

Facultad de Ciencias

Estimación del espectro de potencias del fondo cósmico de microondas con el método QML (Cosmic microwave background power spectrum estimation using QML method)

Trabajo de Fin de Máster para acceder al

MÁSTER EN FÍSICA, INSTRUMENTACIÓN Y MEDIO AMBIENTE

Autor: Juan Daniel Bilbao Ahedo

Director/es: R. Belén Barreiro Vilas Patricio Vielva Martínez

Octubre - 2014

Estimación del espectro de potencias del fondo cósmico de microondas con el método QML

Resumen de la memoria

El espectro de potencias de la radiación del Fondo Cósmico de Microondas (FCM) viene determinado por los parámetros del modelo cosmológico que describe nuestro universo. Por tanto, una estimación óptima del mismo es un paso fundamental para extraer toda la valiosa información contenida en dicha radiación. En este proyecto se implementa una aproximación cuadrática al estimador de máxima verosimilitud, QML, del espectro de potencias del FCM, se analizan las condiciones en las que la matriz de correlación de los mapas de temperatura del FCM resulta óptima para los cálculos, la carga computacional y velocidad a la que se realizan, y se testa el método con simulaciones realistas del FCM, incluyendo máscara y ruido, y con productos de la colaboración Planck. Para que el método funcione, la matriz de correlación debe ser regular, y se ha encontrado que esta propiedad depende en el plano teórico del número de armónicos esféricos que se incluyan en su desarrollo y de la simetría de los puntos con los que se trabaje, pero en la práctica los errores numéricos hacen que el rango sea menor de lo esperado. En este trabajo se proporcionan técnicas para analizar y controlar este fenómeno. Se ha comprobado que el método produce buenas estimaciones del espectro de potencias en condiciones diversas, sobre toda la esfera, con máscara y con ruido. Aplicado a los productos de la colaboración Planck de la ESA, se han recuperado resultados completamente consistentes con los publicados por dicha colaboración.

Palabras clave: cosmología, fondo cósmico de microondas, análisis de datos, estimación del espectro de potencias, matriz de correlación

Cosmic microwave background power spectrum estimation using QML method

Abstract

The Cosmic Microwave Background radiation (CMB) power spectrum is determined by the parameters of the cosmological model which describes our universe. Therefore, an optimal estimation of the spectrum is key to extract all the valuable information contained in this radiation. In this project a quadratic maximum likelihood estimator, QML, of the CMB power spectrum is implemented, the conditions for which the correlation matrix of the CMB temperature maps is optimal for the calculations are analyzed, the computational load and rate at which they are performed are also considered, and the method is tested through realistic simulations of CMB, including mask and noise, and products of the Planck collaboration. For the method to work, the correlation matrix must be regular, but it has been found that this depends, from the theoretical point of view, on the number of spherical harmonics to be included in its expansion and on the symmetry of the points with which we work, while in practice numerical errors make the matrix rank lower than expected. In the present work we provide techniques to analyze and control this phenomenon. It has been assesed that the method gives good estimates of the power spectrum under various conditions: on the whole sphere but also working with mask and with noise. Applied to products of ESA's Planck collaboration, the method has produced fully consistent results with those published by this collaboration.

Key words: cosmology, cosmic microwave background, data analysis, power spectrum estimation, correlation matrix

ÍNDICE GENERAL

1.	Introducción	1
	1.1. El Universo en expansión	1
	1.2. El fondo cósmico de microondas	1
	1.3. Anisotropías en el FCM	2
	1.4. El espectro angular de potencias	3
	1.5. Pixelización	4
2.	El método QML	7
	2.1. Objetivo	7
	2.2. Desarrollo	7
	2.3. La función ventana en el caso real	8
	2.4. Orden de magnitud en el número de cálculos	9
	2.5. Sobre los coeficientes que se introducen en el cálculo de C	10
3.	. Estudio de la matriz de correlación	13
	3.1. Sobre el número de sumandos en el desarrollo de C $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	13
	3.1.1. La suma de las contribuciones no nulas no se anula	17
	3.1.2. El rango cuando hay simetría en los puntos	18
	3.1.3. El rango cuando se aplica máscara	20
	3.2. El ruido en C regulariza la matriz	22
	3.3. Comparación entre resultados teóricos y numéricos	23
	3.3.1. Caso en el que no hay simetría en los puntos	24
	3.3.2. Puntos con la simetría de HEALPix	24
	3.3.3. Puntos con la simetría de HEALPix y con máscara	26
	3.3.4. Ruido en la diagonal de C \ldots	26
4.	Validación del Método QML	31
	4.1. Caso sin máscara y sin ruido	32
	4.2. Caso con máscara ecuatorial	34
	4.3. Caso con la máscara SEVEM	35
	4.4. Caso con ruido y sin máscara	36
	4.5. Caso con ruido y con máscara	38
	4.6. Efectos en ℓ de la máscara y el ruido	38
5.	Aplicación a productos de la colaboración Planck	41
6.	Conclusiones	43

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. EL UNIVERSO EN EXPANSIÓN

En la primera mitad del siglo XX quedó establecido como un hecho científico que nuestra galaxia es una más entre otras muchas en el universo y que no ocupa ninguna posición central especial. Visto desde nuestra posición, las galaxias se alejan de acuerdo a una relación específica entre velocidades y distancias que conduce a que un observador que se situara en cualquier otro punto del universo conocido apreciaría distintos detalles para cada galaxia, pero el mismo efecto global y la misma relación.

Ante el hecho de un universo en expansión surgieron dos puntos de vista opuestos. Según el modelo del estado estable, el universo ha sido siempre más o menos igual a como es ahora, y a medida que se expande, se crea nueva materia que llena los vacíos entre las galaxias. Según otro punto de vista, la teoría del *Big Bang*, el universo cambia con el tiempo. Si las galaxias se están separando, en el pasado han debido estar más próximas, y si se proyecta hacia atrás suficientemente, se llega a cierto instante inicial en el que todo lo observable estaba concentrado en un volumen extremadamente pequeño. Lo que observamos en el presente es una etapa en la evolución del universo y este tiene un origen.

1.2. EL FONDO CÓSMICO DE MICROONDAS

Un volumen de universo en el presente contiene cierta cantidad de materia y energía, a la que se podrá asignar determinada temperatura. De acuerdo a la teoría del *Big Bang*, en un tiempo pasado la misma cantidad de materia y energía ocupaba un volumen menor, y se encontraba a una temperatura más alta. Cuanto más se reduce el volumen, más aumenta la densidad y la temperatura, llegando en determinado instante a una situación que se encuentra en el límite de lo que las teorías actuales de la física pueden describir con suficiente seguridad. De acuerdo al conocimiento en el presente, podemos retroceder en el tiempo desde el instante actual hasta al menos 10^{-12} segundos después del *Big Bang* y los fenómenos correspondientes a cada instante y temperatura estarían gobernados por leyes físicas bien conocidas y suficientemente contrastadas experimentalmente.

Unos doscientos segundos después del *Big Bang* el universo se ha expandido y enfriado lo suficiente como para que se haya roto la simetría entre materia y antimateria, establecido las proporciones actuales entre fotones, neutrinos, electrones y bariones, y la interacción fuerte es lo suficientemente intensa respecto del medio como para que se formen algunos núcleos de los elementos ligeros (H, He, Li). Todo se encuentra en un estado de plasma en el que los fotones y las partículas cargadas

1 Introducción

se acoplan intensamente y alcanzan localmente el equilibrio térmico, de modo que la radiación presenta un espectro de cuerpo negro. El plasma es prácticamente homogéneo, pero presenta pequeñas desviaciones de densidad que tienden a aumentar por efecto gravitatorio, a su vez, en los lugares en los que se da mayor concentración de materia también hay mayor densidad de fotones en interacción y, por lo tanto, mayor presión de radiación, que tiende a disiparla. Estos dos efectos contrapuestos producen oscilaciones en las desviaciones de densidad, que se propagan por el plasma como ondas de sonido. El universo continúa expandiéndose y enfriándose, y unos 380 000 años después del Big Bang la temperatura del plasma ha disminuido lo suficiente como para que la energía de los fotones no alcance a impedir que los electrones acaben capturados por los núcleos atómicos. A partir de ese momento la radiación solo se acopla con la materia si tiene la energía de las transiciones atómicas, y el recorrido libre medio de los fotones alcanza dimensiones cósmicas; el universo se vuelve transparente. De ahí en adelante los fotones viajan libremente por el espacio¹ y, con el paso del tiempo, a medida que el universo se expande, la densidad y su energía va disminuyendo, manteniendo el espectro de cuerpo negro. De modo que la teoría predice la existencia del Fondo Cósmico de Microondas, FCM, una radiación con espectro de cuerpo negro, a una temperatura en la actualidad en torno a $T_0 = 2,725K$, prácticamente isótropa.

1.3. Anisotropías en el FCM

Durante unos 380 000 años, como se comenta anteriormente, mientras continuaba la expansión y la temperatura disminuía, la densidad del plasma oscilaba por efecto del tirón gravitatorio y la presión de radiación; hasta el momento del desacoplo, en el que la materia queda solo expuesta a la gravedad. El estado de las oscilaciones y la diferente densidad y temperatura de los fotones en cada punto quedó congelada en la radiación. Así que es de esperar que el FCM presente anisotropías que reflejen el estado de oscilación del plasma en el instante del desacoplo. En cada dirección del espacio se encontrará una temperatura $T(\theta, \phi)$ que se desviará ligeramente de la temperatura promedio sobre todas las direcciones, indicando la desviación de la densidad en un punto situado en esa dirección a la distancia que ha recorrido la luz desde el instante del desacoplo hasta el presente. En la figura 1.1 se muestra el mapa de temperaturas del FCM obtenido por el satélite Planck.

Se puede definir la fracción de la desviación de la temperatura del FCM en cada dirección del espacio respecto de la temperatura media:

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta,\phi) = \frac{T(\theta,\phi) - T_0}{T_0}.$$
(1.1)

Igualmente interesante que la medida de la anisotropía en cada punto es la intensidad a la que se produce a diferentes escalas angulares, que se puede encontrar desarrollando los valores de $\Delta T/T$ en la superficie de la esfera en función de los armónicos esféricos:

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi).$$
(1.2)

De modo que la información que antes se tenía punto a punto en $\Delta T/T$ ahora está expresada en función de escalas y orientaciones a través de los coeficientes a_{lm} .

¹Varios millones de años después, con la aparición de las primeras estrellas, parte del hidrógeno en el medio interestelar pasó a estar ionizado. Desde entonces, algunos fotones del FCM interaccionan con los electrones libres.

1.4 El espectro angular de potencias



Figura 1.1: Mapa de temperatura del FCM obtenido con el método SEVEM, uno de los productos de la misión Planck[1][3]. Unidades en μK . La anomalía debida a las altas temperaturas en el centro de la figura es debida a la contaminación de radiación que procede de nuestra galaxia.

Los coeficientes $a_{\ell m}$ correspondientes se calculan mediante la transformación inversa:

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$
(1.3)

1.4. EL ESPECTRO ANGULAR DE POTENCIAS

Desde el punto de vista teórico solo se pueden hacer predicciones de tipo estadístico sobre las propiedades de las anisotropías. Por ejemplo, no se puede adelantar qué temperatura habrá en un punto concreto del cielo, pero sí se puede señalar qué potencia tendrá cierta escala en las anisotropías, en función de determinado modelo cosmológico y elección de parámetros; de modo que lo interesante son las propiedades estadísticas de los coeficientes $a_{\ell m}$. Además, independientemente de que se contemplen desviaciones de temperatura punto a punto, desde el punto de vista teórico, y asumiendo el Principio Cosmológico, el FCM sigue siendo isótropo en cuanto a que no hay direcciones privilegiadas en las que deban estar orientadas las anisotropías. Esto lleva a que en diferentes realizaciones de universos compatibles con el modelo, los coeficientes $a_{\ell m}$ promedian cero para cada par (ℓ , m). Para registrar estadísticamente la potencia en las anisotropías se necesita recurrir a las varianzas de los coeficientes. Se define el espectro angular de potencias como la colección de parámetros C_{ℓ} :

$$C_{\ell} = \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle. \tag{1.4}$$

Este promedio se realiza sobre los $a_{\ell m}$ correspondientes a una colección de universos compatibles con el modelo. Pero solo tenemos un universo, en el que se ha materializado una realización de las diversas que permiten las leyes físicas, y solo disponemos de la muestra de un fondo cósmico de entre los muchos que podían haber sido. Se puede estimar el espectro de potencias con los únicos datos que tenemos, los correspondientes a nuestro universo, como:

$$C_{\ell} = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m = -\ell}^{\ell} a_{\ell m} a_{\ell m}^{*}.$$
(1.5)

Y al sumar en m desaparece la información relativa a la orientación de las anisotropías y solo queda la información relevante de las escalas. Se puede demostrar que en el caso de disponer de un cielo

1 Introducción



Figura 1.2: Espectro de potencias del FCM obtenido en la colaboración Planck. Los picos en la gráfica indican los picos de potencia de las oscilaciones acústicas mencionadas en el apartado anterior.

completo y sin incertidumbres en la medida, este estimador es óptimo, en el sentido de la máxima verosimilitud. En la figura 1.2 se muestra el espectro de potencias resultado de la colaboración Planck.

Lo limitado del tamaño de la muestra de coeficientes introduce un error estadístico en el cálculo del espectro de potencias. Además, dado que la temperatura es una variable real y que los coeficientes $a_{\ell m}$ son valores complejos, que se calculan de acuerdo a la expresión 1.3, para cada ℓ realmente solo se dispone de la mitad de cantidad de información de la que se corresponde con $2\ell + 1$ coeficientes complejos. Se denomina *varianza cósmica* a la incertidumbre estadística introducida en el cálculo de los coeficientes del espectro de potencias, y se calcula de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta C_{\ell}}{C_{\ell}} = \frac{1}{\sqrt{(2\ell+1)/2}}$$
(1.6)

1.5. PIXELIZACIÓN

Al realizar cálculos numéricos sobre la superficie de la esfera, como por ejemplo la integral de la expresión 1.3 a partir de mapas de temperatura formados por colecciones discretas de datos, se necesita establecer un método que permita dividirla en secciones, asignar a cada una de las secciones un punto que las represente y cierto factor que dé cuenta del valor medio de los armónicos esféricos sobre las secciones.

