



Facultad de Educación

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA**

**Errores y dificultades más frecuentes en conceptos básicos de
estadística con alumnos de Secundaria y futuros profesores de
matemáticas de Cantabria**

**Most common errors and difficulties in basic statistical concepts among
secondary students and prospective teachers of mathematics in
Cantabria**

Alumna: María Rosa Murga Díaz

Especialidad: Matemáticas

Directoras: Irene Polo Blanco y Beatriz
Porras Pomares

Curso académico: 2014-2015

Fecha: 15/06/2015

Contenido

1. INTRODUCCIÓN.....	3
2. LITERATURA	4
2.1. Introducción.....	4
2.2. Conceptualización del error y dificultad.....	5
2.3. El estudio de la Estadística.....	6
2.4. Errores y dificultades en el estudio de la Estadística	7
3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	13
4. METODOLOGÍA.....	14
4.1. Estrategia de investigación.....	14
4.2. Diseño del instrumento de evaluación	15
4.3. Descripción de las muestras.....	22
5. RESULTADOS	23
5.1. Resultados para los alumnos de Secundaria.....	23
5.2. Resultados para los alumnos del Máster	31
6. DISCUSIÓN.....	37
7. CONCLUSIONES	39
8. BIBLIOGRAFÍA.....	41

1. INTRODUCCIÓN

El principal objetivo de este estudio es identificar los errores y dificultades que presentan los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) al resolver tareas en las que aparecen conceptos básicos de la estadística como son, por ejemplo, las medidas de centralización y de dispersión.

La experiencia de psicólogos, educadores y estadísticos muestra que muchos de los estudiantes universitarios no entienden completamente muchos de los conceptos básicos de estadística que han estudiado durante la Educación Secundaria. Habitualmente, los estudiantes suelen responder a los problemas de matemáticas en general, y a los de estadística en particular, introduciendo cantidades en una fórmula o procedimiento computacional pero sin hacer una interpretación de lo que realmente significan esas fórmulas o los resultados que se obtienen con ellas (Garfield y Ahlgren, 1988).

Como afirma Socas (1997), hay alumnos que con frecuencia tienen dificultades y cometen errores en el aprendizaje de las matemáticas. Cuando un alumno comete un error en matemáticas está manifestando las dificultades y obstáculos propios del proceso de aprendizaje y es necesaria su detección y análisis para una utilización positiva en el proceso educativo, pues todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje (del Puerto, Seminara y Minnaard, 2007).

Tabuer, Cravero y Redondo (2013) muestran que una proporción importante de profesores en ejercicio tiene un escaso conocimiento de los contenidos estadísticos y de las problemáticas específicas de la enseñanza y el aprendizaje de tales contenidos, como son los errores y dificultades que cometen los alumnos.

Batanero (2009) afirma que se requiere una mejor preparación estadística de los profesores de Secundaria, puesto que muchos futuros profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores sobre la estadística que podrían transmitir a sus estudiantes. Por este motivo, y a la

vista de la escasez de estudios con futuros profesores de Secundaria como sujetos, se van a analizar también los errores y dificultades que muestran los alumnos de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, como futuros docentes de matemáticas, y estudiar en qué medida los errores y dificultades de los alumnos de Secundaria siguen presentes entre los futuros docentes.

El presente trabajo se desarrolla en 6 capítulos. En el segundo capítulo, la literatura, se hace una revisión bibliográfica de las principales investigaciones que estudian errores y dificultades en matemáticas de manera general, y en estadística de manera particular. Para orientar el estudio se recogen en el capítulo 3 las preguntas de investigación sobre las que se sustenta el trabajo. A continuación se explicará la metodología seguida, detallando y justificando el diseño del cuestionario que se realizó tanto a los alumnos de Secundaria como a los del Máster. En el capítulo 5 se hará un análisis por separado de los resultados obtenidos en dicho cuestionario por los dos colectivos citados. En el siguiente capítulo se discutirán los resultados obtenidos de las dos muestras explicando qué errores y dificultades son más frecuentes en cada una de ellas. Por último, en el capítulo 7 se expondrán las conclusiones principales obtenidas tras la realización del presente estudio.

2. LITERATURA

2.1. Introducción

En este capítulo se hace una revisión bibliográfica sobre las investigaciones que recogen errores y dificultades cometidos por los alumnos al resolver tareas que involucren conceptos básicos de estadística. En primer lugar se tratará de conceptualizar el error y la dificultad explicando la necesidad de su estudio para la práctica docente. A continuación se presentarán argumentos que justifiquen la importancia de incluir la estadística en el currículo. Por último, se

recogerán algunos de los errores y dificultades en estadística más frecuentes extraídos de investigaciones previas.

2.2. Conceptualización del error y dificultad

Los procesos mentales que llevan a cabo los estudiantes a la hora de resolver un problema o entender un nuevo concepto no son visibles, por lo que la única manera que tiene el profesor para poder conjeturar su ocurrencia es a través de manifestaciones indirectas. Una de esas manifestaciones indirectas son los errores cometidos por los alumnos, la regularidad con que suceden y los patrones a los que obedecen, que nos proporcionan información acerca de las estructuras en las que se van organizado los conocimientos de los alumnos. Es claro que el conocimiento humano no es infalible, pues de manera intrínseca a la capacidad que tiene el ser humano para conocer el mundo que le rodea, se encuentra la posibilidad de que conceptos o procedimientos erróneos sean considerados como verdaderos (del Puerto et al., 2007).

Podemos distinguir dos grandes etapas en el estudio de los errores en las últimas décadas. En la primera etapa, hasta aproximadamente los años ochenta, los estudios consistían en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas y análisis de los tipos de errores detectados, para clasificarlos de manera que se pudiera examinar cómo surgen a partir de la solución correcta e inferir qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error. En la segunda etapa, se toma conciencia de la importancia del error como medio para conocer el proceso de aprendizaje del alumno. A raíz de esto, las investigaciones se centran en indagar sobre los errores y sus posibles causas para poder profundizar en el proceso de construcción de los objetos matemáticos (Socas, 2008; Rico, 1997).

Para explicar esa inevitable aparición de errores en la adquisición del conocimiento Bachelard (1988, citado por Rico, 1997, p. 192) introdujo la noción de obstáculo epistemológico. “Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del

conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos.”

Socas (1997) afirma que el aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades de naturalezas muy distintas. Las dificultades se conectan en redes complejas que, en la práctica, se concretan en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden tener diversos orígenes y Socas (1997) las agrupa en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina (a los objetos y procesos de pensamiento matemáticos), la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas, la cuarta en conexión con los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y la quinta con las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

2.3. El estudio de la Estadística

Actualmente, todos los ciudadanos reciben de manera frecuente información estadística a través de los distintos medios de comunicación. Esta información principalmente aparece resumida en gráficos y/o tablas, lo cual genera la necesidad de que la escuela se preocupe por enseñar a leer e interpretar tal información (Liliana, Cravero y Redondo, 2013).

Por este motivo la mayor parte de los países la han introducido en el currículo desde la Educación Primaria. Batanero y Godino (2004) señalan que las principales razones que fundamentan la enseñanza de la estadística son las siguientes:

- Muchas profesiones necesitan conocimientos básicos de estadística.

- Su estudio fomenta un razonamiento crítico valorando la objetividad frente a los criterios subjetivos.
- Ayuda a comprender otros temas del currículo en los que aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

En la introducción de la asignatura de matemáticas en el currículo para la Educación Secundaria dado por la LOE, que es el que ha estado vigente para este curso 2014-2015, se justifica la necesidad de incluir el estudio de la estadística de la siguiente manera: “debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística.” (BOC nº 101, 5/2007 de 25 de mayo, p. 7580).

Batanero y Godino (2004) sostienen que la estadística es una materia interdisciplinar que no sólo se utiliza en la asignatura de matemáticas, sino que también es una herramienta de resolución de problemas en otras disciplinas y es necesario que nuestros alumnos adquieran una destreza en la lectura crítica de datos. La elaboración y lectura de gráficos y tablas es una competencia fundamental en el estudio de la estadística, aunque es un concepto complejo: se pierden los valores originales de cada uno de los datos individuales pasándose a la distribución de frecuencias.

2.4. Errores y dificultades en el estudio de la Estadística

En este apartado se van a clasificar los errores y dificultades más comunes que comenten los alumnos en el estudio de la estadística. Para ello se ha hecho una amplia revisión de las investigaciones sobre errores y dificultades en el campo de la estadística. En concreto se analizan los trabajos sobre errores cometidos por: alumnos de Secundaria (entre las que se destacan las de Cobo (2003) y Mayén (2009)), futuros maestros (entre las que se destacan las de Estrada (2007) y Batanero, Godino y Navas (1997)), alumnos universitarios

(como la de del Puerto et al. (2007) y la de Albert, Tobías y Villareal (2014)) y sobre errores y dificultades en general (como la de Batanero (2009), la de Batanero et al. (1994) y la de Garfield y Ahlgren (1988)).

