo que los problemas de combinación de adición no resultan ser los más difíciles para los alumnos, vamos a analizar en detalle los factores que intervienen en dicho problema.

Se trata de una proposición canónica de adición, donde la incógnita se encuentra a la derecha de la igualdad, por lo que el grado de dificultad es mínimo ( $P_1 + P_2 = ?$ ). La pregunta está basada en una única cantidad asignada, lo que facilita el ejercicio, sin compararla con otros elementos. Además el orden de aparición de los datos es correcto, aunque en los problemas de adicción no resulta ser lo más relevante, ya que el orden de los factores no altera el producto y la colocación de la pregunta se encuentra al final de forma canónica. El tamaño de los números es aceptable para el primer nivel de Educación Primaria, los verbos son simples y la longitud del enunciado es corta. La dificultad más grande que presenta este ejercicio es el dato que aparece de más (5 pinturas de colores). Este dato es innecesario e irrelevante para resolver el problema, hecho que deben darse cuenta los alumnos fijándose en la pregunta del problema.

La tercera actividad, creada por Matilde Álvarez Gómez, consiste en *ordenar enunciados*. Al igual que la anterior autora, propone 4 problemas por hoja de los cuáles dos han sido seleccionados para utilizarlos en el pretest y el postest. La base del ejercicio está en la comprensión lingüística, ya que se dan

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

distintas oraciones que deberán ser ordenadas para conseguir que el enunciado del problema tenga sentido.

Las situaciones problemáticas utilizadas son las siguientes:

### **Problema 1**

También tiene 7 amigos de pelo rubio.

¿Cuántos amigos tiene Pedro?

Pedro tiene 13 amigos de pelo negro.

### **Problema 2**

Su hermana riega 5 macetas de margaritas.

En el jardín de Juan hay 2 regaderas.

¿Cuántas macetas riegan entre los dos?

Juan riega 8 macetas de geranios.

En este caso, ambos problemas son del mismo tipo: problemas de combinación. Ambos describen una relación entre conjuntos que forman el todo. En el problema 1 los amigos del pelo rubio y los del pelo negro forman el conjunto de "amigos". Este es un problema sencillo de adicción, el cual tiene la pregunta al final y la incógnita se encuentra dentro de esta. El problema 2 tiene la misma estructura con las macetas de geranios y las macetas de margaritas, juntándolas y formando "macetas en total". Sin embargo, en dicho problema hay más dificultad porque aparecen cuatro enunciados y uno de ellos sobra. En este caso, los alumnos tienen más dificultad porque deben averiguar qué dato no es necesario para la resolución del problema. Exceptuando esta variable, el problema final es sencillo de adicción, con la pregunta y la incógnita al final. Por tanto, la estructura de ambos propuesta por Echenique (2006) es la siguiente:

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

	$P_1$	$P_2$	T	Operación
Combinar 1	x	x	?	+

### A. Procedimiento

En la fase pre-test, que tuvo lugar el día 24 de marzo de 2015 a las 11:30h, los alumnos de 1º de Educación Primaria cumplieron la prueba de manera individual para partir de los conocimientos previos de cada uno. El docente del aula no corrigió las pruebas de los alumnos, ni tampoco participó en las mismas. Dicha corrección se llevó a cabo por el investigador.

La fase pos-test se llevó a cabo el 19 de mayo de 2015. A los alumnos se les aplicó la prueba para analizar definitivamente si en la intervención efectuada con el cuaderno de trabajo hay una evolución positiva o no en la comprensión de enunciados. Se utilizó el mismo protocolo que en la fase pre-test, pasando la prueba el mismo día de la semana y a la misma hora. La corrección de las pruebas siguió el mismo procedimiento que en la fase pre-test.

El procedimiento para aplicar el instrumento en ambos grupos fue el mismo y consistió en que el investigador entregó las tres hojas con las tareas a cada estudiante y les indicó que la actividad propuesta formaba parte de una investigación realizada en la Universidad de Cantabria en un Trabajo de Fin de Grado, con relación a los procesos de invención de problemas matemáticos. Antes de que empezaran a realizarlo, el investigador leyó todas las actividades para agilizar la lectura ya que son alumnos muy pequeños de edad, cuya lectura aún no está desarrollada en su totalidad. Posteriormente, cada alumno resolvió los problemas de manera individual sin dar más instrucciones.

### 4.3. Propuesta de innovación

En esta subsección describimos la propuesta de innovación que se llevó a cabo entre el pre-test y el post-test.

