Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE AL RESOLVER PROBLEMAS GEOMÉTRICOS: UN ESTUDIO CON ALUMNOS DE 13 A 16 AÑOS EN CANTABRIA

VAN HIELE LEVELS OF GEOMETRIC REASONING WHEN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS: A STUDY WITH 13/16 -YEAR-OLD STUDENTS FROM CANTABRIA

Alumna: María Venegas Pérez

Especialidad: Matemáticas

Directora: Irene Polo Blanco

Curso académico: 2014/2015

Fecha: Junio 2015

INDICE

1. INTRODUCCIÓN

Este documento se centra en el estudio y análisis del modelo de Van Hiele en un grupo de estudiantes, con edades comprendidas entre 13 y 16 años de Educación Secundaria Obligatoria (correspondientes a 2º y 4º curso) en Cantabria. En particular, se estudia qué niveles de razonamiento muestran dichos alumnos al resolver tareas geométricas.

La geometría, como área fundamental de las matemáticas, ha influido notablemente a lo largo de los tiempos en la sociedad, debido a su implicación en la vida cotidiana y profesional del ser humano (arquitectura e ingeniería, avances tecnológicos, entre otros). Es por tanto un área clave a tratar a lo largo del desarrollo académico del alumno. En particular, es un bloque que se incluye en el currículum de todos los cursos de Secundaria y Bachiller.

El objetivo de este trabajo consiste en primer lugar en dar a conocer y difundir el modelo de Van Hiele, con el fin de que pueda ser de utilidad para toda la comunidad docente encargada en la impartición del bloque de geometría. Por otro lado, se pretende proporcionar herramientas para el docente que le permitan conocer cómo se manifiestan los distintos niveles en sus alumnos, con el fin de que pueda adecuar sus tareas para el desarrollo de su conocimiento geométrico. Para ello se presentarán tareas adecuadas que permitan que los distintos niveles se manifiesten, así como las respuestas a dichas tareas dadas por los alumnos.

Con este fin, se pretende hacer un análisis de cómo se manifiestan los niveles de Van Hiele en un grupo de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en Cantabria. Este trabajo se presenta en 6 capítulos, partiendo en el capítulo 2 del análisis y revisión de la literatura de estudios previos del modelo de Van Hiele. En el capítulo 3 se exponen las preguntas de investigación, y la metodología aplicada para dar respuestas a dichas preguntas. En el apartado 4 se presentan los resultados obtenidos. En el apartado 5 se realiza una discusión en relación al marco teórico expuesto y a los resultados obtenidos en el apartado anterior, y se finaliza con el apartado 6 donde se relatan las conclusiones obtenidas del objeto de estudio.

2. LITERATURA

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realiza una recopilación de la información relativa al Modelo de Van Hiele, tanto su historia previa, características de sus niveles, fases, y propiedades. Además, se realiza una revisión de las investigaciones que trabajan con este modelo así como las que lo comparan con otras teorías de aprendizaje de la geometría.

2.2 ORIGEN DEL MODELO DE VAN HIELE

Este modelo tiene su origen en 1957 en los trabajos doctorales presentados, en la Universidad de Utrecht (Holanda), por dos profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, quienes mostraron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Este modelo ha tenido gran repercusión en el desarrollo e implantación de los currículums de los países occidentales. La Unión Soviética tuvo conocimiento de este nuevo modelo de aprendizaje y lo puso en práctica para el diseño del nuevo currículum de matemáticas en la primera mitad de los años 60. En Holanda también se comenzó a desarrollar este modelo, en 1971. Hasta mediados de los años 70 no llega a Estados Unidos, tras la publicación de una conferencia de I. Wirszup. En España, no llega a oídos hasta una década más tarde, los años 80, y actualmente se encuentra en periodo de difusión (Jaime, 1993).

2.3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE

El modelo presenta dos aspectos básicos. Es descriptivo, pues se identifican las diferentes formas de razonamiento geométrico de los sujetos y se puede valorar su progreso. Es instructivo, pues indica las pautas a seguir por el profesorado para que el avance del alumno esté presente (Jaime, 1993, citado en Gamboa y Vargas 2013).

A continuación presentamos una breve descripción del modelo, atendiendo a: niveles de razonamiento (§ 2.3.1), propiedades de los niveles (§ 2.3.2), fases de aprendizaje (§ 2.3.3) y los procesos de razonamiento en cada nivel (§ 2.3.4).

2.3.1. Niveles de razonamiento geométrico

El corazón del modelo se centra en la determinación de la evolución del razonamiento geométrico de los sujetos mediante cinco niveles consecutivos, que tienen que ir superando correlativamente para poder pasar al siguiente. Se trata de un proceso lento que puede llevar incluso años, en el que se va pasando de un nivel al siguiente, sin que exista la posibilidad de saltarse ninguno de ellos (Gamboa & Vargas 2013).

Cada nivel supone la comprensión y razonamiento geométrico por parte del estudiante de un modo distinto, por lo que su manera de definir, interpretar y demostrar los conceptos varía.

A continuación se describen cada uno de los niveles:

1. <u>Reconocimiento o visualización</u>: El estudiante no diferencia partes de las figuras geométricas, sino que conoce las formas como un todo.
2. <u>Análisis</u>: El estudiante reconoce las formas, pero no establece relaciones entre propiedades de distintas familias de figuras.
3. <u>Deducción formal u orden</u>: El individuo determina las figuras por sus propiedades, construye interrelaciones pero aún su razonamiento está basado en la manipulación.
4. <u>Deducción</u>: El alumnado puede realizar deducciones y demostraciones lógicas y formales, entiende la naturaleza axiomática.
5. <u>Rigor:</u> Capta la geometría en forma abstracta, capacitado para analizar el grado de rigor de varios sistemas de deducción y realizar una comparativa. Es un nivel alcanzado por estudiantes universitarios con aptitudes geométricas. Por lo que en muchas de las investigaciones y estudios en estudiantes no universitarios, este nivel no se incluye.

La mayoría de los autores que han estudiado este modelo consideran 5 niveles de razonamiento matemático, numerándolos desde el 1 hasta el 5, en base a la descripción básica realizada por Wirszup (1976, citado por Jaime, 1993). Pero no siempre se ha considerado así, sino que a lo largo de la historia, debido a la evolución de las ideas y del contraste con otros autores, el propio Van Hiele consideraba inicialmente 3 niveles, que corresponden a los actuales del 2º al 4º, para más tarde modificarlos en 4 (del 1º al 4º). Finalmente, en su forma general considera los 5 niveles de razonamiento. También a la hora de definirlos muchos otros autores los nombran del 0 al 4, por lo que no existe una unanimidad (Jaime, 1993).

2.3.2 Propiedades de los niveles

Para el correcto funcionamiento del modelo, es necesario describir una serie de propiedades globales a todos los niveles. Según el trabajo de Blanco (2015) cada nivel debe ser:

- <u>Secuencial</u>: Cada nivel se debe recorrer en un orden. No se puede saltar niveles, sino que es un proceso en el que es necesario haber adquirido las destrezas del nivel anterior. Van Hiele (1986, citado por Jaime, 1993, p.51) afirma que “el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel"
- <u>Progresivo</u>: El progreso de un nivel a otro depende más de los contenidos y de la forma de impartición por parte del profesor que de la edad. Existe continuidad en la adquisición de los niveles, no se produce de manera brusca, sino que existe un periodo de transición en el que se mezclan razonamientos de dos niveles consecutivos (Jaime, 1993)
- <u>Intrínseco y extrínseco</u>: Los objetos inherentes en un nivel pasan a ser objetos de estudio explícitos en el siguiente. A medida que se avanza en niveles, la concreción, demostración y determinación de los conceptos es más avanzada.
- <u>Lingüístico</u>: Cada nivel tiene su propio lenguaje y símbolos. Este léxico no se refiere solo a las palabras y conceptos matemáticos, sino también

a las expresiones y a los significados que se les da por parte de los estudiantes. Esta propiedad lleva a conclusión de que dos personas de diferentes niveles no se entienden. Esto es fácil verlo simplemente en la relación entre un profesor y un alumno, ya que el docente debe buscar un lenguaje más apropiado en la enseñanza para que el alumno comprenda el tema. Al igual que cuando el profesor plantea una serie de ejercicios, este espera que el alumno responda en un determinado nivel, sin embargo lo hará en otro más bajo cuyas respuestas pueden no ser tan rigurosas (Jaime, 1993)

- Ajustado: Los materiales, contenidos… deben ser acordes al nivel del alumno para que sea capaz de comprender y progrese al siguiente nivel. El profesorado debe poner al alcance de los alumnos todos aquellos recursos que crea necesarios para el desarrollo en el razonamiento del estudiante.

2.3.3. Fases de aprendizaje

Tal y como afirman Bedoya, Esteban y Vasco (2007) es común creer que la comprensión de los problemas no debe presentar dificultad alguna para los alumnos y por ello se pasa rápidamente de las definiciones a los problemas matemáticos, descuidando el razonamiento del paso intermedio. Es por eso que se proponen las fases de aprendizaje a lo largo de los niveles del Modelo de Van Hiele.

Las fases a superar en cada nivel tienen como objetivo sugerir al profesor cómo organizar los contenidos de cada nivel en distintos pasos para que así el alumno pueda alcanzar el nivel siguiente de razonamiento. El profesor debe procurar que el alumno realice una red de relaciones entre los diferentes contenidos matemáticos, incluyendo las formas de razonamiento propias del nivel de razonamiento al que tienen que acceder. Es decir, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales más amplia que la anterior, completándola y reformulándola (Bedoya, Esteban & Vasco 2007).

Como resumen Gutiérrez y Jaime en su trabajo (2010), las fases son las siguientes:

1. Información: En esta fase el profesor debe informar a los alumnos sobre lo que se va a trabajar, conociendo así el nivel inicial de conocimiento del que parten los alumnos. En esta fase se adquieren una serie de conocimientos básicos.
2. Orientación dirigida: Una vez proporcionados los materiales de estudio, el alumno debe ser capaz de aprender y comprender los conceptos y propiedades del área matemática que están estudiando. Se debe escoger cuidadosamente las actividades, para que el profesor actúe de guía y orientador en la búsqueda de la solución en el momento que sea preciso. Se trata de una de las fases fundamentales, pues es aquí donde el alumno construye su red de relaciones del nivel siguiente.
3. Explicitación: Mediante un diálogo en grupo, los estudiantes deben explicar sus experiencias y los métodos de resolución de los problemas propuestos. Deben utilizar un vocabulario adecuado, por lo que otro de los objetivos consiste en que el alumno termine de aprender el nuevo vocabulario perteneciente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar. No se debe considerar esta fase como un periodo entre la 2ª y la 4ª, ya que en todo momento se debe propiciar el diálogo de los estudiantes.
4. Orientación libre: Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y el vocabulario adquirido en otras investigaciones que difieren de las explicadas anteriormente. Aquí el rol del profesor consiste en plantear problemas que puedan llevar a diferentes soluciones, siendo planteamientos muy distintos a los típicos que se pueden encontrar en nuestros libros de texto.
5. Integración: Se trata de la última fase en la que deberán condensar todos los conocimientos y experiencias adquiridas, no se trata de recibir nuevos conceptos, sino de acumular y combinar lo que ya se conoce.

2.3.4 Procesos de razonamiento

Para ello Gutierrez y Jaime (1998) identifican una serie de procesos de razonamiento clave, como características de todos los niveles de Van Hiele:

- Reconocimiento de los tipos y de las familias a la que pertenece la figura geométrica. Identificación de componentes y propiedades de las figuras
- Definición geométrica de un concepto, visto bajo 2 puntos de vista: la lectura o uso de las definiciones, y la formulación de la definición.
- Clasificación de las figuras geométricas o conceptos en diferentes familias.
- Prueba de propiedades o estados. Se trata de determinar de manera convincente la veracidad del estado.