Durante la búsqueda bibliográfica se ha detectado que las investigaciones sobre errores y dificultades en estadística por futuros profesores de Secundaria son menos frecuentes que las que hay sobre futuros maestros y por ese motivo se ha decidido hacer un estudio exploratorio sobre los errores y dificultades de los futuros docentes de matemáticas en Secundaria, tomando como muestra los estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria.

2.4.1. Errores y dificultades relacionados con la media

Cobo (2003) recoge en su trabajo sobre el significado y comprensión de las medidas de centralización con alumnos de Secundaria una serie de errores extraídos de investigaciones previas de Carvalho (1996; 1998; 2001). Para el caso de la media se identifican dos errores: hallar la media de los valores de las frecuencias y no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

En otros casos el cálculo de esta medida se hace correctamente, pero sin entender el algoritmo de cálculo. Según Batanero y Godino (2004), esto se puede comprobar si le pides a un alumno que te diga 10 números diferentes cuya media sea igual a 4 o bien que te dé un quinto número sabiendo que la suma de los cuatro primeros es 23 y la media es igual a 5. Muchos no sabrán cómo hacerlo o lo harán con dificultad.

En el trabajo de Batanero y Godino (2004) se plantea el error de calcular la media de dos medias que no tienen el mismo número de datos para hallar la media total del grupo. Este error también está citado por Batanero et al. (1994), donde aparece una posible explicación dada por Mevarech (1983) que sugiere que los estudiantes tienen la creencia de que un conjunto de números con la

operación media aritmética constituye un grupo algebraico, satisfaciendo los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso.

En el artículo de del Puerto et al. (2007) se realiza un estudio para identificar y analizar los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en Probabilidad y Estadística de las Ingenierías Mecánica e Industrial. En este estudio se planteó un ejercicio en el que tenían que calcular la media de una muestra y varios estudiantes admitieron que la presencia de datos negativos y el 0 dificultaron la comprensión del problema. En el artículo de Batanero et al. (1997) se afirma que Gattuso y Mary (1996) encontraron que el error consistente en suprimir los valores nulos en el cálculo de la media, continúa presente en los alumnos durante su etapa universitaria.

En ese mismo estudio (Gattuso y Mary, 1996), se ponen de manifiesto las dificultades que han tenido los estudiantes con el tratamiento de los valores atípicos en el cálculo de la media. Un valor atípico es una observación con un valor que no parece corresponderse con el resto de los valores del grupo de datos. Estos valores atípicos pueden ser debidos a la variabilidad en la medición o pueden indicar error experimental; por lo que estos últimos son a veces excluidos del conjunto de datos para el cálculo de la media, ya que ésta es muy sensible a este tipo de valores.

Batanero y Godino (2002) afirman que “la media es *la mejor estimación* de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma”. En ese sentido, si se pide dar la mejor estimación de una cantidad, estos autores consideran recomendable desechar los valores extremos porque se puede asumir que se debe a un error en la medición. Sin embargo no debemos perder de vista que en ese caso no se estaría dando el valor de la media de la muestra, pues, por definición, el algoritmo de la media consiste en dividir la suma de todos los datos entre el número total de datos sin descartar ninguno. Es cierto que existen criterios matemáticos, pertenecientes a la estadística avanzada, para determinar los valores atípicos, pero en la formación básica de la Educación Secundaria, e incluso en la formación general en el nivel

universitario, determinar la presencia de valores extremos, en última instancia, un ejercicio subjetivo.

Por otro lado, el estudio PISA intenta evaluar si los alumnos son capaces de generalizar los conocimientos aprendidos a distintas situaciones, haciendo hincapié en la comprensión de los conceptos. Tras una revisión de las preguntas liberadas de los años 2006 y 2009 se advirtió que las preguntas relacionadas con la media pretendían identificar el error de pensar que si hay un dato que supera la media en x unidades necesariamente ha de haber otro que esté x unidades por debajo. Además las preguntas trabajan la dificultad de calcular la nueva media de una muestra a partir de la media anterior si cambian uno de los datos y la dificultad de reconocer los factores que afectan al cálculo de la media.

Para terminar con la media, Batanero et al. (1994) concluyen que el conocimiento del algoritmo de la media no implica necesariamente una comprensión real de los conceptos subyacentes. Los autores afirman que si los alumnos solo adquieren el conocimiento de tipo computacional es probable que cometan errores predecibles.

Con el fin de profundizar en los motivos para cometer dichos errores, Russell y Mokros (1991) estudiaron las concepciones de los estudiantes sobre los promedios encontrando cuatro categorías generales en las que clasificaron las concepciones de los estudiantes sobre los promedios: (1) el “valor más frecuente” o moda; (2) el “valor razonable”; (3) el “punto medio”; (4) una “relación algorítmica”, es decir, una fórmula de cálculo. Esto indica que los alumnos no saben hacer correctamente una interpretación verbal de la media.

2.4.2. Errores y dificultades relacionados con la mediana

De la misma manera que los estudiantes calculan la media de las frecuencias en lugar de los datos, Batanero y Godino (2004) y Cobo (2003) tratan los siguientes errores: (1) tomar como mediana el valor central de las frecuencias, en vez del de los datos; (2) no ordenar los datos para calcular la mediana; (3)

equivocarse al calcular el valor central; (4) no hacer la media cuando hay dos valores centrales.

El error de no tener en cuenta las frecuencias absolutas de los datos para calcular la media también se refleja en el cálculo de la mediana. Arteaga y Batanero (2009) afirman que, en ocasiones, los alumnos solo consideran los diferentes valores obtenidos y toman su punto medio, lo que sería equivalente a considerar como mediana el centro del rango, error encontrado en el estudio sobre comprensión de las medidas de posición central de Mayén (2009).

Cobo (2003) también hace referencia a la dificultad que presenta para los alumnos el hecho de que la mediana tenga un algoritmo de cálculo diferente según se tenga un número par o impar de datos.

2.4.3. Errores y dificultades relacionados con la moda

Tanto Batanero y Godino (2004) como Cobo (2003) hacen referencia al error que consiste en tomar como moda la mayor frecuencia absoluta, en lugar del dato que tiene dicha frecuencia. Este error se da sobre todo cuando se trabaja con variables cuantitativas.

2.4.4. Confusión entre las distintas medidas de centralización

Es relativamente frecuente que los estudiantes confundan las tres medidas de centralización, así, en el trabajo de Batanero y Godino (2004) aparece reflejada la confusión entre moda y mediana. Por otro lado, en la tesis de Cobo (2003) nos encontramos con las tres posibles confusiones: (1) media y mediana; (2) media y moda; (3) mediana y moda.

2.4.5. Errores y dificultades en la comprensión de gráficos

Cobo (2003) menciona que Carvalho (1996) observó que el número de respuestas incorrectas en el cálculo de medidas de centralización o dispersión es mayor si se presentan los datos en forma de gráfico, en lugar de contenidos

en una tabla. Sugiere que es la dificultad de los alumnos en la interpretación de los gráficos lo que explica esta diferencia.

A continuación se presenta a modo de resumen una selección de los errores y dificultades encontrados en la literatura.

Errores:

- E1. Calcular la media de dos medias sin tener en cuenta si tienen el mismo número de datos. (Batanero et al., 1994; Batanero y Godino, 2004; Mevarech, 1983)
- E2. No tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media. (Cobo, 2003)
- E3. No saber en qué casos hay que descartar los valores atípicos antes de calcular la media. (Gattuso y Mary, 1996)
- E4. Pensar que si hay un dato que supera la media en x unidades necesariamente ha de haber otro que esté x unidades por debajo. (Pruebas PISA)
- E5. Calcular como mediana el dato central de las frecuencias absolutas en lugar de los valores. (Cobo, 2003; Batanero y Godino, 2004)
- E6. Calcular como mediana el dato central de los datos sin tener en cuenta sus frecuencias. (Mayén, 2009)
- E7. Confundir media y mediana. (Cobo, 2003)
- E8. Tomar como moda la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable. (Cobo, 2003; Batanero y Godino, 2004)
- E9. Confundir moda y media. (Cobo, 2003)
- E10. Confundir moda y mediana. (Cobo, 2003; Batanero y Godino, 2004)

Dificultades:

- D1. Calcular uno de los datos de una muestra sabiendo el valor de la media y la suma del resto de los datos. (Batanero y Godino, 2004)

- D2. Calcular una nueva media si les cambian uno de los datos (Pruebas PISA)
- D3. Interpretar la media verbalmente. (Batanero et al., 1994; Russell y Mokros, 1991)
- D4. Reconocer los factores que afectan al cálculo de la media. (Pruebas PISA)
- D5. Hacer la media con números negativos y nulos. (Batanero et al., 1994; Gattuso y Mary, 1996; del Puerto et al. 2007)
- D6. Calcular las medidas de posición central o dispersión si se les da los datos en una gráfica en lugar de en una lista. (Cobo, 2003)
- D7. Determinar una muestra que tenga unas medidas de centralización o de dispersión dadas. (Batanero y Godino, 2004)

3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Como hemos podido observar en la literatura, muchos de los alumnos de Secundaria, los universitarios e incluso futuros maestros o docentes presentan diversas dificultades y cometen serios errores en conceptos básicos sobre estadística.

