



Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA

DISEÑO DE TAREAS EN ENTORNOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA
TASKS DESIGN IN DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENTS

Alumno: Francisco Dirube García

Especialidad: Matemáticas

Director: Mario Fioravanti Villanueva

Curso: 2014/2015

Fecha: 15/06/2015

RESUMEN: La disponibilidad de las nuevas tecnologías en el aula es un hecho y tiene el potencial de revolucionar la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, estudios previos demuestran que el uso que el profesorado hace de estas nuevas herramientas está muy alejado del verdadero potencial que tienen. Concretamente los Entornos de Geometría Dinámica ofrecen la oportunidad al alumno de desarrollar sus habilidades de exploración, explicación y generalización. En este trabajo se muestra una guía, basada en una literatura previa, para la construcción de tareas que aprovechen las bondades de la Geometría Dinámica en las cuales los alumnos deberán investigar sobre problemas abiertos, plasmar conjeturas y extrapolar sus conclusiones. Además se muestra un ejemplo del desarrollo de una tarea concreta.

PALABRAS CLAVE: Educación matemática, diseño de tareas, geometría dinámica, tecnología en educación.

ABSTRACT: The availability of new technologies in the classroom is a fact and has the potential to boost the teaching and learning of mathematics in new directions. However, previous studies show that teachers' use of these tools is far from the true potential that they have. Particularly, Dynamic Geometry Environments offer students the opportunity to develop their exploration, explanation and generalization skills. This paper presents a guide, based on the previous literature, for the construction of tasks that take advantage of the benefits of Dynamic Geometry where students should investigate open problems, write their conjectures and extrapolate their findings. Also an example of the development of a specific task is shown.

KEY WORDS: Mathematical education, task design, dynamic geometry, technology education.

1.	INTRODUCCIÓN	5
2.	JUSTIFICACIÓN	9
3.	MARCO TEÓRICO.....	10
3.1.	ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA.....	10
3.1.1.	TRABAJO COLABORATIVO	11
3.2.	AMPLIFICADOR O REORGANIZADOR	12
3.3.	TRABAJO CON GEOGEBRA.....	13
3.3.1.	EXPLORACIÓN	14
3.3.2.	EXPLICACIÓN	17
3.3.3.	GENERALIZACIÓN	18
4.	DISEÑO DE TAREAS	19
5.1.	TAREA: EL TEOREMA DE VARIGNON.....	20
5.1.1.	TAREA a).....	22
5.1.2.	TAREA b).....	24
5.1.3.	TAREA c).....	24
5.1.4.	TAREA d).....	28
5.1.5.	FINALIZACIÓN	36
5.	SUGERENCIAS DE TAREAS.....	37
6.	CONCLUSIONES.....	41
7.	BIBLIOGRAFÍA	42

1. INTRODUCCIÓN

Es más que evidente que la tecnología se ha convertido en nuestra compañera de viaje en este mundo y, día a día, millones de personas la utilizan en su vida cotidiana. La educación, que no es ajena al avance de la humanidad, se aprovecha en la medida de lo posible de estos recursos tecnológicos pero muchas veces se queda a las puertas de lo que podría ser.

Cualquiera que tenga contacto, en la actualidad, con un profesor de colegio/instituto podrá comprobar que si bien se dispone en la mayoría de aulas de ordenador, proyector y software especializado la tarea docente no se ha ajustado en absoluto a las posibilidades de estas tecnologías. El uso habitual que de ellas se hace es el de sustituto de las herramientas tradicionales, utilizándose para dibujar elementos que se podrían hacer en la pizarra o para exponer ejercicios que se podría dictar.

Concretamente en matemáticas, la forma en la que el profesor se aprovecha de la tecnología tiene tanta importancia como el uso de la herramienta en sí misma. Esto no sólo hace referencia a profesores más tradicionales sino a los docentes que tienen dificultades en adaptar sus técnicas de enseñanza a estas tecnologías. Esta limitación se añade además a las restricciones impuestas por el currículo o las instituciones (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010).

Según Sherman (2010) estas dificultades a la hora de implementar la enseñanza con tecnología en el aula vienen de la diferencia entre ser pedagógicamente buen profesor y saber de tecnología, con saber enseñar con tecnología. La creencia popular sugiere que el profesor simplemente necesita saber cómo usar la tecnología, suponiendo que este conocimiento es una habilidad universal, útil en todos los ámbitos. El buen uso de ésta depende del conocimiento de la materia por parte del docente, de los estudiantes y de las capacidades y limitaciones de unos y otros.

La mayoría de docentes no aprendieron matemáticas usando la tecnología disponible hoy en día por lo que se hace esencial, para el aprovechamiento de ésta, proveer a los profesores con experiencia en el aprendizaje de matemáticas con tecnología. Gracias a este aprendizaje es posible que ellos sean capaces de comprender el valor de la Geometría Dinámica.

Sherman cita a Mishra y a Koehler (2006) a la hora de establecer una nomenclatura para estos conceptos. Así es como se establece el TPACK, de las siglas en inglés de Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y de Contenido (Technological Pedagogical Content Knowledge). TPACK es la compleja interacción de estas tres formas de conocimiento. El enfoque de TPACK va más allá de ver éstas de forma aislada y se centra en las intersecciones entre cada una de ellas (Koehler en www.tpack.org).

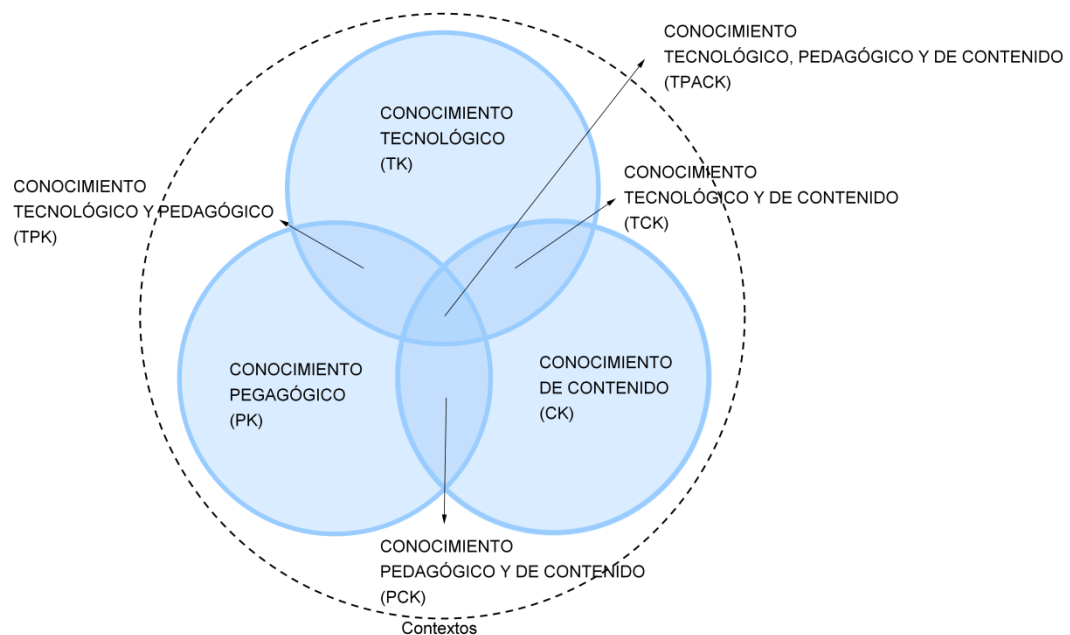


Figura 1 – Esquema de TPACK. Extraído de tpack.org

Si se analiza en detalle la Figura 1, se pueden encontrar siete zonas distintas de conocimiento según se contemplen de forma individual o en sus interacciones:

- Conocimiento pedagógico (PK): Conocimientos sobre pedagogía, didáctica y métodos de enseñanza.
- Conocimiento de contenido (CK): Conocimiento sobre la materia que se imparte.
- Conocimiento tecnológico (TK): Conocimiento sobre las TICs.
- Conocimiento pedagógico y de contenido (PCK): Conocimiento de las didácticas concretas de la materia.
- Conocimiento tecnológico de contenido (TCK): Conocimiento sobre la tecnología adecuada para enseñar una materia concreta (por ejemplo, software tipo GeoGebra para la geometría).
- Conocimiento tecnológico y pedagógico (TPK): Conocimiento sobre la didáctica con tecnología.
- Conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido (TPACK): Integración de todos los componentes anteriores. El docente integra lo que sabe sobre la materia, la didáctica y métodos adecuados y como aplicar la tecnología para enseñar eficientemente esa materia.

Así pues, TPACK es un marco conceptual que ayuda al profesorado a integrar la tecnología en los procesos de enseñanza, siendo constituido por un conjunto de conocimientos que abarcan múltiples disciplinas que se aplican en situaciones concretas para enseñar eficazmente con tecnología.

Por ejemplo proveer de tecnología a un buen profesor no implica que haga buen uso de ella. Esto es tener un conocimiento pedagógico y de contenido (PCK) más un conocimiento de tecnología (TK) por separado, que no es lo mismo que TPACK.

Mientras que tener experiencia con tecnología puede ser una condición necesaria para conseguir el TPACK, no significa que sea suficiente. La primera

premisa del TPACK es que el conocimiento sea integrado, no meramente una unión de los diferentes tipos de conocimiento: $TK+PK+CK \neq TPACK$.

Para solucionar esto, se requiere un cambio en la práctica de enseñanza/aprendizaje. Hay una necesidad de nuevos tipos de tarea que utilicen las capacidades disponibles por las nuevas tecnologías. (Fahlgren & Brunström, 2014).

Este trabajo se centrará en el diseño de tareas en entornos de Geometría Dinámica. La Geometría Dinámica describe a la geometría donde, partiendo de una construcción realizada, es posible mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observar cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones iniciales pero manteniendo las restricciones y las relaciones preestablecidas entre los distintos objetos geométricos.

El objetivo del documento es el de crear un marco para que los docentes sepan cómo construir tareas con EGD con las que los alumnos desarrollen las capacidades matemáticas y maximicen su absorción. De forma implícita en la sentencia anterior, se trata de promover el uso eficiente de las nuevas tecnologías superando el uso actual y habitual de meros sustitutos de herramientas antiguas.

El trabajo incluye una justificación donde se encuadra el valor y la utilidad de la enseñanza de las matemáticas con Entornos de Geometría Dinámica y un marco teórico donde se encuentra la literatura sobre la que se basa este trabajo. A continuación se incluye el desarrollo de una tarea concreta sobre el teorema de Varignon y unas conclusiones extraídas al final del documento. Se incluyen tres ejemplos adicionales de tareas.

2. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo se centra en encontrar modos satisfactorios de incorporar las TICs, en particular los Entornos de Geometría Dinámica, al estudio de las matemáticas y para ello es necesario conocer de antemano las aportaciones o ventajas que los estudiantes o docentes pueden obtener tanto a nivel de actitud como cognitivo.

En el estudio de García (2011) se investigó el impacto provocado por GeoGebra (un software de Entorno de Geometría Dinámica que se usará también en este trabajo) en el proceso de enseñanza/aprendizaje en una muestra de alumnos de instituto,. El trabajo concluye que hay una mejora importante en el campo actitudinal y algo menos significativa en el campo cognitivo.