#### **4.3.1. Objetivos**

A continuación, se enumeran los principales objetivos que deben alcanzar los estudiantes:

- Identificar en la vida cotidiana y en su entorno próximo problemas que deben resolver, siendo estas situaciones aritméticas aditivo-sustractivas.
- Desarrollar la invención de problemas como método para mejorar la resolución de problemas.
- Fomentar el razonamiento, la comprensión de enunciados, la creatividad y las destrezas matemáticas a través de las situaciones planteadas.
- Aprender a trabajar en grupo en la resolución de problemas.

#### **4.3.2. Metodología**

Analizando el aula en el que se ha realizado la investigación y viendo el escaso trabajo en grupo existente, se decide trabajar en grupo para una mayor captación de conocimientos. Por tanto, el aula se distribuye en cuatro equipos de trabajo heterogéneos formados por 5 o 6 alumnos con diferentes ritmos y niveles de aprendizaje. Los niños que poseen un mayor ritmo de aprendizaje ayudan a aquellos que tienen mayor dificultad. El discente debe ser activo, él es el protagonista, el que debe razonar, plantear, preguntar, resolver, etc. Por ello, el papel del docente simplemente se trata de guiar a los alumnos, pilotará cada actividad con la ayuda de los mismos.

La fase de intervención se dio mediante la realización del cuadernillo de invención de problemas por cada grupo participante en una sesión semanal de 45 minutos aproximadamente de duración, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente. El número total de sesiones en las que se pasó el cuaderno de situaciones son cinco, una sesión cada semana. El horario para el paso de estas tareas era flexible.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

En este caso, al tratarse del primer curso, las dos primeras sesiones, se trabajarán de manera intensiva a nivel oral y escrito, resolviendo las actividades conjuntamente los alumnos con el profesor, aunque ya estén divididos en grupos. Poco a poco, en las sesiones siguientes, se da entrada al trabajo en grupo individual, sin ayuda del docente, dejando así cabida al diálogo, la cooperación y la puesta en práctica de sus conocimientos matemáticos. En general la mecánica de las sesiones es la siguiente:

1. Introducción: Se les plantea a los grupos los ejercicios. Se les explica con claridad lo que hay que hacer.
2. Desarrollo: Entre todos observamos la imagen propuesta o leemos los enunciados dados y a partir de un diálogo comenzamos a dar ideas sobre las posibles opciones.
3. Trabajo en grupo: Cada grupo dialoga, propone y pone en común sus ideas. Una vez llegado a un acuerdo escriben su texto o pregunta inventada.
4. Exposición: Cada semana un grupo expone sus problemas o preguntas inventadas y entre todos mantenemos un diálogo sobre si su opción es correcta o no.

En cada sesión, el investigador realiza un feedback a cerca de su trabajo, analizando los factores que pueden mejorar o entorpecer dicha investigación, como puede ser: la organización del aula, los grupos de trabajo, la interacción, los ritmos de aprendizaje tan diversos o la complejidad o simplicidad del problema en cuestión.

A través de esta investigación se decide contrarrestar los factores que afectan directamente al trabajo de la comprensión de enunciados en Primaria, partiendo así de factores más simples y poco influyentes para un buen resultado. Hay que tener en cuenta que nos encontramos en el primer nivel de Educación Primaria, donde aun la lecto-escritura está comenzando a desarrollarse, por tanto los enunciados deberán ser sencillos, haciendo uso igualmente de verbos simples. La ubicación de la pregunta siempre se encuentra al final, para mecanizar sus conocimientos y comenzar a desarrollar una rutina en cuanto a la resolución de problemas, poniendo así en evidencia

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

las fases que nos propone Echenique (2006). Además, esta será simple porque siempre deberán averiguar un valor o una cantidad asignada.

### **4.3.3. Sesiones.**

Como material para el alumno, se confeccionaron cuatro cuadernos de trabajo de invención de problemas para cada grupo de alumnos con diez situaciones problemáticas cada uno, seleccionadas y adaptadas de Echenique (2006). En cada sesión se trabaja con dos problemas, con la finalidad de que de tiempo a trabajar con ellos en profundidad. Estas sesiones se pasaron en los meses de abril y mayo de 2015 y el número total de sesiones fueron cinco. A continuación, se explican las dos situaciones problemáticas profundamente.

#### **1. Inventar problemas. Relación entre datos y pregunta.**

La primera de ellas es la tarea 5 del libro de Echenique (2006) dirigida al primer curso de Educación Primaria. Se trata de inventar un problema a través de una imagen propuesta con ayuda de una operación aritmética o no. El objetivo es que los alumnos/as elaboren por escrito textos completos de problemas, creando así ellos mismos el enunciado con su respectiva pregunta. Es necesario que sepan captar los datos necesarios para poder formular el enunciado y contestar a la pregunta que enuncien. Las orientaciones dadas para su resolución por parte del docente pueden ser las siguientes: ¿cuál serán los datos?, ¿cuál será la pregunta?, ¿cuál será la operación?...