El objetivo de este estudio es comprobar si los alumnos de 3º de ESO de Cantabria cometen los principales errores identificados en la literatura al resolver tareas que involucran conceptos básicos de estadística. Se estudiará también si se manifiestan las principales dificultades identificadas sobre este tema. Además, a la vista de la escasez de estudios realizados con futuros profesores de matemáticas, estudiaremos en qué medida estos errores y dificultades están presentes entre los futuros docentes de matemáticas, estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria.

De acuerdo con esto, en este estudio se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Están presentes en los alumnos de 3º de Educación Secundaria de Cantabria los errores y dificultades más frecuentes descritos en la literatura?
2. ¿En qué medida siguen presentes en los futuros docentes de matemáticas de Cantabria éstos u otros errores y dificultades?

4. METODOLOGÍA

Para describir la metodología seguida en este estudio se va a detallar la estrategia de investigación llevada a cabo, el diseño del instrumento que se ha utilizado y la descripción de la muestra.

4.1. Estrategia de investigación

Una vez planteadas las preguntas de investigación se va a pasar a explicar la estrategia de investigación que se ha desarrollado para este estudio.

Para resolver a las preguntas de investigación se ha optado por un análisis mixto, que combina un análisis cuantitativo y un análisis cualitativo (Creswele, 2003, citado por Pérez, 2014).

El estudio cuantitativo se usó para identificar el porcentaje de alumnos que comete cada uno de los errores o muestra cada una de las dificultades seleccionados en la literatura, tanto para los alumnos de Secundaria como para los del Máster. Para ello, se realizó un cuestionario con preguntas de elección múltiple de manera que cada opción corresponde con algún error o dificultad para así poder identificarlos. Además, se les dejó espacio para que hicieran los planteamientos y las operaciones necesarias.

En aquellos casos en lo que no quedaba claro el razonamiento seguido por el alumno o no se correspondía con ninguno de los errores previstos se realizaron entrevistas cognitivas para determinar el origen de la respuesta y poder así codificar la respuesta.

4.2. Diseño del instrumento de evaluación

A continuación se va a detallar el cuestionario realizado por los alumnos de 3º de ESO y por los estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster, como futuros docentes de matemáticas. La finalidad de este cuestionario es detectar si los alumnos de Secundaria presentan los principales errores identificados en la literatura y estudiar de qué forma se manifiestan estos u otros errores entre los futuros docentes de matemáticas. De la misma manera se pretende conocer cuáles de las dificultades seleccionadas se encuentran presentes en dichos colectivos. Con este cuestionario se van a testear todos los errores y dificultades de la literatura seleccionados en la lista de la página 12.

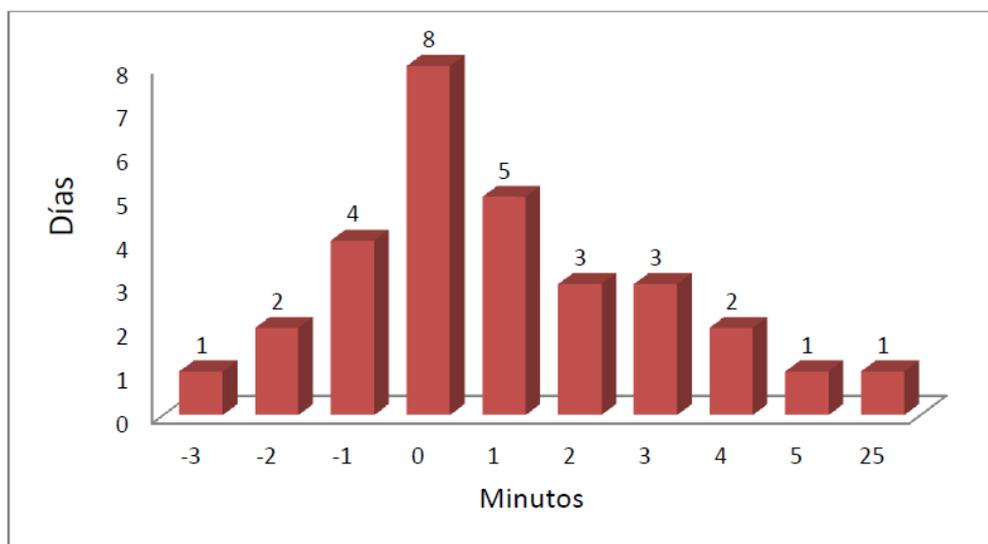
El cuestionario se divide en cuatro secciones y cada una de ellas contiene tres preguntas. La primera sección sirve para comprobar si los alumnos saben calcular las medidas de centralización de una muestra dada a través de un gráfico; la segunda, es sobre la interpretación verbal de la media aritmética y los factores por los que se ve afectada; la tercera sección estudia los conocimientos que tienen los alumnos de las medidas de dispersión y la cuarta, sirve para comprobar el dominio que tienen del algoritmo de la media.

Se trata de un cuestionario de respuesta múltiple dónde sólo hay una respuesta correcta para cada pregunta. En todas las preguntas los alumnos pueden contestar que ninguna de las opciones que se les dan es cierta y se les pide que dejen la pregunta en blanco en caso de que no sepan la respuesta debido a la ausencia de conocimientos previos. Para agilizar la realización de las cuentas se permitió el uso de calculadoras convencionales y, aunque no tenían

un tiempo máximo para responderlo, todos los alumnos tanto de ESO como del Máster, lo realizaron en menos de 25 minutos.

SECCIÓN 1:

A lo largo de un mes se ha ido anotando la cantidad de minutos que llega tarde (o temprano) una línea de autobús a una parada concreta; un número negativo significa que el autobús llegó temprano, el valor cero significa que llegó puntual y un número positivo que llegó tarde. El siguiente gráfico muestra la información recogida:



Esta pregunta está inspirada en un problema del examen analizado en el artículo de del Puerto et al. (2007) pero se ha preferido dar los datos en un gráfico en lugar de en una tabla porque para los alumnos supone una dificultad añadida (dificultad D6), ya que primero tienen que interpretar y sacar la información del gráfico para posteriormente realizar los cálculos. Uno de los motivos por los que se ha optado por este enunciado es que la dificultad D5 afirma que los estudiantes tienen más problemas a la hora de calcular la media si intervienen números positivos y negativos. También se ha decidido que uno de los días el autobús llegase 25 minutos tarde para estudiar el comportamiento de los alumnos ante un dato tan alejado del resto y ver si lo descartan o no al calcular la media (error E3). Para esta sección se pidió a los alumnos que explicaran el procedimiento que habían seguido para llegar a la solución, con el fin de comprobar que la elección de cada respuesta implicaba la presencia de cada uno de los errores esperados. En aquellos casos en los que no había justificación, o la justificación no coincidía con alguno de los

errores descritos se realizaron entrevistas cognitivas con el alumno implicado para clarificar la elección de su respuesta.

En primer lugar se pide a los alumnos que calculen el tiempo medio de llegada y se les dan cuatro posibles intervalos en los que se puede encontrar la media. Uno de los intervalos tiene la media correcta, otro contiene a la media resultante al despreciar el valor extremo (error E3), en otro intervalo se encuentra el resultado de sumar todos los minutos sin tener en cuenta sus frecuencias y dividir entre 10 (error E2) y por último hay un intervalo que contiene el valor de la mediana en lugar de la media (error E7).

A continuación se pide que calculen la mediana de los datos y también se les da cuatro intervalos como posibles respuestas. Los intervalos incorrectos corresponden con el error de confundir mediana con media (error E7), calcular la mediana de los datos sin tener en cuenta sus frecuencias (error E6) y calcular la mediana de las frecuencias en lugar de la de los datos (error E5).

Por último se les pide determinar la moda y se les da cuatro posibles soluciones. Una de ellas es la correcta, otra es la frecuencia de la moda correcta (error E8), otra es la media (error E9) y otra es la mediana (error E10).

La sección 2 pretende comprobar si la interpretación verbal que hacen los estudiantes sobre la media y sus propiedades es la correcta, comprobando así la presencia de la dificultad D3. Para muchos alumnos la media no es más que una fórmula o un algoritmo y no son realmente conscientes de lo que significa ni de cuáles son los factores la afectan o la dejan invariante.