En cuanto a nivel de actitud, hay resultados bastante homogéneos, que muestran una transformación positiva de las actitudes relacionadas con las matemáticas de la mayoría de los estudiantes, gracias al trabajo con EGD. Los estudiantes manifiestan mayor gusto, agrado, interés e implicación en las actividades matemáticas si éstas se llevan a cabo en entornos tecnológicos (García, 2011).

El nivel de mejora cognitiva gracias a los EGD queda expresado por García (2011) en la siguiente frase:

La herramienta ayuda a que los estudiantes tomen conciencia de la necesidad de manifestar actitudes como rigor, precisión, autonomía, sistematización o espíritu crítico, así como de su importancia para la resolución de problemas matemáticos. Esto les lleva a seguir manifestando todas o algunas de estas actitudes en futuras actividades matemáticas.

De esta investigación se concluye que los dos ámbitos (el actitudinal y el cognitivo) están íntimamente relacionados pues una mejora actitudinal implica un mayor interés y preocupación por el hecho de aprender matemáticas.

Por otro lado, en el trabajo de Ruiz (2013), se realiza una investigación con dos grupos de alumnos universitarios, uno experimental (con un software de geometría: GeoGebra) y otro de control (con lápiz y papel). Las conclusiones son que los alumnos del grupo experimental mejoran de forma notable su aprendizaje respecto a los alumnos del grupo de control en todos los ítems de la prueba a los que se les sometió.

En este trabajo cabe destacar que los estudiantes opinaron que su desconocimiento de la herramienta no fue un impedimento debido a la facilidad de uso de ésta. Es decir, que los resultados no fueron alterados por su nivel previo de competencia digital.

Gracias a estas investigaciones y a otras similares se puede afirmar rotundamente que la utilidad de implementar la tecnología al proceso de enseñanza/aprendizaje está demostrada.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

La Geometría Dinámica aparece de forma explícita en el currículo de la LOE, concretamente en el Boletín Oficial de Cantabria, según el Decreto 57/2007 del 10 de Mayo:

“La aproximación de los alumnos a las nuevas tecnologías debe producirse de forma práctica y vinculada al desarrollo de actividades concretas, en las que exista un software informático adecuado, con el fin de lograr que dejen de ser recursos que se utilizan excepcionalmente y

pasen a ser un medio más, integrado armónicamente en la vida diaria del aula y en el trabajo de los alumnos en su casa, lo que permitirá programar un aprendizaje lo más personalizado posible.”

Se pueden extraer dos lecturas de este párrafo. La primera es que los programas de Geometría Dinámica deben formar parte del día a día del aula, convertirse en recursos que los alumnos puedan aprovechar a la hora de realizar su tarea, estudiar o preparar un examen, en definitiva, poder ser usados a discreción del alumno. La segunda es que se debe entender la Geometría Dinámica no como una mera sustituta de otros recursos del aula (Pizarra, lápiz y papel, etc.) sino como un elemento pedagógico en sí mismo pues la Geometría Dinámica no consiste simplemente en dibujar con el ordenador, si no en poder mover dinámicamente los elementos manteniendo las restricciones impuestas.

Un Entorno de Geometría Dinámica, en adelante EGD, es cualquier software que permite usar la Geometría Dinámica. En este trabajo se usará el programa informático GeoGebra como Entorno de Geometría Dinámica, por ser uno de los programas más conocidos a nivel mundial, más completo, con una gran comunidad detrás y sobre todo, por ser gratuito. A esto se debe añadir la poca pendiente que tiene su curva de aprendizaje, al menos al nivel que un alumno puede usarlo en clase.

3.1.1. TRABAJO COLABORATIVO

Según la investigación llevada a cabo por García (2011) el trabajo colaborativo emerge como una forma de trabajo adecuada durante las tareas realizadas con EGD, fomentando el diálogo entre los estudiantes y contribuyendo a que éstos manifiesten menos dificultades tanto en el control del software como en la resolución de las tareas. Es esencial para un alumno

contar con la ayuda de un compañero y que mutuamente se sugieran usos, estrategias o caminos a seguir durante la resolución de las tareas.

Especialmente, el entorno tecnológico potencia el aprendizaje colaborativo de los estudiantes al enfrentarse juntos varios alumnos a las dificultades de explorar un software.

3.2. AMPLIFICADOR O REORGANIZADOR

En el artículo de Sherman (2010), el autor utiliza esta terminología para referirse a los efectos de la Geometría Dinámica sobre el alumno y los define así:

Cuando hablamos de los EGD actuando como amplificadores, estos permiten usar más eficientemente las horas de trabajo consiguiendo que procesos tediosos como cálculos o dibujos los haga el ordenador en vez de ser hechos a mano. *El problema de este uso es que lo que los estudiantes hacen o piensan no cambia aunque se haga con un esfuerzo significativamente menor* (Sherman, 2010). Por ejemplo el uso del software Excel para realizar cálculos sobre una base de datos extensa permite realizar el trabajo de una forma mucho más veloz, más precisa y con una gran eficiencia, pero en ningún caso cambia lo que el usuario piensa o sabe sobre el proceso. Se podría realizar la misma tarea con una calculadora o incluso a mano con lápiz y papel. Este uso es a lo que se refiere el término amplificador.

El típico uso de un EGD que hace un profesor en el aula hoy en día consiste en enseñar a los alumnos un proceso manualmente y después aprender cómo se hace con tecnología. Por ejemplo, se les enseña a los alumnos un teorema y se demuestra en la pizarra para luego comprobar que en GeoGebra el teorema se cumple. Al actuar como amplificador, el EGD permite a los alumnos

ver las cosas más claras pero se añade poco o ningún conocimiento nuevo a la cabeza del estudiante.

Como reorganizador, un EGD tiene un potencial mucho mayor, permitiendo afectar a lo que el alumno piensa. El profesor entrega al alumno una construcción, o le indica cómo hacerla, para que luego sea el estudiante quien mira, explora, comprueba, hace conjeturas y generaliza. De esta forma el alumno es quien formula el teorema y descubre porqué es cierto, y no se queda en una mera observación de un hecho. Para que este proceso se lleve a cabo, el estudiante necesitará un guía que le ayude a ir en la dirección correcta (profesor) y que permite ajustar la dificultad a la edad y conocimientos previos de los alumnos.

3.3. TRABAJO CON GEOGEBRA

GeoGebra tiene un potencial pedagógico inmenso no sólo por la facilidad con la que se crean sistemas matemáticos complejos ni tampoco por la capacidad de que esos sistemas sean dinámicos, sino por el modo de llegar hasta ellos y descubrir cómo funcionan. Como se ha explicado en el apartado anterior, la forma óptima de usar este EGD es el diseño de tareas específicas en cada caso, que huyan del modelo mecánico al que estamos acostumbrados.

Para poder crear tareas que ofrezcan un uso reorganizativo es imprescindible comprender los procesos, habilidades y capacidades que GeoGebra pone en práctica.

3.3.1. EXPLORACIÓN

Una de las virtudes más interesantes de los EGD es la posibilidad de hacer exploraciones (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Mediante el sistema de arrastre que permite GeoGebra, donde un elemento puede ser arrastrado por la pantalla mientras las restricciones que hemos impuesto se mantienen, la exploración adquiere su máxima expresión. Y es aquí, en la fase de exploración donde los estudiantes aplican su intuición en la búsqueda de patrones, de excepciones, prueban ideas y formulan evidencias que finalmente se convertirán en conjeturas (Edwards, 1997, revisado 2006). Explotar la simplicidad con la que GeoGebra permite estudiar diferentes ejemplos de una misma situación se convierte en algo esencial.

Es particularmente interesante en este apartado la opción de “rastros” que permite GeoGebra. Esta opción consiste en que el elemento seleccionado deja tras de sí una marca del lugar donde ha estado como vemos en la Figura 2.

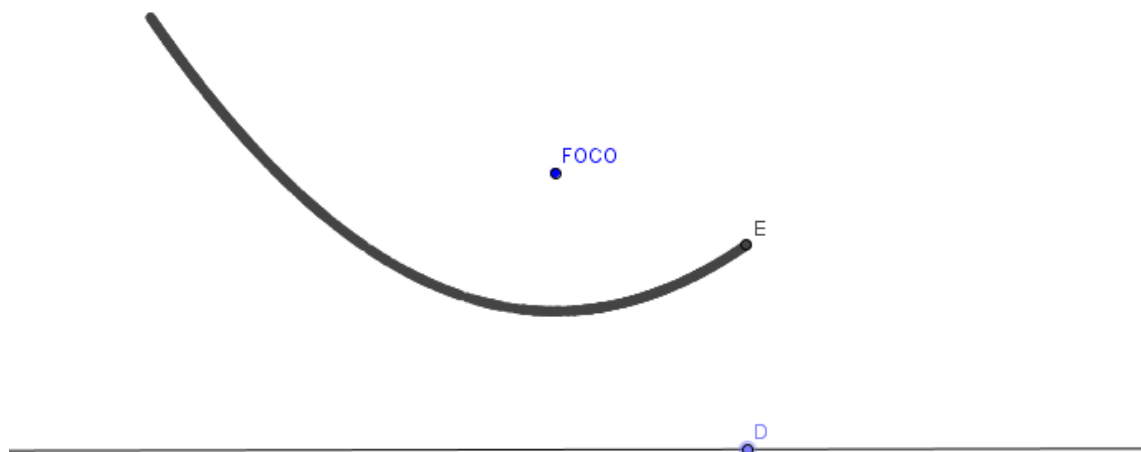


Figura 2 – Rastro de un punto (E) que se encuentra a la misma distancia de otro (FOCO) y de una recta.

El procedimiento descrito permite visualizar puntos o lugares geométricos desconocidos, sólo se necesita saber expresar la condición que deben cumplir los puntos del mismo (Losada Liste, 2014).

Así, combinando estas dos posibilidades, podremos mover un elemento por la pantalla siguiendo el patrón que nos permitan las restricciones, y a la vez ver todos los puntos por los que ha pasado. De esta forma observamos el lugar geométrico que cumple esas restricciones. Cuando un patrón ha sido encontrado, debe ser descrito de una forma que pueda ser compartida con otros, en palabras, conceptos matemáticos, dibujos o diagramas (Edwards, 1997, revisado 2006). Cuando el alumno cree que el patrón es válido en general, debe escribir una conjetura.

Dentro de la exploración, existen dos caminos destacados a seguir: la exploración con la actividad exploratoria o con la actividad expresiva (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007). Un modelo exploratorio es uno creado por otra persona (profesor o experto) que los estudiantes utilizan para investigar un problema mientras que un modelo expresivo es aquel que los alumnos construyen por sí mismos.

La diferencia entre estos dos modelos es el grado de libertad que permite cada uno de ellos, siendo el primero una actividad mucho más rápida y concreta y el segundo un modelo más abierto que con la adecuada guía docente se convertirá en una herramienta mucho más potente. Lo que es pedagógicamente apropiado depende del conocimiento previo de los alumnos, de las normas del aula y de su experiencia con GeoGebra (Sherman, 2010).

