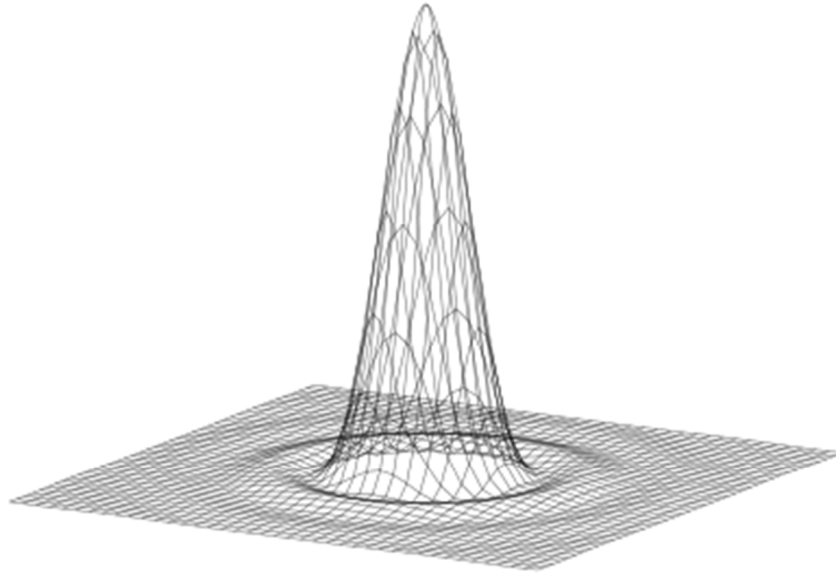


ANÁLISIS DE FILTROS DE FASE PARA SUPERRESOLUCIÓN DE PERFIL SUPERGAUSSIANO



TRABAJO FIN DE CARRERA

Licenciatura en Física

Autor: J. Pablo Cabello García

Dirigido por: Manuel Pérez Cagigal

Co-director: Pedro J. Valle Herrero



Octubre 2014

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

- 1.1. PSF
- 1.2. CRITERIO DE RAYLEIGH
- 1.3. SUPERRESOLUCIÓN
- 1.4. PROBLEMA CON LOS FILTROS BINARIOS DE FASE Y PROPUESTA DE SOLUCIÓN
- 1.5. OBJETIVOS

2. FILTROS PARA SUPERRESOLUCIÓN

- 2.1. MÁSCARAS DE AMPLITUD
- 2.2. MÁSCARAS DE FASE
- 2.3. TEORÍA PARAXIAL
- 2.4. FIGURAS DE MÉRITO
- 2.5. ANÁLISIS DE LAS FIGURAS DE MÉRITO

3. MÁSCARAS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO

- 3.1. MÁSCARAS DE FASE BINARIAS
- 3.2. FUNCIÓN SUPERGAUSSIANA
- 3.3. SIMULACIÓN DEL SISTEMA CON MÉTODOS NUMÉRICOS

4. RESULTADOS

- 4.1. FILTROS BINARIOS DE FASE
- 4.2. STREHL Y GANANCIA EN FILTROS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO
- 4.3. INTENSIDAD DE LÓBULO EN FILTROS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO

5. CONCLUSIONES

6. REFERENCIAS

1.- INTRODUCCIÓN

Podemos encontrar sistemas ópticos realizando múltiples funciones tanto para aplicaciones domésticas como comerciales. Y uno de los aspectos más importantes que atañen a estos dispositivos es el control de la distribución de la intensidad lumínica del sistema, que puede variar notablemente la eficacia del montaje. Un ejemplo importante es el aumento de la resolución transversal, consistente en minimizar el tamaño de la imagen de un objeto puntual, que nos permite obtener mejores resultados en campos como la microscopía, la astronomía o el almacenamiento óptico de datos. [1]

En muchos casos no podemos recurrir a modificar las propiedades del sistema tales como la anchura de la pupila o la longitud de onda utilizada, por lo que si queremos modificar la distribución lumínica debemos valernos de otras técnicas. Una de las más estudiadas es la utilización de filtros en la pupila del sistema. Estos filtros, al principio se basaban en perfiles de amplitud, pero actualmente se han utilizado perfiles tanto de amplitud como de fase e incluso mixtos. Además, podemos encontrar máscaras de perfil continuo o discreto, predominando estos últimos por combinar unos buenos resultados con la simplicidad de su fabricación. Incluso existen máscaras que modifican sus propiedades de forma dinámica utilizando polarizadores o moduladores espaciales de luz (SLM).