- 1) En una clase hay 25 alumnos. La estatura media de los alumnos es de 130 cm. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
 - a. Si uno de los alumnos de la clase mide 132 cm tiene que haber uno cuya estatura sean 128 cm
 - b. La estatura de la mayoría de los alumnos es de 130 cm
 - c. Si ordenas los alumnos del más bajo al más alto, entonces la estatura del alumno que ocupa la posición central tiene que ser igual a 130 cm
 - d. La mitad de los alumnos de la clase deben medir menos de 130 cm y la otra mitad deben medir más de 130 cm
 - e. Ninguna de las anteriores

Esta pregunta es uno de los ítems liberados de las pruebas PISA de matemáticas del año 2006. En este caso todas las afirmaciones propuestas se corresponden con algún error y la respuesta que tienen que marcar es: ninguna de las anteriores. Una de las respuestas propuestas es la definición de moda (error E9), otras dos corresponden con la definición de mediana enunciada de dos maneras diferentes (error E7) y otra de ellas corresponde con el error de pensar que si hay un alumno que supera la media por dos cm tiene que haber necesariamente otro alumno esté dos cm por debajo de la media (error E4).

- 2) Un día, durante la clase de matemáticas, se mide la estatura de todos los alumnos de una clase. La estatura media de los chicos es de 160 cm y la estatura media de las chicas es de 150 cm. Elena ha sido la más alta de la clase (mide 180 cm) y Pedro el más bajo (mide 130 cm). Ese día faltaron a clase dos estudiantes y cuando fueron al día siguiente se midieron sus estaturas y se volvieron a calcular las medias. Sorprendentemente, la estatura media de los chicos no cambió y la de las chicas tampoco. ¿Cuál de las siguientes conclusiones puede sacarse a partir de la información anterior?
- Las dos estudiantes son chicas
 - Uno de los estudiantes es un chico y el otro una chica
 - Los dos estudiantes tienen la misma altura
 - Pedro sigue siendo el estudiante más bajo
 - Ninguna de las anteriores

Esta segunda pregunta es uno de los ítems liberados de las pruebas PISA del año 2009. Se debe hacer una lectura cuidadosa de la misma para darse cuenta que, de nuevo, todos los enunciados son falsos y la respuesta que tienen que marcar es: ninguna de las anteriores. Los alumnos tienen que explorar de un modo complejo las relaciones entre los datos y los resúmenes estadísticos de dichos datos. Es necesario que los alumnos conozcan cuales son los factores que afectan a la media para poder responder esta pregunta correctamente.

- 3) La profesora de una academia quiere cambiar la colocación de sus alumnos en clase, con la esperanza de que ello incremente el número de preguntas que hacen durante la clase. En primer lugar, decide ver cuántas preguntas hacen los estudiantes con la colocación actual. La siguiente tabla recoge el registro del número de preguntas hechas por sus 8 estudiantes durante una clase.

Iniciales del alumno	A. A.	R. F.	A. G.	J. G.	C. K.	N. K.	J. L.	A. W.
Nº de preguntas	0	5	3	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomiendas que usara?

- a. Usar el número más común, que es el 2
- b. Sumar los 8 números y dividir entre 8
- c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir entre 7
- d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir entre 7
- e. Ninguna de las anteriores

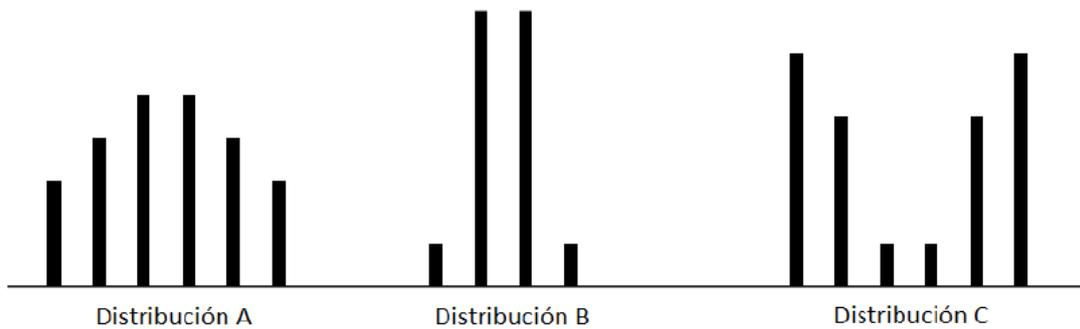
En la tercera pregunta se les proponen cuatro posibles métodos para resumir unos datos y tienen que elegir el más adecuado para esa situación, que en este caso es la media. Esta pregunta se ha extraído íntegramente del artículo de Batanero et al. (1997). Se ha incluido un valor nulo para tener en cuenta la creencia de algunos estudiantes de que el cero no cambia el valor de la media. Al igual que en la sección 1, se incluye un valor atípico que los alumnos no tienen que descartar, pues se les pide un resumen de los datos y se trata de una muestra con bastante variabilidad, por lo que es necesario incluir todos los datos. Con esta pregunta se pretende comprobar si los alumnos son capaces de reconocer en qué situaciones conviene descartar los valores extremos y en cuáles no (error E3). Las posibles respuestas que se dan son: usar la moda de los datos, calcular la media de los datos descartando el valor extremo (error E3), calcular la media de los datos descartando el valor cero (dificultad D5) y hacer la media de los 8 datos sin descartar ninguno, que es la respuesta correcta.

La sección número 3 trata sobre las medidas de dispersión. Batanero y Godino (2004) afirman que es frecuente ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones. Por ello, se ha decidido incluir una pregunta sobre las medidas de dispersión para saber si las conocen. La sección se divide en tres preguntas, dos de ellas sobre la desviación típica y otra sobre el rango en relación con la media y la mediana.

- 1) A continuación se describen las diferentes notas de la primera evaluación de matemáticas de cuatro alumnos. ¿Cuál de ellas tiene mayor desviación típica?
- a. 0, 2, 4, 6, 8, 10
 - b. 0, 1, 2, 3, 4, 5
 - c. 5, 6, 7, 8, 9, 10
 - d. 0, 0, 0, 10, 10, 10
 - e. Ninguna de las anteriores

Con esta pregunta no se pretende que los alumnos recuerden exactamente el algoritmo de la desviación típica, sino que tengan la idea intuitiva de que esta medida mide la intensidad con la que los datos se desvían respecto de la media y, por tanto, la mayor desviación posible, con notas que varían del cero al diez, corresponde a las notas 0, 0, 0, 10, 10, 10. Esta pregunta está inspirada en una actividad propuesta del trabajo de Batanero y Godino (2004).

- 2) Las tres distribuciones siguientes muestran las notas de un mismo examen realizado en tres clases diferentes. Las tres distribuciones tienen la misma media y sus desviaciones típicas son 2, 0'4 y 1'2. Asocia cada distribución con su correspondiente desviación típica.



- Distribución A: 2, Distribución B: 0'4, Distribución C: 1'2
- Distribución A: 1'2, Distribución B: 0'4, Distribución C: 2
- Distribución A: 0'4, Distribución B: 2, Distribución C: 1'2
- Distribución A: 1'2, Distribución B: 2, Distribución C: 0'4
- Ninguna de las anteriores

Esta pregunta es muy similar a la anterior y con ello se pretende comprobar si encuentran más problemas para determinar qué distribución tiene mayor desviación cuando se les da la información en un gráfico (dificultad D6). La pregunta ha sido extraída de los apuntes de la asignatura “Matemáticas para Maestros” del Grado en Magisterio de Educación Primaria impartido en la Universidad de Cantabria.

- 3) Otra estudiante ha realizado tres exámenes. Si sabemos que la mediana fue de 8'8, su puntuación media fue de 9'0 y el rango fue 0'8, ¿cuáles fueron las puntuaciones de esos tres exámenes?
- a. 8'7, 8'8 y 9'5
 - b. 8'4, 8'8 y 9'2
 - c. 8'2, 8'8 y 10
 - d. 8'8, 9'0 y 9'6
 - e. Ninguna de las anteriores

Esta pregunta se ha sacado del libro de Batanero y Godino (2002) y con ella se quiere testear si los alumnos tienen dificultades para determinar una muestra que cumpla con una media, mediana y rango dados (dificultad D7). Una de las opciones es la correcta, otra opción no cumple con la media dada, otra con la mediana y otra con el rango. Para poder analizar las respuestas se les pidió a los alumnos que detallasen los cálculos que habían hecho para seleccionar su respuesta.

La sección número 4 trata de profundizar en el algoritmo de la media y conocer el dominio que tienen sobre él los alumnos. Para ello se les propone el siguiente enunciado y tienen que responder a tres preguntas que se detallan a continuación.