Un ejemplo de actividad exploratoria está en la Figura 3. En esta figura el alumno puede investigar, mover y desplazar todos los puntos que determinan la elipse. Explorando debe llegar a la conclusión de que la suma de las distancias de un punto a los focos es siempre constante para una misma elipse. En este tipo de actividades se dice a los alumnos qué investigar y cómo, y todos ellos deben llegar a la misma conclusión. Las actividades exploratorias

permiten más control a los estudiantes, sobre todo a los no familiarizados con GeoGebra, pero los limita diciéndoles qué hacer.

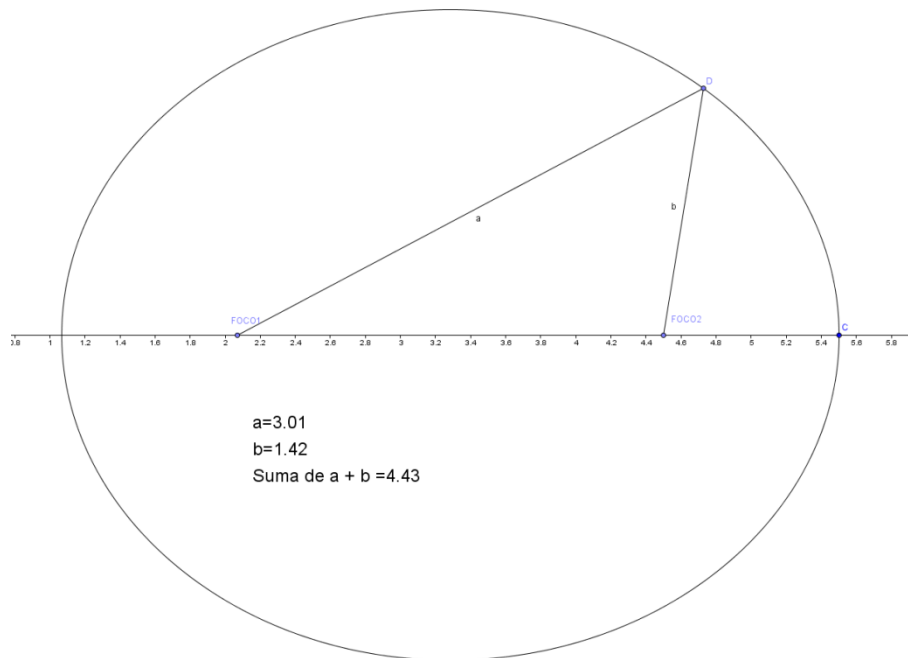


Figura 3 – Comprobación de la propiedad de una elipse.

Por otro lado, los modelos expresivos tienen un fin menos delimitado y obliga a los estudiantes a elegir qué hacer, qué investigar y cómo. Una tarea que incluya un método expresivo puede ser la simple construcción de un triángulo equilátero o un cuadrado (sin la opción de construcción de polígono regular en GeoGebra). De esta forma los alumnos deben investigar con que herramientas cuentan, que elementos necesitan y que propiedades deben cumplir esos elementos. Según Sherman (2010), la herramienta de arrastre se convierte durante este proceso en una herramienta para monitorizar su progreso, comprobando paso a paso que se cumplen las restricciones deseadas y descubriendo qué falta por añadir. Esto hace que el alumno sea consciente del proceso de construcción que subyace de las figuras dinámicas.

Obviamente, el desarrollo de una actividad con el método expresivo requiere una cantidad de tiempo y energía mucho mayor, por lo que es importante que

el docente sepa en cada caso qué se adecua más a las necesidades del aula. Más libertad puede implicar mejor aprendizaje, pero más limitado en cuanto a cantidad.

3.3.2. EXPLICACIÓN

Dado que la finalidad de las matemáticas no es simplemente la aplicación instrumental de éstas, si no el desarrollo de la capacidad de razonamiento, el trabajo con GeoGebra no debe quedarse en la exploración de un fenómeno matemático o en el descubrimiento de éste (Recio Muñiz, 2009). No es útil para el futuro de un estudiante conocer una propiedad rara y poco común en la vida real, lo verdaderamente útil son las capacidades que este alumno ha puesto en juego y ha desarrollado para llegar a conocer esta propiedad.

Como se ha dicho antes, una vez el estudiante ha descubierto la propiedad o propiedades que cumple su construcción debe ser capaz de expresar de una forma u otra su descubrimiento para que otros sean capaces de entenderlo. El hecho de ser capaz de expresarlo puede ser un paso crucial en el entendimiento de esta propiedad. Una vez este proceso ha finalizado, convencido de que su conjetura es cierta, debe investigar y descubrir el porqué de esta propiedad. En este punto, la herramienta de arrastre es insuficiente y el alumno debe añadir construcciones adicionales para poder generalizar, lo que requiere un gran dominio de GeoGebra. Con construcciones adicionales se hace referencia, por ejemplo, a la construcción de elementos externos a la figura (como triángulos semejantes, rectas paralelas o perpendiculares, etc) o de figuras más simples que también cumplan las propiedades.

3.3.3. GENERALIZACIÓN

Una vez se ha encontrado el porqué de la propiedad descubierta se avanza un paso más en el aprendizaje, en donde la generalización de la propiedad juega el último papel. En esta fase, el estudiante investiga para qué situaciones se cumple la propiedad y si puede ser extrapolada o no. Por ejemplo, en un cuadrado las diagonales se cortan en un punto, ¿ocurre lo mismo para cualquier polígono regular?. De esta forma los alumnos ponen en juego una vez más su capacidad de razonamiento y convertir su conjetura específica en una conjetura más general (Fahlgren & Brunström, 2014).

En el artículo de Fahlgren (2014) cita a Chazan (1990) al referirse a la estrategia del “Qué pasa si no”. Haciendo referencia al ejemplo anterior, podríamos rescribir la pregunta de la siguiente manera: ¿Qué pasa si la figura no es un cuadrado?. Esta estrategia se convierte en una herramienta muy potente a la hora de generalizar y no abandonar un problema con la resolución pues como expresa Fahlgren:

“Podría ser mucho más instructivo para los estudiantes explorar una conjetura más profundamente preguntándose “qué pasa si...” o “qué pasa si no...” y variando sistemáticamente aspectos clave para hacer una conjetura más general”.

4. DISEÑO DE TAREAS

Los problemas abiertos crean entornos de aprendizaje que permite a los alumnos explorar y exponer conjeturas (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Un problema abierto consiste en una simple descripción de relaciones entre elementos, diferentes de un problema cerrado típico en el que se da un único camino al alumno para llegar a una solución preestablecida.

Tal y como se ha expuesto en el marco teórico, se van a dividir las tareas en tres fases claras: la fase exploratoria, la explicativa y la de generalización. En la primera el estudiante investiga el modelo. En la segunda se observan y reconocen patrones de variación o invariación para obtener ideas de una conjetura y expresarlas de forma argumentada matemáticamente. En la tercera se desarrolla el proceso de generalización buscando patrones más allá de la propia figura.

En resumen, la literatura sugiere que una tarea diseñada para EGD que provoque un aprendizaje eficiente y profundo en el alumno debería basarse en un problema abierto, que exija a los alumnos construir su propia figura de estudio, que obligue a formular conjeturas y finalmente permita ampliar el concepto fuera de la situación concreta (Fahlgren & Brunström, 2014). En la siguiente Tabla 1 se encuentra resumido el listado de acciones que debe tener el modelo de tarea a desarrollar.

Descripción de la tarea.

a)	Haz una construcción y comprueba que se cumplen las restricciones deseadas.
b)	Explica qué ocurre.
c)	Explica por qué es cierto y exprésalo en lenguaje matemático.
d)	Realiza nuevas investigaciones relacionadas y crea nuevas conjeturas.

Tabla 1 – Modelo inicial de tarea.

5.1. TAREA: EL TEOREMA DE VARIGNON

Se desarrolla una tarea diseñada a partir de las ideas principales de la literatura comentada en las páginas anteriores. Para ilustrar y examinar el modelo se ha desarrollado un ejemplo concreto. En cada componente en la tarea-ejemplo se lleva a cabo un estudio y se prevé la actuación del alumno. La tarea está basada en un curso de 1º de Bachiller adaptada a los conocimientos matemáticos de la etapa.

Una de las formas más simples de crear problemas abiertos que exploten las bondades de los EGD podría ser convertir problemas cerrados tradicionales en problemas abiertos.

En esta primera fase de exploración se tomará un problema cerrado del tipo “Prueba que”:

Se tiene un cuadrilátero ABCD convexo. Se unen los puntos medios de cada uno de los lados EFGH. Prueba que la figura obtenida es un paralelogramo y que se cumple el teorema de Varignon.

Es necesario definir que premisas de la tarea original se usarán en la descripción de la tarea matemática. El concepto de cuadrilátero convexo es totalmente innecesario y sólo va a llevar a los alumnos por caminos incorrectos ya que la propiedad que se desea descubrir se cumple también en polígonos cóncavos. Otro concepto que se rechaza es la nomenclatura de los vértices y los puntos medios. El hecho de tener que nombrar cada punto como exige el ejercicio sólo causa complicaciones innecesarias y una cantidad de tiempo invertido que nada aporta al objetivo de la tarea. La parte en la que se indica que la propiedad que se va a desarrollar es un teorema se decide obviar, y se comentará con los alumnos al final de la sesión.

Con el objetivo de hacer el problema lo más abierto posible, la instrucción de “prueba que la figura es un paralelogramo” es remplazada por “explica que

ocurre” o también podría ser “busca relaciones matemáticas”. De esta forma el estudiante tiene que sacar conclusiones por sí mismo y no seguir un camino totalmente guiado.

Estas decisiones llevan al modelo concreto de la tarea en la Tabla 2.

Se unen los puntos medios de los lados de un cuadrilátero de forma consecutiva.

a)	Haz una construcción y comprueba que se cumplen las restricciones indicadas en cualquier situación.
b)	Explica qué ocurre.
c)	Explica por qué es cierto y exprésalo en lenguaje matemático.
d)	Realiza nuevas investigaciones relacionadas y crea nuevas conjeturas.

Puede ser imprescindible que el alumno asista a una breve introducción sobre el software a utilizar, GeoGebra, con el objetivo de no perder tiempo explorando las herramientas disponibles. En el caso concreto de esta tarea una simple demostración de unos minutos de cómo se construyen polígonos, rectas, puntos y puntos medios es suficiente. En el caso de tareas diferentes, más o menos complejas, los requisitos iniciales pueden variar. A pesar de esta pequeña dificultad inicial, la tarea diseñada debe estar planteada para poder ser usada conociendo elementos de la geometría habitual utilizada en clase.

En cualquier caso, el objetivo de la tarea no es convertirse en un experto usuario de GeoGebra, si no desarrollar las capacidades que se pondrán en juego, por lo que la ayuda del profesor a la hora de manejar el software está totalmente aconsejada.