Las características de los procesos clave correspondientes a cada uno de los niveles se resumen en la tabla siguiente:

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento	Atributos físicos	Propiedades matemáticas	-	-
Uso de definiciones	-	Sólo definiciones con estructura sencilla	Todas las definiciones	Acepta varias definiciones equivalentes
Formación de definiciones	Lista de propiedades físicas	Lista de propiedades matemáticas	Establecimiento de suficientes propiedades	Pueden probar la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusivamente basado en atributos físicos	Exclusivamente basada en atributos matemáticos	Se mueve entre inclusiva y exclusiva	-
Prueba	-	Verificación con ejemplos	Pruebas lógicas informales	Pruebas matemáticas formales

Tabla 1: Tabla resumen de las características de los procesos clave para cada uno de los niveles

Como se observa en la tabla 1, no todos los niveles presentan todos los procesos clave. Las características de cada uno de ellos son (Jaime & Gutiérrez, 1994):

- Nivel 1:
    - Identifica las figuras como un todo. No diferencia ni partes ni componentes.
    - Es capaz de producir una copia, de una figura particular o incluso conocerla.
    - No es capaz de conocer o explicar propiedades de una figura.
    - No precisa lenguaje básico geométrico para referirse a las figuras.
    - No puede establecer prueba para verificar.
- Nivel 2
    - Identifica y analiza partes y propiedades particulares de la figura geométrica.
    - Puede reproducir copias de las figuras mediantes sus propiedades.
    - No es capaz de establecer relaciones o clasificaciones entre figuras de familias distintas.
    - Establece relaciones a través de la manipulación/experimentación.
    - No es capaz de elaborar definiciones, puede entender aquellas con una estructura sencilla.
- Nivel 3
    - Identifica las figuras a través de sus propiedades.
    - Reconoce propiedades que derivan de otras.
    - Construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas.
    - Las definiciones adquieren significado. Pero el razonamiento lógico sigue basado en la manipulación.
    - Sigue demostraciones, pero no es capaz de entenderlas en globalidad, por lo que no organiza secuencia de razonamientos lógicos.
    - No comprende el sistema axiomático de las matemáticas.
- Nivel 4
    - Realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales.

- Comprende y maneja las relaciones entre propiedades.
- Entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas.
- Comprende que se puede llegar a los mismos resultados tras realizar diferentes demostraciones.
- Capaz de realizar pruebas formales matemáticas.

2.4 MÉTODOS DE EVALUACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE

En esta sección, presentamos investigaciones que proponen distintas maneras de evaluar el modelo de Van Hiele (§ 2.4.1) así como la influencia del modelo en el diseño curricular (§ 2.4.2).

2.4.1 Evaluación del modelo de Van Hiele

Jaime y Gutiérrez (1990) presentan ideas para evaluar los niveles. Entre sus conclusiones, encontramos las siguientes:

- Para determinar el nivel de razonamiento, lo más importante no es evaluar si los estudiantes contestan bien o mal, sino cómo contestan y por qué lo hacen así.
- En la mayoría de los casos, una actividad puede ser resuelta correctamente por estudiantes de diferentes niveles, pero sus formas de resolverla serán diferentes (e incluso sus soluciones).
- Se deben seleccionar actividades cuyas respuestas sean lo suficientemente largas como para que los estudiantes puedan hacer visibles sus ideas y su forma de razonar (evitar actividades de respuesta sí, no, un número, etc.)

El trabajo de Gutiérrez y Jaime (1998) trata de determinar los requerimientos de un test que permita evaluar los niveles de van Hiele de la forma más adecuada. Su trabajo propone preguntas de múltiples respuestas con las ventajas de las entrevistas semi-estructuradas, con el fin de dar la posibilidad al alumno de explicar su respuesta y manifestar su nivel de razonamiento geométrico. Dichos requerimientos incluyen:

- Evaluar los cinco procesos clave mencionados previamente (reconocimiento, formulación y uso de las definiciones, clasificación y prueba)

- Evaluar los cuatro primeros niveles de razonamiento, es decir, cada estudiante debe tener la posibilidad de responder las preguntas acorde a su máxima capacidad de razonamiento.

- Proporcionar al estudiante la posibilidad de expresar las razones del porqué de sus respuestas, de esta manera el investigador es capaz de determinar qué nivel de razonamiento se esconde tras cada respuesta.

De esta forma, los ítem de dicho test no pueden ser pre-designados en un nivel específico de Van Hiele, pero sí en una gama de niveles, dependiendo del proceso evaluado por el ítem. Por ejemplo, un ítem que evalúa el proceso de reconocimiento distingue estudiantes entre los niveles 1 y 2, pero no proporciona información necesaria para distinguir estudiantes en los niveles 2, 3 y 4. De la misma manera, un ítem que evalúa el proceso de prueba se pre-designa para estudiantes en los niveles 2, 3 y 4, aunque no podemos concluir al obtener una respuesta en blanco que el estudiante se sitúa en un nivel 1 (Gutiérrez & Jaime, 1998).

Por otro lado, Gutiérrez, Jaime y Fortuny, sugieren en su trabajo (1991) que los alumnos no tienen un nivel de Van Hiele único asignado, sino un grado de adquisición de cada nivel. Su método cuantifica la adquisición de un nivel de razonamiento representando un segmento desde 0-100, y dividiéndolo a su vez en 5 partes en función del grado de adquisición de razonamiento: no adquisición (0-15), baja adquisición (15-40), media adquisición (40-60), alta adquisición (60-80) y adquisición completa (80-100). Es decir, un alumno puede tener un nivel de 80 de adquisición del nivel 1, un 45 del nivel 2, y 5 nivel 3 y un 0 del nivel 4. Se podría decir que dicho alumno se encuentra en transición entre el nivel 1 y 2.

Según Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) inicialmente los estudiantes no son conscientes de la existencia o necesidad de métodos de razonamiento. Una vez que los estudiantes comienzan a darse cuenta de estos métodos en un determinado nivel, intentan usarlos, sin embargo, debido a su falta de conocimiento o experiencia, realizan intentos con mayor o menor éxito que puede llevarles a volver a un nivel menor. Una vez que la experiencia del estudiante va creciendo, este entra en el grado intermedio de adquisición, aunque debido a la falta aún de experiencia los estudiantes pueden tener dificultades en la resolución de ciertos problemas. En este periodo es normal ver saltos entre 2 niveles. Cuando alcanzan el nivel alto de adquisición es debido a que la experiencia ganada se va acentuando y fortaleciendo, aunque a veces cometan errores. El último grado se adquiere una vez que alcanzan la maestría en la manera de pensar y razonar y lo usan sin problema alguno.

En cuanto a la manera de evaluación de los grados, se parte de que es más importante observar los tipos de razonamiento de los estudiantes que la habilidad que tengan para resolver ciertos problemas correctamente en un determinado tiempo. (Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991).

Muchos otros autores han trabajado en el diseño o aplicación de tests que ayudan a identificar el nivel de razonamiento de los alumnos, dando diferentes respuestas a las preguntas que se han ido planteando a lo largo de los tiempos. Usiskin (1982, citado por Gutiérrez y Jaime, 1998) realizó un primer intento, diseñando un test de múltiples respuestas a responder a mano, en el cual cada pregunta evaluaba un nivel específico de razonamiento. Las respuestas se marcaron como válidas o nulas, y los estudiantes fueron pre-designados a un nivel específico de Van Hiele dependiendo del número de respuestas acertadas en cada nivel. Años más tarde, Burguer y Shaughnessy (1986, citado por Gutiérrez y Jaime, 1988), trabajaron en el lado opuesto del espectro de posibilidades, creando cuestionarios basados en una serie de problemas y entrevistas semi-estructuradas. En cada problema, las respuestas de los estudiantes se analizaron y se les asignó un nivel de Van Hiele en base al nivel dominante en la respuesta. Finalmente, de todos los niveles asignados al estudiante en cada una de las preguntas, una media de los niveles fue asignado al estudiante.

Otros estudios dan un paso más y proporcionan pistas sobre las actividades más adecuadas para la evaluación de los niveles, así como descriptores que permitan evaluar los niveles para determinados temas geométricos. Entre ellos, encontramos la tesis doctoral de Jaime (1993) que lleva a cabo una aplicación del método de Van Hiele para el estudio de los movimientos en el plano. El estudio se realizó con estudiantes desde 6º de EGB hasta COU, y trató de identificar comportamientos específicos en cada nivel de Van Hiele. Entre sus conclusiones, se definieron descriptores para cada nivel en relación al tema de los movimientos en el plano. Por ejemplo, para el tema de las traslaciones, se encontraron las siguientes características: (1) el nivel 1 de aprendizaje se centra en la descripción global de las traslaciones, tanto la identificación de las mismas en diferentes situaciones, como la realización de traslaciones de figuras; (2) el nivel 2 se caracteriza por el descubrimiento de propiedades y características, tales como el vector traslación y la utilización de sus elementos (módulo, dirección y sentido; (3) el nivel 3 los estudiantes comienzan a hacer deducciones y demostraciones informales de los resultados, trabajando con algunas de las relaciones existentes entre las traslaciones y otros movimientos, como los giros o simetrías; (4) y en el nivel 4 los estudiantes realizan demostraciones formales de las propiedades de las traslaciones.

Para su estudio, dada la importancia de la manipulación de objetos, emplearon diverso material de papel y plástico sobre las que realizar las actividades que plantearon. El diálogo mantenido por el profesor-alumno durante la puesta a prueba de las actividades es muy importante, ya que el profesor dará las pautas y pistas y será el encargado de dirigir el planteamiento de la propuesta. Las diferentes actividades planteadas aúnan por bloques los diferentes niveles del método de Van Hiele (Jaime, 1993).

2.4.2 Aplicación del modelo de Van Hiele al diseño curricular

Una importante aplicación del modelo de Van Hiele es al diseño del currículo de Primaria y Secundaria. Por ejemplo, el trabajo de Guillén, Cáceres, Gutiérrez y Jaime (1992) consiste en la aplicación de este modelo a la elaboración de un currículum de geometría de sólidos para la E.G.B.

En concreto, el trabajo realizado consta de dos partes: La primera, teórica, incluyó la definición del marco teórico en el que se apoya la investigación, la recopilación de información sobre el tema y el diseño de unidades de enseñanza. La segunda parte, práctica, consistió en la experimentación de esas unidades de enseñanza con grupos de estudiantes de E.G.B. y el análisis de los experimentos.

Incorporan el ordenador como herramienta de trabajo en alguna de las partes. Se seleccionó para uno de los módulos dedicados a la visualización, ya que ese medio permite realizar algunos tipos de ejercicios especialmente adecuados para desarrollar tal destreza y que de otra manera hubiera sido más complicado realizar. A partir del análisis que hicieron de los libros de texto colegiales y sabiendo que la geometría en las escuelas suele quedar relegada a un segundo plano, les lleva a pensar que los niños no tendrían mucho conocimiento en la geometría de los sólidos. Teniendo en cuenta estas consideraciones y los niveles que identifica el modelo de Van Hiele, el proyecto lo dividen en 3 módulos (Guillén, Cáceres, Gutiérrez & Jaime, 1992)

- Reconocimiento y análisis de cuerpos geométricos espaciales. Actividades del nivel 1 de Van Hiele, y comprobación de si los niños han superado este nivel y pueden analizar sólidos correspondientes a actividades del nivel 2.
- Análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos: Para el desarrollo de las habilidades de los niños de niveles 2 y 3.
- Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales: Observar las destrezas iniciales de los alumnos en cuanto a visualización espacial se refiere, y en cuanto a lectura y escritura de representaciones planas en 3D.