Una vez finalizada la tarea en grupos, cada semana se pedirá a un grupo que lea en voz alta el texto que han reproducido y entre todos crearemos un feedback, observando si esa opción es correcta o no.

#### **2. ¿Qué puedo calcular con los datos del telegrama? Hago preguntas.**

El segundo ejercicio expuesto en cada hoja del cuadernillo es la tarea 3 del libro de Echenique (2006) dirigida al primer curso de Educación Primaria. Se trata de que los alumnos sean capaces de formular correctamente preguntas en relación con los datos conocidos. En este ejercicio, desde esta investigación creamos una variable para su resolución. Creímos oportuno dar

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

las dos oraciones del enunciado en forma de recortable, sin el orden correcto. De esta manera, son los discentes quienes tienen que ordenar en un primer momento el enunciado para posteriormente crear una pregunta según los datos ordenados.

De igual manera que en el ejercicio anterior, cada semana se pedirá a un grupo que lea en voz alta el orden del enunciado que han planteado y su respectiva pregunta. Entre todos crearemos un feedback, observando si esa opción es correcta o no.

Al finalizar cada sesión, los discentes entregan el cuadernillo al investigador, quien seguidamente observará todas las respuestas dadas, utilizando este recurso para la recogida de datos por parte del alumnado.

Todos los problemas utilizados en este cuaderno de trabajo son de cambio, sin embargo la base de esta intervención no se ha centrado nunca en la resolución del problema en sí, sino en la capacidad de comprensión de texto que tienen los alumnos y la facilidad o dificultad para generar enunciados. Los problemas propuestos se seleccionaron de este tipo ya que dichos discentes nunca habían trabajado con la invención de problemas y los problemas de cambio son los más fáciles para su resolución. Esto ha facilitado el trabajo del alumnado del primer nivel de Educación Primaria, ya que aun son muy pequeños. Además los factores utilizados son sencillos, la pregunta siempre se encuentra al final y en ella se encuentra la incógnita, la colocación del resultado siempre está a la derecha, la cantidad averiguada es una sola y el orden de aparición de los datos es sencillo y directo para el cálculo.

## **5. ANÁLISIS DE LOS DATOS.**

En este estudio se pretende describir y caracterizar en términos cuantitativos las producciones de los estudiantes ante la tarea de desarrollar el pretest y el postest, antes y después de la intervención en invención de problemas aritméticos. El diseño de este análisis es cuantitativo comparativo de cada uno de los alumnos encuestados. Para ello, vamos a desarrollar unas tablas (tabla 1 y tabla 2) en las que se identifican los puntos conseguidos por

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

cada alumno en la primera prueba y en la segunda. Las tareas serán evaluadas de una en una con un valor de 0 ó 1 punto. La actividad valdrá 0 puntos cuando esté incorrecta y 1 punto cuando esté correcta. Una vez evaluada cada tarea y problema, se contarán los puntos totales para saber el grado de comprensión de enunciados que posee el alumno, esto es, cuantos más puntos, mayor comprensión tiene. Los puntos máximos conseguidos son 7 y el mínimo 0.

En la actividad 1, la tabla cuenta con un desplegable más llamado expresión completa del enunciado. Algunos alumnos en la prueba han usado únicamente las palabras "más o menos" en vez de escribir la oración completa. Por ejemplo: En la bolsa pequeña hay más bolas que en la bolsa grande. En la grande hay menos.

Podemos considerar que los encuestados han comprendido el enunciado, sin embargo la tarea no está resuelta en su totalidad, ya que lo idílico es que escriban la oración completa. En este caso, se les ha contado con que la actividad está bien realizada pero la expresión completa no.

Una vez calculados los puntos totales de cada alumno en el pretest-postest, compararemos sus resultados en la tabla 3, viendo así si la comprensión de enunciados ha aumentado ( $\uparrow$ ), ha disminuido ( $\downarrow$ ) o está igual ( $\rightarrow$ ).

De igual manera, en la tabla 4 se van a contar las respuestas correctas de cada problema de los 21 alumnos, para hallar el análisis y la comparación de los problemas según el tipo: cambio, combinación y comparación. Observando si han aumentado las mejoras en todos los problemas o no y cuál de ellos ha sido el mejor resuelto y el peor. Así, analizamos qué problema ha mejorado con la intervención de invención de problemas y cuál está aún por mejorar.

Las tablas en las que se encuentran los datos obtenidos son las siguientes:

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Tabla 1. Resultados de los análisis de datos del pretest de alumnos de 1º de Educación Primaria.