De las pixelizaciones desarrolladas, la más utilizada en la actualidad es HEALPIX (Hierarchical, Equal Area, and iso-Latitude Pixelation of the sphere)[2]. La división base consta de doce zonas de igual área, que a su vez se subdividen según el grado de resolución que se requiera. Cada una de las áreas resultantes se representa mediante un punto o píxel situado en su centro. El parámetro que mide el grado de resolución se conoce como N_{side} y toma como valores potencias de dos; el número de puntos o píxeles viene dado por $12 N_{side}^2$. En la figura 1.3 se muestran las cuatro primeras resoluciones.

Una vez establecida la pixelización, se puede definir un mapa de temperatura x como una colección de datos ordenados $T(\hat{\mathbf{r}}_i)$ o $\Delta T/T_0(\hat{\mathbf{r}}_i)$, donde los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}_i$ señalan las direcciones de los



Figura 1.3: Cuatro primeras resoluciones de HEALPix, con parámetros N_{side} : 1, 2, 4 y 8, de n: 12, 48, 192 y 768 píxeles, respectivamente.

píxeles.

HEALPix no solo es una pixelización de la esfera, sino que incluye todo un paquete de software que permite simular mapas de temperatura, degradarlos, suavizarlos, visualizarlos, analizarlos, calcular el espectro de potencias, etc.

Capítulo 2

El método QML

Este proyecto tiene como objetivo implementar una aproximación cuadrática al estimador de máxima verosimilitud (QML, de sus siglas en inglés) del espectro de potencias del FCM a partir de mapas de temperatura. Las ideas fundamentales que se desarrollan en este capítulo están extraídas de [5].

2.1. OBJETIVO

Se pretende desarrollar un método que permita estimar el espectro de potencias del FCM simple, insesgado, de varianza mínima, aplicable a cualquier tipo de geometría de los datos y que opere de forma cuadrática sobre estos. Al ser cuadrático, se establece una conexión directa con la matriz de correlación de los mapas. Por ser aplicable a cualquier clase de geometría en los datos, permite trabajar con mapas enmascarados. Por ser insesgado y de varianza mínima, se trata de un método optimo, que permite la estimación de los parámetros con el mínimo error posible.

2.2. DESARROLLO

Refiriéndonos al mapa del FCM mediante la variable x, el método pretende encontrar una estimación del espectro de potencias C_l de la siguiente forma:

$$\widehat{C}_{\ell} = \mathbf{x}^t \mathbf{E}^{\ell} \mathbf{x} - b_{\ell}, \tag{2.1}$$

donde \mathbf{E}^{ℓ} es una matriz simétrica y b_{ℓ} cierta constante, ambas por determinar.

Sea C la matriz de correlación del mapa del FCM. Dicha matriz se puede escribir en función del espectro de potencias¹:

$$\mathbf{C} \equiv \langle \mathbf{x} \mathbf{x}^t \rangle = \mathbf{N} + \sum_{\ell} \mathbf{P}^{\ell} C_{\ell}, \qquad (2.2)$$

donde N representa la matriz de covarianza del ruido y las matrices \mathbf{P}^{ℓ} están definidas como

$$\mathbf{P}_{ij}^{\ell} \equiv \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\widehat{\mathbf{r}}_i \cdot \widehat{\mathbf{r}}_j).$$
(2.3)

 P_{ℓ} representa el polinomio de Legendre y $\hat{\mathbf{r}}_i$ es un vector unitario que apunta en la dirección del espacio en la que se encuentra el punto *i*.

¹Esta expresión se demuestra en el capítulo 3 de la página 13

2 El método QML

La expresión 2.1 se puede reescribir como $\widehat{C}_{\ell} = \sum_{ij} \mathbf{E}_{ij}^{\ell} (\mathbf{x}\mathbf{x}^{t})_{ij} - b_{\ell}$, y tomando promedios se puede conectar con 2.2. Considerando que las matrices son simétricas, se obtiene:

$$\langle \widehat{C}_{\ell} \rangle = \sum_{ij} \mathbf{E}_{ij}^{\ell} (\mathbf{N}_{ji} + \sum_{\ell'} \mathbf{P}_{ji}^{\ell'} C_{\ell'}) - b_{\ell} = \sum_{\ell'} \sum_{ij} \mathbf{E}_{ij}^{\ell} \mathbf{P}_{ji}^{\ell'} C_{\ell'} + \sum_{ij} \mathbf{E}_{ij}^{\ell} \mathbf{N}_{ji} - b_{\ell}$$

$$= \sum_{\ell'} \operatorname{tr} \mathbf{E}^{\ell} \mathbf{P}^{\ell'} C_{\ell'} + \operatorname{tr} \mathbf{N} \mathbf{E}^{\ell} - b_{\ell}.$$

$$(2.4)$$

Definiendo $b_{\ell} = \text{tr } \mathbf{NE}^{\ell}$, eliminamos el ruido, y queda un estimador insesgado:

$$\langle \widehat{C}_{\ell} \rangle = \sum_{\ell'} \mathbf{W}_{\ell\ell'} C_{\ell'}.$$
 (2.5)

La expresión $\mathbf{W}_{\ell\ell'} = \operatorname{tr} \mathbf{E}^{\ell} \mathbf{P}^{\ell'}$ se denomina *Función Ventana*, y da la medida de cómo se mezclan los coeficientes reales en los estimados.

El siguiente paso es encontrar el estimador de C_{ℓ} con varianza mínima. Si se elige la condición de normalización $\mathbf{W}_{\ell\ell} = 1$, suponiendo gaussianidad en las anisotropías, y minimizando la matriz de covarianza $\mathbf{V}_{\ell\ell'} \equiv \langle \widehat{C}_{\ell} \widehat{C}_{\ell'} \rangle - \langle \widehat{C}_{\ell} \rangle \langle \widehat{C}_{\ell'} \rangle$, se llega a la expresión de \mathbf{E}^{ℓ} :

$$\mathbf{E}^{\ell} = \frac{1}{2\mathbf{F}_{\ell\ell}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell} \mathbf{C}^{-1}.$$
(2.6)

donde **F** es la matriz de información de Fisher, dada por $\mathbf{F}_{\ell\ell} = \text{tr} [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell}]/2$.

Por último, se demuestra que el estimador encontrado produce las barras de error más pequeñas posibles para un estimador insesgado, de acuerdo a la desigualdad de Fisher-Cramer-Rao.

2.3. LA FUNCIÓN VENTANA EN EL CASO REAL

Para adaptar el método a condiciones reales de uso resulta necesario introducir algunas modificaciones. El mapa de temperatura consiste en una señal pixelizada en el que cada dato es el promedio sobre determinada porción de la superficie de la esfera de la señal subyacente, y las temperaturas se obtienen mediante instrumentos de medida que convolucionan la señal incidente con su función respuesta. De los dos aspectos anteriores se da cuenta introduciendo los factores B_{ℓ}^2 que se describen en [6].

Por otro lado, en ciertas direcciones del cielo, hacia el disco de nuestra galaxia y determinados objetos puntuales, se produce emisión en microondas que se mezcla con la señal de FCM, y lo contamina hasta tal extremo que hace conveniente descartar la señal de esos puntos; en ese caso se dice que se aplica una máscara (figura 2.1). Esta es una de las ventajas del método frente a otros estimadores más rápidos que trabajan en el espacio de los armónicos esféricos: al trabajar en el espacio directo, la adaptación a la presencia de la máscara también es directa.

Definiendo a partir del espectro de potencias unos nuevos coeficientes con más interés práctico, $D_{\ell} = \ell(\ell + 1)C_{\ell}/2\pi$, se puede escribir C como:

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^t \rangle = \mathbf{N} + \sum_{\ell} \tilde{\mathbf{P}}^{\ell} D_{\ell}, \qquad (2.7)$$

donde en $\tilde{\mathbf{P}}_{\ell}$ se ha incluido el efecto de la pixelización y el beam gaussiano a través de μ_{ℓ} :

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\ell} \equiv \mu_{\ell} \mathbf{P}^{\ell},$$
$$\mu_{\ell} \equiv \frac{B_{\ell}^2}{\ell(\ell+1)/2\pi}$$



Figura 2.1: Máscara SEVEM en la pixelización HEALPix a resolución $N_{side} = 2048$. Los puntos de color azul se descartan por exceso de contaminación de la señal en esa dirección del espacio. La zona central eliminada se corresponde con el plano de nuestra galaxia, el resto con fuentes puntuales.

Como se hizo en el apartado anterior, se obtiene un estimador insesgado y con varianza mínima con $\langle \hat{D}_{\ell} \rangle = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} D_{\ell'}$, donde ahora la función ventana es:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} = N_{\ell} \tilde{\mathbf{F}}_{\ell\ell'} = N_{\ell} \mu_{\ell} \mu_{\ell'} \operatorname{tr} \mathbf{P}^{\ell} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell'} \mathbf{C}^{-1}.$$

Imponiendo una condición de normalización que permita mezcla de los coeficientes, $\sum_{\ell'} \hat{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} = 1$, se encuentra:

$$\widehat{D}_{\ell} = \frac{\mu_{\ell} N_{\ell}}{2} \mathbf{x}^{t} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}, \qquad (2.8)$$

donde

$$N_{\ell} = \left[\sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{F}}_{\ell\ell'}\right]^{-1}.$$
(2.9)

La covarianza de los coeficientes viene dada por:

$$\langle D_{\ell} D_{\ell'} \rangle - \langle D_{\ell} \rangle \langle D_{\ell'} \rangle = N_{\ell} N_{\ell'} \tilde{\mathbf{F}}_{\ell\ell'}.$$
(2.10)

Los elementos diagonales de la matriz definida en la expresión anterior, los casos $\ell' = \ell$, nos indican el error en D_{ℓ} .

Por último, desde el punto de vista estadístico, además de un error en D_{ℓ} , también hay cierto error en la propia ℓ . Como los coeficientes estimados se calculan mediante la expresión $\langle \hat{D}_{\ell} \rangle = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} D_{\ell'}$, el valor de ℓ en el que se calcula D_{ℓ} se ve desplazado a cierta ℓ^* , $\ell^* = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} \ell'$, y tendrá un error $\Delta \ell^* = \sqrt{\langle \ell'^2 \rangle_{\ell} - \langle \ell' \rangle_{\ell} \langle \ell' \rangle_{\ell}}$.

2.4. ORDEN DE MAGNITUD EN EL NÚMERO DE CÁLCULOS

La operación más costosa computacionalmente que aparece en el método es la multiplicación de matrices, que escala como n^3 en el número de operaciones, siendo n el tamaño de la matriz, que en

2 El método QML

nuestro caso se corresponde con el número de píxeles con los que se trabaja. Sin embargo, se pueden ordenar adecuadamente los cálculos para convertirlo en un método de orden n^2 .

Observando la parte $\mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^\ell \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$ de la expresión 2.8, se en encuentra que solo se necesita calcular una vez $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$, y para cada ℓ basta con hacer $\mathbf{y}^t \mathbf{P}^\ell \mathbf{y}$.

El factor de normalización es un poco más complicado, pero también se puede convertir en un cálculo n^2 . Utilizando el teorema de la suma de los armónicos esféricos, si \hat{r}_i es un vector unitario que apunta en la dirección del espacio dada por los ángulos (θ_i , ϕ_i), entonces:

$$P_{\ell}(\hat{r}_i \hat{r}_j) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\hat{r}_i) Y_{\ell m}(\hat{r}_j).$$
(2.11)

Se puede sustituir la multiplicación de matrices utilizando el teorema citado y el hecho de que **C** es simétrica, para convertirla en un cálculo en el que lo máximo que hay que hacer es multiplicar un vector por una matriz:

$$\operatorname{tr} \mathbf{P}^{\ell} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{P}^{\ell'} \mathbf{C}^{-1} = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \sum_{u} \mathbf{P}^{\ell}_{ij} \mathbf{C}^{-1}_{jk} \mathbf{P}^{\ell'}_{ku} \mathbf{C}^{-1}_{ui}$$

$$= \sum_{ijku} \sum_{m} \sum_{m'} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{i}) Y_{\ell m}(\vec{r}_{j}) \mathbf{C}^{-1}_{jk} Y_{\ell'm'}^{*}(\vec{r}_{k}) Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{u}) \mathbf{C}^{-1}_{ui}$$

$$= \sum_{ijku} \sum_{m} \sum_{m'} Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{u}) \mathbf{C}^{-1}_{ui} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{i}) Y_{\ell m}(\vec{r}_{j}) \mathbf{C}^{-1}_{jk} Y_{\ell'm'}^{*}(\vec{r}_{k})$$

$$= \sum_{ijku} \sum_{m} \sum_{m'} Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{u}) \mathbf{C}^{-1}_{ui} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{i}) Y_{\ell'm'}^{*}(\vec{r}_{k}) \mathbf{C}^{-1}_{jk} Y_{\ell m}(\vec{r}_{j})$$

$$= \sum_{ijku} \sum_{m} \sum_{m'} Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{u}) \mathbf{C}^{-1}_{ui} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{i}) Y_{\ell'm'}^{*}(\vec{r}_{k}) \mathbf{C}^{-1}_{kj} Y_{\ell m}(\vec{r}_{j})$$

$$= \sum_{ijku} \sum_{m} \sum_{m'} Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{u}) \mathbf{C}^{-1}_{ui} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{i}) (Y_{\ell'm'}(\vec{r}_{k}) \mathbf{C}^{-1}_{kj} Y_{\ell m}^{*}(\vec{r}_{j}))^{*}$$

$$= \sum_{m} \sum_{m'} |\mathbf{Y}^{t}_{\ell'm'} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}^{*}_{\ell m}|^{2}.$$

$$(2.12)$$

Y en la expresión resultante se pueden calcular iterativamente los armónicos esféricos y organizar los sumatorios de modo que puedan almacenar resultados intermedios para ahorrar cálculos, sin necesidad de una cantidad excesiva de memoria.