Otro trabajo donde se da importancia es el de Jaime (1993), el cual se centra principalmente en la aplicación del modelo de Van Hiele en el diseño curricular, mediante la presentación de una unidad de enseñanza de las isometrías del plano, siendo válida para alumnos de Primaria, Secundaria y formación de profesores de Primaria. Para su análisis la divide en tres partes: la enseñanza de las traslaciones, las simetrías del plano y los giros. Realiza esta investigación debido a la escasez de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta los niveles de razonamiento, fases de aprendizaje y por el interés de aplicación de este modelo no sólo en la geometría de los polígonos y conceptos relacionados con estos.

En la tesis de Knight (2006) se estudia cómo han cambiado los currículos de la materia de geometría en los últimos años, y cómo afectan estos cambios en la formación del profesorado. Knight señala que el método de Van Hiele no solo debe ser evaluado en los estudiantes, sino que es lógico que los docentes tengan adquirido un nivel geométrico para poder impartir clases de esta materia. Knight estudia los cambios en los currículos de la materia de la geometría en los últimos años. Además intenta averiguar si los profesores de los niveles de Primaria y Secundaria tienen el nivel esperado de sus alumnos antes de completar el curso de geometría requerido en el programa de estudio, y si este nivel es significativamente mayor o igual al esperado en los estudiantes tras haber completado sus estudios de geometría.

La necesidad de que los profesores tengan un nivel superior al que van a obtener sus alumnos es necesario para que éstos puedan alcanzar sus expectativas y puedan guiarles hacia el éxito tanto en sus estudios actuales como en los futuros. Los estudios muestran que tanto antes como después de realizar el estudio los niveles eran más bajos a los esperados (Knight, 2006).

2.5 OTRAS TEORÍAS DE APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA Y SU RELACIÓN CON EL MODELO DE VAN HIELE.

No solo la pareja de holandeses Van Hiele ha contribuido al estudio del aprendizaje de la geometría en las escuelas, por lo que a continuación se describirán varios investigadores que han tenido importancia en este campo, y se realizará una comparación con el modelo de estudio de este trabajo.

Varios autores han comparado el modelo de Van Hiele con la teoría de desarrollo de cognitivo Piaget. Piaget plantea que el desarrollo cognitivo desde la infancia hasta la madurez se compone por cuatro estadios: sensomotor (0-2 años), preoperacional (2-7 años), operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11 años en adelante) (De la Torre, 2003, citado en Gamboa & Vargas 2013). Gamboa y Vargas (2013) plantean que la diferencia de los modelos radica principalmente en que para Piaget los niños nacen dotados de una estructura superior y sólo necesitan tomar consciencia de ello, no otorga gran importancia al lenguaje y el aprendizaje se considera como un proceso madurativo.

Braga (1991) afirma que se encuentran tanto similitudes como diferencias, siendo de mayor valoración la aportación que realizó el matrimonio holandés en el campo de la enseñanza de la geometría. Entre las similitudes se encuentran las siguientes:

- En ambos modelos el desarrollo de conceptos espaciales y geométricos se da como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia razonamientos deductivos y abstractos.
- El carácter recursivo en el paso de etapas o niveles es característica de ambos modelos.

En cuanto a las diferencias encontradas se explican las siguientes:

- La teoría de Piaget se trata de una teoría de desarrollo no de aprendizaje. Se considera al aprendizaje como un proceso madurativo, que va en la persona, por consiguiente el valor de la enseñanza disminuye. La investigación de la pareja holandesa se desarrolló a partir de dar solución a los problemas que tenían tanto sus alumnos como ellos mismos en la clase de geometría. Al tratarse de una teoría didáctica se está tomando en consideración para ser aplicada en nuestros centros hoy en día y realizar proyectos curriculares.
- La teoría piagetiana da poca importancia al lenguaje en el paso de un nivel a otro, siendo un concepto decisivo en el Modelo de Van Hiele. El profesor debería conocer el conocimiento inicial de los alumnos para poder adaptarse a él y procurar que se produzca un avance en los mismos hacia un leguaje más estructurado y complejo.

El problema crucial actual es la manera de cómo impartir la geometría y exactamente qué contenidos.

Otra teoría del aprendizaje de la geometría es la teoría de Vinner (1991, citado por Gutiérrez y Jaime, 2012) la cual consiste en la distinción entre las definiciones y las imágenes conceptuales, mediante ejemplos y contraejemplos para la comprensión y aprendizaje del alumno, por lo que este modelo tiene un gran apoyo gráfico. Gutiérrez y Jaime (2012) afirman que existe un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. Generalmente en las aulas ocurre lo siguiente: cuando se presenta un nuevo concepto los profesores tienden a enunciar una definición matemática, y a continuación plantear ejercicios para su memorización, o presentan ejemplos de figuras caracterizándolas en función de sus propiedades matemáticas, plantean la definición matemática, y por último plantean ejercicios de memorización del concepto. El problema viene porque los profesores suelen dar más énfasis en las definiciones, las cuales son aprendidas sistemáticamente por los alumnos, pero que a veces no saben poner en acción dicho concepto para resolver el problema.

Según Vinner cuando se lee o se escucha un concepto conocido, se forma en nuestra mente lo que él llama *imagen del concepto*. Uno de los objetivos de este modelo radica en dar pautas concretas sobre cómo analizar y mejorar las imágenes de los conceptos geométricos de los estudiantes mediante una presentación adecuada de ejemplos y contraejemplos. En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son todas relevantes. Dichas propiedades no son necesariamente matemáticas puesto que, especialmente en estudiantes situados en el primer o segundo niveles de Van Hiele, también pueden ser propiedades irrelevantes de tipo físico. Tal y como Gutiérrez y Jaime afirman (2012) entre las pautas que el modelo de Vinner plantea se pueden encontrar las siguientes:

- Dar ejemplos y contraejemplos. Ayuda a los alumnos a formar una mejor imagen conceptual y a discriminar eficazmente los ejemplos de los contraejemplos. Para ello el profesor debe dar la oportunidad al alumno de comparar uno con otro.
- Comparar ejemplos diferentes para identificar las diferencias más significativas. La contraposición hará ver que existen propiedades en una figura que no existen en la otra.

Por ejemplo, la imagen del concepto de rectángulo que se forman muchos estudiantes de enseñanza primaria está compuesta por una serie de rectángulos concretos colocados en posición estándar (el par de lados más largos horizontales) y por algunas propiedades derivadas de estas figuras, como tener los ángulos rectos, los lados opuestos iguales, los lados verticales y horizontales, siendo los horizontales más largos que los verticales, etc (Gutiérrez & Jaime, 2012)

En la teoría de Vinner no se realiza distinción por niveles de razonamiento geométrico, en contraposición al modelo de Van Hiele. Se trata de dos métodos totalmente compatibles, puesto que las fases del modelo de Van Hiele sugieren a los profesores cómo plantear y organizar los contenidos de la enseñanza matemática, y el modelo de Vinner radica en la necesidad de la separación del concepto y de la imagen que el estudiante crea en su mente, dando pautas a los profesores para corregir o evitar aprendizajes erróneos.

3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

3.1 INTRODUCCIÓN

A continuación se muestran las preguntas de investigación que nos planteamos tras la revisión bibliográfica, y la metodología que se adopta en este trabajo.

3.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Tras observar en la literatura las diferentes investigaciones realizadas en base al modelo de Van Hiele, hemos querido realizar un estudio en un grupo de estudiantes en Cantabria, con el fin de analizar cómo se manifiestan los niveles de razonamiento geométrico de los mismos entre otros.

En este apartado se fijan las preguntas de investigación que nos ayudan a dirigir nuestro estudio hacia los objetivos planteados en la introducción (§ 1), siendo las siguientes:

- ¿Qué nivel de razonamiento muestran los alumnos al resolver las actividades?
- ¿Qué actividades proporcionan más información sobre dichos niveles?
- ¿De qué forma se manifiestan dichos niveles en las respuestas de los alumnos?

3.3 METODOLOGÍA

En este apartado se describe todo el proceso seguido para llevar a cabo este estudio. Se detallará tanto la muestra utilizada en la investigación (§ 3.3.1), la estrategia de investigación utilizada (§ 3.3.2), y el diseño de los instrumentos de investigación (§ 3.3.3), para poder obtener unos resultados a posteriori.

3.3.1 Muestra

Se seleccionaron un total de 31 alumnos, con edades comprendidas entre los 13 y los 16 años, perteneciendo 17 de ellos a 2º de ESO, y 14 alumnos a 4º ESO. Siendo 17 chicas y 14 chicos. Este estudio se realizó en el mes de abril en clase de matemáticas, durante las prácticas realizadas por la autora de este trabajo en un centro concertado de la ciudad de Santander. Ninguno de los estudiantes tenía conocimiento inicial de la existencia de esta prueba, en base a esto la fiabilidad y rigor del estudio es mayor. Se les indicó que lo realizaran de manera individual y que respondieran con el mayor detalle posible. Tras la comprobación de los resultados se han podido constatar ciertos casos que no han cumplido con esta apreciación.

3.3.2 Estrategia de investigación

Como más tarde se explicará detalladamente en el apartado 3.3.3, los métodos de investigación utilizados en este estudio son un cuestionario con preguntas abiertas, y posteriores entrevistas cognitivas. La utilidad de estos métodos radica en la necesidad de obtener información en cuanto al razonamiento matemático de cada uno de los participantes.

Las entrevistas cognitivas no se tratan de meras conversaciones, aunque se aproximan a ellas en tanto interacción cara a cara producida en condiciones históricas y sociobiográficas determinadas. Se trata de conversaciones profesionales con un propósito y un diseño orientados a la investigación social. (Vallés, 2002: 41)

3.3.3 Diseño de los métodos de investigación

3.3.3.1 Cuestionario

Para la realización de este estudio hemos considerado que cada nivel de razonamiento está compuesto por una serie de procesos clave, por lo que al evaluar el nivel en el que el alumno se encuentra, realmente estamos evaluando el uso del proceso característico de cada nivel. En base a los niveles anteriormente descritos en la sección de Literatura (§ 2.3), en este estudio no consideraremos el nivel 5, siendo, como ya se explica anteriormente, un nivel alcanzado generalmente por estudiantes universitarios especializados en el campo de la geometría.

Siguiendo las indicaciones del trabajo de Gutiérrez y Jaime (1998) descritas en la sección 2.3.4 se ha diseñado un cuestionario con preguntas abiertas, escogidas de forma que sus posibles respuestas puedan mostrar razonamientos característicos de varios niveles diferentes. Al realizar el test podemos obtener mucha más información que la que obtendríamos con cuestionarios con respuesta múltiple, pero cerrada.

El test consiste en 3 preguntas, y se ha diseñado de tal forma que las posibles respuestas a estas preguntas abarquen los 4 primeros niveles.

En la siguiente tabla se incluye una clasificación de las preguntas en relación a los procesos que se evalúan y a los niveles que abarcan.