En un ascensor hay 10 personas, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 90.

En la primera pregunta se les pide calcular la media total de las diez personas del ascensor. Con esto se pretende comprobar si los alumnos cometen el error E1, proponiéndoles como una de las posibles respuestas el resultado de calcular la media de las dos medias.

A continuación se comprueba si la dificultad D1 realmente supone un problema para ellos, pidiéndoles que calculen el peso del sexto hombre a partir de la media y la suma de los pesos de los otros cinco. Para poder responder a esta pregunta es necesario que los alumnos sean capaces de invertir el algoritmo.

En la última pregunta se les pide que calculen de nuevo la media de las cuatro mujeres sabiendo que una de ellas ahora pesa 4 kilos más, testeando así la

presencia de la dificultad D2. Esta pregunta está inspirada en uno de los ítems liberados de las pruebas PISA del año 2006 y de nuevo es necesario invertir el algoritmo y hacer una pequeña modificación para calcular la nueva media.

En toda esta sección también se les pide a los alumnos que detallen el procedimiento seguido para obtener la solución, y de esta manera poder analizar si los errores cometidos o las dificultades encontradas se corresponden con los seleccionados en la literatura.

4.3. Descripción de las muestras

Se ha seleccionado una muestra de 52 alumnos del curso de 3º de ESO pertenecientes a dos colegios diferentes ubicados en el centro de Santander, que reciben a alumnos cuyas familias pertenecen a una clase socioeconómica media-baja. Se han elegido estos centros porque la autora tenía fácil acceso a ellos durante la realización de las prácticas de enseñanza y ha estado presente en la realización de todos los cuestionarios.

Se ha seleccionado la muestra de manera que sean lo más homogénea posible, por lo que solamente han realizado el cuestionario los alumnos que asisten a las clases de matemáticas siguiendo el currículo ordinario de su curso.

En un primer momento se pensó realizar el cuestionario a los alumnos de 4º de ESO, puesto que las medidas de dispersión entran en el currículo en 3º de ESO. Tras hablar con los correspondientes profesores de matemáticas se decidió hacerlo con los de 3º porque los alumnos que ahora están en 4º el año pasado no les dio tiempo a ver nada de estadística y pensaban que lo podían tener muy olvidado. En cambio, los alumnos que están este año en 3º el año anterior sí que recibieron una formación estadística que incluía las medidas de dispersión.

Por otro lado, los 14 estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria también han realizado el cuestionario en las mismas condiciones que los alumnos de Secundaria.

Estos alumnos poseen en su mayoría grados en distintas ingenierías, dos de ellos en matemáticas y uno en topografía.

5. RESULTADOS

Este capítulo se divide en dos secciones: en la primera, se van a analizar los resultados del cuestionario para los alumnos de Secundaria y en la segunda, los resultados para los futuros docentes de matemáticas.

Debido al tamaño de la muestra, los resultados del cuestionario para el caso de los alumnos de Secundaria admiten un tratamiento estadístico y se indicará para cada una de las preguntas el porcentaje¹ de alumnos que seleccionó la respuesta correcta, el porcentaje de alumnos que seleccionó cada respuesta errónea, las respuestas en blanco. Además, cuando se dé el caso, se proporcionará el porcentaje de alumnos que cometió algún error o presentó alguna dificultad que no estaba prevista y que se ha deducido de las entrevistas cognitivas.

Dado el reducido tamaño de la muestra de futuros docentes se presentará para cada pregunta una tabla indicando el número de alumnos que acertó la pregunta, los que dieron una respuesta errónea, en blanco o algún error o dificultad que no se esperaba.

5.1. Resultados para los alumnos de Secundaria

En este apartado se van a analizar los resultados del cuestionario descrito anteriormente pregunta por pregunta detectando cuáles de los errores y dificultades de la lista de la página 12 son cometidos por los estudiantes de Secundaria.

¹ En todos los casos se toman los porcentajes redondeados a la unidad, por lo que es posible que la suma no sea exactamente el 100%.

Sección 1

En la primera pregunta se les pedía calcular la media de una muestra y las posibles opciones se correspondían con los errores E2, no tener en cuenta la frecuencia absoluta; E7, confundir media y mediana y E3, no saber decidir cuándo hay que descartar los valores atípicos antes de calcular la media. También se comprueba con esta pregunta la presencia de la dificultad D5: calcular la media con valores negativos y nulos.

Sección 1, Pregunta 1)	Porcentaje de alumnos
Error E2	35%
Errores sin clasificar	17%
Respuesta correcta	15%
Dificultad D5	14%
Respuesta en blanco	10%
Error E7	6%
Error E3	4%

Tabla 1: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 1 de la sección 1.

En la primera pregunta solamente un 15% ha respondido correctamente y el error más cometido ha sido el error E2, sumar los minutos sin tener en cuenta las frecuencias y dividir entre 10, cometido por un 35% de los alumnos de Secundaria. Por otro lado, un 31% de los estudiantes no ha calculado la media correctamente y ha afirmado que no se encontraba en ninguno de los intervalos descritos, marcando la respuesta de escape: ninguna de las anteriores. Aproximadamente la mitad de los alumnos que marcaron esta respuesta tuvieron problemas para realizar los cálculos debido a la presencia de números negativos, muchos de ellos sumaron los valores absolutos de todos los datos, mostrando la dificultad D5. La otra mitad calculó la media de las frecuencias absolutas, que es un error detectado en la literatura, pero que no se seleccionó en la lista. Un 10% de los alumnos encuestados no sabían responder a la pregunta y la han dejado en blanco. Cuando en las entrevistas cognitivas se les preguntó por qué no supieron responder contestaron que no se acordaban de la fórmula.

En la segunda pregunta se les pedía calcular la mediana y las posibles respuestas evaluaban el error E5, calcular la mediana de las frecuencias; el error E6, no tener en cuenta las frecuencias absolutas y el error E7, confundir media con mediana.

Sección 1, Pregunta 2)	Porcentaje de alumnos
Error E5	38%
Respuesta en blanco	27%
Error E6	19%
Errores sin clasificar	10%
Error E7	4%
Respuesta correcta	2%

Tabla 2: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 2 de la sección 1.

La segunda pregunta ha sido acertada solamente por un 2% del alumnado. Un 38% de los alumnos ha hecho la mediana de las frecuencias en lugar de los valores de los datos (error E5) y un 19% hizo la mediana de los minutos sin tener en cuenta sus frecuencias (error E6). Hubo un 27% de los alumnos que dejó la pregunta sin responder y todos ellos dijeron en las entrevistas cognitivas que no sabían lo que era la mediana.

En la pregunta 3 se les pedía determinar la moda de la muestra y se evaluaba el error E8, tomar como moda la frecuencia y no el valor de la variable; el E9, confundir moda y media y el E10, confundir moda y mediana.

Sección 1, Pregunta 3)	Porcentaje de alumnos
Respuesta correcta	67%
Errores sin clasificar	12%
Error E8	12%
Error E10	6%
Error E9	4%

Tabla 3: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 3 de la sección 1.

En la pregunta 3 había que determinar la moda de los datos y la ha acertado un 67% del alumnado. Ha habido un 12% que ha dado la frecuencia del valor de la

moda, en lugar del valor moda (error E8) y otro 12% ha respondido que ninguna de las respuestas dadas era la correcta. La mayor parte de este 12% dijo en las entrevistas cognitivas que pensaban que la moda solo se podía calcular para variables cualitativas. Cabe destacar que esta pregunta fue contestada por el total de los estudiantes encuestados.

Sección 2

En la primera pregunta se les daban 4 interpretaciones incorrectas sobre la media que correspondían con los errores siguientes: error E9, confundir media y moda; error E7, confundir media y mediana; y error E4, pensar que si un dato supera la media en x cm necesariamente habrá otro dato que este x cm por debajo.

Sección 2, Pregunta 1)	Porcentaje de alumnos
Error E9	29%
Error E4	23%
Error E7	23%
Respuesta correcta	21%
Respuesta en blanco	4%

Tabla 4: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 1 de la sección 2.

El 21% de los estudiantes ha contestado correctamente a la primera de las preguntas de la sección 2. El error más cometido ha sido el de interpretar verbalmente la media como el valor que más se repite, que corresponde con la definición de moda (error E9) y ha sido cometido por un 29% del alumnado. Un 23% de los alumnos tiene la falsa creencia de que si un alumno está dos cm por encima de la media tiene que haber otro alumno que esté exactamente dos cm por debajo (error E4). El error de interpretar verbalmente la media según la definición de mediana (error E7) ha sido cometido por el 23% de los alumnos.