En determinados momentos, el alumno puede quedarse sin ideas y detenerse sin saber cómo continuar. La cantidad de ayuda que debe proporcionar el docente deberá estar adaptada tanto a la dificultad de la tarea como al conocimiento matemático y capacidades de los alumnos. De la misma

forma, el nivel de apertura de la tarea debe seguir el mismo patrón, permitiendo que alumnos más avanzados sean más libres a la hora de encontrar soluciones y alumnos menos avanzados puedan seguir un camino más marcado. No se debe plantear un problema totalmente abierto a un alumno de 11 años, o un problema muy sistemático a un alumno de 18 años.

5.1.1. TAREA a)

En este caso la construcción es verdaderamente simple gracias a la herramienta de GeoGebra de construcción de polígonos. Así mismo, la herramienta de punto medio y de nuevo la de construcción de polígono permite tener la construcción finalizada en breves momentos (Figura 4). Si el alumno no esté nada familiarizado con el software, unas breves explicaciones por parte del profesor serán suficientes en este caso.

Una vez finalizada la parte constructiva de la tarea se pasa a la parte exploratoria. En ella los alumnos, mediante la herramienta de arrastre deberán modificar la forma del cuadrilátero inicial. Si intentaran deformar el polígono interior les sería imposible, ya que las restricciones impuestas (los vértices coinciden con los puntos medios de los lados) no dejan ningún grado de libertad. Al modificar la forma del polígono exterior mediante el movimiento de sus vértices se comprueba que la restricción impuesta se cumple en todas las situaciones:

Los vértices del polígono interior siguen siendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero exterior.

Como está expuesto anteriormente, si se deforma el polígono lo suficiente como para convertirlo en un cuadrilátero cóncavo, esta restricción se sigue cumpliendo (Figura 5).

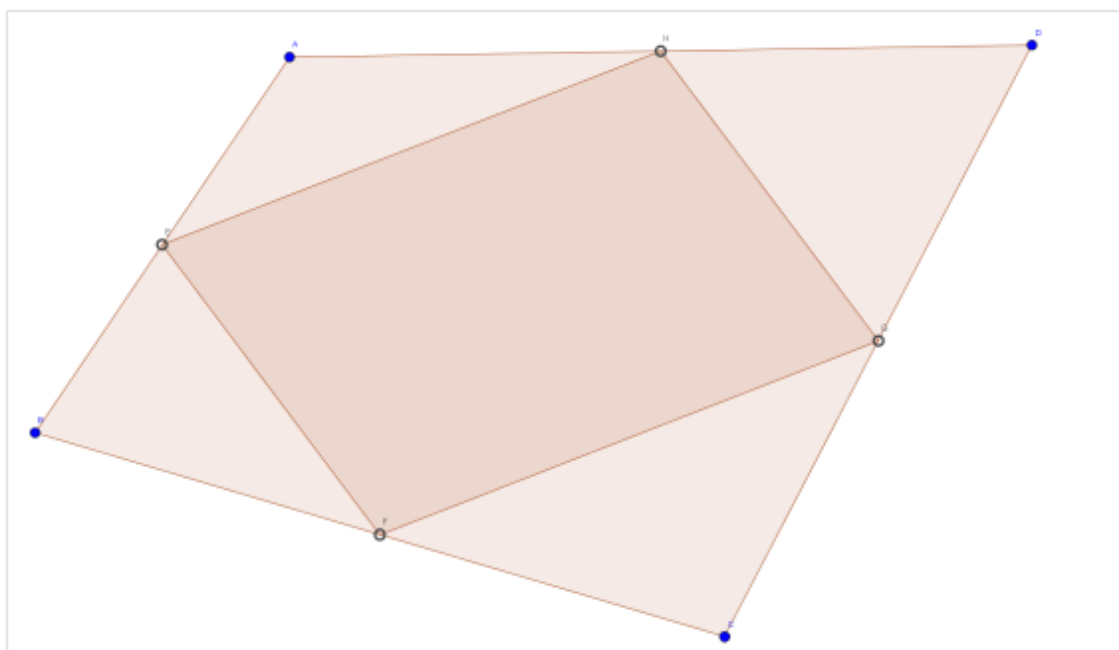


Figura 4 – Construcción tarea a).

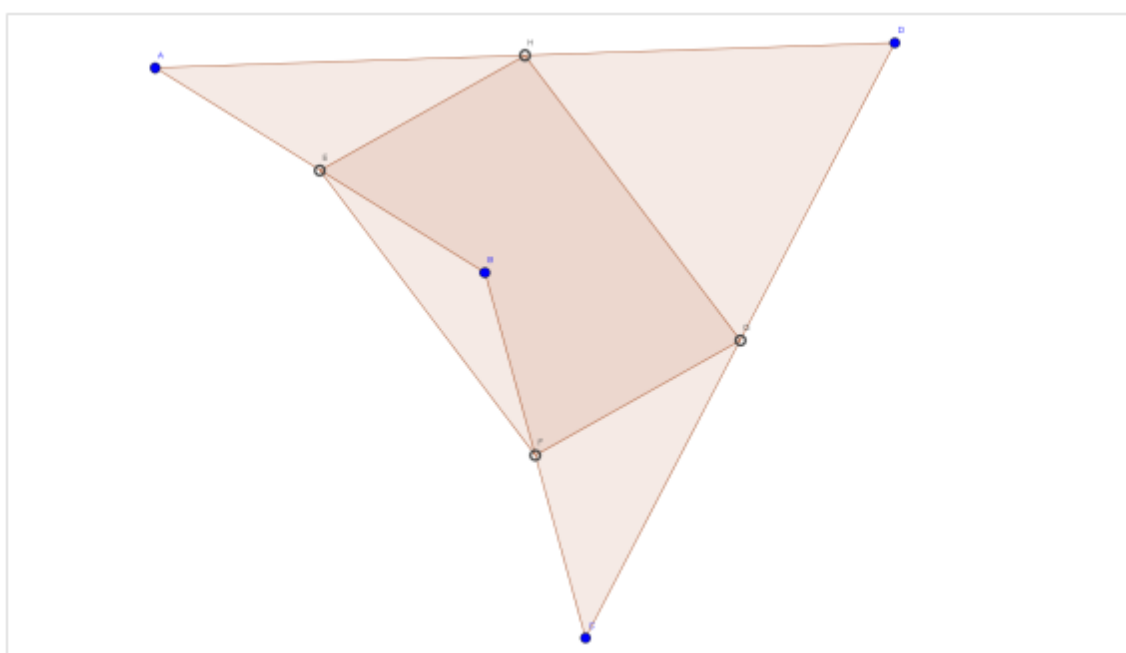


Figura 5 – Cuadrilátero cóncavo.

5.1.2. TAREA b)

Se prevé que los alumnos rápidamente lleguen a la conclusión de que:

Independientemente de la forma del polígono exterior, el polígono interior es un paralelogramo.

Ante esta situación es de esperar que los alumnos fuercen el entorno de simulación hasta los extremos, como por ejemplo construyendo un polígono exterior muy grande, o con varios vértices muy juntos para comprobar que su conjetura se sigue cumpliendo.

El uso de casos especiales para probar que la conjetura es cierta se usa de forma habitual en la resolución de problemas, cuando se plantean casos extremos para confirmar o comprobar que se cumplen las restricciones iniciales.

5.1.3. TAREA c)

La forma de demostrar por qué es cierto esto puede antojarse ligeramente complicada a los alumnos por lo que probablemente necesiten de algo de ayuda por parte del docente, actuando éste como guía y no resolviendo el ejercicio.

Como “pista” inicial se podría indicar a los alumnos que exploren la relación de los lados de paralelogramo con las diagonales del polígono exterior, como se ve en la Figura 6.

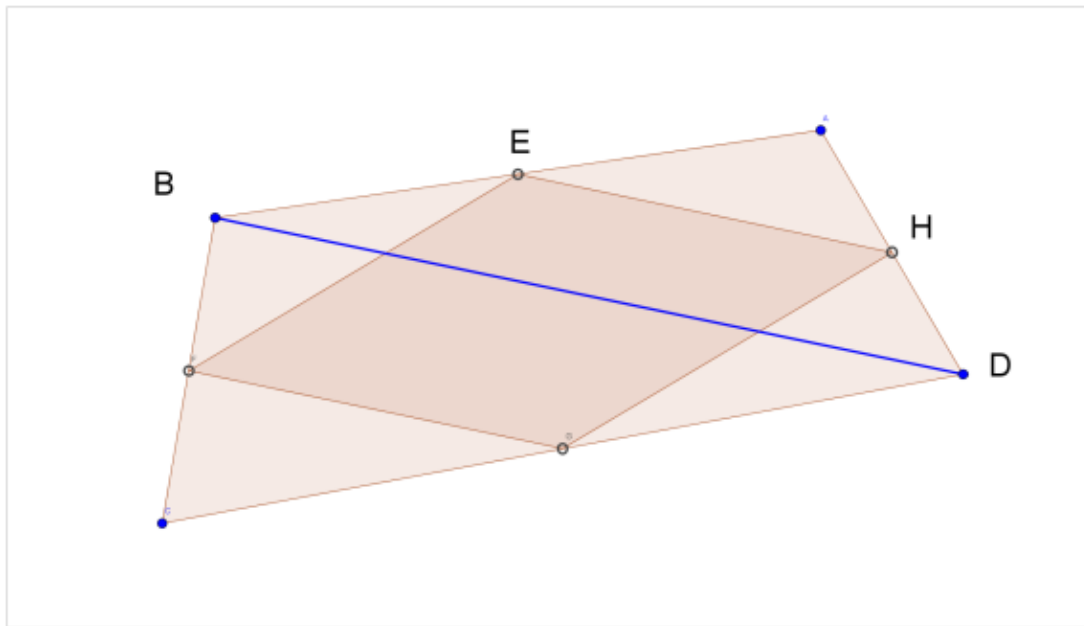


Figura 6 – Comparación de los lados del paralelogramo con la diagonal del pol. exterior.

Una vez construida la diagonal del polígono exterior, la herramienta de arrastre les convence de que dos de los lados son paralelos a ella en cualquier situación. En este punto puede ser de gran ayuda el sugerir al alumno que explique en sus propias palabras por qué es cierto. Con esta petición de “en sus propias palabras” se tiene la intención de que el estudiante se construya una idea informal pero intuitiva de lo que debe hacer a continuación. Esta podría ser:

Dos de los lados son siempre paralelos a la diagonal, por lo tanto son siempre paralelos entre sí.

Gracias a esta expresión de su pensamiento, el alumno puede creer, intuitivamente, que necesita demostrar por qué tan sólo uno de los lados es paralelo a la diagonal ya que el otro lo será también.

Una nueva “pista” puede ser necesaria aquí y se puede indicar al alumno que debe centrarse en el triángulo definido por la diagonal y dos de los lados del polígono exterior (Figura 7). En él, deben usar el teorema de Tales.

Para desarrollar esta idea, puede ser necesario realizar una construcción adicional (Figura 7) para, sobre ella, realizar y comprobar las condiciones de paralelismo necesarias.