También cabe añadir que una de las grandes ventajas de las máscaras de pupila es que pueden estudiarse fácilmente mediante un procedimiento analítico, lo que facilita el ensayo de nuevos diseños. Este método está basado en una serie de figuras de mérito, que nos permite caracterizar la distribución luminosa del sistema.

1.1.- PSF

La PSF (*point spread function* o función de dispersión de punto) es la respuesta de un sistema óptico a una fuente puntual, es decir, la distribución de intensidad luminosa que proporciona el sistema por cada objeto puntual. En un sistema óptico perfecto la imagen de un punto no es otro punto sino una distribución luminosa que corresponde al patrón de Airy, debido al fenómeno de difracción. [2]

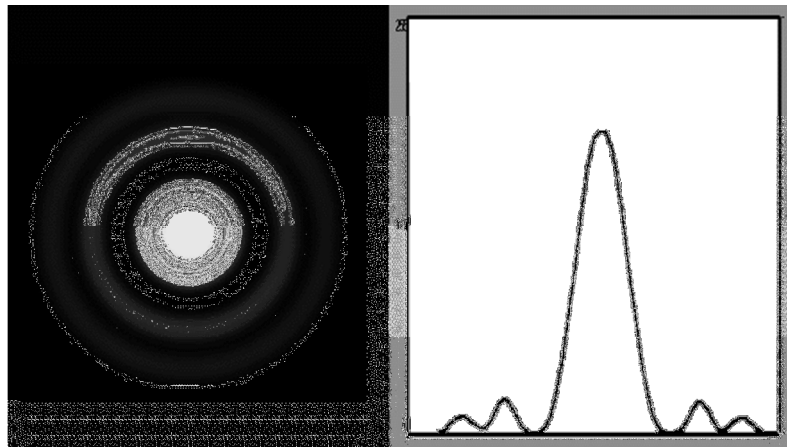


Figura 1. A la izquierda, mancha de Airy. A la derecha, distribución de la intensidad lumínica en la mancha de Airy.

La difracción es un fenómeno característico de las ondas. Cuando una onda se encuentra un obstáculo los puntos cercanos al borde de este, a una distancia similar o menor a una longitud de onda, actúan como nuevos emisores de ondas esféricas. Por lo tanto el efecto de la difracción depende de la relación entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo. Cuando el tamaño del obstáculo es sensiblemente mayor que la longitud de onda apenas se observa difracción, en cambio cuando ambas magnitudes se asemejan, la difracción es muy grande. [2, 3]

Debido a este fenómeno, cuando un haz de luz atraviesa una pupila no se observa una figura nítida con la misma forma de la pupila, sino un patrón de zonas claras y oscuras alternativas. Si la luz se encuentra un obstáculo complementario a dicha pupila (al superponerlos formarían una

pantalla opaca) el patrón de difracción será el mismo, puesto que en esta únicamente intervienen los bordes de la pupila u obstáculo.

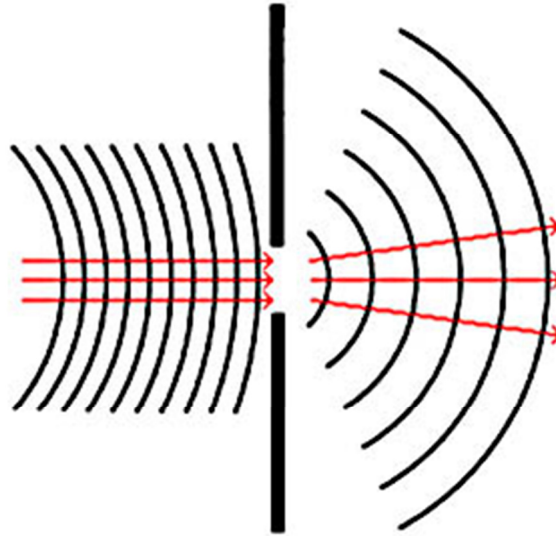


Figura 2. Difracción provocada por una pequeña apertura.