La segunda pregunta trataba de explorar el conocimiento que tienen los alumnos sobre los factores que influyen en la media (dificultad D4). Se proponía una situación en la que tenían la media de las alturas de los chicos de una clase y la de las chicas. Al incorporar las alturas de dos nuevos estudiantes a los cálculos ninguna de las dos medias variaba y se les pedía que sacasen

conclusiones sobre el género o la altura de los nuevos alumnos, lo cual no era posible con esos datos.

Sección 2, Pregunta 2)	Porcentaje de alumnos
Dificultad D4	88%
Respuesta correcta	12%

Tabla 5: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 2 de la sección 2.

Solamente fue acertada por un 12% de los alumnos y ninguno dejó la pregunta sin responder. Esto quiere decir que el 88% de los alumnos de Secundaria selecciono alguno de los distractores, mostrando que no son conscientes de cuáles son los cambios en los datos que afectan a la media y los que la dejan invariante, como dice la dificultad D4.

En la tercera pregunta se les preguntaba cuál de los siguientes procedimientos era el más adecuado para hacer un resumen de unos datos proporcionados en una tabla. En esta pregunta se comprobaba si los alumnos decidían descartar el valor atípico cuando no era necesario (error E3) y la dificultad de calcular la media con valores negativos o nulos (dificultad D5).

Sección 2, Pregunta 3)	Porcentaje de alumnos
Respuesta correcta	61%
Errores sin clasificar	14%
Error E3	12%
Dificultad D5	12%

Tabla 6: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 3 de la sección 2.

Para esta pregunta, el 61% de los alumnos dio la solución correcta, un 12% del alumnado ha decidido descartar el valor atípico cuando no había que hacerlo (error E3) y otro 12% ha optado por descartar el cero (dificultad D5). El 14% de los alumnos cometió algún error sin clasificar, que incluye la respuesta “ninguna de las anteriores” y errores accidentales o que no han podido ser relacionados con los de la lista.

Sección 3

En la primera pregunta tenían que elegir la muestra que presentase mayor desviación típica de entre cuatro colecciones de notas del 0 al 10.

Sección 3, Pregunta 1)	Porcentaje de alumnos
Respuesta correcta	50%
Errores sin clasificar	40%
Respuesta en blanco	10%

Tabla 7: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 1 de la sección 3.

Un 50% de los estudiantes sí supo reconocer cuáles eran las notas con mayor desviación, es decir, que parece que sí tienen una idea intuitiva de lo que representa esta medida cuando se les dan los valores de los datos. El 40% de los alumnos cometió un error sin clasificar, donde un 30% escogió una muestra incorrecta, y, como se pudo comprobar en las entrevistas cognitivas, un 10% pensó que todas las colecciones de notas propuestas tenían la misma desviación y por ese motivo marcaron la respuesta: ninguna de las anteriores. Hubo otro 10% del alumnado que no respondió a la pregunta y en las entrevistas afirmaron que no sabían cómo se calculaba esa medida.

En la segunda pregunta se les pide hacer lo mismo que en la anterior: ordenar las distribuciones según su desviación típica, pero en lugar de darles los datos se les presentan tres gráficas mudas.

Sección 3, Pregunta 2)	Porcentaje de alumnos
Errores sin clasificar	74%
Respuesta en blanco	21%
Respuesta correcta	6%

Tabla 8: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 2 de la sección 3.

Para esta pregunta solamente un 6% ha dado la respuesta correcta y un 74% de los alumnos ha cometido un error que no se ha podido relacionar con ninguno de los de la lista. Más de la mitad de los estudiantes (56%) ha afirmado que la distribución que menos desviación presenta es la que mayor desviación tiene y un 21% de los alumnos dejó la pregunta en blanco. Con esto podemos concluir que los alumnos, que saben lo que es la desviación típica

porque respondieron bien la pregunta anterior, tienen más dificultades para extraer la misma información a partir de un gráfico (dificultad D6).

Para la última pregunta de esta sección los alumnos tenían que reconocer cual de las cuatro muestras que se les proponían tenía la media, mediana y rango que decía el enunciado (dificultad D7).

Sección 3, Pregunta 3)	Porcentaje de alumnos
Dificultad D7	65%
Respuesta correcta	27%
Respuesta en blanco	8%

Tabla 9: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 3 de la sección 3.

Un 27% de los alumnos ha dado la respuesta acertada y un 8% la ha dejado en blanco. El 31% de los encuestados ha seleccionado las notas que cumplen con la media y la mediana pedidas, pero no con el rango. En las entrevistas cognitivas estos alumnos reconocieron que no sabían lo que era el rango y marcaron esta opción porque sí cumplía con los otros dos requisitos y por tanto tenía más posibilidades que el resto. Curiosamente el 19% de los alumnos seleccionó una muestra que no cumplía con la media del enunciado y un 15% la que no cumplía con la mediana, a pesar de que en preguntas anteriores la mediana ha presentado más errores y dificultades que la media.

Sección 4

En la primera pregunta se trataba de explorar el error E1 al plantear a los alumnos una situación en la que la solución más sencilla parecía calcular la media de dos medias, pero no lo podían hacer porque las dos muestras no tenían el mismo número de individuos.

Sección 4, Pregunta 1)	Porcentaje de alumnos
Respuesta correcta	33%
Error E1	31%
Errores sin clasificar	29%
Respuesta en blanco	8%

Tabla 10: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 1 de la sección 4.

El 33% de los alumnos ha acertado la pregunta y un 31% ha cometido el error de calcular la media de las dos medias (error E1). En las entrevistas cognitivas, los alumnos que eligieron que ninguna de las posibles opciones era correcta (15%) afirmaban que optaron por esa respuesta porque no hay manera de calcular la media total de un grupo si no se conocen los pesos de todas las personas. El resto de los errores sin clasificar se corresponden con dos distractores que se propusieron como posibles respuestas. La mayoría de los alumnos no había dejado escrito el motivo que les había llevado a elegir esa opción y en las entrevistas cognitivas dijeron que no habían hecho ninguna cuenta, sino que había sido por intuición respondiendo, por ejemplo, que “al haber más hombres que mujeres, la media total del grupo debe estar más cerca de la de los hombres que de la de las mujeres”.

Para la segunda pregunta había que invertir el algoritmo de la media y calcular uno de los datos sabiendo la suma de los otro cinco, comprobando así la dificultad D1.

Sección 4, Pregunta 2)	Porcentaje de alumnos
Dificultad D1	69%
Respuesta correcta	21%
Respuesta en blanco	10%

Tabla 11: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 2 de la sección 4.

La pregunta ha sido acertada por un 21% de los estudiantes encuestados. La respuesta más frecuente ha sido que ninguna de las respuestas era correcta (27%) y en la mayoría de los casos se debía a las dificultades que tuvieron los alumnos para plantear la ecuación y para resolverla. Esto nos indica que solamente una quinta parte de los alumnos domina el algoritmo de la media y es capaz de invertirlo para despejar uno de los datos (dificultad D1).

En la última pregunta se les decía que había un error en uno de los datos, pues una de las mujeres pesa 4 kilos más, y tenían que calcular el nuevo valor de la media, como dice la dificultad D2.

Sección 4, Pregunta 3)	Porcentaje de alumnos
Dificultad D2	67%
Respuesta correcta	23%
Respuesta en blanco	10%

Tabla 12: Porcentaje de errores y dificultades identificados en la pregunta 3 de la sección 4.

El 23% de los alumnos lo ha calculado correctamente. Al analizar el procedimiento llevado a cabo por alumnos nos encontramos en su mayoría errores accidentales como restar cuatro kilos al peso total de las mujeres en lugar de sumárselos, cometido por un 21%, o sumarle los cuatro kilos a la media, cometido por un 19% de los alumnos.

Al inicio del cuestionario se pidió a los alumnos que las preguntas que no supieran responder las dejaran en blanco, para tratar de determinar aquellos conceptos que presentaban más dificultades. Las preguntas que mayor índice de respuestas en blanco han tenido son la de calcular la mediana cuando les dan los datos en una gráfica (sección 1, pregunta 2) y calcular desviación típica cuando les dan los datos en una gráfica (sección 3, pregunta 2).

Por tanto, parece claro que los alumnos sí tienen más dificultades al calcular medidas de centralización o dispersión cuando se les proporcionan los datos en una gráfica, como afirma la dificultad D6.

5.2. Resultados para los alumnos del Máster

De manera análoga al apartado anterior, aquí se van a analizar los resultados del cuestionario pregunta por pregunta detectando cuáles de los errores y dificultades seleccionados en la literatura están presentes en los futuros docentes de matemáticas, los alumnos de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. Para una descripción detallada de cada una de las preguntas y de los errores y dificultades que identifica el lector puede consultar la sección anterior.

Sección 1

Sección 1, Pregunta 1)	Número de alumnos
Errores sin clasificar	5
Respuesta correcta	4
Error E3	4
Dificultad D5	1
Error E2	0
Error E7	0

Tabla 13: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 1 de la sección 1.