Como ejemplo de la reducción del tiempo de cálculo, se señala un caso. En la resolución $N_{side} = 32$ se trabaja con matrices de rango n = 12288. Calculando en el supercomputador Altamira, en paralelo con 64 procesadores, se encuentra que el método n^3 tarda 30' en calcular 47 coeficientes C_{ℓ} y el método n^2 tarda solo 6". El primer tiempo es 301 veces mayor que el segundo, muy lejos de las 12288 veces esperadas, que es la dimensión del problema. Como se está calculando en paralelo, si se multiplica esa diferencia por el número de procesadores, 64, se obtiene un valor de 19626, del orden de la diferencia esperada. Al calcular en paralelo, cada procesador hace menos tareas que en un cálculo con un solo procesador, pero el número total de tareas aumenta, dado que además de las propias del cálculo hay que sumar entre otras las de comunicación, y contar con los retrasos asociados a esta.

2.5. Sobre los coeficientes que se introducen en el cálculo de C

Como se habrá observado, en el método QML se necesita introducir en el cálculo de C unos valores de C_{ℓ} (o D_{ℓ}) para obtener la estimación de esos mismos coeficientes a partir de los mapas. Típica-

2.5 Sobre los coeficientes que se introducen en el cálculo de C

mente, se introducen valores que, a priori, se consideran representativos del valor real. En cualquier caso, se demuestra que la introducción de un valor alejado del verdadero no introduce sesgo en la estimación; tan solo hace que la varianza no sea mínima. En todo caso, se puede dar un enfoque iterativo al método, aplicándolo varias veces seguidas sobre los mismos mapas, retroalimentándolo con los coeficientes que devuelva en cada paso, hasta alcanzar convergencia en la varianza del estimador.

Capítulo 3

Estudio de la matriz de correlación

Como ya se ha indicado, y se demuestra en este capítulo, la matriz de correlación se puede escribir como la suma de infinitos términos, cada uno de ellos asociado a un coeficiente del espectro de potencias y a una escala de variación de las anisotropías de temperatura. Como en la práctica se trabaja con resoluciones finitas de la superficie de la esfera, que tienen un tamaño mínimo de píxel, no tiene sentido sumar en escalas de variación menores que la límite en cada caso. Por ello se trunca el sumatorio en el desarrollo de **C**, lo que conduce a que, en principio, ya no se tengan garantías sobre si la matriz es invertible. Además, en algunos casos resulta invertible, pero está tan cerca de no serlo, que los inevitables errores numéricos en los cálculos producen muy malos resultados. En este capítulo se estudia qué requisitos se han de dar para que la matriz sea invertible.

3.1. Sobre el número de sumandos en el desarrollo de C

Como se explicó en el capítulo 1 de la página 1, la anisotropía de la temperatura en una dirección del espacio se desarrolla en función de los armónicos esféricos (sin introducir el término $\ell = 0$, dado que $\langle \Delta T/T_0 \rangle = 0$) de acuerdo a la expresión:

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\theta,\phi) = \frac{T(\theta,\phi) - T_0}{T_0} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi)$$
(3.1)

Si se define un vector mapa de temperatura x de modo que $\mathbf{x}_i = \Delta T/T_0(\theta_i, \phi_i)$, la matriz de correlación C será:

$$\mathbf{C} \equiv \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^{t} \rangle
= \left\langle \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sum_{\ell'=1}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} a_{\ell'm'}^{*} Y_{\ell'm'}^{*}(\theta', \phi') \right\rangle
= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \langle a_{\ell m} a_{\ell'm'}^{*} \rangle Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell'm'}^{*}(\theta', \phi')
= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell'm'}^{*}(\theta', \phi')
= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^{*}(\theta', \phi')
= \sum_{\ell=1}^{\infty} C_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^{*}(\theta', \phi').$$
(3.2)

13

3 Estudio de la matriz de correlación

Donde al hacer los promedios se ha utilizado que los armónicos esféricos se calculan en los mismos puntos para todos los mapas y se ha utilizado que la invarianza rotacional del fondo cósmico conduce a que los coeficientes $a_{\ell m}$ están descorrelacionados para valores diferentes de ℓ y m: $\langle a_{\ell m} a^*_{\ell' m'} \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'}$.

Utilizando el teorema de la suma de los armónicos esféricos (expresión 2.11), siendo $\hat{r}_i = \hat{r}(\theta_i, \phi_i)$ el vector unitario que apunta en la dirección (θ_i, ϕ_i) , se llega a:

$$\mathbf{C}_{ij} \equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\hat{r}_i \hat{r}_j).$$
(3.3)

En un caso realista, la suma en ℓ no se extiende hasta ∞ , sino que se llega hasta cierto ℓ_{max} , y no empieza necesariamente en $\ell = 1$, sino en cierto ℓ_{min}^{1} .

En las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran los rangos de la matriz C en diferentes resoluciones sumando desde $\ell = 2$ hasta el ℓ_{max} de cada columna, calculados numéricamente².

ℓ_{max}	2	3	4	5
Rango	5	11	12	12

Tabla 3.1: Rangos en función de ℓ_{max} en $N_{side} = 1$. La dimensión de la matriz es $n = 12N_{side}^2 = 12$.

ℓ_{max}	2	3	4	5	6	7	8
Rango	5	12	21	32	42	48	48

Tabla 3.2: Rangos en función de ℓ_{max} en $N_{side} = 2$. La dimensión de la matriz es $n = 12 \cdot 2^2 = 48$.

ℓ_{max}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rango	5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	186	192	192	192

Tabla 3.3: Rangos en función de ℓ_{max} en $N_{side} = 4$. La dimensión de la matriz es $n = 12 \cdot 4^2 = 192$.

En este capítulo se tratará de dar explicación a la secuencia de rangos de las tablas anteriores y de encontrar una expresión que permita relacionar el rango y ℓ_{max} , en cualquier resolución, con o sin máscara. En la parte final se comparan las expresiones teóricas obtenidas con el rango resultante en matrices calculadas numéricamente.

Teniendo en cuenta los nuevos límites de la suma, la expresión 3.2 será ahora:

$$\mathbf{C} \equiv \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^t \rangle = \sum_{\ell=\ell_{min}}^{\ell_{max}} C_\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta', \phi').$$
(3.4)

En una pixelización de la esfera se trabaja con una serie de puntos \hat{r}_i , i = 1...n, de coordenadas angulares (θ_i, ϕ_i) . Por otro lado, los armónicos esféricos, $Y_{\ell m}$, están definidos por dos índices que se pueden englobar en uno solo, μ , haciendo la identificación $(\ell, m) \leftrightarrow \mu$ del siguiente modo: $(\ell_{min}, -\ell_{min}) \leftrightarrow \mu = 1$, $(\ell_{min}, -\ell_{min} + 1) \leftrightarrow \mu = 2$, ..., $(\ell_{min}, \ell_{min}) \leftrightarrow \mu = 2\ell_{min} + 1$,

¹Además de $\ell = 0$, tampoco se suele introducir el término $\ell = 1$, el dipolo. En la práctica no da cuenta de una propiedad intrínseca del FCM, sino del efecto Doppler que se introduce al observarlo debido a nuestro movimiento respecto a este.

²En la sección 3.3 se explica cómo se obtiene el rango y otros aspectos a tener en cuenta.

3.1 Sobre el número de sumandos en el desarrollo de C

 $(\ell_{min} + 1, -\ell_{min} - 1) \leftrightarrow \mu = 2\ell_{min} + 2$, etc. Como en los armónicos esféricos a cada ℓ le corresponden varios m y los coeficientes del espectro de potencias solo dependen de ℓ , con el cambio de índices se tendrá, con $\ell_{min} = 2$, $C_{\mu=1} = C_{\ell=2}$, $C_{\mu=2} = C_{\ell=2}$, ..., $C_{\mu=5} = C_{\ell=2}$, $C_{\mu=6} = C_{\ell=3}$, etc. En general, $C_{\mu} = C_{\ell_{min}}$ cuando $\mu = 1, 2, ..., 2 \ell_{min} + 1$, $C_{\mu} = C_{\ell_{min}+1}$, cuando $\mu = 2 \ell_{min} + 2, ..., 4 \ell_{min} + 4$, etc. Así se puede escribir:

$$Y_{\ell m}(\theta_i, \phi_i) = Y_{\mu}(\theta_i, \phi_i) = Y_{\mu,i}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{\ell=\ell_{min}}^{\ell_{max}} C_{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta_i, \phi_i) Y_{\ell m}^*(\theta_j, \phi_j) = \sum_{\mu} C_{\mu} Y_{\mu,i} Y_{\mu,j}^*,$$
(3.6)

donde μ hace referencia a los índices del armónico esférico e i y j a los puntos en los que se calcula.

Con esta notación la columna *j*-ésima de C, será:

$$\mathbf{C}_{j} = \sum_{\mu} C_{\mu} \begin{pmatrix} Y_{\mu,1} \\ Y_{\mu,2} \\ \vdots \\ Y_{\mu,n} \end{pmatrix} Y_{\mu,j}^{*}, \qquad (3.7)$$

y la matriz C:

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c} \sum_{\mu} C_{\mu} \begin{bmatrix} Y_{\mu,1} \\ \vdots \\ Y_{\mu,n} \end{bmatrix} Y_{\mu,1}^{*} \sum_{\nu} C_{\nu} \begin{bmatrix} Y_{\nu,1} \\ \vdots \\ Y_{\nu,n} \end{bmatrix} Y_{\nu,2}^{*} \cdots \sum_{\delta} C_{\delta} \begin{bmatrix} Y_{\delta,1} \\ \vdots \\ Y_{\delta,n} \end{bmatrix} Y_{\delta,n}^{*} \right).$$
(3.8)

Como se han escrito las columnas de C como la suma de cierto número de columnas, el determinante de C se puede desarrollar como suma de determinantes. Por ejemplo, desarrollando la primera columna:

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{\mu} C_{\mu} \det\left(\begin{bmatrix} Y_{\mu,1} \\ \vdots \\ Y_{\mu,n} \end{bmatrix} Y_{\mu,1}^{*} \sum_{\nu} C_{\nu} \begin{bmatrix} Y_{\nu,1} \\ \vdots \\ Y_{\nu,n} \end{bmatrix} Y_{\nu,2}^{*} \dots \sum_{\delta} C_{\delta} \begin{bmatrix} Y_{\delta,1} \\ \vdots \\ Y_{\delta,n} \end{bmatrix} Y_{\delta,n}^{*} \right).$$

Y desarrollando todas las columnas:

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \dots \sum_{\delta} C_{\mu} C_{\nu} \dots C_{\delta} \det\left(\begin{bmatrix} Y_{\mu,1} \\ \vdots \\ Y_{\mu,n} \end{bmatrix} Y_{\mu,1}^{*} \begin{bmatrix} Y_{\nu,1} \\ \vdots \\ Y_{\nu,n} \end{bmatrix} Y_{\nu,2}^{*} \dots \begin{bmatrix} Y_{\delta,1} \\ \vdots \\ Y_{\delta,n} \end{bmatrix} Y_{\delta,n}^{*} \right);$$

entonces:

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \dots \sum_{\delta} C_{\mu} C_{\nu} \dots C_{\delta} Y_{\mu,1}^* Y_{\nu,2}^* \dots Y_{\delta,n}^* \det \begin{pmatrix} Y_{\mu,1} & Y_{\nu,1} & \dots & Y_{\delta,1} \\ Y_{\mu,2} & Y_{\nu,2} & \dots & Y_{\delta,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{\mu,n} & Y_{\nu,n} & \dots & Y_{\delta,n} \end{pmatrix}.$$
 (3.9)

De modo que el que se anule $det(\mathbf{C})$ depende, en primera instancia, de lo que valgan los determinantes genéricos del sumatorio:

$$\det \begin{pmatrix} Y_{\mu,1} & Y_{\nu,1} & \dots & Y_{\delta,1} \\ Y_{\mu,2} & Y_{\nu,2} & \dots & Y_{\delta,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{\mu,n} & Y_{\nu,n} & \dots & Y_{\delta,n} \end{pmatrix}.$$
 (3.10)

3 Estudio de la matriz de correlación

Si se calcula C sobre *n* puntos y se desarrolla x utilizando *N* armónicos esféricos, el número de sumandos en los sumatorios anidados, combinaciones con repetición de *N* elementos tomados de *n* en *n*, es de N^n . La mayoría de los sumandos valdrán cero, puesto que habrá muchos determinantes en ese desarrollo con al menos dos columnas iguales, cosa que sucederá cuando haya dos índices de entre μ , ν , δ , ... que tomen el mismo valor. Y, al contrario, solo podrán ser distintos de cero los determinantes que tengan todas las columnas distintas, para lo que se necesita que haya al menos tantos valores de *N* como de *n*, es decir, es necesario sumar tantos armónicos esféricos distintos como el número de puntos con el que se trabaje.

Para ilustrar lo anterior, habrá varios sum
andos en los que $\mu=1$ y $\nu=1,$ se tendrá:

$$\det \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,1} & \dots & Y_{\delta,1} \\ Y_{1,2} & Y_{1,2} & \dots & Y_{\delta,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{1,n} & Y_{1,n} & \dots & Y_{\delta,n} \end{pmatrix},$$
(3.11)

y ese determinante es cero, porque la primera y segunda columnas son iguales.