<table>
<tr><th colspan="2">Niveles
Procesos clave</th><th colspan="3">Nivel 1</th><th colspan="3">Nivel 2</th><th colspan="2">Nivel 3</th><th>Nivel 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Identificación</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formulación</td><td>Uso</td><td colspan="3"></td><td></td><td>2</td><td>3.1/3.2</td><td>1</td><td>3.1/3.2</td><td>3.1/3.2</td></tr>
<tr><td>Definición</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>1</td><td>3.1/3.2</td><td>3.1/3.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Clasificación</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Prueba</td><td colspan="4"></td><td></td><td>3.1/3.2</td><td></td><td>3.1/3.2</td><td>3.1/3.2</td></tr>
</table>

Tabla 2: Distribución de las preguntas del cuestionario en relación con los procesos evaluados y los niveles que abarcan,

- **<u>PREGUNTA 1</u>**

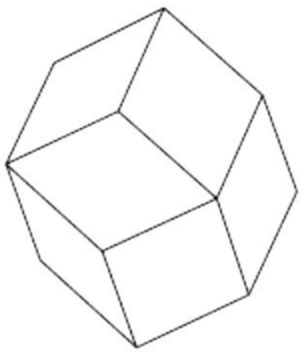
Explicar cuál de las siguientes frases es más relevante para caracterizar la siguiente figura:

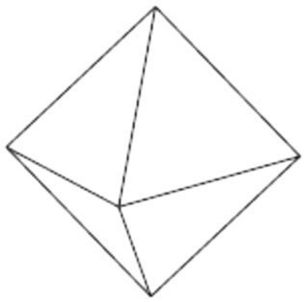
- Sus lados opuestos son iguales
- Los cuatro ángulos son iguales
- Las diagonales tienen la misma longitud
- Los lados opuestos son paralelos

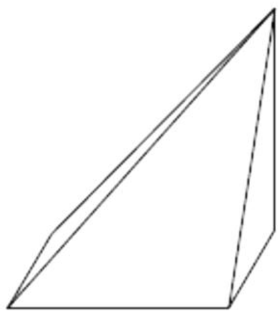
Como muestra la tabla 2, esta pregunta abarca los tres primeros niveles. Por ejemplo, puede ser contestada a un nivel de identificación (nivel 1) cuando se muestra el desconocimiento de las propiedades de la figura. Los estudiantes en este nivel no son capaces de utilizar definiciones matemáticas dadas, pero son capaces de formularlas mediante frases como “se parece a…”. También puede ser contestada en un nivel 3 si el alumno es capaz de seleccionar la propiedad que caracteriza a la figura. Puede ser contestada al nivel 2 de razonamiento, en base a la identificación y la definición de la figura, por diversas propiedades. Además, constituye al nivel de proceso de clasificación en el nivel 3, pues para una correcta argumentación, el alumno debe proporcionar contraejemplos de otros cuadriláteros que cumplan la propiedad y no sean rectángulos.

- **<u>PREGUNTA 2</u>**

Describir las diferencias entre un cubo y las siguientes figuras A, B y C







A B C

En esta actividad los estudiantes deben describir las diferencias que localizan entre un cubo y las figuras A, B y C, atendiendo a las cualidades visuales del sólido o a sus propiedades geométricas.

Como muestra la Tabla 2, esta pregunta abarca los 2 primeros niveles de razonamiento. Puede ser contestada en un nivel de proceso de identificación visual (nivel1) por el desconocimiento de las propiedades de las figuras, es decir por la identificación como un todo, y la no diferencia entre partes o componentes, y en un nivel 2 mediante la identificación de las figuras por sus propiedades.

- **<u>PREGUNTA 3</u>**

1. Una diagonal de un polígono es un segmento que une vértices no consecutivos. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? (Demostrar)

2. a) En un polígono de 5 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

   b) En un polígono de 7 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

   c) En un polígono de n lados, calcula la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice. (Justifica tu respuesta). Utilizando la respuesta a la pregunta anterior calcula el número de diagonales que tiene un polígono de n lados.

Esta pregunta abarca los cuatro niveles de razonamiento. Puede ser contestada en un nivel 1 de identificación por el desconocimiento de propiedades geométricas, tales como: n-lados, arista, vértices… En un nivel 2 de razonamiento, los estudiantes son capaces de comprender una propiedad y probarla en ejemplos concretos. En el caso de los niveles 3 y 4, las respuestas engloban procesos tanto del uso y formulación de definiciones, como de la prueba final. Las definiciones adquieren significado, y en base a la complejidad de las respuestas, y a la deducción lógica y formal del de las mismas, los estudiantes se sitúan en un nivel u otro de razonamiento.

3.3.3.2 Entrevistas cognitivas

Se realizaron entrevistas cognitivas tras haber comprobado que las respuestas de los alumnos en alguna de las preguntas no eran del todo las esperadas, habiendo entre ellas preguntas en blanco. Este tipo de entrevistas ayuda al entrevistador a recabar más información para poder situar al estudiante en un nivel u otro de razonamiento. Para ello se volvió al centro de estudio, y de uno en uno se fue sacando individualmente un par de minutos de la clase de matemáticas, a aquellos alumnos de los cuales se necesitaba más información, y se les volvió a plantear la pregunta directamente. De esta manera su respuesta es libre y no está condicionada por el resto de los compañeros.

4. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos del cuestionario realizado a los alumnos (§ 3.3.3.1), y, en su caso, de su posterior entrevista cognitiva (§ 3.3.3.2). Se plantean los resultados por separado tanto por preguntas como por cursos, para una mejor lectura y entendimiento de los mismos.

RESULTADOS 2º ESO

PRIMERA PREGUNTA:

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 2º de ESO en la primera pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta se pedía seleccionar entre cuatro opciones la que definía al rectángulo de una imagen dada y se evalúan los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele.

Nivel	*Porcentaje %*
1 ↓	23,53
1 ↑	11,76
2 ↓	11,76
2 ↑	52,94
3	0

Tabla 3: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 1

Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1: En las respuestas caracterizadas como propias a este nivel, se hace referencia la ausencia de un lenguaje básico geométrico para referirse a la figura, y a la no identificación de las propiedades de la misma

Nivel 1 ↓ (Bajo)

El 23,53% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 1 bajo. Sus respuestas se caracterizan por un lenguaje no formal, y respuestas erróneas. Se incluyen en este nivel si marcan cualquiera de las tres respuestas no correctas, y no demuestran, no realizan ninguna explicación, o no tiene sentido aquello que explican.

Por ejemplo, Lucía (14 años) afirma en su respuesta: "Yo creo que es la primera porque cuando te dan los otros datos ya sabes que son iguales".

En los casos en los que no quedaba claro el razonamiento del alumno, se les realizó una entrevista cognitiva. Se situaron en este nivel los que mostraron no comprender la pregunta ni los conceptos implicados.

Nivel 1 ↑ (Alto)

El 11,76% de los alumnos mostraron un razonamiento de nivel 1 alto. Sus respuestas se caracterizan por una elección errónea de la respuesta pero haciendo alusión a algunas de las propiedades de la figura. Predomina el lenguaje no formal propio del nivel 1.

Por ejemplo, Álvaro (13 años) marca como correcta la primera respuesta porque "se ve a primera vista". En base a esta respuesta su nivel de razonamiento equivaldría a un nivel 1, ya que identifica la figura como un todo, mediante descripciones visuales. Tras realizar la entrevista cognitiva afirma que se puede observar que los lados son iguales, señalándolos con el dedo.

- Nivel 2: Las respuestas incluidas en este nivel, se caracterizan por la identificación de partes y propiedades de la figura, pero no por capacidad de establecer relaciones entre familias de figuras.

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 11,76% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por señalar una o dos de las opciones de la pregunta como correctas, y por explicar su selección coherentemente. Por ejemplo, Aída (13 años) afirma: "Todos los lados opuestos son paralelos, porque el lado opuesto de la figura es igual, entonces al tenerlos paralelos te da bien”. En una entrevista cognitiva posterior se le pregunto qué quería decir exactamente con esta explicación, a lo que contestó que en la figura se ve a simple vista que los lados son paralelos, y que el lado opuesto es igual, entonces es una característica del rectángulo.

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 52,94% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 alto. Las respuestas correspondientes a este nivel se caracterizan por señalar tres o cuatro de las opciones, explicando con detalle y coherencia su respuesta elegida.

Por ejemplo Inés (14 años) afirma en su respuesta lo siguiente:

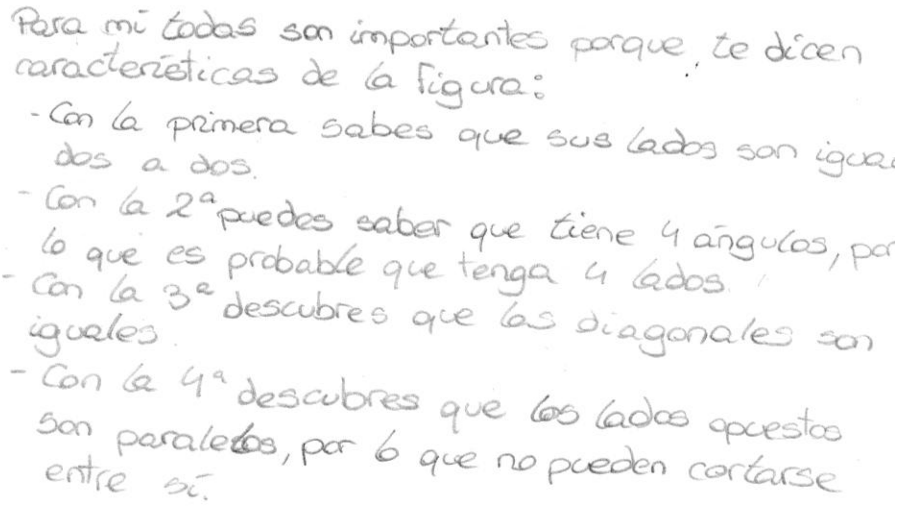

Para mi todas son importantes porque te dicen caracteristicas de la figura:
- Con la primera sabes que sus lados son igua[les] dos a dos.
- Con la 2ª puedes saber que tiene 4 angulos, por lo que es probable que tenga 4 lados.
- Con la 3ª descubres que las diagonales son iguales.
- Con la 4ª descubres que los lados opuestos son paralelos, por lo que no pueden cortarse entre sí.

Figura 1. Respuesta de Inés (14 años)

Otro caso de respuesta situada en este nivel es la de Tomás (14 años), quien afirma: “No creo que haya ninguna que sea importante ya que todas son ciertas, pero hay una que me ha llamado la atención que es la tercera”. Tras la entrevista cognitiva a este alumno, este confirma que todas le parecen importantes, y no puede decantarse por ninguna en particular.

También se incluye en este nivel a aquellos alumnos que responden adecuadamente a la pregunta (es decir, seleccionan únicamente la opción de la igualdad de ángulos) explicando su respuesta, pero sin proporcionar contraejemplos para descartar las demás opciones.

Ningún alumno de 2º de la ESO mostró razonamiento típico del nivel 3 al contestar a esta pregunta. Las respuestas a este nivel se enmarcarían por la selección de la opción correcta, y la explicación de la elección mediante la capacidad de establecer relaciones entre familias proporcionando los contraejemplos oportunos.

SEGUNDA PREGUNTA:

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria en la segunda pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta debían describir las diferencias entre un cubo y otros tres sólidos dados. Esta pregunta evalúa los niveles 1 y 2 de Van Hiele.

Nivel	*Porcentaje %*
1 ↓	0
1 ↑	29,41
2 ↓	41,17
2 ↑	29,41

Tabla4: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 2

Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1. En las respuestas caracterizadas como propias de este nivel, se hace referencia a los sólidos únicamente en haciendo alusión a su forma. Los estudiantes consideran los sólidos tridimensionales como un todo. Pueden reconocer y nombrar los sólidos (primas, pirámides…), y distinguir un sólido de otro visualmente. Los estudiantes no hacen alusión a las componentes o propiedades para identificar un sólido. Además, sus respuestas vienen dadas en un lenguaje informal utilizando expresiones del tipo: “se parece a…”...