Casi la mitad de los futuros docentes encuestados han respondido que la media no se encontraba en ninguno de los intervalos propuestos, por lo que cometieron algún error que no se recoge en la lista de la página 12. De esos seis alumnos, cinco de ellos hicieron la media de las frecuencias absolutas, que es un error detectado en la literatura, pero no seleccionado en la lista; y el otro alumno presentó la dificultad D5 al calcular la media con valores negativos. Solamente cuatro alumnos han marcado la opción correcta y otros cuatro han descartado el valor extremo para hacer el cálculo de la media cuando no tenían que descartarlo, sino que tenían que aplicar el algoritmo considerando todos los valores (error E3).

Sección 1, Pregunta 2)	Número de alumnos
Errores sin clasificar	5
Respuesta correcta	5
Error E5	2
Error E7	2
Error E6	0

Tabla 14: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 2 de la sección 1.

Cinco alumnos han marcado la opción correcta y otros cinco han cometido algún error sin clasificar afirmando que la solución no se encontraba entre las posibles respuestas. En las entrevistas cognitivas hemos podido comprobar, que algunos de estos alumnos no recordaban que con un número par de datos

hay que hacer la media de los dos valores centrales y consideraban que la mediana era el intervalo formado por esos dos valores. Dos de los alumnos han cometido el error de confundir media con mediana (error E7) y otros dos han hecho la mediana de las frecuencias en lugar de los valores (error E5).

Sección 1, Pregunta 3)	Número de alumnos
Respuesta correcta	10
Error E8	3
Errores sin clasificar	1
Error E9	0
Error E10	0

Tabla 15: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 3 de la sección 1.

La mayoría de los alumnos ha respondido correctamente, tres alumnos han cometido el error E8, tomando como moda la frecuencia de la moda y uno de ellos pensó que ninguna de las respuestas dadas era la correcta. Gracias a las entrevistas cognitivas pudimos determinar que esto se debía a un error de la interpretación del gráfico, pues el alumno pensaba que la respuesta correcta era 8 minutos, en lugar de 8 días.

Sección 2

Sección 2, Pregunta 1)	Número de alumnos
Respuesta correcta	10
Error E9	3
Error E7	1
Error E4	0

Tabla 16: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 1 de la sección 2.

De nuevo, diez de los catorce encuestados acertó la pregunta, tres de ellos cometieron el error de interpretar la media según la definición de moda (error E9) y un uno de ellos la interpretó como la mediana (error E7).

Sección 2, Pregunta 2)	Número de alumnos
Respuesta correcta	7
Dificultad D4	6
Respuesta en blanco	1

Tabla 17: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 2 de la sección 2.

Solamente la mitad de los encuestados respondió correctamente a esta pregunta, un alumno la dejó en blanco y el resto seleccionó alguna de las conclusiones erróneas que se afirmaban. Parece ser que la mitad de los futuros docentes encuestados no tiene del todo claro cuáles son los factores que afectan a la media y cuáles los que la dejan invariante.

Sección 2, Pregunta 3)	Número de alumnos
Error E3	9
Errores sin clasificar	3
Dificultad D5	1
Respuesta en blanco	1
Respuesta correcta	0

Tabla 18: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 3 de la sección 2.

Sorprendentemente ninguno de los estudiantes encuestados acertó esta pregunta, mientras que nueve de los catorce decidieron descartar el valor extremo y luego calcular la media para resumir los datos (error E3). Hay tres alumnos para los que no se ha podido identificar el error cometido, ya que no elegirían ninguno de los métodos propuestos y en las entrevistas cognitivas afirmaron que todos los métodos planteados presentaban alguna desventaja y no llegaban a resumir los datos adecuadamente. Hubo un alumno que descartó el valor cero para hacer la media (dificultad D5) y otro que no respondió nada porque no sabía por cuál de ellos decidirse, pues todos le parecían igual de válidos.

Sección 3

Sección 3, Pregunta 1)	Número de alumnos
Respuesta correcta	10
Errores sin clasificar	4

Tabla 19: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 1 de la sección 3.

Diez de los estudiantes respondieron la opción correcta, tres marcaron alguno de los distractores y un uno pensó que todas tenían la misma desviación y por eso seleccionó la respuesta “ninguna de las anteriores”.

Sección 3, Pregunta 2)	Número de alumnos
Errores sin clasificar	10
Respuesta correcta	4

Tabla 20: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 2 de la sección 3.

Solamente la han acertado cuatro alumnos mientras que nueve de los futuros docentes atribuyó a la distribución que menos desviación presenta el mayor de los posibles valores. Esto nos deja entrever que la dificultad D6 sí se encuentra presente en los futuros docentes de matemáticas pues presentan más errores si se les da la información en forma de gráfico.

Sección 3, Pregunta 3)	Número de alumnos
Respuesta correcta	8
Dificultad D7	5
Respuesta en blanco	1

Tabla 21: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 3 de la sección 3.

Un total de ocho de los alumnos acertó esta pregunta y cinco presentaron la dificultad D7. En las entrevistas cognitivas se trató de explorar porque cuatro de esos cinco alumnos habían elegido una muestra que no cumpliera con la media dada y en todos los casos se detectó un fallo al realizar las cuentas mentalmente. Hubo un alumno que pensó que ninguna de las muestras posibles cumplía con las condiciones del enunciado y otro que no contestó a la pregunta.

Sección 4

Sección 4, Pregunta 1)	Número de alumnos
Respuesta correcta	12
Errores sin clasificar	1
Respuesta en blanco	1
Error E1	0

Tabla 22: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 1 de la sección 4.

Esta pregunta ha sido respondida correctamente por doce de los catorce alumnos. Tan solo un alumno ha marcado uno de los distractores y otro ha dejado la pregunta en blanco porque era la última cara y no vio que también estaba escrita, por lo que dejó toda la sección 4 sin responder. Ninguno de los alumnos que han realizado el cuestionario ha cometido el error de hacer la media de las dos medias, por lo que parece ser que el error E1 no está presente entre los futuros docentes de matemáticas de Cantabria.

Sección 4, Pregunta 2)	Número de alumnos
Respuesta correcta	11
Dificultad D1	2
Respuesta en blanco	1

Tabla 23: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 2 de la sección 4.

En la segunda pregunta, once de los catorce estudiantes ha contestado la respuesta acertada, uno de ellos ha marcado uno de los distractores, otro ha marcado que ninguna de las respuestas era correcta y, como ya se ha comentado, otro no ha respondido a la pregunta.

Sección 4, Pregunta 3)	Número de alumnos
Respuesta correcta	9
Dificultad D2	4
Respuesta en blanco	1

Tabla 24: Número de alumnos que comete los errores y dificultades identificados para la pregunta 3 de la sección 4.

Ocho de los catorce alumnos han dado con la solución correcta, cuatro de ellos han presentado la dificultad D2 y uno de ellos la ha dejado en blanco. En las entrevistas cognitivas se trató de determinar qué había hecho que los alumnos escogiesen uno de los distractores descubriendo que en tres de los cuatro casos se trataban de errores accidentales, pues los alumnos restaron los cuatro kilos nuevos en lugar de sumarlos.

6. DISCUSIÓN

La siguiente tabla recoge, para cada uno de los errores y dificultades de la literatura seleccionados en la página 12, la(s) sección(es) y pregunta(s) en la que se detectan y el porcentaje de alumnos de Secundaria que presenta ese error o dificultad en cada pregunta.

		Sección	Pregunta	Porcentaje
Errores	E1	4	1	31%
	E2	1	1	35%
	E3	1	1	4%
		2	3	12%
	E4	2	1	23%
	E5	1	2	38%
	E6	1	2	19%
	E7	1	1	6%
		1	2	4%
	E8	2	1	23%
1		3	12%	
E9	1	3	4%	
	2	1	29%	
E10	1	3	6%	
Dificultades	D1	4	2	79%
	D2	4	3	77%
	D3	2	1	79%
	D4	2	2	88%
	D5	2	3	12%
	D6	3	2	94%
	D7	3	3	65%

Tabla 25: Porcentajes de los errores y dificultades de los alumnos de Secundaria

A continuación se va a discutir cuáles de estos errores y dificultades se encuentran presentes tanto en los alumnos de Secundaria como en los futuros docentes, aquellos errores y dificultades que se encuentren solamente en uno de los colectivos y los errores y dificultades que no se han detectado ni en alumnos de Secundaria ni en alumnos del Máster.

En primer lugar, destacar que en las dos muestras estudiadas han tenido más índice de aparición las catalogadas como dificultades que los catalogados como errores, siendo las dificultades D4 y D6 los elementos de la lista que con más frecuencia han aparecido tanto en los alumnos de Secundaria como en los futuros docentes.