Bien: 1 punto

Mal: 0 puntos

Alumno	ACTIVIDAD 1			ACTIVIDAD 2		ACTIVIDAD 3		TOTAL
	Problema 1	Problema 2	Expresión completa del enunciado	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Comprensión de enunciados
Alumno 1	0	0	0	0	1	0	0	1
Alumno 2	0	0	0	0	0	1	0	1
Alumno 3	1	1	1	0	0	0	0	3
Alumno 4	1	1	1	0	0	0	0	3
Alumno 5	0	0	0	0	1	0	0	1
Alumno 6	1	0	1	0	0	0	0	2
Alumno 7	1	1	1	0	0	0	0	3
Alumno 8	1	1	1	0	1	1	0	5
Alumno 9	0	0	0	0	0	0	0	0
Alumno 10	1	1	1	0	0	1	0	4
Alumno 11	1	1	1	0	0	0	0	3
Alumno 12	1	1	1	1	0	0	0	4
Alumno 13	0	0	0	0	0	0	0	0
Alumno 14	1	1	1	0	0	1	0	4
Alumno 15	1	1	1	1	1	1	0	6
Alumno 16	1	1	1	1	0	0	0	4
Alumno 17	1	1	1	1	1	1	0	6
Alumno 18	1	1	0	1	1	0	0	4
Alumno 19	0	0	0	1	1	0	0	2
Alumno 20	1	1	1	1	0	1	0	5
Alumno 21	0	1	1	0	1	0	0	3

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Bien: 1 punto

Mal: 0 puntos

Tabla 2. Resultados de los análisis de datos del postest de alumnos de 1º de Educación Primaria.

Alumno	ACTIVIDAD 1			ACTIVIDAD 2		ACTIVIDAD 3		TOTAL
	Problema 1	Problema 2	Expresión completa del enunciado	Problema 1	Problema 2	Problema 1	Problema 2	Comprensión de enunciados
Alumno 1	1	1	0	1	0	0	0	3
Alumno 2	1	1	0	1	1	0	0	4
Alumno 3	1	1	1	1	0	0	0	4
Alumno 4	1	1	0	1	0	1	0	4
Alumno 5	1	1	0	0	1	0	0	3
Alumno 6	0	0	0	0	0	0	0	0
Alumno 7	1	1	0	1	1	0	0	4
Alumno 8	1	1	1	1	1	0	0	5
Alumno 9	1	1	0	1	1	1	0	5
Alumno 10	0	0	0	1	1	0	0	2
Alumno 11	1	1	0	1	1	0	0	4
Alumno 12	1	0	1	1	1	0	0	4
Alumno 13	1	1	0	1	0	1	0	4
Alumno 14	1	1	1	1	1	0	0	5
Alumno 15	1	1	0	1	1	0	0	4
Alumno 16	1	1	0	1	1	1	0	5
Alumno 17	1	1	1	1	0	1	0	5
Alumno 18	1	0	1	1	1	1	1	6
Alumno 19	1	1	1	1	1	1	1	7
Alumno 20	1	1	1	1	1	0	0	5
Alumno 21	1	0	0	0	0	1	0	2

Tabla 3. Comparación de los resultados de los análisis de datos del pretest-postest de alumnos de 1º de Educación Primaria.

ALUMNO	PRETEST	POSTEST	COMPARACIÓN
Alumno 1	1	3	↑
Alumno 2	1	4	↑
Alumno 3	3	4	↑
Alumno 4	3	4	↑
Alumno 5	1	3	↑
Alumno 6	2	0	↓
Alumno 7	3	4	↑
Alumno 8	5	5	→
Alumno 9	0	5	↑
Alumno 10	4	2	↓
Alumno 11	3	4	↑
Alumno 12	4	4	→
Alumno 13	0	4	↑
Alumno 14	4	5	↑
Alumno 15	6	4	↓
Alumno 16	4	5	↑
Alumno 17	6	5	↓
Alumno 18	4	6	↑
Alumno 19	2	7	↑
Alumno 20	5	5	→
Alumno 21	3	2	↓

Tabla 4. Resultados de comparación entre el pretest y postest de los tipos de problemas utilizados en la investigación.