Sin embargo, si hay suficientes armónicos esféricos, el determinante con $\mu = 1, \nu = 2, ..., \delta = n$:

$$\det \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{2,1} & \dots & Y_{n,1} \\ Y_{1,2} & Y_{2,2} & \dots & Y_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{1,n} & Y_{2,n} & \dots & Y_{n,n} \end{pmatrix},$$
(3.12)

puede ser distinto de cero, porque consta de n columnas distintas, ya que cada una de ellas se obtiene con un armónico esférico distinto calculado sobre los n mismos puntos. Una matriz como esta consta de n filas distintas, que consisten en los mismos n armónicos esféricos calculados sobre distintos puntos, y las mencionadas n columnas distintas. Como las filas y las columnas son distintas entre sí, dentro de cada perspectiva de los elementos de la matriz, se cumple una condición necesaria para que su determinante no sea cero. Sin embargo pueden darse ciertas simetrías entre los puntos y los armónicos esféricos que den lugar que haya combinaciones lineales entre ellas. Entonces, la condición necesaria (y no se puede afirmar que suficiente) para que la matriz C pueda ser invertible es que haya al menos tantos armónicos esféricos en la suma de la expresión 3.4 como sea la dimensión la matriz:

$$\sum_{l=\ell_{min}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1 = (1 + \ell_{max} + \ell_{min})(1 + \ell_{max} - \ell_{min}) = \ell_{max}^2 - \ell_{min}^2 + 2\ell_{max} + 1 \ge n.$$
(3.13)

Como el rango de una matriz está limitado por el número de filas y columnas linealmente independientes, según hasta qué ℓ_{max} se sume en cálculo de C, el rango de la matriz de correlación con npuntos estará acotado por la expresión:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min(n, \ell_{max}^2 - \ell_{min}^2 + 2\ell_{max} + 1).$$
(3.14)

Por ejemplo, en el caso $N_{side} = 4$ de HEALPix, la expresión anterior predice los rangos que se muestran en la tabla 3.4. Se observa que coinciden todas las columnas con las de la tabla 3.3, calculadas numéricamente, excepto la correspondiente a $\ell_{max} = 13$; esta excepción se debe a la simetría de los puntos de HEALPix.

Antes de pasar a estudiar el efecto de la simetría en los puntos se analiza el efecto del hecho de que si hay algún determinante no nulo en el desarrollo, habrá otros n! - 1 no nulos.

ℓ_{max}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rango	5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	192	192	192	192

Tabla 3.4: Rangos máximos en función de ℓ_{max} en $N_{side} = 4$, de acuerdo a la expresión 3.13.

3.1.1. LA SUMA DE LAS CONTRIBUCIONES NO NULAS NO SE ANULA

Suponiendo que hay una combinación concreta de valores para los índices μ , ν , ..., δ , tales que $\mu \neq \nu \neq ... \neq \delta$, de modo que se tenga un determinante como el de la expresión 3.10, en cuya matriz cada columna esté calculada en un armónico esférico distinto y pueda no anularse, tampoco lo harán todos los determinantes de las matrices que se obtengan por permutación de las columnas de este, que tendrán el mismo valor o su opuesto, dependiendo de que la permutación sea par o impar. Por lo tanto, por cada término no nulo habrá otros que tampoco lo serán, y la suma de todos estos, en principio, puede anularse. En lo que sigue, se demuestra que no se anulan y se calcula la suma.

Se define $e = (\mu, \nu, ..., \delta)$ como una elección concreta de *n* índices sin repetición de entre *N* posibles, y se introduce un cambio en el primer índice de los elementos de matriz $Y_{\alpha,i}$, asociando a 1 el par (l,m) que venía asociado a μ , a 2 el par antes asociado a ν , etc. De modo que, en definitiva, se cambia μ por 1, ν por 2,..., y dado que los índices $\mu, \nu, ..., \delta$ son distintos, δ por *n*. Con lo anterior, siendo P_n el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, 2, ..., n\}$ y P_1 la forma canónica, se pueden definir D^e e \mathbf{Y}^e , de la siguiente forma:

$$D^{e} \equiv \det(\mathbf{Y}^{e}) \equiv \det\begin{pmatrix} Y_{\mu,1} & Y_{\nu,1} & \dots & Y_{\delta,1} \\ Y_{\mu,2} & Y_{\nu,2} & \dots & Y_{\delta,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{\mu,n} & Y_{\nu,n} & \dots & Y_{\delta,n} \end{pmatrix}_{\{\mu,\nu,\dots,\delta\}}$$
(3.15)
$$= \det\begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{2,1} & \dots & Y_{n,1} \\ Y_{1,2} & Y_{2,2} & \dots & Y_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{1,n} & Y_{2,n} & \dots & Y_{n,n} \end{pmatrix}_{\{1,2,\dots,n\}}$$
(3.16)

donde las llaves a la derecha de las matrices reflejan el sistema de índices en el que están indicados sus componentes.

Con esta notación se puede calcular con facilidad la contribución S_e del conjunto de los n! sumandos correspondientes a las permutaciones de una elección e de n columnas de entre las N disponibles. De acuerdo a la expresión 3.9, será:

$$S_{e} = \sum_{\sigma \in P_{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} Y_{\sigma_{i},i}^{*} \right) \det(\mathbf{Y}^{\sigma})$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i} \right) \sum_{\sigma \in P_{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} Y_{\sigma_{i},i}^{*} \right) \operatorname{Paridad}(\sigma) D^{e}$$

$$= D^{e} \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i} \right) \sum_{\sigma \in P_{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} Y_{\sigma_{i},i}^{*} \right) \operatorname{Paridad}(\sigma)$$

Pero la expresión $\sum_{\sigma \in P_n} (\prod_{i=1}^n Y_{\sigma_i,i}^*)$ Paridad (σ) es la del determinante de una matriz de elementos $Y_{i,j}^*$. Deshaciendo el cambio de índices anterior, se tiene que los elementos de esa matriz son los

3 Estudio de la matriz de correlación

conjugados de la matriz \mathbf{Y}^{e} , utilizando que las operaciones determinante y conjugación conmutan, se tiene:

$$S_{e} = D^{e} \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i}\right) \det((Y^{*})^{e}) = D^{e} \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i}\right) \det(\mathbf{Y}^{e})^{*} = D^{e} \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i}\right) (D^{e})^{*}$$
(3.17)

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} C_{i}\right) |D^{e}|^{2}.$$
(3.18)

Teniendo en cuenta que los términos del espectro de potencias (C_i con los índices de la expresión 3.18, C_ℓ en general) son positivos, se encuentra que la contribución de cada familia de n columnas al determinante de **C** es cero, si son combinación lineal, y real y positiva, si no lo son.

De modo que, cuando se cuenta con suficientes armónicos esféricos, se pueden conseguir ciertas colecciones de columnas linealmente independientes y cada una de las colecciones conduce a n! sumandos en det(**C**) que dan lugar a un número real positivo.

Por último, el determinante de C se puede calcular como la suma de las todas contribuciones S_e posibles que se obtengan tomando n columnas distintas de entre N posibles, por lo tanto, siendo $C_{N,n}$ el conjunto de las combinaciones de N elementos tomados de n en n sin repetición, se cumplirá:

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{e} S_e = \sum_{\sigma \in C_{N,n}} \left(\prod_{i=1}^n C_{\sigma_i} \right) |D^{\sigma}|^2.$$
(3.19)

3.1.2. EL RANGO CUANDO HAY SIMETRÍA EN LOS PUNTOS

Si los puntos en los que se calcula C tienen algún tipo de simetría, es posible que se pierdan algunos rangos, como ya se ha visto al comparar las tablas 3.3 y 3.4.

Si en $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ se hace el cambio de variable $\cos \theta = z$, se obtiene $Y_{l,m}(z, \phi)$, y la función tiene simetría par o impar según sea el valor de ℓ cuando se cambia un punto de coordenadas (z, ϕ) por su simétrico $(-z, \phi + \pi)$:

$$Y_{\ell,m}(-z,\phi+\pi) = Y_{\ell,m}(z,\phi), \quad \ell par Y_{\ell,m}(-z,\phi+\pi) = -Y_{\ell,m}(z,\phi), \quad \ell impar$$
(3.20)

En el caso de una matriz como la que aparece en la expresión 3.12, pero no cuadrada, por ejemplo con solo $\ell = 1$ y cuatro puntos, se tiene:

$$\begin{pmatrix} Y_1^{-1}(\vec{r}_1) & Y_1^0(\vec{r}_1) & Y_1^{1}(\vec{r}_1) \\ Y_1^{-1}(\vec{r}_2) & Y_1^0(\vec{r}_2) & Y_1^{1}(\vec{r}_2) \\ Y_1^{-1}(\vec{r}_3) & Y_1^0(\vec{r}_3) & Y_1^{1}(\vec{r}_3) \\ Y_1^{-1}(\vec{r}_4) & Y_1^0(\vec{r}_4) & Y_1^{1}(\vec{r}_4) \end{pmatrix}.$$
(3.21)

Si los puntos son opuestos dos a dos, $\vec{r}_3 = -\vec{r}_1$ y $\vec{r}_4 = -\vec{r}_2$, se encuentra que la matriz anterior es de rangos dos:

$$\begin{pmatrix} Y_1^{-1}(\vec{r}_1) & Y_1^0(\vec{r}_1) & Y_1^1(\vec{r}_1) \\ Y_1^{-1}(\vec{r}_2) & Y_1^0(\vec{r}_2) & Y_1^1(\vec{r}_2) \\ -Y_1^{-1}(\vec{r}_1) & -Y_1^0(\vec{r}_1) & -Y_1^1(\vec{r}_1) \\ -Y_1^{-1}(\vec{r}_2) & -Y_1^0(\vec{r}_2) & -Y_1^1(\vec{r}_2) \end{pmatrix}.$$
(3.22)

Por ejemplo, en el caso $N_{side} = 1$ de la pixelización Healpix se trabaja con 12 puntos simétricos dos a dos. Según la expresión 3.13 del primer apartado, bastaría con sumar en C los armónicos esféricos $con \ell = 2 \text{ y} \ell = 3$ puesto que se tendrían desde -2 hasta 2 y desde -3 hasta 3, 5+7 = 12 columnas; con eso se tendría una matriz 12×12 , 12 filas porque se calcula sobre 12 puntos, y 12 columnas porque se trabaja con 12 armónicos esféricos distintos.

-

Para escribir expresiones más manejables, definiendo \otimes como:

$$Y_{2}^{m} \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_{1} \\ \vdots \\ \vec{r}_{6} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{1}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{1}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{1}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{1}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{1}) \\ Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{2}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{2}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{2}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{2}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{2}) \\ Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{3}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{3}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{3}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{3}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{3}) \\ Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{4}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{4}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{4}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{4}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{4}) \\ Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{5}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{5}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{5}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{5}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{5}) \\ Y_{2}^{-2}(\vec{r}_{6}) & Y_{2}^{-1}(\vec{r}_{6}) & Y_{2}^{0}(\vec{r}_{6}) & Y_{2}^{1}(\vec{r}_{6}) & Y_{2}^{2}(\vec{r}_{6}) \end{pmatrix},$$
(3.23)

se tiene que la matriz con 12 puntos y los armónicos esféricos con $\ell = 2$ y $\ell = 3$ será:

$$\begin{pmatrix} Y_2^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 5} & \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 7} \\ Y_2^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_7 \\ \vdots \\ \vec{r}_{12} \end{pmatrix}_{6 \times 5} & \begin{pmatrix} \vec{r}_7 \\ \vdots \\ \vec{r}_{12} \end{pmatrix}_{6 \times 7} \end{pmatrix}.$$
(3.24)

Considerando la simetría de los puntos dos a dos, ordenándolos de tal modo que se cumpla \vec{r}_{i+6} = $-\vec{r_i}, i = 1 \dots 6$, la matriz anterior se convierte en:

$$\begin{pmatrix} Y_2^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 5} & Y_3^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 7} \\ & & \\ Y_2^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 5} & -Y_3^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 7} \end{pmatrix}.$$
(3.25)

Sustituyendo la primera fila por una combinación de la primera y la séptima: $f_1 \leftarrow \frac{1}{2}(f_1 + f_7)$, y en general $f_i \leftarrow \frac{1}{2}(f_i + f_{i+6}), i = 1 \dots 6$ y haciendo el cambio, para la segunda mitad de las filas, $f_i \leftarrow \frac{1}{2}(f_{i-6} - f_i), \ i = 7 \dots 12$, la matriz anterior se convierte en:

$$\begin{pmatrix} Y_2^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \dots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 5} & 0_{6 \times 7} \\ 0_{6 \times 5} & & \\ 0_{6 \times 5} & Y_3^m \otimes \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \dots \\ \vec{r}_6 \end{pmatrix}_{6 \times 7} \end{pmatrix}.$$
(3.26)

Y la matriz queda dividida en dos subespacios disjuntos, de modo que su rango será la suma de los de cada uno de ellos. En el primero está limitado por el número de columnas y en el segundo por el número de puntos. El rango de la matriz es 5 + 6 = 11.

3 Estudio de la matriz de correlación

En un caso general con n puntos y n armónicos esféricos, colocando los de ℓ par en las primeras columnas y los impares en las columnas de la derecha, combinando y sustituyendo las filas según el mismo esquema del ejemplo anterior, se obtendrá de nuevo una matriz formada por cuatro bloques, dos de ceros y otros dos cuyos elementos son los armónicos esféricos, pares o impares según el bloque, calculados solo en la primera mitad de los puntos. El rango de cada bloque no puede pasar de n/2 porque ese es el número de filas, pero puede que no llegue a n/2 si no tiene suficientes columnas diferentes, de modo que el rango de la matriz será:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min\left(\sum_{\substack{\ell=2\\\ell \ par}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, n/2\right) + \min\left(\sum_{\substack{\ell=2\\\ell \ impar}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, n/2\right)$$
(3.27)

Y esta expresión reproduce los rangos de las tablas 3.1, 3.2 y 3.3.

3.1.3. EL RANGO CUANDO SE APLICA MÁSCARA

Al utilizar una máscara se descartan ciertos puntos de la pixelización, de modo que, a una resolución dada, con máscara se trabaja con menos puntos que sin ella, entonces, las matrices son menores y se necesita sumar hasta un ℓ_{max} menor, dado que el rango que se ha de alcanzar es más pequeño.