Nivel 1 ↓ (Bajo)

Ningún estudiante mostró un razonamiento de este nivel. Se incluirían en este nivel a aquellos que no hubieran respondido por desconocimiento o aquellas respuestas que no se pudieran codificar. Respuestas que contengan incorrectas o reducidas explicaciones, o que carezcan de razonamiento matemático.

Nivel 1 ↑ (Alto)

El 29,41% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 1 alto. Sus respuestas se caracterizan por la identificación de las figuras como un todo, un léxico menos coloquial (aunque no siempre correcto desde el punto de vista geométrico), y la distinción de un sólido de otro de forma visual.

Por ejemplo Álvaro (13 años) afirma: “Un cubo solo tiene 6 lados, y este (figura A) tiene muchos más. Un cubo solo está formado por cuadrados y B (figura) solo por triángulos. Un cubo no solo tiene un cuadrado, sino muchos más”.

Otra respuesta acorde a este nivel es la de Gema (14 años). No describe ninguna diferencia entre el cubo y la figura A. Sin embargo sí explica diferencias con las otras figuras: “La diferencia de un cubo es que la figura B tiene ocho caras, y el cubo seis caras, y la forma es de un triángulo. La diferencia (con la figura C) es que tiene tres caras y tiene forma de triángulo”

- <u>Nivel 2</u>: esta pregunta se caracteriza por la identificación de los elementos de los sólidos (vértices, caras, aristas…), y propiedades de paralelismo, regularidad… de dichos sólidos, así como por el empleo de un lenguaje geométrico.

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 41,17% de los estudiantes mostraron un razonamiento de tipo 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por la identificación de componentes de las figuras (caras, ángulos, etc.) y por la descripción, de manera informal, de las figuras tridimensionales a través de sus propiedades. No clasifican sólidos, ni familias de los mismos. Pueden confundir el término “lado” con el de “cara”.

Por ejemplo Aída (13 años) afirma: (figura A) un cubo no tiene tantos lados, y todos tienen que ser paralelos. Un cubo tienen 6 lados, y esta figura (B) tiene 5, sus lados tienen que ser paralelos y en este no todos lo son paralelos. Tiene más lados y no tiene lados con forma de triángulo. Un cubo tiene lados cuadrados.”

Otra respuesta situada en este nivel es la de Tomás (14 años) afirma: “las figuras en general no tienen los ángulos iguales, sus lados opuestos no son paralelos, y las diagonales no tienen la misma longitud”.

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 29,47% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 alto. Sus respuestas se caracterizan por la descripción de las figuras a través de sus propiedades, por proporcionar cantidad de información amplia y correcta en la mayoría de los casos. Las siguientes repuestas reflejan el nivel de razonamiento dado.

Por ejemplo Nora (13 años) afirma:

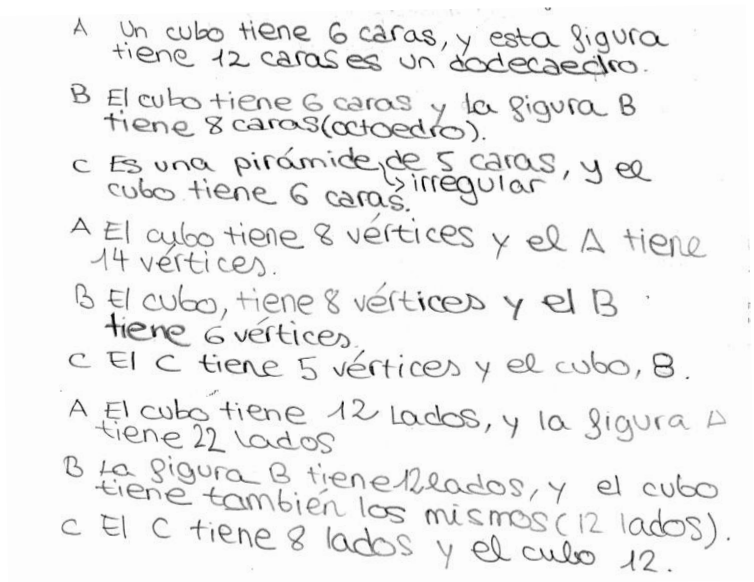

A Un cubo tiene 6 caras, y esta figura tiene 12 caras es un dodecaedro.
B El cubo tiene 6 caras y la figura B tiene 8 caras(octoedro).
C Es una pirámide irregular de 5 caras, y el cubo tiene 6 caras.
A El cubo tiene 8 vértices y el A tiene 14 vértices.
B El cubo, tiene 8 vértices y el B tiene 6 vértices.
C El C tiene 5 vértices y el cubo, 8.
A El cubo tiene 12 lados, y la figura A tiene 22 lados
B La figura B tiene 12 lados, y el cubo tiene también los mismos (12 lados).
C El C tiene 8 lados y el cubo 12.

Figura 2: respuesta de Nora (13 años)

Otra respuesta situada en este nivel corresponde a la de Lucía (14 años):

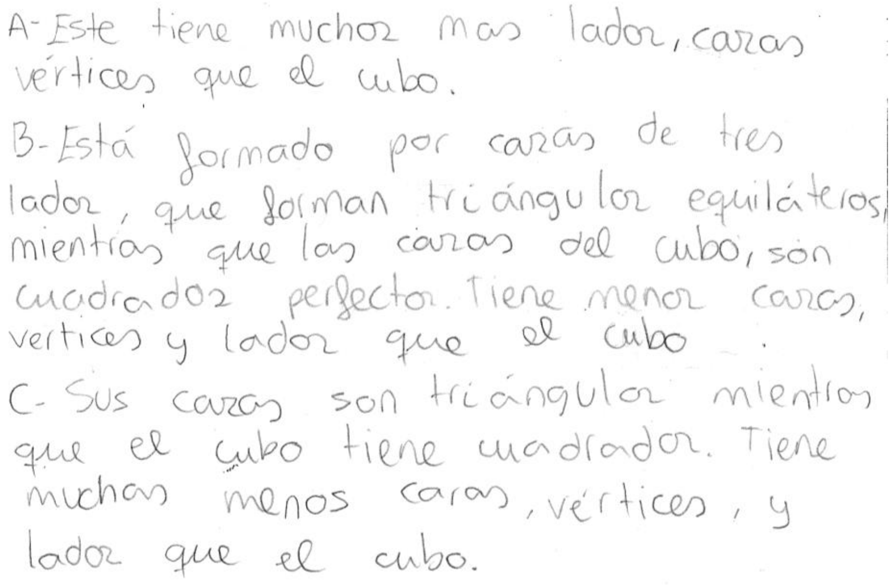

A- Este tiene muchos mas lados, caras vértices que el cubo.
B- Está formado por caras de tres lados, que forman triángulos equiláteros, mientras que las caras del cubo, son cuadrados perfectos. Tiene menos caras, vertices y lados que el cubo.
C- Sus caras son triángulos mientras que el cubo tiene cuadrados. Tiene muchos menos caras, vértices, y lados que el cubo.

Figura 3: respuesta de Lucía (14 años)

TERCERA PREGUNTA

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria en la tercera pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta se pedía encontrar el número de diagonales de un polígono de n lados, proporcionando pistas y ejemplos para su posterior generalización. Evalúa los niveles 1, 2, 3 y 4.

Nivel	*Porcentaje*
1	0
2 ↓	58,82
2 ↑	23,53
3	17,64
4	0

Tabla5: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 3

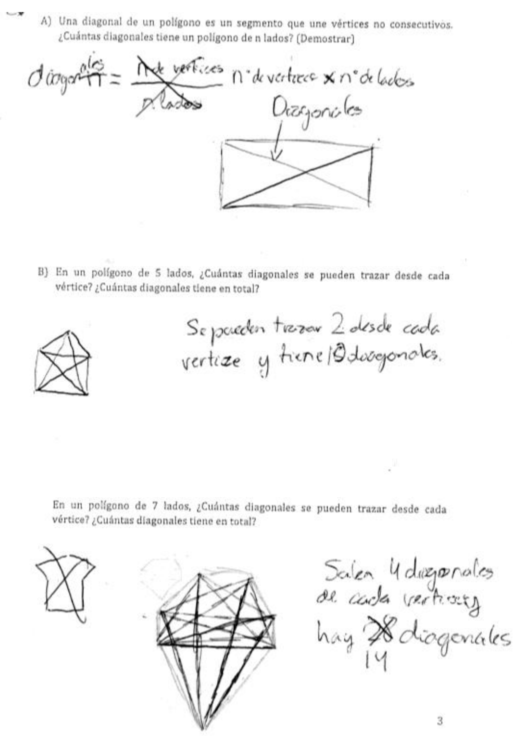
Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1. Ningún estudiante mostró un razonamiento de nivel 1. En este nivel se situarían las respuestas en las que se manifestara el desconocimiento de conceptos como polígono, diagonal, vértice, así como las respuestas en blanco o sin sentido.
- Nivel 2. Los estudiantes cuentan el número de diagonales, dibujan varios polígonos e intentan llegar a una expresión formal. Estas respuestas se caracterizan por la ausencia de una correcta generalización. Dependiendo del número de ejemplos que hayan proporcionado, y del formalismo de sus respuestas, se han dividido éstas en nivel bajo y alto como se explica a continuación.

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 58,82% de los estudiantes mostraron un nivel 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por dibujar uno o pocos polígonos, contar el número de diagonales correctamente para alguno de los ejemplos dados, pero no generalizar para el número de diagonales por cada vértice ni el número de diagonales totales.

Por ejemplo Álvaro (13 años) afirma lo siguiente:



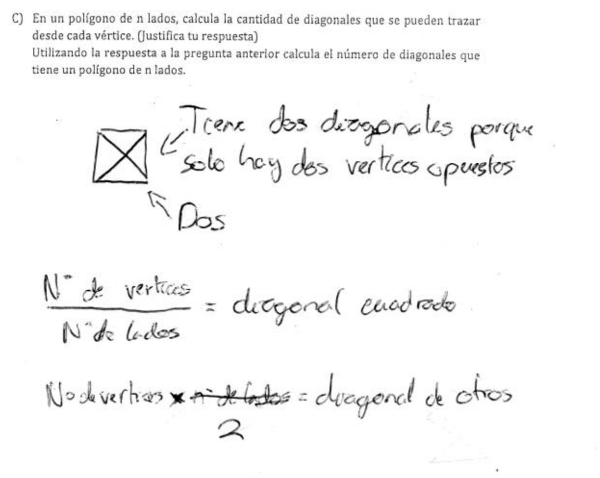


Figura 4: respuesta de Álvaro (13 años)

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 23,53% de los estudiantes mostraron un nivel 2 alto. Sus respuestas se caracterizan por dibujar varios polígonos, contar número de diagonales correctamente para el pentágono y el heptágono, y generalizar la expresión del número de diagonales que salen de cada vértice sin llegar a encontrar la fórmula del número total.