Actividad 1 - Problema 1	
Tipo: Comparación	
Pretest	Postest
14	19

Actividad 1 - Problema 2	
Tipo: Comparación	
Pretest	Postest
14	16

Actividad 2 - Problema 1	
Tipo: Cambio	
Pretest	Postest
7	18

Actividad 2 - Problema 2	
Tipo: Combinación	
Pretest	Postest
8	14

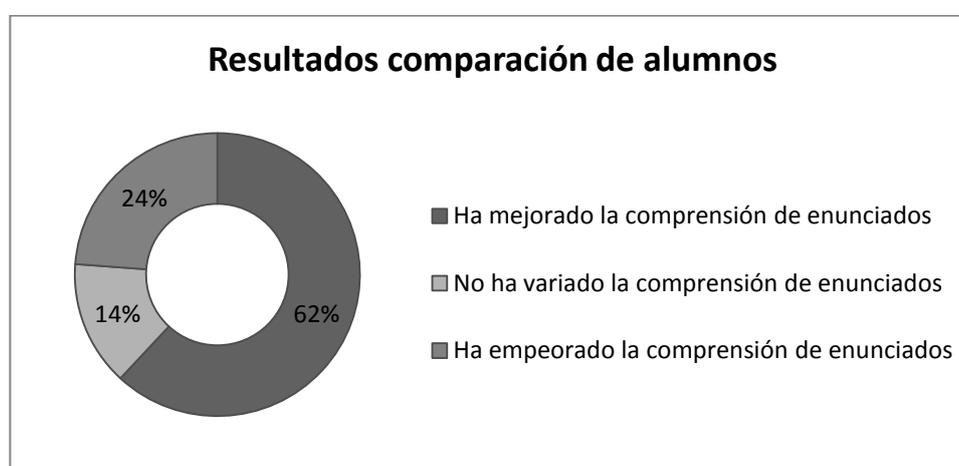
Actividad 3 - Problema 1	
Tipo: Combinación	
Pretest	Postest
7	8

Actividad 3 - Problema 2	
Tipo: Combinación	
Pretest	Postest
0	2

## 6. INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.

En este apartado se presenta la interpretación de los resultados obtenidos de las producciones de los 21 estudiantes a las dos tareas planteadas: pretest y postest.

Una vez analizadas las tablas, con la ayuda de la tabla 3, vamos a calcular la comparación existente entre el pretest y el postest en su totalidad, viendo así el porcentaje de alumnos que han mejorado, han empeorado o se han mantenido con el mismo resultado.



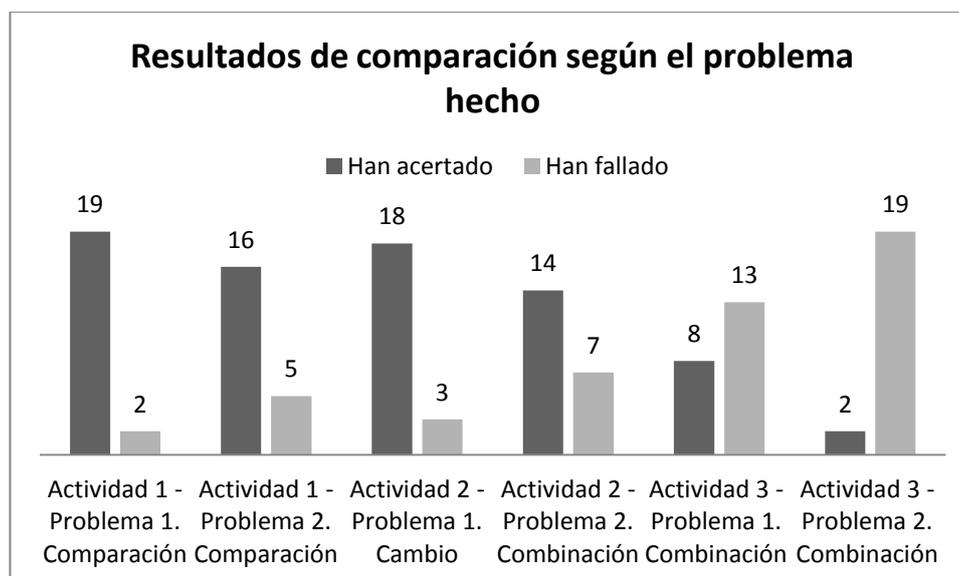
De 21 alumnos de 1º de Educación Primaria, el 62% ha mejorado su puntuación y por tanto su comprensión de enunciados a través del cuadernillo de trabajo de invención de problemas; el 24% de alumnos han empeorado en sus resultados y lo restante, el 14%, obtienen la misma puntuación. En consecuencia, aunque no exista una totalidad de estudiantes que ha mejorado su comprensión, viendo así que algunos resultados son considerablemente mejorables, el mayor porcentaje está destinado para dicho alumnado. Esto evidencia que el cuaderno de trabajo de invención de problemas desarrolla de manera considerable la comprensión de enunciados en alumnos de 1º de Educación Primaria.

Se pretende analizar la investigación hasta la última variable, por lo que creemos oportuno hacer uso de la tabla 4, viendo así qué problemas han sido realizados de manera correcta o no. Además, observamos hasta qué punto los

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

ejercicios elaborados por Echenique 2006 propuestos en el cuaderno de trabajo de invención de problemas de dicha investigación mejoran considerablemente o no los problemas de cambio, combinación y comparación. Para cuantificar la relación se sumaron todas las respuestas correctas de cada ejercicio realizado en el pretest y en el postest, dando lugar a la tabla 4. Como se describe en cada tabla, absolutamente todos los problemas han aumentado en aciertos, obteniendo mayores aciertos en el postest y evidenciando entonces la mejora con el programa de invención de problemas.