Si se trabaja en el marco de la pixelización HEALPix, algunos de los puntos que pasen el filtro de la máscara quedarán desparejados, de modo que ya no es aplicable directamente la expresión 3.27. Supongamos que se trabaja a cierta resolución y que se ha aplicado una máscara. Se estará calculando C en base a *n* puntos, de los cuales n_e tienen su pareja simétrica y n_d están desparejados. Según lo expuesto en el apartado 3.1, se necesita sumar al menos hasta cierto ℓ_{max} que cumpla la condición 3.13, con $n = n_e + n_d$. Dada la simetría de los n_e puntos, se pueden hacer las mismas combinaciones lineales que se describen en el apartado anterior sobre las filas correspondientes a los puntos simétricos y obtener algunos ceros en esas filas. Si se suma hasta cierto ℓ_{max} , los números de armónicos esféricos con ℓ par, S_p^{disp} , e impar, S_i^{disp} , disponibles serán:

$$S_{p}^{disp} = \sum_{\substack{\ell=2\\ \ell \, par}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, \ S_{i}^{disp} = \sum_{\substack{\ell=2\\ \ell \, impar}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1,$$
(3.28)

y, en general, si se suma hasta un ℓ_{max} suficiente, se tendrá $S_p^{disp} + S_i^{disp} \ge n_e + n_p$. Por ejemplo, en la pixelización HEALPix a $N_{side} = 32$ se trabaja con $12 N_{side}^2 = 12288$ píxeles y a esa resolución la máscara SEVEM³ descarta 3015 píxeles y utiliza 9273, de entre los cuales hay 4425 pares de puntos simétricos y 423 desparejados. Si se suma hasta $\ell_{max} = 95$, se obtiene $S_p^{disp} = 4559$, $S_i^{disp} = 4653$ y $S_p^{disp} + S_i^{disp} = 9212$. Como hay menos armónicos esféricos que puntos en la matriz, no será regular. Si se suma hasta $\ell_{max} = 96$, $S_p^{disp} = 4752$, $S_i^{disp} = 4653$ y $S_p^{disp} + S_i^{disp} = 9405 > 9273$, y ya es posible que la matriz sea regular, salvo que las simetrías adicionales en los puntos introduzcan pérdida de rangos.

Suponiendo que se ha sumado hasta ℓ_{max} suficientemente grande, tal que $S_p^{disp} + S_i^{disp} \ge n_e + n_p$, se toma ahora una colección de armónicos, con cierto número de ellos con ℓ par, $S_p \le S_p^{disp}$, y cierto número impar, $S_i \le S_i^{disp}$, y se construye una matriz cuadrada, de modo que $S_p + S_i = n_e + n_d$. Si se realizan las mismas combinaciones lineales que en caso anterior con las filas correspondientes a los

³En la figura 2.1 se puede apreciar la máscara SEVEM a una resolución mayor

3.1 Sobre el número de sumandos en el desarrollo de C

puntos simétricos emparejados de la matriz resultante, quedará:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{(n_e/2\times S_p)}^{par} & \mathbf{0}_{(n_e/2\times S_i)} \\ \mathbf{0}_{(n_e/2\times S_p)} & \mathbf{Y}_{(n_e/2\times S_i)}^{impar} \\ \mathbf{Y}_{(n_d\times S_p)}^{par} & \mathbf{Y}_{(n_d\times S_i)}^{impar} \end{pmatrix},$$
(3.29)

donde, por ejemplo, $\mathbf{Y}_{(n_e/2 \times S_p)}^{par}$ representa un bloque de $n_e/2$ filas y S_p columnas cuyos elementos son los armónicos esféricos de ℓ par calculados sobre la mitad independiente de los puntos simétricos. Si $S_p < n_e/2$, cada una de las primeras $n_e/2$ filas de la matriz tiene menos elementos no nulos, S_p , que filas hay en el bloque, de modo que han de ser combinación lineal entre sí y el determinante de la matriz global es cero. El mismo razonamiento se puede aplicar a las filas a las que pertenece el bloque $\mathbf{Y}_{(n_e/2 \times S_i)}^{impar}$. Por lo tanto, para que la matriz de la expresión 3.29 pueda ser invertible se ha de cumplir:

$$S_p \ge n_e/2, \ S_i \ge n_e/2,$$
 (3.30)

a cuenta de la simetría en los puntos, y

$$S_p + S_i = n_e + n_d,$$
 (3.31)

con carácter general, para que haya tantos armónicos esféricos distintos como el tamaño de la matriz.

Las expresiones anteriores establecen las condiciones que nos permiten encontrar el valor de ℓ_{max} mínimo necesario para que la matriz sea regular en un caso con simetría y con máscara.

Por último, se puede afrontar el cálculo del rango de la matriz, dados su tamaño, el número de puntos simétricos, el de puntos sin pareja simétrica y el ℓ_{max} elegido. Una vez que se han hecho las combinaciones lineales oportunas ya mencionadas anteriormente sobre las filas correspondientes a puntos con pareja simétrica (dando como resultado una matriz como la de la expresión 3.29), se puede calcular una cota superior del rango de la matriz sumando el rango de cada uno de los tres bloques en los que queda dividida. El superior, formado por $n_e/2$ filas, con un máximo de S_p elementos no nulos en cada una, tiene rango máximo mín $(n_e/2, S_p)$; el bloque central, con las mismas filas que la anterior y máximo de S_i elementos no nulos, de rango máximo mín $(n_e/2, S_i)$. El tercer bloque está formado por n_d filas, y como esas filas no participan de las combinaciones lineales con las que se construyen los bloques de ceros en las zonas de armónicos esféricos pares e impares en las filas correspondientes a puntos con pareja simétrica, se puede estudiar su contribución al rango desde la perspectiva de la matriz inicial, antes de las combinaciones lineales. Si se tiene en cuenta que la primera condición para que la matriz sea regular es que haya al menos tantos armónicos esféricos distintos como puntos en la matriz, y que, por lo tanto, se puede calcular la contribución al rango de las últimas filas en términos de cuántos armónicos distintos no usados les quedan disponibles, se puede concluir que el rango de la tercera parte de la matriz será $\min(n_d, L)$, siendo L el número de armóncios *libres*, $L = \max(0, S_p^{disp} - n_e/2) + \max(0, S_i^{disp} - n_e/2)$. Por lo tanto, sumando hasta ℓ_{max} , y con una matriz con n_e y n_d puntos, el rango será como máximo:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min(n_e/2, S_p^{disp}) + \min(n_e/2, S_i^{disp}) + \min(n_d, L)$$
(3.32)

con S_p^{disp} y S_i^{disp} , los de la expresión 3.28. Por ejemplo, de nuevo con la máscara SEVEM, con $\ell_{max} = 96$, como $S_p^{disp} = 4752$, $S_i^{disp} = 4653$ y $n_d/2 = 4425$, quedan libres 327 armónicos esféricos pares y 228

3 Estudio de la matriz de correlación

impares, de modo que hay colocar en armónicos pares entre un mínimo de 195 puntos desparejados por la máscara y un máximo de 327.

La expresión 3.32 generaliza las expresiones 3.14 y 3.27. Se comprueba en un caso sencillo, con 32 puntos y $\ell_{max} = 5$. Con esa ℓ_{max} , $S_p^{disp} = 14$ y $S_i^{disp} = 18$. Si a partir de los 192 puntos de la resolución $N_{side} = 4$ de HEALPix se toman los 16 primeros y se añaden esos mismos 16 puntos con todos los signos de sus componentes cambiados, se tienen 32 puntos simétricos dos a dos. La expresión 3.32 predice que el rango es 30 y, efectivamente, al comprobarlo se encuentra que es 30. El rango es 30 porque hay 16 puntos independientes, 18 armónicos impares y 14 pares: todos los puntos están cubiertos por los armónicos impares, pero no hay suficientes pares, 16 + 14 = 30. Si se toman los 17 primeros puntos y se añaden los opuestos de los 15 primeros, se tienen 32 puntos, con 15 parejas y dos desparejados. El rango teórico es 31, y coincide con el que se encuentra al calcularlo. La contribución de la zona par de la matriz es 14, la de la impar es 15 y la de las dos filas de puntos desparejados es 2. Si se toman los 18 primeros puntos y se añaden los inversos de los 14 primeros, se tienen 32 puntos con 14 parejas. El rango teórico es 32, 14 de la zona par, 14 de la impar y 4 de las 4 últimas filas, y coincide con el calculado.

3.2. El ruido en C regulariza la matriz

Si se considera que la medida de los mapas de temperatura reales, la señal, s, viene acompañada de un ruido, n, obtenemos el mapa de temperatura medido: x = s + n, con x de media cero. La matriz de correlación será:

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{x}\mathbf{x}^t \rangle = \langle (\mathbf{s} + \mathbf{n})(\mathbf{s} + \mathbf{n})^t \rangle = \langle \mathbf{s}\mathbf{s}^t \rangle + \langle \mathbf{s}\mathbf{n}^t \rangle + \langle \mathbf{n}\mathbf{s}^t \rangle + \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^t \rangle.$$
(3.33)

En el caso más usual se dan ciertas condiciones que simplifican notablemente la expresión anterior: si el ruido está descorrelacionado con la señal, los términos cruzados promedian cero; además, si el ruido no está correlacionado punto a punto, la matriz correspondiente al último elemento, $\langle \mathbf{nn}^t \rangle$, es diagonal, con la varianza del ruido en cada píxel en los elementos no nulos. Sumando desde ℓ_{min} hasta cierto ℓ_{max} , la expresión 3.3 se convierte en:

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{C}_{ij}^s + \mathbf{N}_{ij} = \sum_{\ell=\ell_{min}}^{\ell_{max}} \frac{2\ell+1}{4\pi} \mathbf{C}_{\ell} P_{\ell}(\vec{r}_i \vec{r}_j) + \sigma_i^2 \delta_{ij}, \qquad (3.34)$$

donde \mathbf{C}^s es la matriz de correlación de la señal, y **N**, con $\mathbf{N}_{ij} = \sigma_i^2 \delta_{ij}$, es la matriz del ruido.

Como cada una de las columnas de la matriz C es la suma de dos columnas, si se desarrolla por columnas su determinante, como se hizo en el apartado anterior, se llega a una expresión en la que aparece la suma de 2ⁿ determinantes. Uno de ellos tendrá solo las columnas de C^s , y será nulo o positivo en función de hasta dónde se haya sumado en ℓ ; otro tendrá solo las columnas de N, y será el determinante del ruido, que es positivo. El resto serán determinantes de matrices formadas en parte por columnas de C^s y en parte por columnas de N, que se pueden reordenar llevando los términos del ruido a las primeras filas y columnas, y calcular desarrollándolos por los adjuntos de las columnas. La contribución al determinante de la parte correspondiente al ruido es el producto de las varianzas en la diagonal, y resulta positiva; y la de la parte correspondiente a C^s es la de una matriz análoga a la propia C^s , pero calculada sobre un subconjunto de puntos, de modo que su determinante es, de nuevo, cero o positivo. Así que se tiene que los sumandos de los determinantes del desarrollo son nulos o positivos, y hay al menos uno (el del ruido) no nulo. Por lo tanto, si se introduce ruido, el determinante de C es positivo y mayor que el de C^s . El ruido regulariza la matriz C^s , si esta no lo es, y la hace más regular, si cabe, si ya lo es.

En la práctica, el ruido instrumental que se introduce en la medida de la temperatura de FCM es despreciable. Sin embargo, se puede utilizar lo estudiado anteriormente para introducir ruido artificial en el mapa que ayude a regularizar el problema. En este sentido, es necesario encontrar el nivel de ruido mínimo con el que se consigue este efecto numéricamente, porque no se quiere introducir más del necesario, ya que degrada los datos.

3.3. Comparación entre resultados teóricos y numéricos

En este apartado se contrastan los rangos que predicen las expresiones teóricas deducidas anteriormente con los encontrados en matrices calculadas numéricamente. Se utiliza un programa de cálculo simbólico, Mathematica en este caso, que permite determinar el rango de una matriz mediante la función MatrixRank. Como se verá a lo largo del apartado, los errores numéricos originados por los cálculos en coma flotante conducen en determinadas circunstancias a que se determinen rangos inferiores a los reales de las matrices. Para analizar esta cuestión, se recurre también al cálculo simbólico, dado que permite trabajar con expresiones exactas. En los casos en los que los cálculos con expresiones de ese tipo se vuelven imposibles, se las puede transformar en valores numéricos con el número de decimales exactos que se desee, calcular con diferentes precisiones y estudiar de este modo el efecto de los errores numéricos. Por otro lado, aunque a efectos prácticos el espectro de potencias juega un papel fundamental en el cálculo de C, el que la matriz sea regular no depende de este –salvo que que los coeficientes sean cero- como se observa en las expresiones del determinante, 3.9 y 3.19, y en las que acotan el rango máximo de la matriz. Por esta razón, los cálculos directos del rango con *Mathematica* se realizarán con un espectro de potencias en C, $C_{\ell} = 1$, para todos los valores de ℓ . Este no es el caso de más interés cosmológico, pero es la forma de centrar el análisis de la regularidad de ${f C}$ en el único aspecto del que teóricamente depende, ℓ_{max} , dando, además, el mismo peso a todos los armónicos esféricos en el desarrollo de C.

Para completar el enfoque anterior, se estudiará con el lenguaje de programación Fortran cómo afectan al rango ℓ_{max} y el ruido introducido a la matriz C, calculándola en el caso realista, con los coeficientes B_{ℓ}^2 que se introducen en el apartado 2.3, utilizando para el espectro de potencias el oficial de la misión Planck⁴. Una vez que se tiene C, con llamadas a subrutinas de librerías de cálculo algebraico, se calcula C⁻¹ y |CC⁻¹|. Se caracterizará lo regular que resulte C por la medida en que el determinante se diferencie de 1.

En el resto del apartado se muestran los resultados obtenidos con esas técnicas. Con el programa escrito en Fortran, en el que se utilizan subrutinas de la librería ScaLAPACK para los cálculos matriciales, ejecutado en el supercomputador Altamira, y con *Mathematica*, sobre un ordenador personal. Se estudia en qué medida la inversa de C está bien estimada, y directamente el rango de C con la función *MatrixRank* de *Mathematica*.