Para estudiar la dificultad D6 se propusieron dos preguntas. En la primera, se les daban cuatro distribuciones con una lista de seis notas cada una y se les pedía seleccionar la mayor desviación típica. En la segunda pregunta se les daban tres gráficas mudas y tenían que ordenarlas de mayor a menor según su desviación típica.

El 50% de los alumnos de Secundaria supo responder correctamente a la primera pregunta, pero en la segunda pregunta solamente el 6% atribuyó las desviaciones típicas a cada gráfica de manera correcta. Esto es una evidencia de que los alumnos de Secundaria tienen más dificultades para resolver un mismo problema si el enunciado es una gráfica que si es una lista de datos.

De la misma manera, diez de los catorce estudiantes del Máster supo encontrar la lista de notas que presentaba mayor desviación típica, pero solamente cuatro supieron contestar correctamente en el caso de las gráficas.

Ha habido errores y dificultades cuya presencia ha sido claramente superior entre alumnos de Secundaria que entre los del Máster. Entre ellos encontramos los errores E1, calcular la media de dos medias sin que tengan el mismo número de datos; E2, no tener en cuenta la frecuencia absoluta de los valores para calcular la media; E4, pensar que si un dato supera a la media en x necesariamente otro dato tiene que estar x puntos por debajo; y E6, calcular como mediana el dato central de los datos sin tener en cuenta sus frecuencias.

De la misma manera, las dificultades más presentes en los alumnos de Secundaria y con menos aparición entre los futuros docentes son las siguientes: D1; calcular uno de los datos sabiendo la media y la suma del resto; D2, calcular una nueva media si les cambian uno de los datos; D3, interpretar la media verbalmente; y D7, determinar una muestra que tenga unas medidas de centralización o de dispersión dadas. A la vista de los resultados, estos errores y dificultades parecen haber sido superadas por los futuros docentes evaluados.

Por otro lado, hay algunos errores que se han detectado de manera significativa en los alumnos del Máster encuestados, pero en menor medida en los alumnos de Secundaria. Estos errores son el error E3, que afirma que los alumnos no saben cuándo descartar los valores atípicos y el error E8, en el que se toma como moda la mayor frecuencia absoluta.

Esto puede haberse debido a que a los alumnos de Secundaria no se les menciona la necesidad de descartar los valores extremos de la media, por lo que la mayoría de los alumnos ni siquiera lo considera una posibilidad y de ahí la baja aparición de este error. En cambio, los futuros docentes de matemáticas podrían ser más conscientes de lo sensible que es la media a los valores atípicos por haberse encontrado con situaciones o contextos en los que era necesario descartarlos, y por eso ha sido la opción más elegida en su correspondiente pregunta, sin tener en cuenta la heterogeneidad de los datos.

Los errores y dificultades que han mostrado un índice bajo de aparición en ambos colectivos son los errores E5, calcular como mediana el dato central de las frecuencias absolutas; E9, confundir moda y media; E10, confundir moda y mediana y la dificultad D5, hacer la media con valores negativos y nulos.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se han tratado de identificar los errores y dificultades que cometen los alumnos de Secundaria en los conceptos básicos de la estadística, haciendo una pequeña exploración sobre los errores y dificultades que

presentan los futuros docentes de matemáticas, estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria. El estudio ha consistido en la realización del mismo cuestionario por parte de los dos colectivos para poder establecer que errores y dificultades muestran cada uno de ellos. Tras la revisión de la literatura se confeccionó una lista con una serie de errores y dificultades que se trataban de detectar con dicho cuestionario.

Como era de esperar, los alumnos de Secundaria presentan más cantidad de errores y dificultades que los futuros docentes, pues estos últimos parecen haber superado varios de los errores y dificultades cometidos por los alumnos de 3º de ESO.

De manera general, han presentado mucho mayor índice de aparición las catalogadas como dificultades (exceptuando la dificultad D5), que los errores propiamente dichos, especialmente en los alumnos de Secundaria.

La dificultad D5, extraída del artículo de del Puerto et al. (2007), afirma que los alumnos presentan dificultades a la hora de calcular la media con valores negativos o nulos, pero muy pocos alumnos tanto de Secundaria como del Máster, han dado muestras de que así sea.

Sin lugar a dudas, la dificultad que más problemas ha presentado en los ambos colectivos ha sido la dificultad D6, que afirma que los estudiantes cometen más errores al calcular las medidas de centralización o dispersión cuando se les presentan los datos en un gráfico que cuando se les presentan en una lista o tabla de datos, como mostraron Gattuso y Mary (1998, citado por Cobo (2003)).

En relación a los errores y dificultades detectados podemos concluir que la mayoría de los seleccionados no están presentes en los futuros docentes de matemáticas o lo están en pequeña medida, a excepción del error E3 que se daba con más frecuencia en los alumnos del Máster que en los alumnos de Secundaria.

Este error afirma que los estudiantes no son capaces de saber en qué situaciones es necesario descartar los valores extremos para el cálculo de la media. Durante la etapa de Educación Secundaria se hace ver a los alumnos que la media es muy sensible a los valores extremos pero no se les suele explicar que en determinadas situaciones hay que descartarlos previamente al cálculo de la media. En cambio, los futuros docentes de matemáticas (podrían haber tenido la oportunidad de profundizar más en la comprensión de este concepto y haber trabajado con valores atípicos.

Para finalizar, vamos a concluir que tanto alumnos de Secundaria como alumnos del Máster parecen considerar la estadística como algo computacional y muestran mayor destreza en calcular las medidas de centralización que dar una interpretación de las mismas. A la hora de hacer los cálculos, muy pocos de los encuestados han presentado confusión entre las tres medidas de centralización, pero a la hora de pedirles que diesen una interpretación verbal de la media muchos han marcado las definiciones correspondientes a alguna de las otras dos medidas.

Esto, y el hecho de que presenten más dificultades a la hora de calcularlas a partir de los gráficos, sugieren que se debe de dar una visión más interpretativa de la estadística en los centros de Secundaria, y no solo limitarse a que los alumnos memoricen los algoritmos y sean capaces de calcular los distintos estadísticos.

8. BIBLIOGRAFÍA

Albert, J. A., Tobías, M. G. y Villareal, O. (2014). Dificultades del concepto de promedio a través de un curso universitario de estadística. En J. D. Zacarías (Org.), *Cuarto Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, EIEPE*. Ponencia llevada a cabo en Puebla, México.

- Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 129-138). Santander: SEIEM.
- Arteaga, P., Contreras, J. M. y Cañadas, G.R. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 63 - 84.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de profesores. En J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho y P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidade e Estatística na Escola*. (pp. 7-21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros: Manual del estudiante* (1ª ed.) Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). Didáctica de la estadística y probabilidad para maestros. En J. D. Godino (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros: Manual para el estudiante*. (pp. 405-440). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Versión ampliada del trabajo publicado en H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, (pp. 310-324). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527- 547.
- Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. En A. Roque y M. J. Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Almada: Associação de Professores de Matemática.

- Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Comunicación presentada en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación*. Castelo de Vide, Portugal.
- Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares. Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. (Tesis Doctoral). Recuperado de <http://hdl.handle.net/10400.12/1624>
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. (Tesis doctoral). Recuperado de <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf>
- Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Quantitative, Qualitative and Mixed Methods Approaches*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.
- Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria (BOC nº 101, de 25 de mayo de 2007, pp. 7495-7615).
- Del Puerto, S., Seminara S. y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(3).
- Estrada, A. (2007). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. *Uno. Editorial GRAO, Barcelona*. 45, 80-98.
- Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

- Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among highschool students. En L. Pereira-Mendoza, C. Seu Keu, T. Wee Kee y W.K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-691). Singapur: International Association for Statistical Education.
- Gattuso, L., & Pannone, M. A. (2002). Teachers' training in a statistic teaching experimentation. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 685-692). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Mayén Galicia, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. (Tesis doctoral). Recuperado de <http://hera.ugr.es/tesisugr/18272113.pdf>
- Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14(4), 415-429.
- Perez Isturiz, M. (2014). *Errores más comunes en la resolución de ecuaciones de primer grado con alumnos de 12/13 años en Cantabria*. (Trabajo fin de Máster). Recuperado de <http://hdl.handle.net/10902/4948>
- Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, 38, 185-198.
- Russell, S., & Mokros, J. (1991). What's typical?: Children's ideas about average. *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, 307-313.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico y otros (Eds), *La Educación Matemática en La Enseñanza Secundaria*, (pp. 125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona-Horsori.
- Socas, M. M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M.

Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.) *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Tabuer, L. M., Cravero, M. y Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de alfabetización estadística y de razonamiento estadístico. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 273-283). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Universidad de Cantabria, (2010). *Apuntes de la asignatura Matemáticas para Maestros del Grado en Magisterio en Educación Primaria*. Material no publicado.