Por ello, centrándonos ahora en los resultados obtenidos en el postest, ya que son estos superiores a los del pretest, vamos a analizar qué tipos de problemas han resultado más difíciles.



Los problemas de cambio y comparación están mejor resueltos, teniendo una mayor cantidad de aciertos, al igual que el problema de combinación de la actividad 2. Sin embargo, a los alumnos les ha costado realizar correctamente los problemas de combinación de la actividad 3: *ordenar enunciados*. Esta tarea les ha resultado difícil en su desarrollo, teniendo un número de aciertos bastante bajo, concretamente el último problema, el cual tiene únicamente 2 aciertos. Cabe señalar, que dicha situación problemática es complicada de realizar debido a que un dato sobra y esto les ha perjudicado en su resolución. En este caso, podemos afirmar que los resultados de los problemas de combinación de la última actividad no son satisfactorios, aunque hay que tener

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

en cuenta que la actividad 2 de combinación tiene un número mayor de aciertos, lo que hace que no se descarte una mejora en este tipo de problemas. Los demás tipos de problemas tienen un mayor número de aciertos, por tanto, en este sentido, sí obtenemos buenos resultados.

Aun así, de manera general y teniendo en cuenta la tabla 4, la cantidad de aciertos ha aumentado en mayor o menor medida en todos los tipos de problemas después de la intervención del cuaderno de trabajo, por ello se puede concluir diciendo que la invención de problemas como medida de intervención para desarrollar la comprensión de enunciados en problemas de cambio, combinación y comparación ha funcionado de manera correcta. La invención de problemas debería ser un recurso más dentro de las aulas para desarrollar y mejorar la comprensión de enunciados en alumnos de 1º de Educación Primaria, recurso que hay que potenciar.

## **7. CONCLUSIONES**

El fin de este estudio consistió en comprobar si la actividad de invención de problemas con situaciones semiestructuradas de cambio, desarrolla la comprensión de enunciados en alumnos de 1º de Educación Primaria. Con esta investigación, se ha aportado evidencia empírica de la importancia de dicha actividad para favorecer el desarrollo de la comprensión de enunciados y en su defecto, de la resolución de problemas en alumnos de 1º de Educación Primaria.

Los resultados de la investigación señalan un incremento significativo de la comprensión de enunciados en los alumnos cuestionados. Por ello, de estos resultados se puede concluir que la invención de problemas puede utilizarse como un recurso para mejorar y desarrollar la comprensión de enunciados. Mediante las situaciones semiestructuradas de cambio utilizadas en el cuaderno de invención de problemas, se desarrolla la capacidad de ser un buen resolutor de los problemas de cambio, combinación y comparación; Resolviendo mejor los problemas de cambio y comparación, en contraste con los problemas de combinación.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Además, la invención de problemas utilizando situaciones semiestructuradas permite al alumno descubrir la estructura de un problema, siendo él el creador de su propia situación. Por tanto, es consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Hecho que los problemas en los que se presentan de manera completa limitan el aprendizaje, debido a que la mayor parte de la situación ya se la dan hecha. De igual manera, con la invención de problemas dan significado al entorno que les rodea, haciendo los problemas suyos y contextualizándolos en el momento en el que se encuentran.

En definitiva, podemos concluir con que el objetivo de esta investigación ha sido superado con éxito, haciendo uso de la invención de problemas para desarrollar una buena comprensión de enunciados.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

Ayllón, M<sup>a</sup>.F. y Gómez, I.A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela Abierta*, 30-40.

Castro, E (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & B. Lorenzo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Departamento de Educación. Gobierno de Navarra.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Espinoza, J., Lupiañez, J.L. y Segovia I. (2013). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio*. I CEMACYC. República Dominicana.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Espinoza J., Lupiañez J.L. y Segovia I. (2013). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, Educación e Internet*, 14(2), 1-12.

Fernández-Bravo J.A., Castillo S. y Barbarán J.J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *EduPsykhé*, 9(2), 221-234.

Gregorio, J.R. (2005). La resolución de problemas en Primaria. *Sigma*, 27, 9-34.

Parra C. y Saiz I. (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio*. Buenos Aires: Homo sapiens.

Puig, L y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

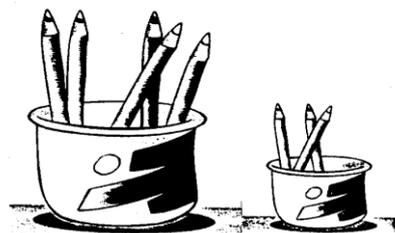
## 9. Anexos

### – Pretest-Postest

NOMBRE:.....