Como hemos explicado antes, esto provoca que cuando la luz atraviesa la pupila circular de un sistema óptico se observe la mancha de Airy, cuya anchura viene dada por el diámetro de la pupila y la longitud de onda de la luz incidente de la forma $1,22(\lambda/D)$. El tamaño de esta mancha de Airy es lo que determina la resolución del sistema, puesto que a menor tamaño de la mancha mayor capacidad de resolver dos puntos muy próximos tendremos. Esto es un problema en determinados sistemas en los que queremos aumentar la resolución pero no tenemos la posibilidad de aumentar indefinidamente el tamaño de la pupila ni de utilizar luz de menor longitud de onda.

Otro modo en que se produce la difracción es cuando la onda se encuentra con variaciones locales en la amplitud o la fase, y este fenómeno es el que puede aprovecharse para mitigar el anteriormente citado problema.

1.2.- CRITERIO DE RAYLEIGH

La resolución en un sistema óptico se define como la capacidad del sistema para diferenciar dos o más objetos puntuales próximos entre sí en la imagen resultante. Suponiendo que el sistema óptico estudiado es perfecto lo único que nos limita la resolución es la difracción. Bajo este supuesto, John W. Strutt, barón de Rayleigh, estableció un criterio para conocer la resolución de un sistema. Este nos dice que el proceso de la imagen está limitado por la difracción cuando el primer mínimo de la imagen de un punto coincide con el máximo de la imagen del siguiente punto. [2, 4]

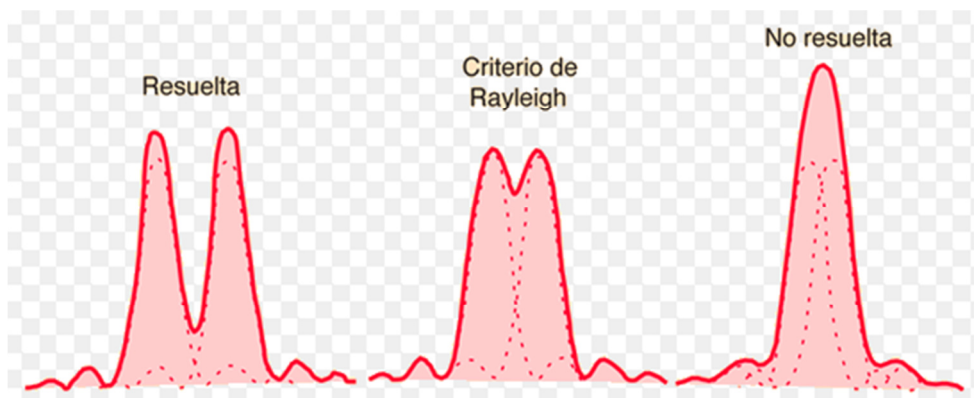


Figura 3. Ilustración del límite que establece el criterio de Rayleigh para la resolución.

Usando este criterio se puede definir la resolución angular de un sistema con pupila circular como $\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ puesto que es el patrón de Airy el que limita la resolución.

1.3.- SUPERRESOLUCIÓN

La superresolución consiste en disminuir el tamaño de la PSF de un sistema óptico por debajo del límite que impone la difracción, de forma que se consiga una resolución por debajo del límite de Rayleigh. Para lograr esto se recurre a utilizar filtros en la pupila del sistema que modifican la amplitud o la fase de la onda incidente. Como hemos visto antes, estas alteraciones afectan al fenómeno de difracción produciendo un patrón diferente al de la pupila desnuda. Este aumento de la resolución tiene importantes aplicaciones prácticas en ámbitos tales como la microscopía, la astronomía o el almacenamiento óptico de datos entre otros, en los que el tamaño de la PSF es un factor limitante.

Actualmente los filtros más utilizados, por sus resultados y sencillez de fabricación son los filtros binarios de fase, aunque presentan el problema de que sus bordes abruptos provocan que los lóbulos laterales de la PSF crezcan demasiado, llegando incluso a eclipsar al principal.

Utilizando las mismas técnicas de máscaras de pupila se puede conseguir el efecto contrario a la superresolución, denominado apodización. Esto resulta especialmente útil cuando hay que reducir la altura de los lóbulos secundarios de la mancha de Airy, aún a costa de aumentar la anchura del *spot* central.