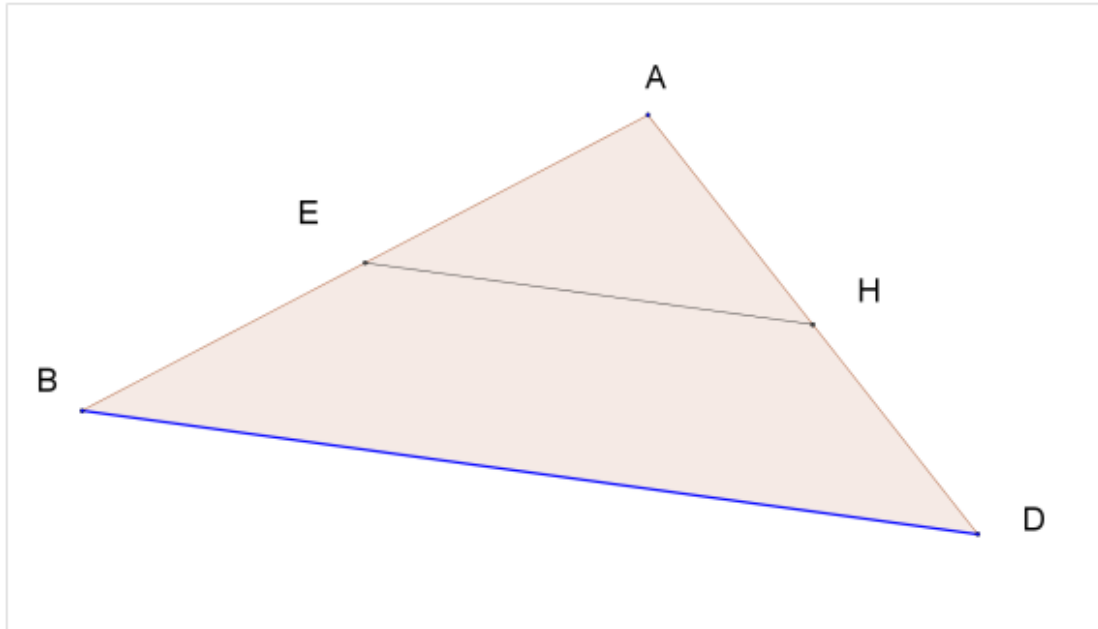


Figura 7 – Triángulo definido por dos de los lados del polígono inicial y una de sus diagonales.

A través del teorema de Tales pueden darse varias demostraciones de por qué $\overline{EH}$ es paralelo a la diagonal. Por ejemplo:

- Se puede demostrar que $\overline{EH}$ es paralelo a $\overline{BD}$ ya que si trazamos una paralela a $\overline{BD}$ por el punto medio de uno de los lados (E) se forma un triángulo $\widehat{AEH}$ semejante a $\widehat{ABD}$, por lo que H debe ser el punto medio del otro lado.
- Otra demostración puede ser que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ por ser punto medio del lado, así como $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ por el mismo motivo. Según Tales, las uniones de $\overline{EH}$ y $\overline{BD}$ deben ser paralelas al mantener la misma proporción los segmentos de los lados.

Una vez demostrado esto, es fácilmente extrapolable al triángulo opuesto por la diagonal que se ve en la Figura 8. Ya que $\overline{EH}$ es paralelo a $\overline{BD}$, y $\overline{FG}$ es también paralelo a $\overline{BD}$, se concluye de $\overline{EH}$ y $\overline{FG}$ son paralelos entre sí como se ve en la Figura 9.

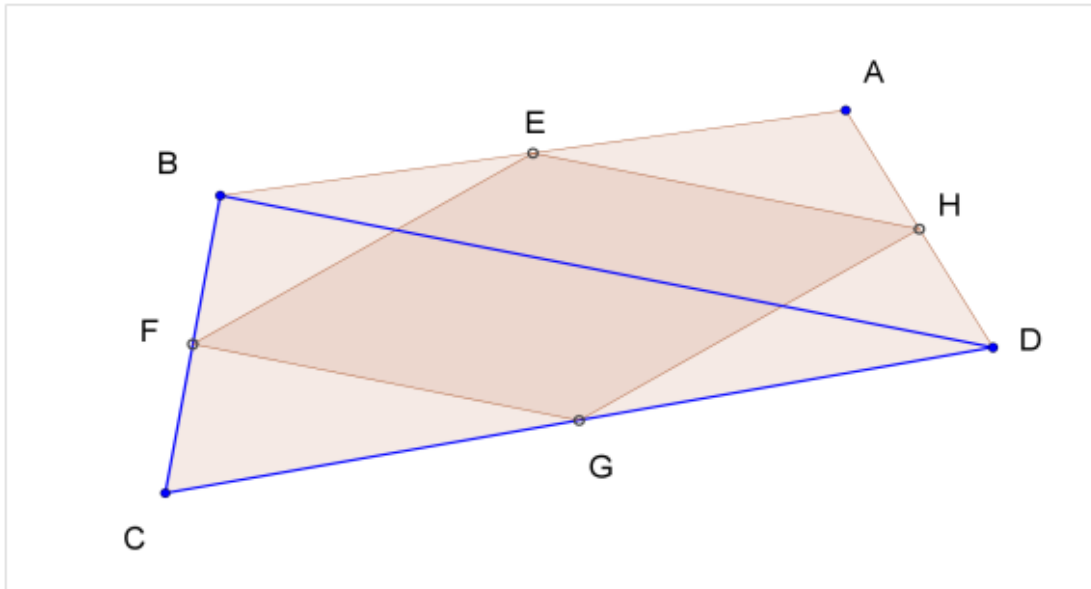


Figura 8 – Triángulo opuesto al estudiado anteriormente.

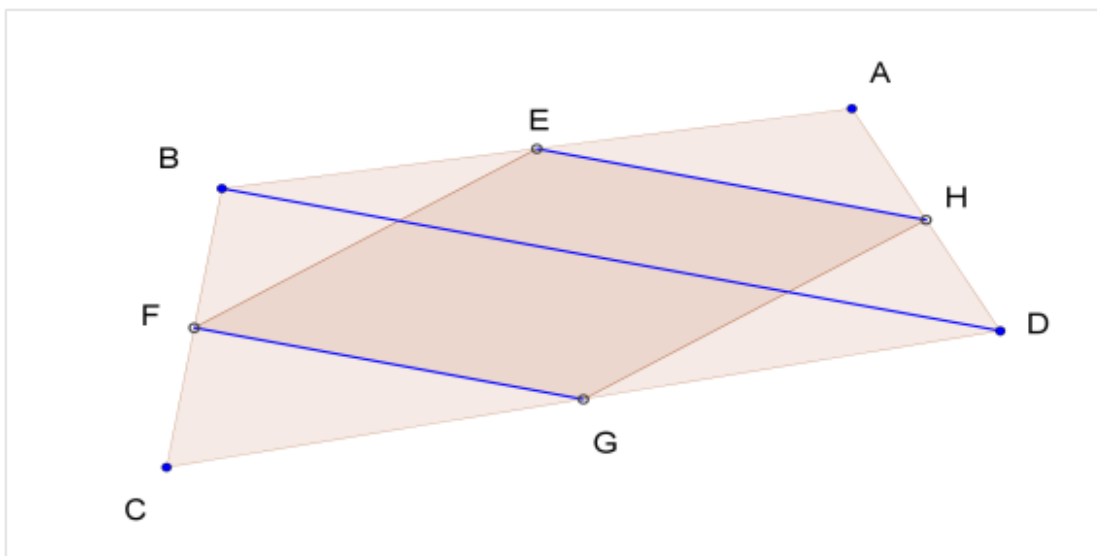


Figura 9 – Segmentos paralelos a la diagonal y por lo tanto, entre sí.

De la misma forma se podría realizar la prueba en los triángulos definidos por la otra diagonal, demostrando así que el polígono interior tiene sus lados paralelos dos a dos.

El éxito al desarrollar esta tarea, que es la más exigente del modelo, depende en la habilidad de los alumnos y en sus conocimientos de matemáticas. A pesar de ello, es de esperar que con la ayuda del profesor, incluso los alumnos que no sean capaces de utilizar el teorema de Tales puedan deducir que al ser ambos puntos medios, la línea que los une es paralela a la diagonal.

Una vez demostrado que el polígono interno debe ser un cuadrilátero independientemente de la forma del polígono exterior, se debe instar a los alumnos a expresar su conjetura de la forma más matemáticamente correcta. Un ejemplo podría ser este:

Teniendo un cuadrilátero cualquiera, si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados se obtiene un paralelogramo.

El enunciado no es complejo de entender ni de expresar, y tampoco dista mucho del enunciado expuesto con sus propias palabras, pero es una buena forma de que las respuestas de los diferentes alumnos lleguen a un punto en común.

5.1.4. TAREA d)

Tradicionalmente la construcción de una prueba sobre la veracidad del enunciado suele ser el proceso final en la realización de una tarea. Sin embargo puede ser muy instructivo para el estudiante el investigar cuando se cumple y cuando no se cumple “su” teorema mediante el empleo sistemático de las expresiones “qué pasa si” o “qué pasa si no”, mediante los cuales se puede

variar aspectos clave del enunciado. Para orientar las investigaciones se han seguido las sugerencias presentadas por Ibañes en 2001 y 2003.

En este apartado el estudiante puede sentirse perdido y sin saber por dónde empezar, pues es necesario recordar que en la actualidad los alumnos no están acostumbrados a que se les exija pensar de este modo. Por lo tanto la ayuda del docente es necesaria para sugerir vías para continuar.

De todas formas, es muy probable que al alumno se le ocurra plantear preguntas sobre su teorema que él mismo quiera comprobar por lo que los resultados de esta tarea no son cerrados y en una clase con una veintena de alumnos las conclusiones pueden ser muy distintas.

Aquí se ejemplifican unas sugerencias:

Relación de áreas

El primer paso sugerido podría ser el estudiar mediante GeoGebra la relación entre el área de ambos cuadriláteros. Mediante una construcción sencilla que ahora incluye textos y expresiones matemáticas simples, se puede construir la vista de la Figura 10, y comprobar mediante el arrastre de los vértices del cuadrilátero exterior que la relación se mantiene. De aquí el alumno puede extraer y mejorar la expresión de la conjetura a:

Teniendo un cuadrilátero cualquiera, si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados se obtiene un paralelogramo cuyo área es la mitad del cuadrilátero original.