⁴El espectro de potencias utilizado se puede observar en toda una serie de gráficas en el capítulo siguiente, como por ejemplo la de la figura 4.3. A diferencia del mostrado en 1.2, en este trabajo solo se utiliza hasta $\ell_{max} = 128$, correspondiente al máximo ℓ a la resolución $N_{side} = 32$, que es, a su vez, la máxima a la que se calcula en este proyecto (matrices de 12288 filas).

3.3.1. Caso en el que no hay simetría en los puntos

Por ejemplo, tomando una colección de 192 puntos aleatorios sobre la esfera y calculando C con coeficientes C_{ℓ} , sumando desde $\ell = 2$ hasta cierto ℓ_{max} , se encuentran los rangos que aparecen en la tabla 3.5. Se observa que los cálculos en coma flotante a la precisión por defecto de la máquina (16 decimales) producen resultados incorrectos. Si se aumenta la precisión en los valores numéricos de partida (20, 30 y 40 decimales), los rangos de C se acercan a los teóricos.

ℓ_{max}		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Rango Teoría	5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	192	
	Máquina	5	12	21	32	45	57	68	78	89	99	109	117
Rango	20	5	12	21	32	45	58	68	78	93	103	110	124
según	30	5	12	21	32	45	60	77	96	117	133	147	164
decimales	40	5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	192

Tabla 3.5: Rango de la matriz de correlación en función de ℓ_{max} en el caso de 192 puntos sin simetría. Se observa que los valores numéricos se acercan a los teóricos descritos por la expresión 3.13 a medida que aumenta la precisión de los cálculos en coma flotante

3.3.2. PUNTOS CON LA SIMETRÍA DE HEALPIX

Los puntos de HEALPix son simétricos dos a dos. Para un número dado de puntos, es necesario sumar más lejos en ℓ_{max} que en el caso en el que no hay simetría. El valor de ℓ_{max} necesario se puede encontrar, dado n, con la expresión 3.27. En los siguientes apartados se estudia la concordancia entre los valores obtenidos en la práctica y los predichos por esa expresión.

Caso $N_{side} = 4$

A esa resolución la matriz tiene un tamaño 192×192 y de acuerdo a la expresión 3.27 es necesario sumar hasta $\ell = 14$. Si se prueba sumando hasta un valor de ℓ_{max} inferior al que en teoría se necesita, por ejemplo, $\ell_{max} = 13$, se encuentra, llamando, para abreviar, $d = \det(\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1})$, $d = \infty$. En el caso en el que se calcula **C** sumando hasta 14, se obtiene d = 0,99999999991914. De modo que en este caso se cumple la expresión y no hay desviaciones debidas a errores numéricos.

Caso $N_{side} = 8$

En este caso hay que sumar hasta $\ell = 28$. Si se prueba sumando hasta 27, se encuentra $d = \infty$, y sumando hasta 28, d = 0.999998495721473. Un resultado correcto, pero más alejado de 1 que en el N_{side} anterior.

Caso $N_{side} = 16$

A esta resolución se observan aparentes discrepancias entre los valores teóricos y los numéricos. En la tabla 3.6 se muestran los datos en la zona en la que la matriz se vuelve regular. En la segunda fila

3.3 Comparación entre resultados teóricos y numéricos

aparece el rango de C para cada ℓ_{max} de acuerdo a la expresión 3.27, en la tercera, el rango encontrado por *Mathematica* cuando se calcula C con la precisión de la máquina. El error numérico hace que los últimos sumandos no incrementen el rango de la forma esperada y es necesario sumar un poco más lejos para que la matriz sea regular; además, sorprendentemente produce rangos numéricos más altos que los teóricos en las seis primeras columnas. En la figura 3.1 se muestran los rangos teóricos y numéricos para valores de ℓ_{max} hasta 64.

ℓ_{max}	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
Rango teoría	2112	2205	2300	2397	2496	2597	2700	2805	2912	3018	3072
Rango Mathematica	2116	2209	2304	2401	2500	2600	2700	2798	2876	2929	2791

Tabla 3.6: Rangos teóricos y numéricos a la precisión de la máquina (16 decimales) en el caso $N_{side} = 16$ en la zona límite en la que la matriz se hace regular.



Figura 3.1: Rangos teóricos y numéricos, calculados con la precisión estándar, en el caso $N_{side} = 16$ en función de ℓ_{max} .

Se puede comprobar que las discrepancias en los rangos son un efecto numérico. En el caso de las seis primeras columnas de la tabla, repitiendo los cálculos con una precisión de cien decimales, se recuperan los rangos teóricos. Calculando C sumando hasta 55 con una precisión de hasta cien decimales, se encuentra un rango 3066; y sumando hasta 56, ya se alcanza el rango 3072 a esa precisión. Es de esperar que si se calcula con más precisión se obtenga el rango máximo con $\ell_{max} = 55$.

Como lo que interesa con fines prácticos es calcular con Fortran, se estudia este caso con ese lenguaje. En la tabla 3.7 se muestran los valores del determinante en función de ℓ_{max} . Se observa que es necesario sumar al menos hasta $\ell = 61$. Además, se aprecia cómo en general el determinante se acerca más a 1 cuanto más lejos se sume en ℓ .

ℓ_m	ax	55	56	57	58	59	60	61
d		0	0	0	0	$2{,}1610^{-258}$	-1,1110	³⁵ 0.99998929547683
	ℓ_{ma}	ıx		62		63	3	64
	d		1.000	00001	62920	8 1.0000000	0000143	0.999999999999104

Tabla 3.7: Prueba de regularidad de C en el caso $N_{side} = 16$ para diferentes valores de ℓ_{max} realizada con Fortran.

3.3.3. PUNTOS CON LA SIMETRÍA DE HEALPIX Y CON MÁSCARA

En el caso $N_{side} = 8$ la pixelización consta de 768 puntos. La máscara SEVEM elimina 154 y se trabaja con 614, de los cuales 590 forman 295 parejas de puntos simétricos y 24 son puntos sin compañero simétrico. En la tabla 3.8 se muestran los rangos en función de ℓ_{max} . En todos los casos coincide el rango según la expresión 3.32 y el encontrado por *Mathematica* calculando con la precisión de la máquina.

ℓ_{max}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Rango	5	12	21	32	45	60	77	96	117	140	165	
ℓ_{max}	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Rango	192	221	253	285	329	357	396	437	480	525	572	614

Tabla 3.8: Rango de la matriz C con la máscara SEVEM a $N_{side} = 8$ en función de ℓ_{max} . Solo aparece una fila de rangos porque el rango teórico y el numérico coincide en todos los casos.

En el caso $N_{side} = 16$, la máscara selecciona 2452 puntos. Hay 2364 puntos en 1182 parejas de puntos simétricos, y 88 desparejados. Ahora los errores numéricos introducen pérdida de rangos, como se muestra en los resultados de la tabla 3.9, en la que se han calculado los rangos con la precisión de la máquina.

ℓ_{max}	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Rango teórico	1677	1760	1845	1932	2021	2112	2205	2300	2397	2452	2452
Rango Mathematica	1677	1760	1845	1932	2021	2112	2202	2280	2339	2381	2413

Tabla 3.9: Rango de la matriz **C** con la máscara SEVEM a $N_{side} = 16$ en función de ℓ_{max} . Los cálculos numéricos están hechos con la precisión de la máquina. Los resultados según la teoría y los encontrados numéricamente no coinciden en varias ℓ_{max} , se debe a los errores en el cálculo numérico.

Para comprobar si la discrepancia en los rangos en las últimas columnas de la tabla 3.9 se debe a un fallo en la expresión 3.32 o a errores numéricos, se ha calculado C numéricamente con una precisión de 100 decimales y buscado su rango en los casos en los que se suma hasta 48 y hasta 49, se han encontrado los rangos 2397 y 2452, respectivamente; de modo que parece que las discrepancias se deben a errores numéricos.

3.3.4. RUIDO EN LA DIAGONAL DE C

De acuerdo a lo desarrollado en la sección 3.2, el ruido regulariza la matriz, pero como se ha visto en apartados anteriores, los errores numéricos introducen desviaciones respecto de la teoría. Es de esperar que en este caso el ruido a partir de cierto nivel regularice la matriz, y que por debajo de cierto valor, esa propiedad quede borrada por los errores de cálculo.

A la resolución $N_{side} = 1$ la matriz **C** es lo bastante pequeña como para que se pueda calcular de forma exacta su determinante. Si se calcula sumando hasta $\ell = 3$, el determinante es cero y el rango 11. Al añadir a esa matriz **C** una matriz de ruido con σ^2 en la diagonal principal y cero en el resto de los elementos y calcular el determinante de la suma, se encuentra un polinomio de grado 24 con todos los coeficientes positivos, con solo potencias pares de σ y sin término independiente. Como $\sigma^2 > 0$, el determinante no es cero.

Sumando hasta $\ell = 4$ y añadiendo ruido de la misma forma, el determinante es un polinomio como el anterior, pero con término independiente. No es nulo, independientemente del valor del ruido, y mayor cuanto mayor es el ruido.

Como el comportamiento anterior es independiente del tamaño de la matriz, es de esperar que suceda lo mismo en todas la resoluciones, y la única cuestión es el valor del ruido mínimo necesario para que no sea disuelto por los errores numéricos en los cálculos en coma flotante.

En la figura 3.2 se muestra en el eje de ordenadas el resultado de la expresión $-\log |(1 - |\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^{-1}||,$ que da la medida del orden de la cifra decimal en la que el determinante de $\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^{-1}$ se diferencia de 1, calculado con un programa escrito en Fortran para diferentes N_{side} y diferentes ruidos. En todos los N_{side} se ha calculado \mathbf{C} sumando hasta $\ell_{max} = 3N_{side}$, que está por debajo del ℓ_{max} que teóricamente hace regular la matriz. Se ha añadido un ruido a \mathbf{C} , sumando a los elementos de su diagonal un término proporcional a su propio valor, medido mediante una potencia de diez, de exponente f_r , factor ruido; es decir, se ha construido $\mathbf{C}_n = \mathbf{C} + diag(10^{f_r} \mathbf{C}_{ii})$. En el eje de abscisas se muestra el coeficiente del ruido, f_r , de signo negativo.



Figura 3.2: Medida de la cifra decimal en la que aparece la diferencia entre el determinante del producto $\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^{-1}$ y 1 para diferentes N_{side} en función del ruido introducido en la diagonal. Los números 4, 8, 16, 32 de la leyenda indican los N_{side} para los que se ha calculado. Para cada N_{side} , la línea comienza en el ruido a partir del que el programa obtiene un valor numérico para el determinante.

En el caso $N_{side} = 32$ se obtuvo el valor *Infinity* para el determinante cuando $f_r = -12$; lo mismo sucedió en $N_{side} = 16$, pero con $f_r = -13$; en el caso $N_{side} = 8$ sucedió para $f_r = -14$. En $N_{side} = 4$, con $f_r = -14$, se obtuvo un valor numérico 0.960630068193522. De modo que se encuentra que según el N_{side} hay un valor mínimo del factor ruido a partir del cual se pueden hacer cálculos y crece con el tamaño de la matriz. En la gráfica se observa cómo disminuye con el ruido la discrepancia entre el valor teórico del determinante y el valor obtenido en el cálculo. Además se observa que en términos generales cuanto más pequeño es el N_{side} , la línea va un poco más alta, lo que significa que se calcula mejor. Al ajustar a una recta cada línea, se obtuvieron los valores de la ordenada en el origen: 15.2, 14.5, 14.3 y 13.7 para los N_{side} 4, 8, 16 y 32, respectivamente.

En la figura 3.3 se muestran resultados análogos a los del caso anterior, pero esta vez habiendo calculado C sumando en cada N_{side} hasta el l_{max} mínimo para que de acuerdo a la expresión 3.27 resulte regular; $\ell_{max} = 14$, 28, 55 y 111 para los $N_{side} = 4$, 8, 16 y 32, respectivamente.

En la gráfica se observa que en el caso $N_{side} = 4$ el ruido afecta muy poco al valor del determinante, se debe a que sumando hasta $\ell = 14$ a esa resolución la matriz también es regular incluso en el cálculo

3 Estudio de la matriz de correlación



Figura 3.3: Cifra decimal en la desviación del determinante en el caso en que se calcula C sumando en ℓ hasta el valor mínimo para que sea regular de acuerdo a la expresión 3.27 para diferentes N_{side} . Los ejes y las leyendas representan los mismos conceptos que los de la figura 3.2.

numérico. En los otros N_{side} el ruido sigue siendo importante y determina de forma significativa la cifra decimal en el error. Se debe a que se está trabajando en un caso tan límite en ℓ_{max} que los errores numéricos hacen la matriz singular.

En las gráficas de la figura 3.4 se muestra para cada N_{side} la comparición del efecto del ruido en los dos ℓ_{max} anteriores.



Figura 3.4: Resultado del determinante en cuatro resoluciones y dos ℓ_{max} en cada resolución.

En las dos primeras resoluciones se observa cómo claramente la línea en la que se ha sumado más lejos va por encima de la otra, de modo que a mismo ruido introducido, el valor del determinante es mejor si ℓ_{max} es mayor. Sin embargo, en las gráficas correspondientes a las dos resoluciones más altas se aprecian líneas que se cruzan y superponen, como el efecto del ruido es semejante, pese a que dentro de cada resolución están calculadas con distinto ℓ_{max} , las matrices han de ser semejantes. Eso significa que antes de introducir el ruido todavía están algo lejos de ser regulares.

En la figura 3.5 se muestra en el caso de la resolución $N_{side} = 16$ con más detalle el efecto de la combinación ruido y ℓ_{max} . Se observa que las matrices producen mejores resultados cuanto más lejos

3.3 Comparación entre resultados teóricos y numéricos

se haya sumado en ℓ . Los resultados también mejoran al introducir ruido, pero si se ha sumado lo bastante lejos, el ruido pierde relevancia. Las matrices en las que se ha sumado hasta 62 y 64 son regulares sin necesidad de introducirlo, pero tiene más efecto en la primera, de la que se puede decir que es regular menos robustamente. Las otras tres matrices, sumando hasta 48, 55 y 60, no son regulares sin ruido y son más sensibles a este. En definitiva, se observa que la cuestión de la regularidad de una matriz, que en el plano teórico es cualitativa, al resolverla con cálculos numéricos se transforma en un aspecto cuantitativo, y se alcanza gradualmente. En un caso práctico se puede medir la regularidad de la matriz, por ejemplo, con la técnica del determinante y al utilizarla para hacer cálculos de interés, dado que no se puede trabajar en términos de sí o no al hablar de regularidad, imponer cierta cota mínima de error en el criterio de decisión para cuantificar lo cualitativo, que se podrá alcanzar con varias combinaciones de ℓ_{max} mínima y ruido.