Por ejemplo, Aída (13 años):

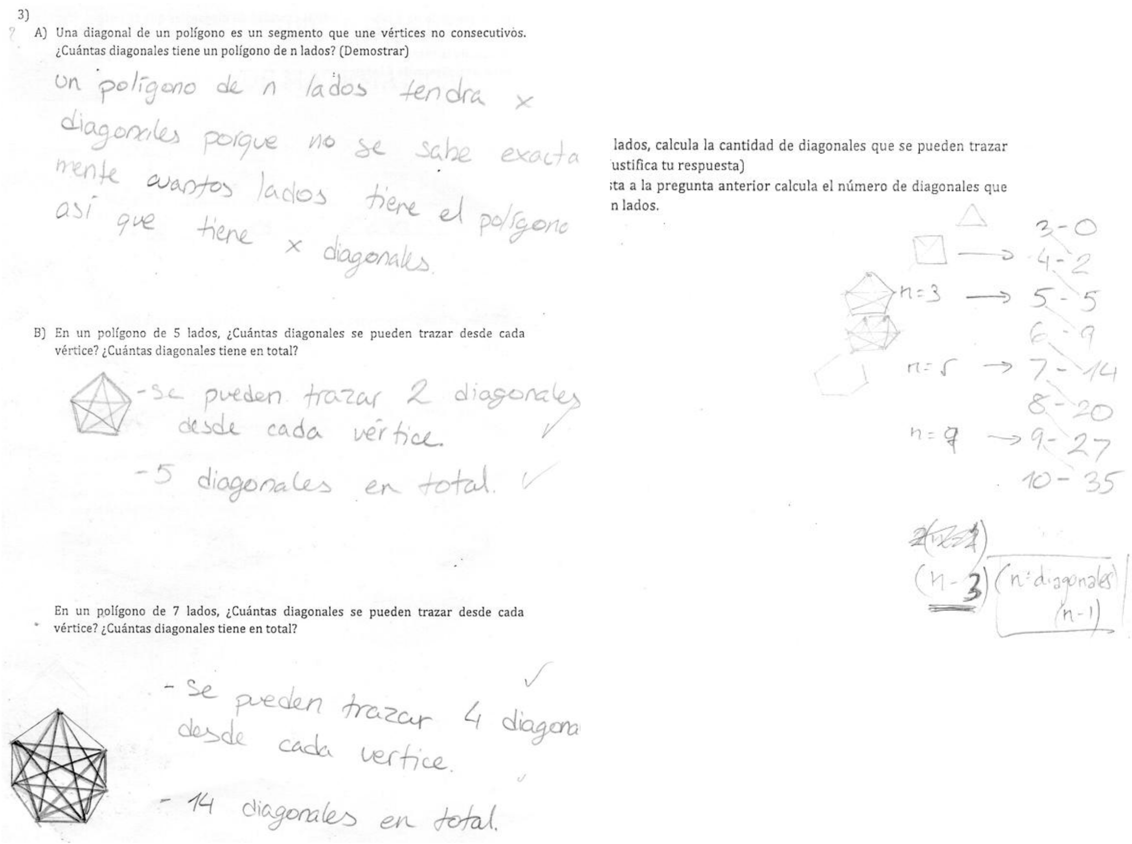


Figura 5: respuesta de Aída (13 años)

- Nivel 3: En las respuestas caracterizadas para este nivel las definiciones y las demostraciones adquieren significado, pero el razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Aun no comprenden el sistema axiomático de las matemáticas, por lo que las demostraciones que realizan son informales.

El 11,76% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 3. Sus respuestas se caracterizan por llegar a obtener la expresión requerida en 3.2 a través de experimentación (misma estrategia anterior), o gracias a las pistas que se van dando a lo largo de los ejercicios.

Por ejemplo Lucía (14 años) afirma:

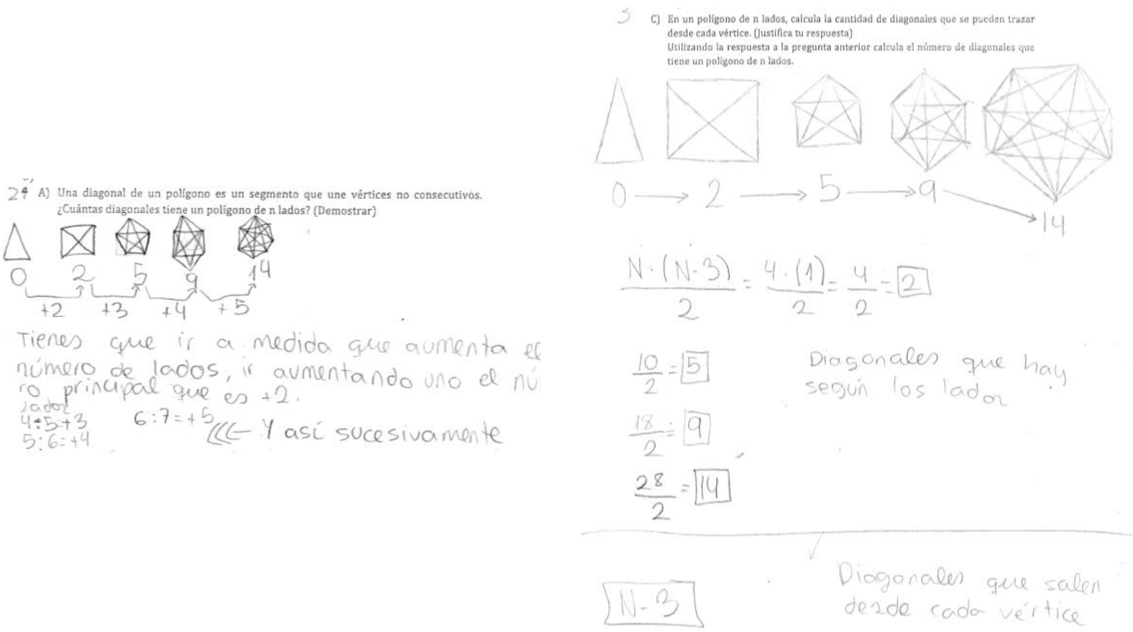


Figura 6: respuesta de Lucía (14 años)

- <u>Nivel 4</u>: En las respuestas caracterizadas como propias a este nivel se hace referencia a las deducciones y a las demostraciones lógicas y formales. Comprende que se puede llegar a los mismos resultados tras realizar ciertas demostraciones.

Ningún alumno fue capaz de deducir la fórmula partiendo de un polígono de n-lados, sin la necesidad de recurrir a ejemplos, por lo que no encontramos manifestación de nivel 4. Solo se incluirían en este nivel a aquellos alumnos que dan un argumento formal para la fórmula del número de diagonales en un polígono de n lados directamente en el apartado 3.1, la prueban, y en 3.2 llegan a la misma conclusión.

RESULTADOS 4ºESO

PRIMERA PREGUNTA

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 4º de ESO en la primera pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta se pedía seleccionar entre cuatro opciones la que definía al rectángulo de una imagen dada y se evalúan los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele.

Nivel	*Porcentaje %*
1 ↓	7,14
1 ↑	14,28
2 ↓	21,43
2 ↑	21,43
3	35,71

Tabla6: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 1

Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1: En las respuestas caracterizadas como propias a este nivel, se hace referencia a la no precisión de un lenguaje básico geométrico para referirse a la figura, y a la no identificación de las propiedades de la misma

Nivel 1 ↓ (Bajo)

El 7,14% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 1 bajo. Sus respuestas se caracterizan por un lenguaje coloquial no geométrico, característico de este nivel y por un claro desconocimiento de los conceptos geométricos implicados. Por ejemplo Roberto (16 años) marca como opción correcta: las diagonales tienen la misma longitud, y lo justifica: “ya que las diagonales son iguales y da igual si tienen la misma”

Nivel 1 ↑ (Alto)

El 14,28% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 1 alto. Sus respuestas se caracterizan por haber señalado erróneamente la respuesta, pero tienen una intencionalidad en relación a las propiedades de las figuras. Por ejemplo Andrea (16 años) tras haber marcado inicialmente la 1ª opción, rectifica y la cambia por la 3ª. Tras la entrevista en profundidad me confirma "Al principio marqué la 1ª porque los lados opuestos de un rectángulo son iguales, pero la cambié por la 3ª porque también se cumple en los cuadrados"

- Nivel 2: Las respuestas incluidas en este nivel, se caracterizan por la identificación de partes y propiedades de la figura, pero no por capacidad de establecer relaciones entre familias de figuras

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 21,43% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por marcar una opción errónea, pero identificar la figura por sus propiedades. Por ejemplo Lucía (15 años) marca correcta la 1ª opción, afirmando "Es la propiedad más relevante de un rectángulo, sus lados opuestos son paralelos dos a dos". Otro caso de respuesta situada en este nivel es la de Daniel (15 años) que explica "cojo las diagonales tienen la misma longitud, porque el resto de los polígonos cumplen las otras, y es el único que lo cumple"

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 21,43% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 alto. Sus respuestas se caracterizan por ser detalladas y por argumentos coherentes, aunque aun no den con la respuesta correcta. Por ejemplo Andrea (15 años) afirma: "He cogido estas respuestas (la primera, segunda y tercera) porque si no la tuvieran no sería un paralelogramo". Tras realizar la entrevista cognitiva afirma que las opciones señaladas son propiedades del rectángulo.

- Nivel 3: Nivel caracterizado por la identificación tanto de las propiedades como de las diferentes familias de las figuras.

El 35,71% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 3. Sus respuestas se caracterizan por marcar correctamente la opción adecuada, identificando la figura por sus propiedades, y dando una respuesta válida a su afirmación, mediante contraejemplos No se incluyen en este nivel las respuestas en las que se selecciona la opción correcta sin proporcionar explicación coherente.

Por ejemplo Sara (15 años) afirma que la respuesta correcta es la 2ª, explicando: “Porque existen más paralelogramos que tienen lados opuestos y paralelos, y creo que la única figura con 4 ángulos iguales es el cuadrado/rectángulo”. En este caso selecciona la respuesta correcta, Realiza una clara referencia en base a las propiedades de la figura, y construye interrelaciones entre grupo de familias.

SEGUNDA PREGUNTA

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 4º de ESO en la segunda pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta debían describir las diferencias entre un cubo y otros tres sólidos dados, atendiendo a las cualidades visuales del sólido o a sus propiedades geométricas. Esta pregunta evalúa los niveles 1 y 2 de Van Hiele.

A continuación se muestran los resultados del nivel que manifestaron las respuestas a esta pregunta.

Nivel	*Porcentaje %*
1 ↓	21,43
1 ↑	7,14
2 ↓	35,71
2 ↑	35,71

Tabla7: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 2

Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1. En las respuestas caracterizadas como propias de este nivel, se hace alusión a los sólidos únicamente en relación a su forma. Los estudiantes consideran los sólidos tridimensionales como un todo. Pueden reconocer y nombrar los sólidos (primas, pirámides…), y distinguir un sólido de otro visualmente. Los estudiantes no hacen alusión a las componentes o propiedades para identificar un sólido. Además, sus respuestas vienen dadas en un lenguaje informal utilizando expresiones del tipo: “se parece a…”

Nivel 1 ↓ (Bajo)

El 21,43% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 1 bajo. Sus respuestas vienen dadas por un lenguaje no geométrico característico de este nivel. Por ejemplo, Francisco (15 años) afirma para la figura B: “solo una base acaba en cúspide”. Otro caso de respuesta situada en este nivel es la de Marcos (15 años), cuya respuesta es la siguiente: “El cubo es más pequeño (comparando con la primera figura). El cubo no tiene picos (comparando con la figura B). El cubo tiene sus caras iguales (comparando con la figura C)”

Nivel 1 ↑ (Alto)

Un estudiante mostró un razonamiento de nivel 1 alto. Sus respuestas se caracterizan por contener referencias a las formas de las figuras, con un lenguaje más geométrico que en el nivel 1 bajo, pero sin mostrar todavía un correcto razonamiento.