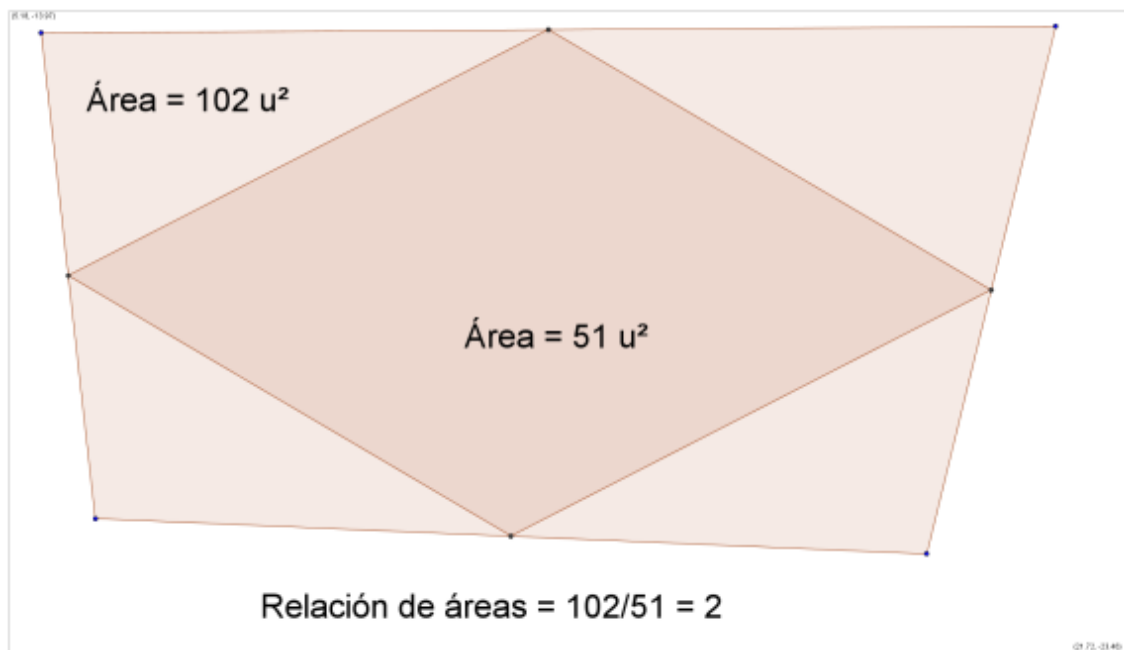


Figura 10 – Relación de áreas.

Relación de perímetros

Otra sugerencia podría ser realizar el mismo estudio con los perímetros, como se ve en la Figura 11. En este estudio la relación entre perímetros no es fija, por lo que no es útil para reescribir el teorema. Se puede indicar a los alumnos comprobar el perímetro del paralelogramo con la longitud de las diagonales del cuadrilátero original. En este caso, según Tales, cada lado debe medir la mitad de su diagonal paralela, por lo tanto la suma de diagonales debe ser igual al perímetro Figura 12.

Así es como se encuentra otro enunciado:

Teniendo un cuadrilátero cualquiera, si se unen consecutivamente los puntos medios de los lados se obtiene un paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero original.

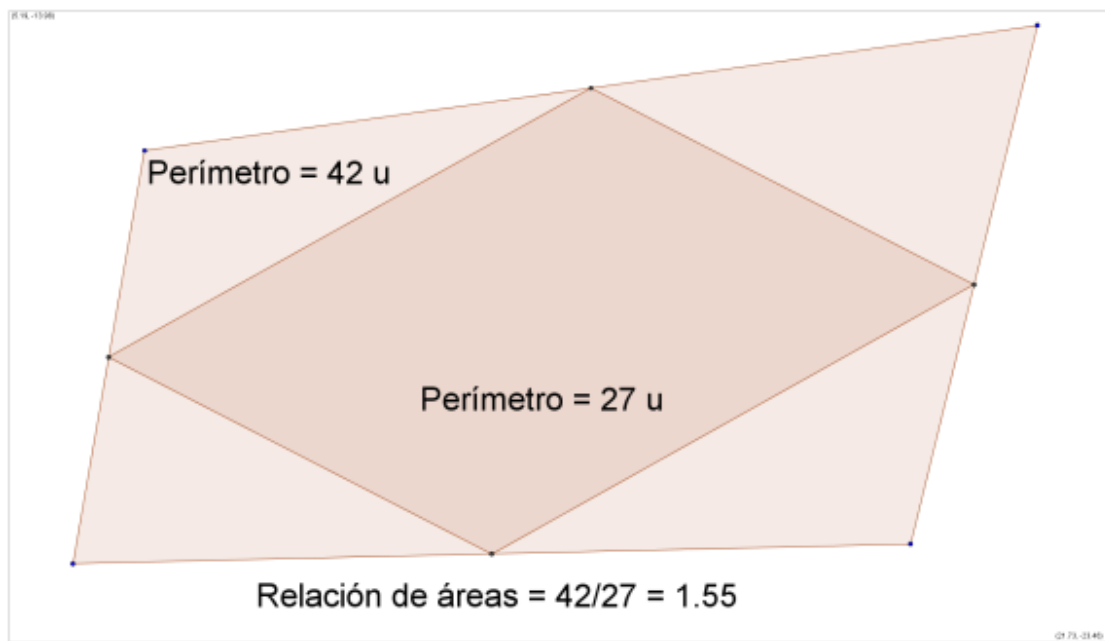


Figura 11 – Relación de perímetros.

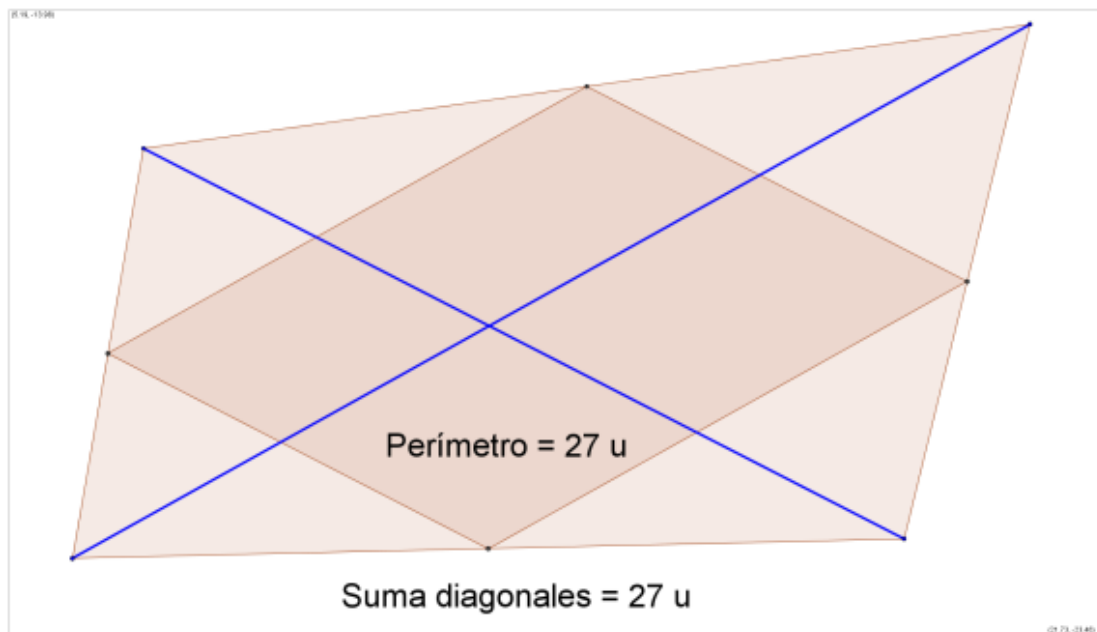


Figura 12 – Relación entre diagonales y perímetro.

Diagonales perpendiculares

Como se ha visto anteriormente, las diagonales tienen un gran impacto tanto en la construcción como en la demostración, por lo tanto también en la generalización. Para ejemplificar el uso del “qué pasa si” se puede sugerir esta cuestión: ¿Qué pasa si las diagonales del polígono exterior son perpendiculares?. Gracias a una construcción en GeoGebra en la Figura 13 se observa que el paralelogramo que se crea resulta un rectángulo:

Los puntos medios de un cuadrilátero con diagonales perpendiculares definen un rectángulo.

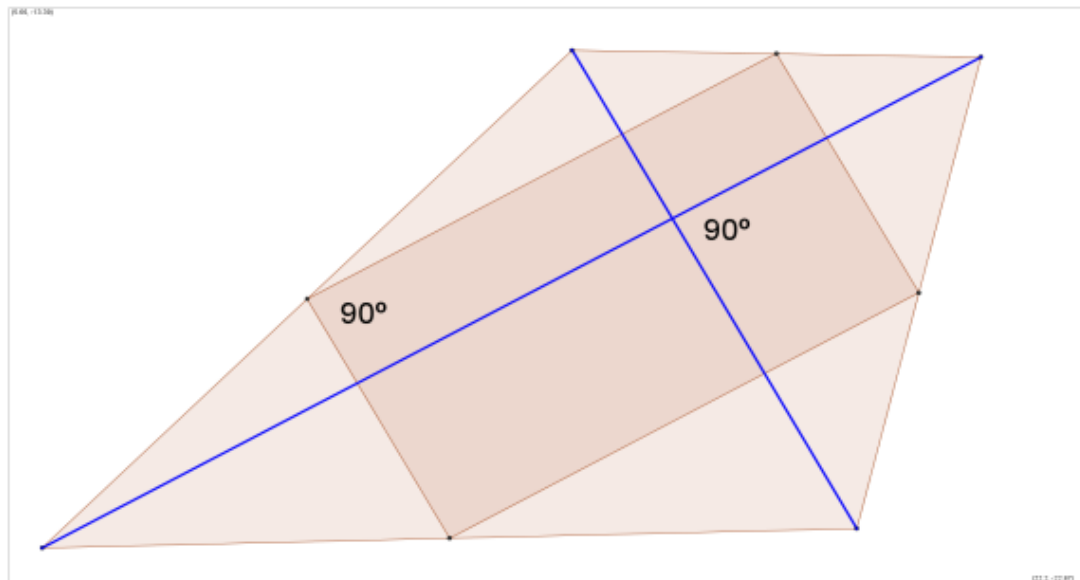


Figura 13 – Cuadrilátero con diagonales perpendiculares.

Diagonales iguales

El siguiente caso de estudio sería: ¿Qué pasa si las diagonales son iguales? (Figura 14).

Los puntos medios de un cuadrilátero con diagonales iguales definen un rombo.

En este caso diagonales iguales generan lados iguales.

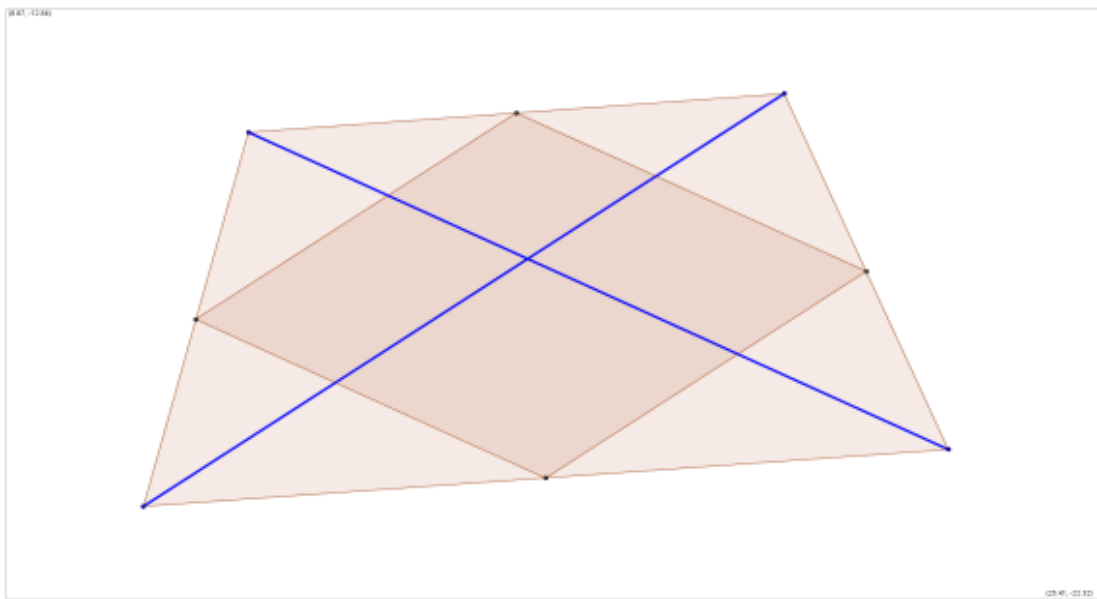


Figura 14 – Cuadrilátero con diagonales iguales

Diagonales iguales y perpendiculares

Por lógica, el siguiente caso de estudio es: ¿Qué pasa si las diagonales son iguales y perpendiculares? (Figura 15). Como era previsible, al combinar las dos características, se obtiene un polígono que es a la vez rombo (lados iguales) y rectángulo (lados perpendiculares entre sí), es decir, un cuadrado.