1.4.- PROBLEMA CON LOS FILTROS BINARIOS DE FASE Y PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Como ya se ha dicho anteriormente, los filtros binarios de fase presentan el principal problema de que sus bordes abruptos provocan un gran crecimiento de los lóbulos laterales de la PSF, que si se asemejan en tamaño al lóbulo principal no nos permiten distinguirlo.

La forma matemática de obtener la PSF de un sistema es la transformada de Fourier de la función pupila, y cuando hacemos la transformada de Fourier de una función con bordes abruptos obtenemos muchas frecuencias distintas que se superponen provocando el aumento de los lóbulos laterales.

La solución que se propone a este problema es suavizar los bordes de los filtros de fase utilizando una función supergaussiana. La familia de funciones supergaussianas se definen utilizando la misma expresión que para una gaussiana salvo que el exponente no siempre es 2 sino que se encuentra comprendido entre 2 e infinito, de modo que los límites superior e inferior de la supergaussiana son la función rectángulo y una gaussiana respectivamente.

El motivo de escoger este tipo de funciones es que por un lado tenemos que cuando el exponente tiende a infinito recuperamos los filtros binarios de los que partimos y cuando hacemos el exponente igual a 2 tenemos la función gaussiana, que tiene la peculiaridad de que su transformada de Fourier es otra gaussiana, que no presenta lóbulos laterales, aunque tampoco se obtenga superresolución.

1.5.- OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo son:

- Estudiar la superresolución conseguida con filtros de fase con perfil supergaussiano.
- Comprobar si con los filtros de perfil supergaussiano se obtiene una mejora en la relación de tamaños entre el lóbulo principal y el primer secundario con respecto a los filtros de fase binarios.

2.- FILTROS PARA SUPERRESOLUCIÓN

Los filtros para superresolución pueden ser de tres tipos: de amplitud, de fase o una combinación de ambos. Dentro de cada uno de los tipos pueden ser continuos o discretos, lo cual viene determinado por su perfil: sin cambios bruscos o con una o varias funciones escalón, respectivamente. Otra clasificación posible es filtros con simetría circular o asimétricos, presentando los primeros bastantes ventajas en cuanto a sencillez de diseño y fabricación, por lo que nos centraremos en estos.

2.1.- MÁSCARAS DE AMPLITUD

Los filtros de amplitud modulan la cantidad de luz que atraviesa la pupila. Para su fabricación únicamente se precisa de un material opaco o semitransparente con la transmitancia requerida. Un filtro de amplitud binario puede realizarse simplemente con una lámina de material opaco cortada con la forma deseada, de modo que pase toda la luz o nada. En este ejemplo se observa que su fabricación es sumamente sencilla.

2.2.- MÁSCARAS DE FASE

Este tipo de filtros provocan una diferencia de fase entre distintas zonas del frente de onda. Para su fabricación únicamente se requiere la utilización de láminas desfasadoras con la forma y fase deseadas. Por ejemplo, un filtro binario $0-\pi$, se puede hacer de forma muy sencilla, incluso manualmente, con una lámina desfasadora $\lambda/2$.

2.3.- TEORÍA PARAXIAL

Para tratar el problema de la distribución de intensidad luminosa tras la difracción en la pupila tomamos las aproximaciones de que el frente incidente es monocromático y esférico y que pasa a través del centro de una pupila totalmente circular. La amplitud del campo eléctrico en la región focal, en este caso es [1, 5]:

$$U(v, u) = 2 \int_0^1 P(\rho) J_0(v\rho) e^{\frac{ju\rho^2}{2}} \rho d\rho \quad (2.1)$$

donde $P(\rho)$ es la función pupila (1 dentro de la pupila y 0 fuera, en el caso sin filtro), ρ es la coordenada radial normalizada a 1, J_0 es la función de Bessel de orden 0 y v y u las coordenadas ópticas adimensionales radial y axial, que vienen dadas de la siguiente forma [1, 5]:

$$v = kr \operatorname{sen} \alpha = kNAr \quad (2.2)$$

$$u = 4kz \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = kNA^2z \quad (2.3)$$

donde k es el número de onda, NA la apertura numérica, y r y z las distancias radial y axial.