Figura 3.5: Efecto del ruido en el caso $N_{side} = 16$ en matrices calculadas con diferentes ℓ_{max} .

Capítulo 4

VALIDACIÓN DEL MÉTODO QML

En este capítulo se somete a prueba el método en diferentes situaciones, aplicándolo sobre una colección de mapas simulados de espectro de potencias conocido. Se probará en casos con y sin máscara, con y sin ruido, y con máscara y ruido combinados. En cada prueba se obtienen varios elementos de análisis: la colección de valores medios de los coeficientes del espectro de potencias, que QML encuentra aplicado en cada uno de los mapas y que se puede comparar con el espectro utilizado para simularlos; dos formas de los errores en los coeficientes, desviación estándar sobre los valores encontrados y covarianza teórica (expresión 2.10), que en los casos en los que se calcula sobre todo el cielo se comparan con la varianza cósmica y, en su caso, con la desviación estándar de los coeficientes correspondientes al pseudo-espectro estimado por HEALPix; la lista de escalares $x^t C^{-1}x$, calculados sobre cada uno de los mapas x, que se compara con una distribución χ^2 ; el valor de $|C^{-1}C|$ y, por último, la función ventana y la mezcla de coeficientes reales en coeficientes estimados, que permite analizar el efecto de la máscara y encontrar el ℓ límite hasta el que se puede calcular.

Los mapas se simulan con HEALPix, que puede generar mapas de temperatura a partir de un espectro de potencias. Dados los coeficientes C_{ℓ} , genera aleatoriamente coeficientes $a_{\ell m}$, gaussianos y de media cero, y a partir de estos, el mapa con el que se corresponden de acuerdo a la expresión 1.2. La pixelización de la esfera introduce una limitación en la simulación de mapas: a cada resolución hay una distancia angular mínima entre los píxeles (la que se da entre los vecinos más cercanos), por lo tanto, hay un límite en la escala de variación angular mínima que puede registrar la pixelización a cada N_{side} . En HEALPix se recomienda no simular mapas con términos en el espectro de potencias con $\ell \geq 3N_{side}$. Aunque puede hacerse, sabiendo que no se generarán mapas que se ajusten del todo al espectro de potencias simulado en los ℓ altos.

De acuerdo a la teoría, la lista de valores $\mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$ sigue la distribución χ^2 con tantos grados de libertad como la dimensión del problema (número de píxeles). Este criterio y el de $|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}|$ no nos hablan del método QML exactamente, sino de la calidad de \mathbf{C} y los cálculos, el segundo, y sobre la consistencia entre los mapas y la matriz \mathbf{C} tal como se ha calculado, el primero.

4.1. CASO SIN MÁSCARA Y SIN RUIDO

La primera prueba se realiza a la resolución $N_{side} = 16$, sin máscara, sobre 2000 mapas simulados utilizando HEALPix, sin ruido. Los mapas y **C** se simulan y calcula con $l_{max} = 64$, un valor más alto que el recomendado por HEALPix a esta resolución, pero necesario para que **C** sea regular y el test χ^2 pueda resultar positivo. Se obtiene $|\mathbf{CC}^{-1}| = 1,00058055671168$.

En la figura 4.1a se muestra el histograma de $\mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$, que se espera se corresponda con el de una distribución χ^2 con un número de grados de libertad igual a la dimensión del problema, 3072. El test de Kolmogorov-Smirnov sobre esta cuestión da como resultado que no se debe rechazar la hipótesis de que los valores corresponden a esa distribución¹. En la figura 4.1b se muestra la función ventana para diferentes valores de ℓ . Como no hay máscara, el análisis se hace sobre toda la esfera, y no hay mezcla de coeficientes en las escalas grandes. A medida que ℓ se hace mayor, la escala de análisis es más pequeña, como el grado de pixelización elegido no permite analizar con precisión por debajo de ciertas escalas, los coeficientes correspondientes a ℓ grande resultan mezclados, como se observa en los pesos de los $D_{\ell'}$ sobre $\langle \hat{D}_{\ell} \rangle$ en los casos $\ell = 50$ y $\ell = 60^2$, debido al aliasing.





(a) Histograma de los resultados del cálculo $\mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$ sobre los 2000 mapas simulados. El test de probabilidad indica que se debe aceptar la hipótesis de que esos datos pueden constituir una muestra de 2000 elementos producidos por una distribución χ^2 de 3072 grados de libertad.



Figura 4.1: Histograma y función ventana

En la figura 4.5a se muestran los resultados encontrados por HEALPix a partir de los coeficientes $a_{\ell m}$ calculados por el método de la transformada, expresión 1.3. Se observa que se recuperan con mucha precisión los coeficientes a ℓ bajo, pero introduce mucho error a partir de $\ell \gtrsim 30$.

En la figura 4.2 se muestra la gráfica de cuatro formas del error en el espectro de potencias: varianza cósmica, error teórico en QML de acuerdo a la expresión 2.10, desviación estándar sobre los 2000 coeficientes de QML y desviación estándar de HEALPix. De nuevo se observa concordancia a ℓ bajo, HEALPix se desvía primero, los errores del método QML se mantienen en el límite impuesto por la varianza cósmica hasta casi $\ell = 50$ y en todos los ℓ el error encontrado en la simulación coincide con el error teórico predicho por el método.

¹Para que el test dé un resultado positivo se necesita que la matriz **C** sea lo bastante robusta como para que resulte regular en el cálculo numérico y que los mapas y la matriz estén simulados y calculados con el mismo espectro de potencias. En caso de introducir ruido, tiene que ser el mismo en **C** y en los mapas.

²Ver sección 2.3

4.1 Caso sin máscara y sin ruido



Figura 4.2: Comparativa de errores en la estimación del espectro de potencias: desviaciones estándar de los coeficientes resultantes a partir de 2000 simulaciones, predicción teórica del método QML y límite de la varianza cósmica.

En la figura 4.3 se muestran los resultados del QML hasta $\ell = 64$. Se observa un alto grado de concordancia y que los errores en los coeficientes están dentro del límite impuesto por la varianza cósmica hasta casi $\ell = 50$. Además, como en este caso se ha calculado con información obtenida sobre la esfera completa, la desviación y el error en ℓ es pequeño hasta $\ell = 40$, a partir de ahí las posiciones horizontales de los coeficientes del espectro de potencias se empiezan a confundir. A partir de $\ell = 50$ el error en los coeficientes supera los límites de la varianza cósmica. El exceso de error se debe a que no hay suficiente información en los mapas a $\ell \geq 3N_{side}$ por el problema del límite en la escala de variación mínima que admite una pixelización, este fenómeno también afecta a los resultados de HEALPix, figura 4.5a, apareciendo antes.



Figura 4.3: Resultados QML en el caso sin máscara y sin ruido. Los puntos azules representan los coeficientes del espectro de potencias encontrados por QML; las barras de error verticales, la dispersión en los coeficientes sobre los 2000 mapas; las barras horizontales, el error en la determinación de ℓ en cada coeficiente. La línea de color rojo representa el espectro de potencias que se ha simulado en los mapas. Las líneas naranjas muestran los límites en el error a causa de la varianza cósmica.

4 Validación del Método QML

4.2. CASO CON MÁSCARA ECUATORIAL

La siguiente prueba se realiza a la misma resolución que en el caso anterior, sin ruido y aplicando una máscara de 30° respecto a la zona ecuatorial, descartando todos los puntos de la pixelización que están a una distancia inferior a 15° del ecuador. En un caso práctico una máscara de este estilo puede ser útil para quitar la contaminación en el plano de la galaxia. A la resolución de trabajo, $N_{side} = 16$, hay 3072 puntos en la pixelización. Al aplicar la máscara el número de puntos útiles se reduce a 2240. Como hay que alcanzar un rango menor que en el caso sin máscara, se puede sumar hasta un valor menor de ℓ . De acuerdo a la expresión 3.27, basta con sumar hasta 47, pero para mantener un margen de seguridad frente a los errores numéricos se sumará hasta 55; se obtiene $|\mathbf{CC}^{-1}| = 1,00017417099141.$

El test estadístico sobre $\mathbf{x}^t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$ confirma que se corresponde con una distribución χ^2 de 2240 grados de libertad. En la figura 4.4a se muestra la función ventana. Al aplicar la máscara se mezclan los coeficientes en todas las escalas, como se puede observar en los pesos en todas las ℓ representadas. En la figura 4.4b se muestran los errores calculados con las mismas cuatro técnicas del caso anterior. El error producido por QML sigue siendo el esperado teóricamente, igual que en el caso anterior; pero se separa de la varianza cósmica un poco antes. Los errores de HEALPix son peores.



(a) Funciones Ventana con máscara ecuatorial de 30° su- (b) Comparativa de errores en función de ℓ mando en **C** hasta $\ell_{max} = 55$. Se muestra la función en cuatro casos. para los seis valores de ℓ de la leyenda.

Figura 4.4: Histograma y función ventana

En la figura 4.5b se muestran los resultados obtenidos por HEALPix. Al aplicar una máscara se descartan puntos, y ya no se calcula la transformada sobre toda la superficie de la esfera, con lo que se destruye la propiedad de ortogonalidad de los armónicos esféricos, y se introducen correlaciones. Por otro lado, la presencia de la máscara introduce cambios abruptos en la señal y hace que se traslade potencia de las escalas grandes a las pequeñas. Para seguir utilizando la técnica de la transformada es necesario aplicar métodos sofisticados para corregir su efecto en los D_{ℓ} estimados.

Por último, en la figura 4.6 se muestran los resultados completos obtenidos con el método QML: estimación de los coeficientes D_l , error en el coeficiente y error en la propia determinación del valor de ℓ originado por la mezcla de coeficientes.



(a) Resultados obtenidos por HEALPix en una simulación de 2000 mapas calculados con el método de la transformada sobre la superficie de la esfera. La línea de color rojo muestra el espectro de potencias utilizado para simular los mapas; la barras verticales, la desviación estándar de los coeficientes.



(b) Resultados obtenidos por HEALPix en una simulación de 2000 mapas calculados con el método de la transformada en una situación con máscara. La presencia de la máscara destruye las propiedades de ortogonalidad de los armónicos esféricos y traslada potencia a las escalas pequeñas.

Figura 4.5: Resultados de HEALPix sin máscara, y con máscara ecuatorial de 30º



Figura 4.6: Resultados finales QML considerando los errores en los D_ℓ estimados y en la propia determinación de ℓ

4.3. CASO CON LA MÁSCARA SEVEM

La siguiente prueba se realiza en las mismas condiciones que el caso anterior, pero aplicando la máscara SEVEM³. En el apartado 3.3.3 de la página 26 se estudió hasta dónde es necesario sumar en este caso y se encontró que teóricamente basta con sumar hasta 50, pero se comprobó que calculando a la precisión de la máquina no se alcanzaba el rango máximo con ese ℓ_{max} . Para ganar margen, se simulan los mapas y se calcula C sumando hasta 60, se obtiene $|CC^{-1}| = 0,999999834407007$. El test estadístico confirma que se corresponde con una distribución χ^2 de 2452 grados de libertad. Como el método del pseudo-espectro no funciona correctamente en casos con máscara, en este apartado solo se muestran los resultados del QML.

En la figura 4.7a se muestra la función ventana en siete casos. Se observa que hay mezcla de coe-

 $^{^3 \}mathrm{En}$ la figura 2.1 se muestra la máscara SEVEM a resolución $N_{side} = 2048.$

4 Validación del Método QML

ficientes en todas las escalas. A su derecha, figura 4.7b se muestran los errores. En la figura 4.8, la gráfica de los coeficientes estimados por QML.



(a) Funciones Ventana con la máscara SEVEM a $N_{side} =$ 16. Se muestra la función para los seis valores de ℓ de la leyenda.

Figura 4.7: Función ventana y errores.



Figura 4.8: Resultados finales QML considerando los errores en los D_{ℓ} estimados y en la propia determinación de ℓ

Si se comparan los resultados de la estimación de los coeficientes en este caso y en el anterior con máscara ecuatorial, se observa que en los últimos coeficientes los errores en la estimación y los errores en ℓ son bastante mayores. Este efecto aparece de manera notable en los últimos cinco valores de ℓ , desde 51 hasta 60. La diferencia se debe a que con la máscara SEVEM se trabaja con más puntos que con la máscara ecuatorial del caso anterior. Ha sido necesario sumar más lejos en el cálculo de C, si se quiere evitar introducir ruido para regularizar la matriz, y cabe calcular en más valores de ℓ ; y cuanto más alto es el valor, peor es el resultado, por el problema de la falta de resolución de la pixelización a escalas angulares tan pequeñas como exigen esos valores de ℓ . Si observamos las dos gráficas hasta $\ell = 50$, son prácticamente iguales.

4.4. CASO CON RUIDO Y SIN MÁSCARA

En este caso se estudia el efecto del ruido en una situación sin máscara, de nuevo en $N_{side} = 16$. Como se estudió en el apartado anterior, el ruido regulariza la matriz de correlación, de modo que no es necesario sumar hasta un ℓ muy elevado. Sumando en **C** hasta $\ell = 48$ e introduciendo ruido

en la diagonal como se hizo en el apartado anterior en un factor $f_r = 10^{-8}$, se encuentra $|\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}| =$ 0,999998161359731. El método se aplica sobre 2000 mapas simulados dentro del límite de HEALPix, $\ell_{max} = 48$, y se les añade ruido gaussiano de media cero de la misma intensidad del introducido en la diagonal de C. El test χ^2 con 3072 grados de libertad resulta positivo.