Félix (16 años) afirma: Figura A “Tiene más lados”. Figura B “Diferente forma cara de lados”. Figura C “Diferente forma cara de lados. Menor número de caras”

- El Nivel 2 en esta pregunta se caracteriza por la identificación de los elementos de los sólidos (vértices, caras, aristas…), y propiedades de paralelismo, regularidad… de dichos sólidos, así como por el empleo de un lenguaje geométrico.

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 35,71% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por el uso de términos geométricos en cuanto a las características de las figuras, y por un razonamiento incompleto o incorrecto.

Por ejemplo, Valeria (15 años) afirma: “Figura A: Tiene más caras que el cubo, su forma cambia. Esta figura no tiene donde apoyarse, es decir no tiene base, el cubo sí. Figura B: No tiene base, al igual que el anterior. La forma de las caras cambia, en este caso son triángulos equiláteros. Sus diagonales cambian. Sus ángulos son distintos. Figura C: Tiene solo una base, el cubo 2. La forma es de triángulo rectángulo. Cambian los ángulos.”

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 35,71% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 alto. En este caso sus respuestas se caracterizan por información completa y correcta. Comparan las figuras en base a sus propiedades y características. Por ejemplo, Sara (15 años) afirma:

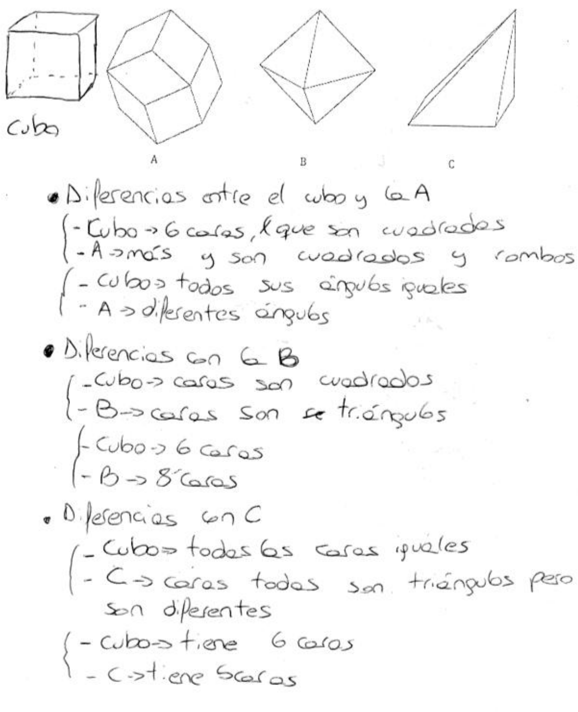


Figura 7: respuesta de Sara (15años)

Otra respuesta asociada a este nivel es la de Sélica (15 años), que afirma: “Un cubo tiene seis caras paralelas dos a dos, y estas figuras no, los ángulos formados por sus vértices miden todos 90º. En la primera figura sus caras no son paralelas, en la segunda tampoco y sus ángulos no son rectos, y la última lo mismo que la anterior. Ninguna tiene 6 caras”.

TERCERA PREGUNTA

A continuación se muestran los porcentajes obtenidos por los alumnos de 4º de ESO en la tercera pregunta del cuestionario realizado.

Como se explicó en la sección 3.3.3.1, en esta pregunta se pedía encontrar el número de diagonales de un polígono de n lados, proporcionando pistas y ejemplos para su posterior generalización. Evalúa los niveles 1, 2, 3 y 4

Nivel	*Porcentaje*
1	7,14
2 ↓	28,57
2 ↑	57,14
3	7,14
4	0

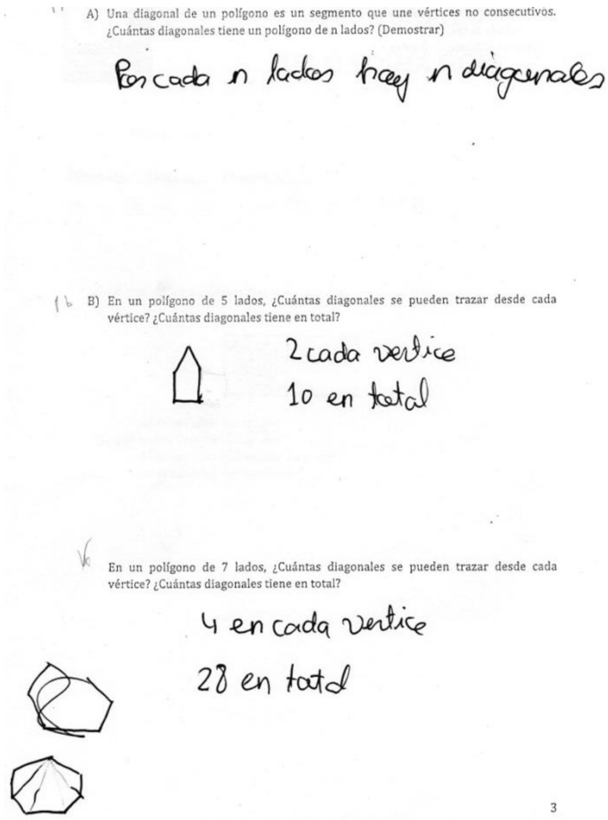
Tabla 8: Porcentaje de respuestas correspondientes a cada nivel en la pregunta 3

Las respuestas a esta pregunta se han situado en uno u otro nivel de Van Hiele, atendiendo a los siguientes criterios.

- Nivel 1. En este nivel se situarían las respuestas en las que se manifestara el desconocimiento de conceptos como polígono, diagonal, vértice, así como las respuestas en blanco o sin sentido.

Un estudiante mostró un razonamiento de nivel 1. Sus respuestas generalmente se caracterizan por un desconocimiento de los conceptos implicados o por un conteo erróneo del número de diagonales tanto para los ejemplos concretos como para el caso general. Se incluyen en este grupo aquellas respuestas sin sentido, léxico geométrico típico nivel 1, o respuestas en blanco. No se hará distinción de nivel entre bajo o alto.

La respuesta de Marcos (15 años) fue la siguiente:



A) Una diagonal de un polígono es un segmento que une vértices no consecutivos. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? (Demostrar)

Por cada n lados hay n diagonales

B) En un polígono de 5 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

2 cada vertice
10 en total

En un polígono de 7 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

4 en cada vertice
28 en total

3

Figura 8: respuesta de Marcos (15años)

- <u>Nivel 2</u>. Los estudiantes cuentan el número de diagonales, dibujan varios polígonos e intentan llegar a una expresión formal. Estas respuestas se caracterizan por la ausencia de una correcta generalización. Dependiendo del número de ejemplos que hayan proporcionado, y del formalismo de sus respuestas, se han dividido éstas en nivel bajo y alto como se explica a continuación.

Nivel 2 ↓ (Bajo)

El 28,57% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 bajo. Sus respuestas se caracterizan por dibujar uno o pocos polígonos, contar el número de diagonales correctamente para alguno de los ejemplos dados, pero no generalizar para el número de diagonales por cada vértice ni el número de diagonales totales.

Por ejemplo Andrea (15 años):

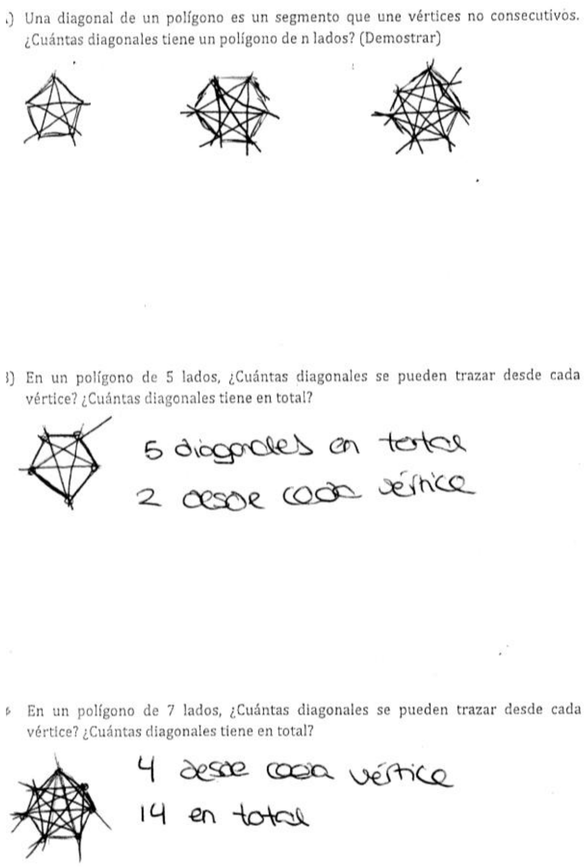
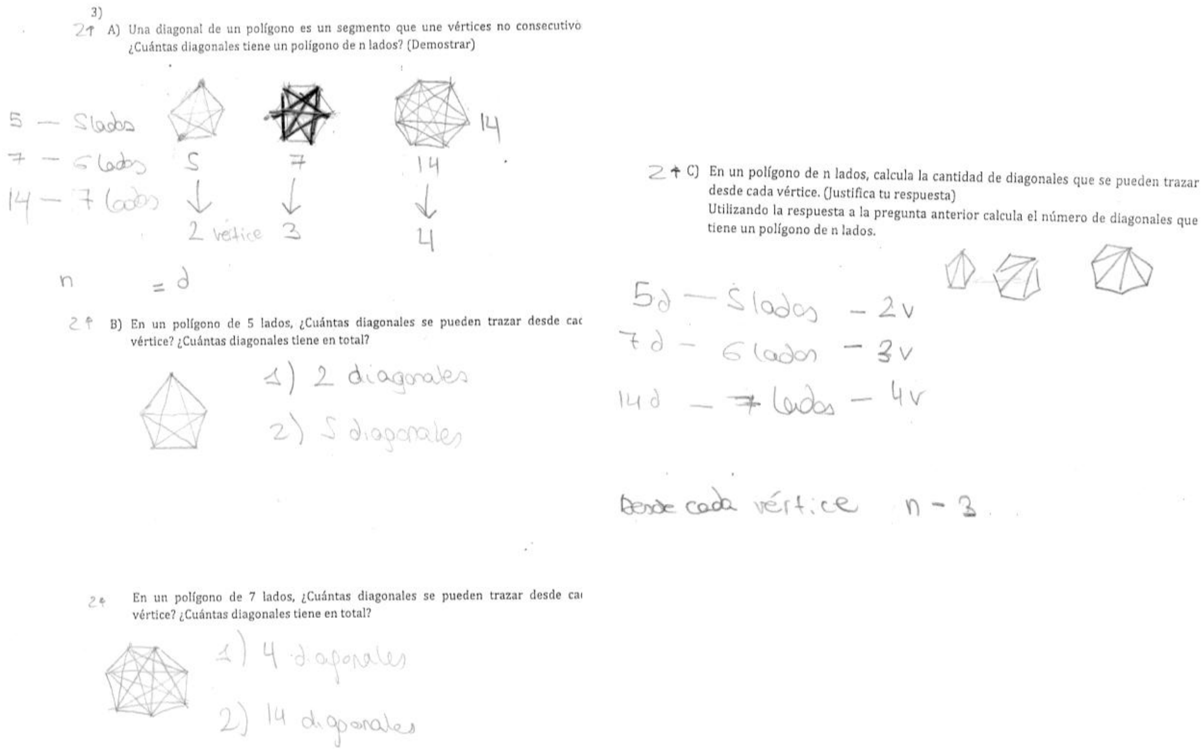


Figura 9: Respuesta de Andrea (15 años)

Nivel 2 ↑ (Alto)

El 57,14% de los estudiantes mostraron un razonamiento de nivel 2 alto. Sus respuestas se caracterizan por dibujar varios polígonos, contar número de diagonales correctamente para el pentágono y el heptágono, y generalizar la expresión del número de diagonales que salen de cada vértice sin llegar a encontrar la fórmula del número total.