Los puntos medios de un cuadrilátero con diagonales iguales y perpendiculares definen un cuadrado.

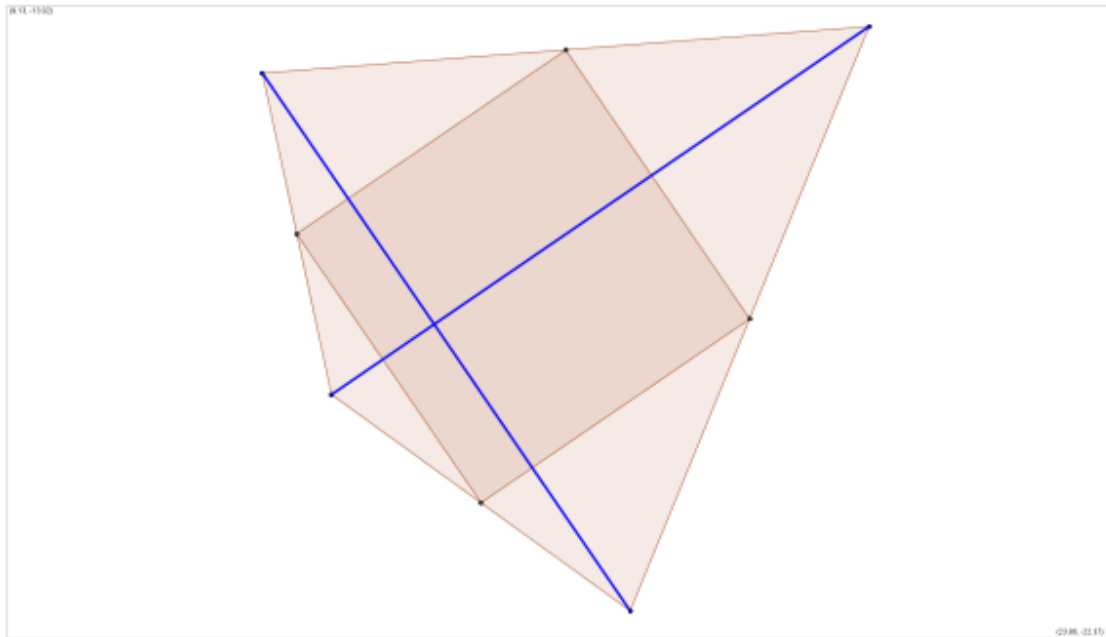


Figura 15 – Cuadrilátero con diagonales iguales y perpendiculares.

Polígono diferente

Para ejemplificar el “qué pasa si no” se sugiere la realización de esta tarea: ¿Qué pasa si el polígono inicial no es un cuadrilátero?. Para ello se puede realizar una simple prueba en GeoGebra.

Se observa que en el caso del triángulo como polígono exterior (Figura 16), los lados del triángulo interior son paralelos a los del exterior, es decir, se construye un triángulo semejante. Además se observa a simple vista que el área será $\frac{1}{3}$. Se puede ampliar esta información con un simple cálculo en GeoGebra, gracias a la herramienta perímetro, para comprobar que el perímetro del interior es la mitad que el del exterior. En este caso la expresión podría ser esta:

Los puntos medios de un triángulo definen un triángulo semejante de $\frac{1}{3}$ de área y $\frac{1}{2}$ de perímetro.

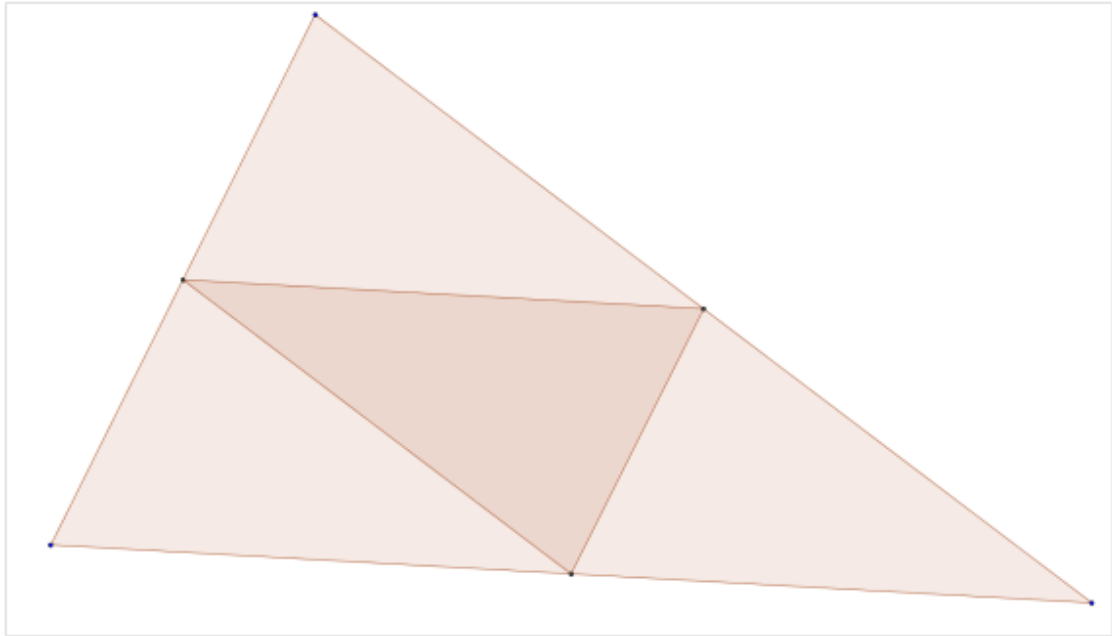


Figura 16 – Triángulo como polígono exterior.

En el caso del pentágono como polígono exterior (Figura 17), no se observa ningún paralelismo ni la comparación de áreas o perímetros tiene un valor fijo por lo que no se puede extraer ningún enunciado.

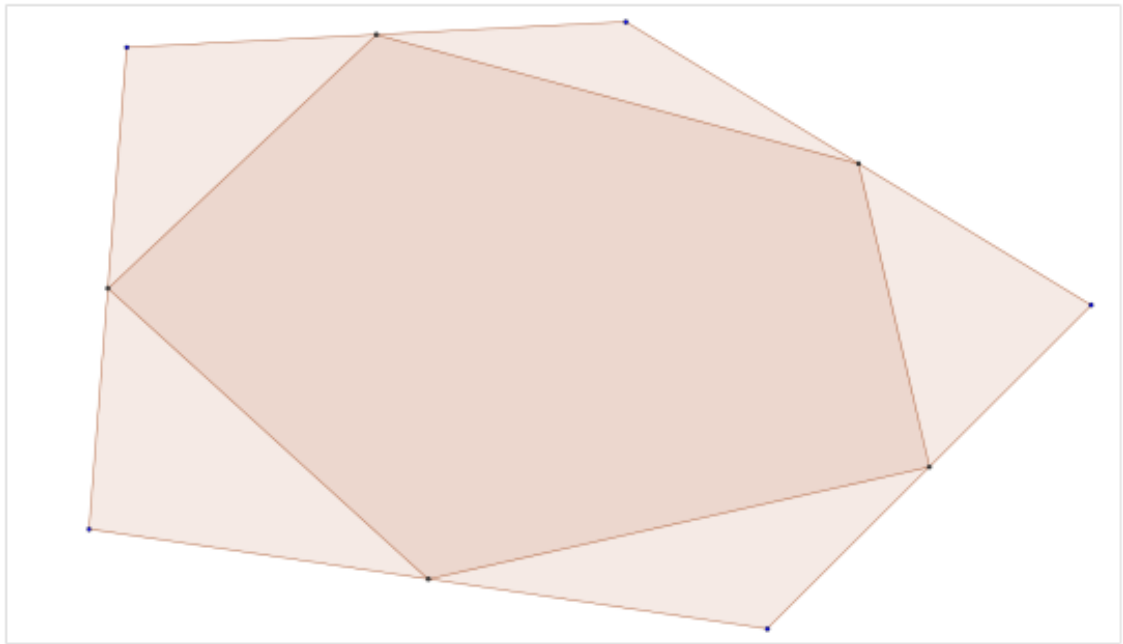


Figura 17 – Pentágono como polígono exterior.

5.1.5. FINALIZACIÓN

Una vez el alumno ha sido capaz de generalizar su conjetura, averiguar cuando se cumple y cuando no se cumple y extraer nuevas conclusiones se da por finalizada la tarea.

En este punto se puede explicar al alumno que lo que ha estudiado es el teorema de Varignon, cuyo enunciado es:

En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original.

Así mismo, se puede indicar las utilidades que para la resolución de problemas en física puede tener.

Como tarea final para el docente se sugiere que se haga una autocrítica en este momento. Se debe evaluar si el estudiante ha sido capaz de llevar a cabo las tareas y ajustar la dificultad para futuras sesiones. De igual modo se

estudiará el nivel de ayuda que ha sido necesario aportar y si la preparación previa era adecuada. Otro aspecto que se debe tener en cuenta a la hora de evaluar la utilidad final y que a menudo pasa desapercibido no es otro que el interés que el alumno ha puesto en el desarrollo de la tarea. Una ventaja adicional de usar herramientas informáticas es la sensación novedad y simpatía que generan, por lo que el incremento del interés del estudiante junto con la necesidad de pensar pueden ser una combinación muy potente.

5. SUGERENCIAS DE TAREAS

A continuación se muestran unos ejemplos adicionales de tareas que pueden ser propuestas en el aula. Se sugieren tareas de diferentes niveles de dificultad, pero en cada caso será el docente quien deberá ajustar la dificultad y el nivel de guía para la edad y conocimientos concretos del aula.

ELIPSES

Sea P un punto arbitrario en una elipse. M es el punto medio entre P y un foco de la elipse.

a)	Haz una construcción y comprueba que se cumplen las restricciones indicadas en cualquier situación.
b)	Explica qué ocurre.
c)	Explica por qué es cierto y exprésalo en lenguaje matemático.
d)	Realiza nuevas investigaciones relacionadas y crea nuevas conjeturas.