En las figuras 4.9a y 4.9b se muestran las gráficas de la función ventana y los errores. Ahora la función ventana es una delta de Kronecker en todas las ℓ .



(a) Función ventana sobre toda la esfera con ruido.

Figura 4.9: Función ventana y errores.

En la figura 4.10 se muestran los resultados del QML en este caso. Se observa muy buena correspondencia entre el espectro de potencias simulado y el obtenido, y entre los errores encontrados y el límite teórico mínimo. Como el ruido introducido, tanto en los mapas como en la matriz de correlación, tiene un nivel muy bajo (una relación 10^{-8} : 1 en la diagonal de C), no degrada los resultados.



Figura 4.10: Resultados finales QML considerando los errores en los D_ℓ estimados y en la propia determinación de ℓ .

4.5. CASO CON RUIDO Y CON MÁSCARA

Termina esta serie de pruebas combinando ruido y la máscara SEVEM en la resolución $N_{side} = 16$, sumando hasta $\ell = 48$ y con factor ruido $f_r = 10^{-10}$, se obtiene $|\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}| = 0,999998947367773$. De nuevo se simulan 2000 mapas y se añade ruido gaussiano. El test χ^2 también resulta positivo.

En las figuras 4.11a y 4.11b se muestran las gráficas de la función ventana y los errores. La función ventana se ha alejado un poco de las delta de Kronecker del caso anterior, pero aún así el ruido contrarresta bastante el efecto de la máscara.



Figura 4.11: Función ventana y errores.

En la figura 4.12 se muestran los resultados del QML en este caso. Se observa una muy buena correspondencia entre el espectro de potencias simulado y el obtenido y entre los errores encontrados y el límite teórico mínimo.



Figura 4.12: Resultados finales QML considerando los errores en los D_{ℓ} estimados y en la propia determinación de ℓ .

4.6. Efectos en ℓ de la máscara y el ruido

En la sección 2.3 de la página 8 se definió la función ventana como la medida de los pesos que hay que asignar a los términos del espectro de potencia real en el promedio con el que se calcula el espectro estimado, $\langle \hat{D}_{\ell} \rangle = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} D_{\ell'}$. Al calcular el promedio se mezclan varios ℓ' en cada ℓ , lo que hace que el ℓ objetivo se traslade a otro valor, que vamos a denominar ℓ^* . Se puede escribir

 $\langle \hat{D}_{\ell^*} \rangle = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} D_{\ell'}$, con la función $\ell^*(\ell) = \sum_{\ell'} \tilde{\mathbf{W}}_{\ell\ell'} \ell'$. En la figura 4.13 se muestran los valores de las diferencias extremas entre ℓ y ℓ^* , $\ell^* + \Delta \ell^* - \ell$ y $\ell^* - \Delta \ell^* - \ell$, para cada ℓ en los cinco casos anteriores. Se observan cómo afectan a las diferencias entre ambas ℓ la máscara y el ruido a diferentes escalas.



Figura 4.13: Discrepancias entre ℓ y ℓ^* en los cinco casos.

Capítulo 5

Aplicación a productos de la colaboración Planck

La colaboración Planck ofrece una amplia colección de resultados públicos, entre los que se encuentran varios mapas de anisotropías de la temperatura del FCM (SMICA, NILC, SEVEM y COMMAN-DER) obtenidos con distintas técnicas de combinación de los canales de observación y eliminación de contaminantes, y el mejor ajuste del espectro de potencias del FCM. En esta sección se aplica el método QML al mapa obtenido con el método SEVEM y se comparan los resultados con los del mejor ajuste. [1][3]

En la figura 1.1 de la página 3 se muestra el mapa SEVEM a una resolución $N_{side} = 2048$. Tras suavizarlo, degradarlo hasta $N_{side} = 32$ (12280 puntos), aplicarle la máscara

asociada a esta elaboración del mapa de anisotropías, que deja 9273 puntos útiles, y aplicarle el método QML con una matriz C construida sumando en ℓ hasta 128 y añadiendo el ruido anisótropo asociado a la versión SEVEM del mapa de anisotropías, se encuentra el espectro de potencias que se muestra y compara con el oficial de la misión en la figura 5.1.

Se observa muy buena concordancia entre los resultados del QML y los oficiales de Planck. Las dos líneas siguen la misma estructura de picos y estos tienen más o menos la misma intensidad. Las diferencias se deben a que lo representado se corresponde con el resultado de dos análisis diferentes de mapas no exactamente iguales, con diferentes técnicas de análisis y diferentes máscaras. Por otro lado, hasta $\ell = 50$ hay 11 coeficientes que caen fuera de los límites de la varianza cósmica, eso significa que el 71 % cae dentro, muy cercano al 68 % que abarca el margen 1 σ en una gaussiana, que es lo que representa la varianza cósmica.

En la figura 5.2 se muestran superpuestos los resultados obtenidos con QML aplicado sobre el mapa SEVEM filtrado con la máscara SEVEM superpuestos sobre los publicados en [4] (figura 34), obtenidos mediante la aplicación del método QML sobre los diferentes mapas que se indican en la gráfica.

5 Aplicación a productos de la colaboración Planck



Figura 5.1: Resultados del método QML, en color rojo, al aplicarlo al mapa SEVEM a la resolución $N_{side} = 32$ con máscara y ruido anisótropo, frente a los de la colaboración PLANCK, en azul. La línea en color naranja muestra los D_{ℓ} utilizados para construir **C**; en color verde, los límites en el error según la varianza cósmica.



Figura 5.2: Resultados QML sobre mapa SEVEM superpuestos sobre los publicados en el artículo [4] (figura 34.). La línea en color negro representa el mejor ajuste del espectro de potencias; la banda gris, el error en la estimación.

Se observa que la línea correspondiente a los resultados desarrollados en este trabajo prácticamente cae sobre la línea verde de los resultados del artículo (la que se corresponde con el análisis del mapa SEVEM). Hay algunas pequeñas diferencias que se pueden atribuir a diferencias en la implementación específica del método y la máscara utilizada.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este proyecto se ha desarrollado el método cuadrático de máxima verosimilitud (QML) para la estimación del espectro de potencias del fondo cósmico de microondas a partir de mapas de temperatura. Se ha estudiado la matriz de covarianza de temperaturas, uno de los aspectos esenciales del método; en particular, las condiciones que se han de dar, en cuanto al número de sumandos que se necesitan en su desarrollo o al ruido que se introduce, para que resulte regularizada e invertible. Se han encontrado una serie de expresiones que establecen la condición necesaria que ha de darse en cuanto al número de sumandos para que sin la ayuda de ruido la matriz sea regular.

• Si se trabaja con *n* puntos sobre la superficie de la esfera sin ninguna simetría especial entre ellos. Siendo ℓ_{max} el ℓ más alto hasta el que se suma en el desarrollo de C, se verifica:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min(n, \ell_{max}^2 - \ell_{min}^2 + 2\ell_{max} + 1)$$

• Si se trabaja con *n* puntos pares y se cumple que para cada punto hay otro en el conjunto que apunta en la misma dirección del espacio, pero en sentido contrario, se cumple:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min\left(\sum_{\substack{\ell=2\\ \ell \ par}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, n/2\right) + \min\left(\sum_{\substack{\ell=2\\ \ell \ impar}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, n/2\right).$$

Si se trabaja con n puntos sobre la superficie de la esfera, entre los que hay np puntos con la simetría del caso anterior y nd es el número de puntos sin esa propiedad, n = ne+nd, se cumple la expresión, que contiene a las dos anteriores:

$$Rango(\ell_{max}) \le \min(n_e/2, S_p^{disp}) + \min(n_e/2, S_i^{disp}) + \min(n_d, L),$$

siendo

$$S_p^{disp} = \sum_{\substack{\ell=2\\\ell \ par}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1, \ S_i^{disp} = \sum_{\substack{\ell=2\\\ell \ impar}}^{\ell_{max}} 2\ell + 1 \ ,$$
$$L = \max(0, S_p^{disp} - n_e/2) + \max(0, S_i^{disp} - n_e/2).$$

Se ha establecido que el *menor o igual* de las expresiones anteriores se debe a que puede darse el caso de que los puntos con los que se trabaje tengan una disposición tal que dé lugar a filas linealmente dependientes, aun cuando se haya sumado hasta un ℓ suficientemente alto, y/o a que los errores numéricos, inevitables al trabajar en coma flotante, introduzcan pérdida de rangos.

6 Conclusiones

También se ha demostrado teóricamente que la introducción de ruido en la matriz de correlación la regulariza, y se ha analizado cómo esa propiedad teórica se materializa en el cálculo numérico a diferentes resoluciones y con diferente número de sumandos en C. La tabla siguiente puede servir como referencia: se muestra, para cuatro resoluciones, la cifra decimal en la que el determinante del producto de la matriz de correlación con ruido, C_n , por su inversa se diferencia de 1, en función del ruido introducido en la diagonal, en el caso en que se calcula C sumando hasta $3N_{side}$. El parámetro que da la medida del ruido introducido, f_r , tiene el significado que se explica en el apartado 3.3.4 de la página 26, $C_n = C + diag(10^{f_r}C_{ii})$, donde C es la matriz antes de introducirle ruido.

-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
1	2	3	5	5	7	7	8	9	10	11	13	14	14	14
NaN	1	3	4	5	6	7	8	9	9	11	12	13	13	14
NaN	NaN	3	3	4	5	8	7	9	10	10	12	13	13	14
NaN	NaN	NaN	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13
	-14 1 NaN NaN NaN	-14 -13 1 2 NaN 1 NaN NaN NaN NaN	-14 -13 -12 1 2 3 NaN 1 3 NaN NaN 3 NaN NaN NaN	-14 -13 -12 -11 1 2 3 5 NaN 1 3 4 NaN NaN 3 3 NaN NaN NaN 3	-14 -13 -12 -11 -10 1 2 3 5 5 NaN 1 3 4 5 NaN NaN 3 3 4 NaN NaN 3 3 4	-14 -13 -12 -11 -10 -9 1 2 3 5 5 7 NaN 1 3 4 5 6 NaN NaN 3 3 4 5 NaN NaN 3 3 4 5 NaN NaN NaN 3 4 5	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 1 2 3 5 5 7 7 NaN 1 3 4 5 6 7 NaN NaN 3 3 4 5 8 NaN NaN NaN 3 4 5 6	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 1 2 3 5 5 7 7 8 NaN 1 3 4 5 6 7 8 NaN NaN 3 3 4 5 8 7 NaN NaN 3 3 4 5 6 7	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 1 2 3 5 5 7 7 8 9 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 NaN NaN 3 4 5 6 7 9 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 1 2 3 5 5 7 7 8 9 10 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 9 NaN NaN 3 4 5 8 7 9 10 NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 9 NaN NaN 3 4 5 6 7 9 10 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 1 2 3 5 5 7 7 8 9 10 11 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 9 11 NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 9 11 NaN NaN 3 4 5 8 7 9 10 10 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 1 2 3 5 5 7 7 8 9 10 11 13 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 9 11 12 NaN NaN 3 4 5 8 7 9 10 10 12 NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12 NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 1 2 3 5 5 7 7 8 9 10 11 13 14 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 9 11 12 13 NaN NaN 3 4 5 8 7 9 10 10 12 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	-14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 5 5 7 7 8 9 10 11 13 14 14 NaN 1 3 4 5 6 7 8 9 9 11 12 13 13 NaN NaN 3 4 5 8 7 9 10 10 12 13 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12 13 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 10 12 13 13 NaN NaN NaN 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Tabla 6.1: Efecto del ruido en la cifra decimal en la que $|\mathbf{C}_n^{-1}\mathbf{C}_n|$ se diferencia de 1

Caso en el que ${\bf C}$ está calculada sumando hasta $3N_{side}$

NaN: no se obtuvo un resultado numérico al calcular el determinante

Se han analizado los resultados que se obtienen con método QML al aplicarlo a mapas simulados con HEALPix; en casos con máscara y sin máscara, con ruido y sin ruido, y con máscara y ruido combinados. Se ha comprobado que en todos los casos se encuentra una estimación del espectro de potencias en muy buena concordancia con el introducido en las simulaciones, y unos errores dentro de los márgenes teóricos esperados. El método funciona adecuadamente tanto a cielo completo como con máscara, y con y sin ruido.

Por último, se ha aplicado el método a uno de los productos de la misión Planck, una de las colecciones de datos de la temperatura del fondo cósmico de microondas más precisas de las que se dispone en la actualidad; en concreto, al mapa de temperatura obtenido mediante el método SE-VEM. Se encuentra una estimación concordante con los resultados oficiales de la misión, con ligeras diferencias atribuibles a corresponderse con resultados obtenidos con diferentes técnicas y sobre diferentes mapas limpios de un mismo fondo cósmico medido. También se ha hecho una comparación más comprometida con la estimación obtenida dentro de la misión Planck utilizando también el método QML sobre los mapas oficiales de la colaboración. Se encuentra un resultado que concuerda incluso mejor que el del caso anterior; las discrepancias entre ambas estimaciones son menores y, en particular, entre la obtenidas en este proyecto a partir del mapa SEVEM y por la colaboración Planck sobre el mismo mapa.

Bibliografía

- ESA. Planck explanatory supplement. http://wiki.cosmos.esa.int/planckpla/ index.php/Main_Page.
- [2] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelman. HEALPix – a Framework for High Resolution Discretization, and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. *Astrophys.J.*, 622:759–771, 2005.
- [3] Planck Collaboration. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *A&A*, 2014, en imprenta.
- [4] Planck Collaboration. XV. CMB power spectra and likelihood. A&A, 2014, en imprenta.
- [5] Max Tegmark. How to measure cmb power spectra without losing information. Phys. Rev., 1996.
- [6] E. L. Wright, G. F. Smoot, A. Kogut, G. Hinshaw, L. Tenorio, C. Lineweaver, C. L. Bennett, and P. M. Lubin. Comments on the statistical analysis of excess variance in the COBE differential microwave radiometer maps. *ApJ*, 420:1–8, January 1994.