Por ejemplo Julia (16 años) responde así a las preguntas:



3)

2↑ A) Una diagonal de un polígono es un segmento que une vértices no consecutivo
¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? (Demostrar)

5 — 5lados
7 — 6 lados
14 — 7 lados

5 → 2 vértice
7 → 3
14 → 4
14

n = d

2↑ B) En un polígono de 5 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde cac
vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

1) 2 diagonales
2) 5 diagonales

2↑ En un polígono de 7 lados, ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde ca
vértice? ¿Cuántas diagonales tiene en total?

1) 4 diagonales
2) 14 diagonales

2↑ C) En un polígono de n lados, calcula la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice. (Justifica tu respuesta)
Utilizando la respuesta a la pregunta anterior calcula el número de diagonales que tiene un polígono de n lados.

5d — 5 lados — 2v
7d — 6 lados — 3v
14d — 7 lados — 4v

Desde cada vértice n − 3

Figura 10: respuesta de Julia (16 años)

- <u>Nivel 3</u>: En las respuestas caracterizadas para este nivel las definiciones y las demostraciones adquieren significado, pero el razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Aun no comprenden el sistema axiomático de las matemáticas.

Un estudiante mostró un razonamiento de nivel 3. Sus respuestas se caracterizan por no obtener la expresión del número total de diagonales en la pregunta 3.1, pero llegar a obtenerla en la pregunta 3.2 a través de experimentación (misma estrategia anterior), o gracias a las pistas que se van dando a lo largo de los ejercicios.

La respuesta de Sara (15 años) fue la siguiente:

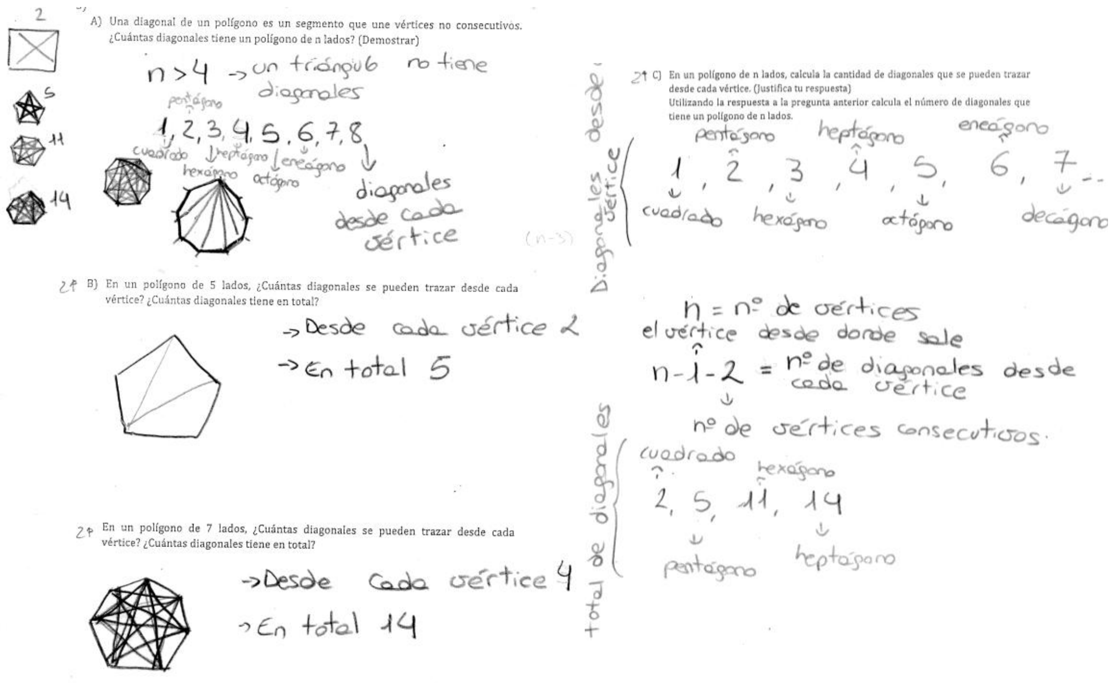


Figura 11: respuesta de Sara (16 años)

- Nivel 4: En las respuestas caracterizadas como propias a este nivel se hace referencia a las deducciones y a las demostraciones lógicas y formales. Comprende que se puede llegar a los mismos resultados tras realizar ciertas demostraciones.

Ningún alumno fue capaz de deducir la fórmula partiendo de un polígono de n-lados, sin la necesidad de recurrir a ejemplos, por lo que no encontramos manifestación de nivel 4. Solo se incluirían en este nivel a aquellos alumnos que dan un argumento formal para la fórmula del número de diagonales en un polígono de n lados directamente en la pregunta 3.1, y en la pregunta 3.2 repetir su respuesta.

5. DISCUSIÓN

En este apartado se comentan los resultados obtenidos de la realización del cuestionario a los alumnos, las cuales se han expuesto en el apartado anterior (§ 4). Para el estudio de las respuestas nos hemos basado en el trabajo de

Gutiérrez y Jaime (1998), donde se proporcionan unos descriptores (llamados procesos clave) ya explicados para cada pregunta en la sección 2.3.2.

Como hemos visto, la mayoría de los alumnos muestran evidencias de los niveles 1 y 2, cuyas características se basan (para el nivel 1) en la identificación de las figuras geométricas como un todo, la ausencia de un lenguaje formal o geométrico característico, y la no alusión a las partes o propiedades de los conceptos implicados. En cuanto al nivel 2, las características se basan principalmente en la identificación de las figuras mediante sus propiedades geométricas, pero todavía tiene limitaciones para establecer relaciones entre familias de figuras.

En la primera pregunta el 35,29% de los estudiantes de 2º curso evidenciaron un nivel 1 de razonamiento, mientras el 64,7% mostraron un nivel de razonamiento 2. Sin embargo no hubo ningún estudiante que mostró nivel 3 de razonamiento.

En la primera pregunta, entre los alumnos de 4º curso encontramos una distribución diferente de los niveles. Menos alumnos mostraron respuestas características del nivel 1 que en 2º (un 21,42%), algo menos de la mitad de las respuestas se situaron en el nivel 2 (42,86%) y sí hubo evidencia importante de respuestas situadas en el nivel 3 (35,71%)

En la segunda pregunta la distribución de los niveles por cursos ha estado más equiparada. Los porcentaje obtenidos de cada nivel han sido muy parecidos aunque parece haber una mayor inclinación hacia un nivel 2 alto en 4º curso que en 2º.

En la tercera pregunta, el porcentaje medio para ambos cursos se sitúa en el segundo nivel de razonamiento, siendo ligeramente superior para 4º curso que para 2º. Se observa un porcentaje mayor en las respuestas de nivel 2 alto en 4º de ESO que en las de 2º (57,14%, frente al 23,53%) lo que podría interpretarse como un avance paulatino a través del segundo nivel de razonamiento.

Llama la atención la superioridad de respuestas de tercer nivel en 2º que en 4º, (17,64% frente a un 7,14%), aunque lo consideramos como no relevante por ser porcentajes bajos y por el pequeño tamaño de la muestra.

No se obtuvo ningún caso de razonamiento de nivel 4 para esta pregunta.

Hemos encontrado que algunas de las preguntas dan más información que otras sobre el razonamiento geométrico de los estudiantes. Por ejemplo, la pregunta 3 podía ser respondida desde un nivel 1 hasta un nivel 4 de Van Hiele y ha proporcionado mucha información sobre el conocimiento y razonamiento del alumno.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo se ha centrado en el estudio y análisis del modelo de Van Hiele en un grupo de estudiantes de secundaria en Cantabria. En particular, hemos estudiado el nivel de razonamiento que muestran los distintos alumnos al resolver distintas tareas geométricas.

En los resultados observamos que la mayoría de los alumnos contestaron a las preguntas del cuestionario mostrando evidencias de razonamiento propio de los niveles 1 y 2 de Van Hiele, con algún caso aislado de razonamientos propios del nivel 3. En general se ha observado que los alumnos de 4º de la ESO se sitúan en niveles ligeramente superiores respecto a los alumnos de 2º, lo que podría indicar un progreso en la adquisición de conocimiento geométrico a medida que avanza el curso.

Con el fin de que el docente disponga de herramientas para evaluar el nivel de razonamiento de sus alumnos, se han presentado distintas tareas geométricas diseñadas de tal forma que puedan responderse a distintos niveles y que proporcionen información sobre el razonamiento geométrico de los alumnos. Además, se han mostrado algunas de las respuestas más representativas de cada nivel para que el docente pueda identificar el nivel que muestran sus alumnos y poder adecuar las tareas para ayudarles a progresar hacia niveles superiores.

Además, se pretendía estudiar qué tipo de actividades dan más información sobre el razonamiento del alumno. De los resultados observamos que la pregunta número 3 es la que más información ha proporcionado sobre el conocimiento y razonamiento del alumno e interpretamos que esto se puede deber a que la pregunta está secuenciada en pasos e implica una gran cantidad de conceptos geométricos.

Como futuras líneas de investigación nos planteamos diseñar tareas con las que podamos observar los distintos niveles de razonamiento que impliquen conceptos geométricos diferentes a los del cuestionario de este trabajo haciendo uso de los descriptores proporcionados en la literatura para cada tema correspondiente.

7. AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Irene Polo Blanco, por su dedicación, esfuerzo y supervisión continua en la realización de este trabajo. También quiero agradecer a mis alumnos durante el periodo de prácticas que participaron en esta investigación.

8. BIBLIOGRAFÍA

Barrera, B.D. & Centeno, M. V. (2006). Evaluación de Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación Integral*.* *Divulgaciones Matemáticas, 14, nº2*, 141-151.

Bedoya, J.A., Esteban, P.V. & Vasco, E.D. (2007). Fases de aprendizaje del modelo educativo de Van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local. *Lecturas Matemáticas, 28,* 77-95.

Blanco, L.J. (2015). Aportaciones de autores a la E/A de la Geometría. *Dca. De las Matemáticas.*

Braga, G.M. (1991). Apuntes para la enseñanza de la geometría. *Signos, teoría y práctica para la educación, 4, julio-diciembre,* 52-57

Burguer, W.F., Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education vol. 17 nº 1*, 31-48

De la Torre, A. (2003). El método Socrático y el Modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas, 24*, 99-121.

Gamboa Araya, R. & Vargas Vargas, G. (2013). El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia, 27 nº1,enero-junio,* 74-94.

Guillén G., Cáceres, M., Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Memoria final de proyecto de investigación, Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural topology, 18*.

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the adquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22 nº3,* 237-251.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1998). On the Assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning, *Spring & Summer Edition, 20, nº2&3.*

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32, segundo semestre,* 55-70.

Hernando, F.; Sancho, J.M.; Rivas, J.I. (2011): *Historias de vida en educación. Biografías en contexto.* Esbrina-Recerca. Universitat de Barcelona. Barcelona.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. *En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.
Disponible en <www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th PME conference (Lisboa), 3,* 41-48.

Jaramillo, C.M. & Esteban, P.V. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del Modelo de Van Hiele. *Revista Educación y Pedagogía, 45*, mayo-agosto, 109-118.

Knight, K.C. (2006). *An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers.* Tesis de Magister. University of Maine, Maine, Estados Unidos.

Vallés, M.S. (2002). Entrevistas cualitativas. Centro de Investigaciones Sociológicas. *Colección: Cuadernos metodológicos, nº32*