En este problema se hace imprescindible la utilización de la herramienta de arrastre más rastro para comprobar el lugar geométrico de M . En la figura 18 se comprueba la utilidad de esta herramienta, ya que posibilita ver la trayectoria que ha seguido el punto M .

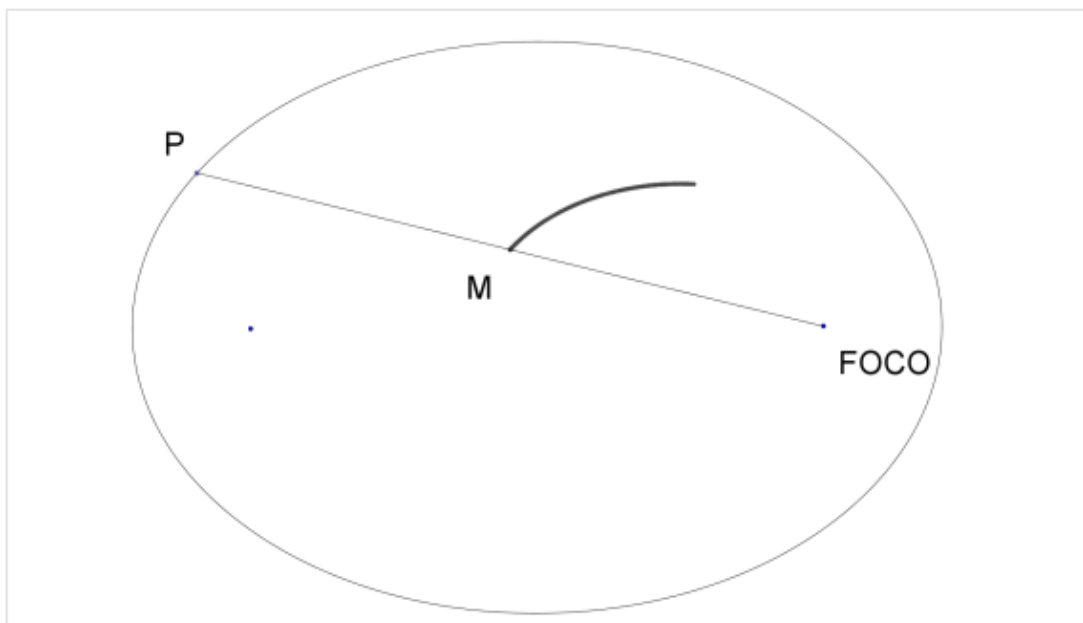


Figura 18 – Construcción de la tarea de la elipse.

Tarea extraída del documento de Fahlgren y Brunström (2014).

ARBELOS

Sean tres puntos A, B y C alineados. Se trazan tres semicircunferencias con diámetros AB, AC y BC en un lado de la línea. Desde B se traza una recta r perpendicular a la línea que contiene a A, B y C que divide en dos al área delimitada por las tres semicircunferencias.

- | | |
|----|--|
| a) | Haz una construcción y comprueba que se cumplen las restricciones indicadas en cualquier situación. |
| b) | Dónde está el centro de la circunferencia de mayor radio en cada una de las zonas separadas por la recta r que cabe dentro del área delimitada. |
| c) | Explica por qué es cierto y exprésalo en lenguaje matemático. |
| d) | Realiza nuevas investigaciones relacionadas y crea nuevas conjeturas. Pista: Relaciona los radios de las circunferencias de la tarea b) con las distancias entre A, B y C. |

Esta tarea, de mayor complejidad, puede necesitar o bien alumnos entrenados con el software y bien capacitados o bien un nivel de guía elevado por parte del docente. Se ha decidido cambiar las tareas y convertir el problema en un problema más cerrado de lo que podría ser debido a la dificultad. La construcción está en la figura 19.

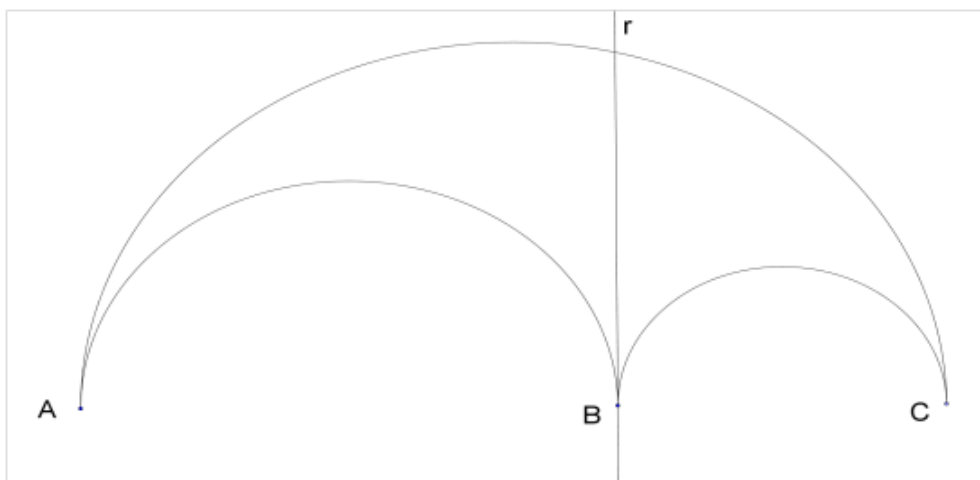


Figura 19 – Representación gráfica inicial del arbelo.

TRIÁNGULO

Sea una habitación de planta triangular. Un ratón parte de un punto cualquiera de una de las paredes y tocando las otras dos vuelve al punto de origen.

- | | |
|----|--|
| a) | Haz una construcción y comprueba que se cumplen las restricciones indicadas en cualquier situación. |
| b) | Que características tienen que cumplir los puntos donde el ratón toca las otras paredes para que el camino recorrido sea mínimo independientemente del punto de origen y de la forma y tamaño de la habitación triangular. |
| c) | Explica por qué es cierto y exprésalo en lenguaje matemático. |
| d) | Realiza nuevas investigaciones relacionadas y crea nuevas conjeturas. |

Aunque simple e infantil a primera vista, este problema puede resultar verdaderamente complejo incluso a alumnos de cursos altos. El primer paso consiste en deducir que la trayectoria seguida por el ratón será un triángulo y que se debe hallar aquel que tiene menor perímetro (Figura 20)

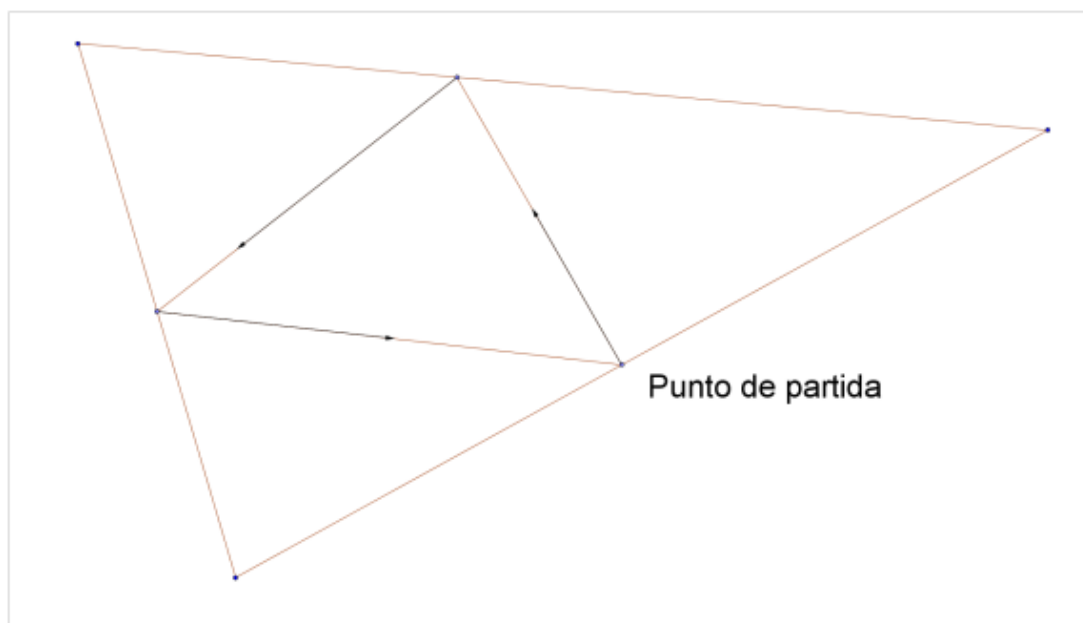


Figura 20 – Problema triángulos.

6. CONCLUSIONES

La intención final del modelo es proporcionar a los alumnos un soporte que sirva para guiar un proceso de exploración, explicación y generalización. Para ello la tarea no debe ser una receta a seguir paso a paso, pudiendo ser usado el enunciado tan sólo como sugerencia de qué hacer. Por ejemplo, podría darse el caso de que el alumno, una vez enuncia su primera conjetura, se le ocurra explorar directamente que sucedería si cambia aspectos clave del enunciado. En esta situación el alumno estaría generalizando antes incluso de demostrar que lo que escribió inicialmente es correcto.

A raíz de lo dicho en el párrafo anterior, puede ser importante para el alumno formular sus conjeturas en papel. Estas conjeturas pueden servir como base para iluminar al estudiante y llevarle a conjeturas más complejas y completas.

Como se demuestra a lo largo de todo este trabajo, la fase de generalización es considerada la más contribuyente al objetivo final de la tarea, que es la de desarrollar capacidades de forma eficiente usando Entornos de Geometría Dinámica. La fase de generalización es en definitiva un proceso cíclico donde los estudiantes llevan a cabo las tareas desarrolladas en las otras fases de forma repetida para cada situación planteada pero con nuevas premisas (Fahlgren & Brunström, 2014).

7. BIBLIOGRAFÍA

- Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253.
- Decreto 57/2007 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. (s.f.). Boletín Oficial de Cantabria.
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Intrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75(2), 213-234.
- Edwards, L. D. (1997, revisado 2006). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(3), 187-215.
- Fahlgren, M., & Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 287-315.
- García, M. D. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. *Tesis Doctoral, Universidad de Almería*.
- Ibañes, M. (2001). Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento. *SUMA*, 95-98.
- Ibañes, M. (2003). La particularización como estrategia de descubrimiento de nuevos resultados: un ejemplo de geometría. *SUMA*, 39-42.

Koehler, M. J. (s.f.). *TPACK*. Recuperado el 13 de Junio de 2015, de <http://www.tpack.org/>

Losada Liste, R. (2014). El color dinámico de GeoGebra. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 17(4), 525-547.

Mushra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *The Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.

Recio Muñoz, T. (2009). *Geometría dinámica*. Madrid: Anaya.

Ruiz, N. (2013). Influencia del software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, 1-12.

Sherman, M. (2010). A conceptual framework for using GeoGebra with teachers and students. *Proceedings of the First North American GeoGebra Conference*, 205-213.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 1169-1207.