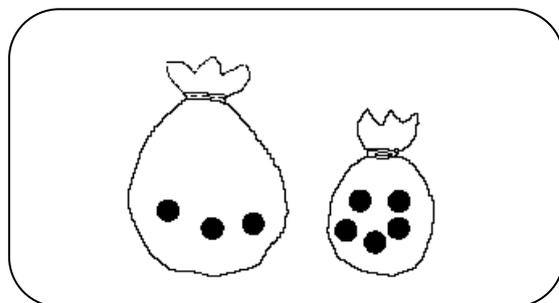
### ACTIVIDAD 1. DECIR LO MISMO, PERO DE OTRA FORMA.

Ejemplo:



- En el vaso pequeño hay menos pinturas que en el vaso grande.  
En el vaso grande hay más pinturas que en el vaso pequeño.

☞ ¡Ahora te toca a ti!



- En la bolsa pequeña hay más bolas que en la bolsa grande.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

En la grande hay.....

.....

- En la bolsa grande hay dos bolas menos que en la bolsa pequeña.

En la pequeña hay.....

.....

ACTIVIDAD 2. ELIGE UN DATO.

Elige el dato que falta para poder resolver el problema. Rodea la opción correcta.

- ✎ Mi hermana tenía 26 canicas, se le han perdido unas cuantas. ¿Cuántas canicas tiene ahora mi hermana?

- d) Las que ha perdido son todas azules.  
e) Mi primo tiene 10 canicas.  
f) Mi hermana perdió 12 canicas.

- ✎ Mi primo ha comprado 5 pinturas de colores por 3€ y una goma de borrar. ¿Cuánto dinero se ha gastado en total?

- d) La goma es de color rojo.  
e) La goma cuesta 2€.  
f) Un rotulador cuesta 1€.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

### ACTIVIDAD 3. ORDENAR ENUNCIADOS.

Las frases de estos problemas están desordenadas. Hay que construir el problema. Puede haber más de un problema y pueden sobrar frases.

#### Problema 1

También tiene 7 amigos de pelo rubio.

¿Cuántos amigos tiene Pedro?

Pedro tiene 13 amigos de pelo negro.

#### Problema 2

Su hermana riega 5 macetas de margaritas.

En el jardín de Juan hay 2 regaderas.

¿Cuántas macetas riegan entre los dos?

Juan riega 8 macetas de geranios.

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

- Cuaderno de invención de problemas



# INVENCIÓN DE PROBLEMAS

1º PRIMARIA A

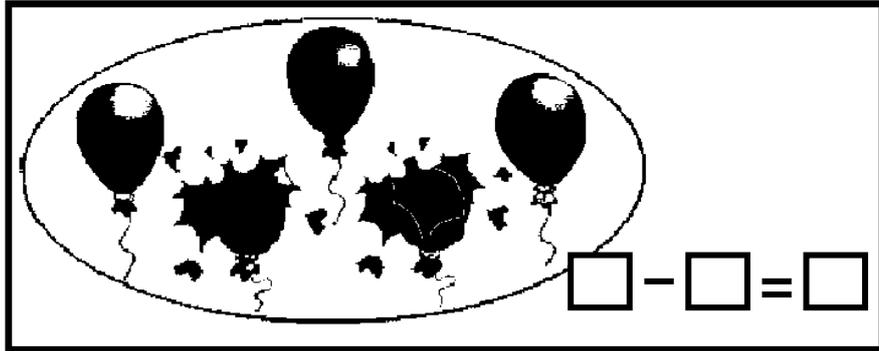


**GRUPO:**  
**NOMBRES:**

- 
- 
- 
- 
- 
-

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Invénta un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después inventa preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

---

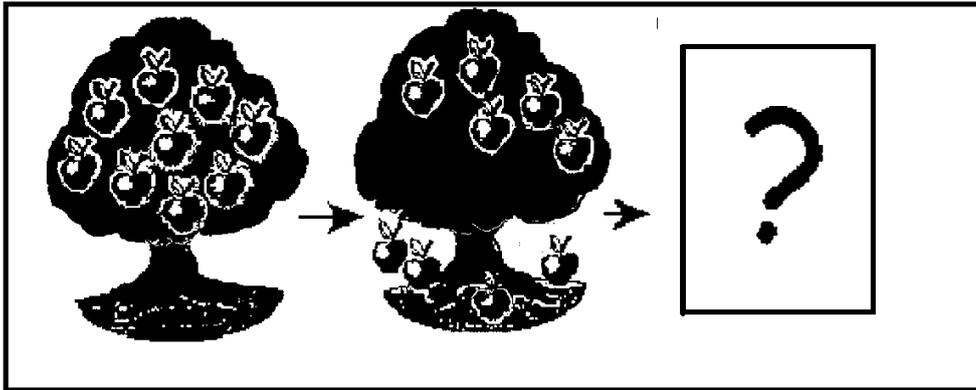
---

---

---

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Inventa un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después inventa preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

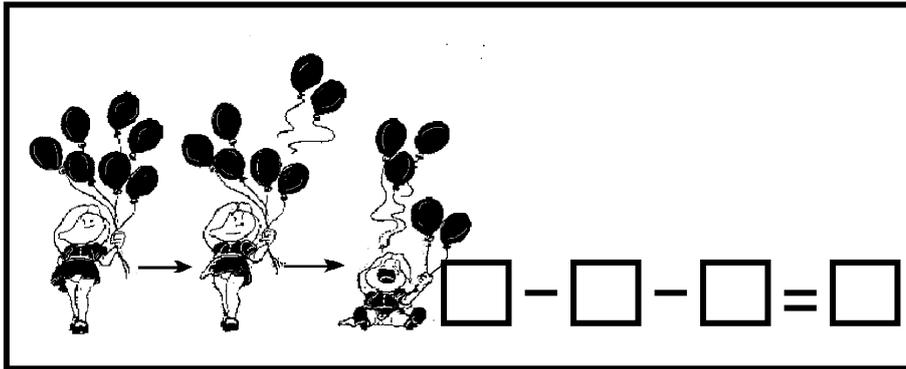
---

---

---

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Invénta un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después inventa preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

---

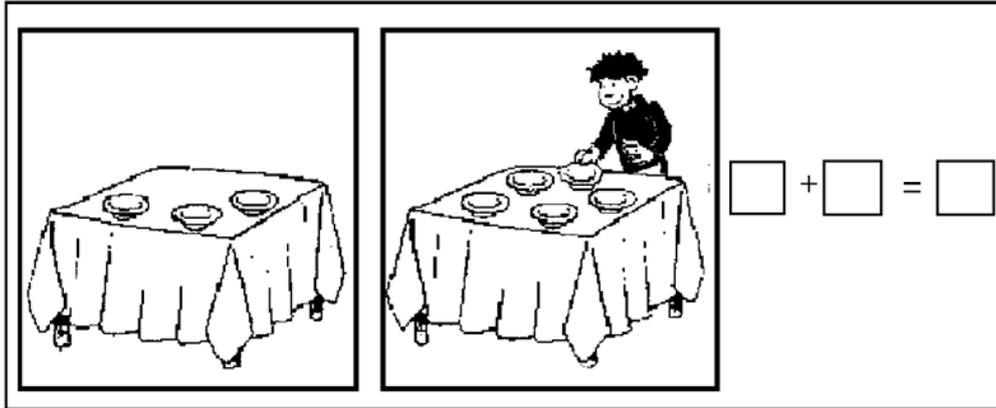
---

---

---

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Invénta un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después inventa preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

---

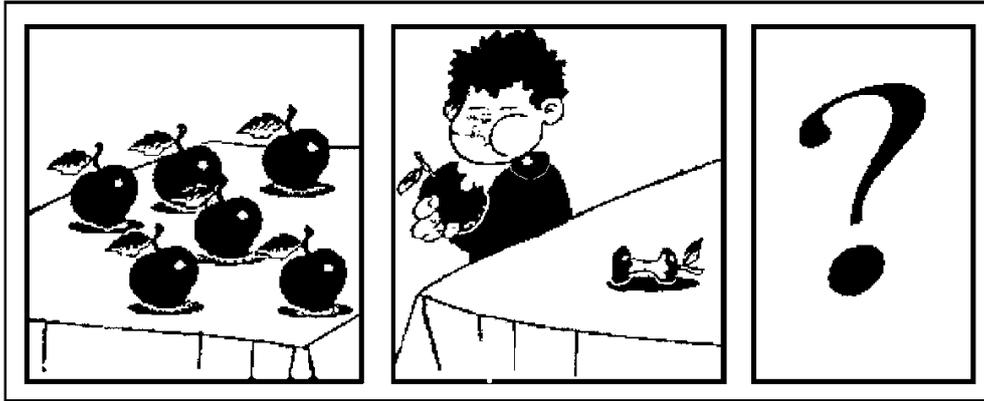
---

---

---

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Invénta un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después inventa preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

---

---

---

---

La invención de problemas: un recurso para desarrollar la comprensión de enunciados.

Invénta un problema a través de la imagen dada.



---

---

---

---

---

---

---

---

Pega los datos ordenados y después invénta preguntas.

1.

2.

3. Pregunta:

---

---

---

---

---

---