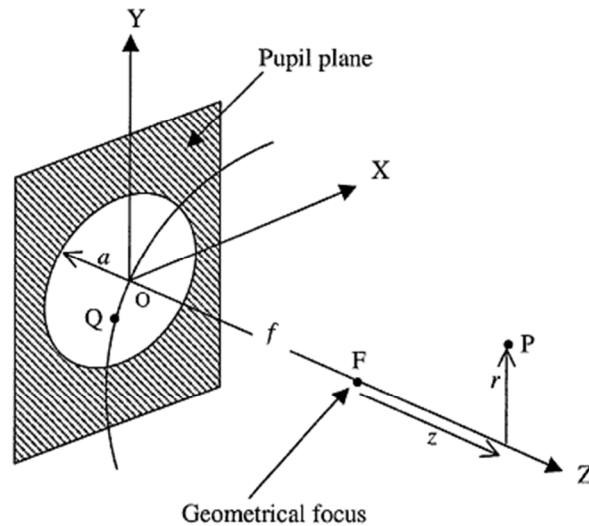


Figura 3. Ilustración de la notación usada para describir la región focal de un sistema óptico. [5]

La ecuación anterior puede dividirse en dos partes, la referente a la amplitud transversal y la de amplitud axial, simplemente haciendo 0 la otra coordenada:

$$U(v, 0) = 2 \int_0^1 P(\rho) J_0(v\rho) \rho d\rho \quad (2.4)$$

$$U(0, u) = 2 \int_0^1 P(\rho) e^{\frac{j u \rho^2}{2}} \rho d\rho \quad (2.5)$$

obteniendo en el primer caso la transformada de Hankel de la pupila y en el segundo la transformada de Fourier tras realizar el cambio de variable $x=\rho^2$. [1, 5]

Finalmente para obtener la distribución de intensidad luminosa únicamente es necesario hacer el módulo cuadrado de la amplitud:

$$I = U \cdot U^* \quad (2.6)$$

2.4.- FIGURAS DE MÉRITO

A la hora de analizar las propiedades de la imagen que se obtiene con el filtro se suelen emplear una serie de parámetros que llamamos figuras de mérito. Calculando dichas figuras de mérito podemos hacer una caracterización rápida y efectiva del sistema y comparar fácilmente los resultados obtenidos con diversas máscaras. Las figuras de mérito son las siguientes:

-El cociente de Strehl, S , que indica la intensidad de luz que conserva el pico central de la PSF. Se define como el cociente de la intensidad máxima del pico central de la PSF con el filtro entre dicha intensidad con la pupila libre. [6] Como indica la luminosidad que se conserva en un punto de la imagen al usar el filtro, su valor está comprendido entre 0 y 1. Una gran

superresolución no serviría de nada si se sacrifica demasiado el factor de Strehl ya que la imagen apenas tendría luminosidad.

-La ganancia axial y transversal, G_A y G_T , que dan idea de la superresolución o apodización (efecto inverso) lograda. Se definen como la inversa de la anchura del máximo central de la PSF (en la dirección correspondiente) al cuadrado.[6] Además se normaliza a 1 para el caso de la pupila sin filtro, de tal forma que una ganancia menor que 1 indica apodización y si es mayor que 1, superresolución. El factor de ganancia puede considerarse como una medida directa de la “cantidad” de superresolución lograda.

-El desplazamiento axial del foco, u_F , que indica cuanto se ha desplazado el foco con respecto a la pupila sin filtro.[6] Es importante considerarlo, ya que en un montaje óptico es necesario localizar el foco del sistema para realizar adecuadamente la medición. Este desplazamiento tiene gran repercusión especialmente en el caso de filtros de fase binarios con diferencias de fase distintas de π y en filtros de fase continuos.

-La intensidad de lóbulo, I_R , que es la intensidad relativa del pico central con respecto a la del primer lóbulo. Como es lógico, si la intensidad del máximo central con respecto al primer lóbulo secundario es pequeña no es útil obtener superresolución, puesto que se hará prácticamente imposible distinguir el pico central y se verá una mancha más amplia.

2.5.- ANÁLISIS DE LAS FIGURAS DE MÉRITO

Para obtener las figuras de mérito de una determinada pupila con filtro se utiliza una aproximación parabólica de segundo orden, en el entorno del foco, de la intensidad luminosa. Aplicando el desarrollo en serie a las ecuaciones (2.4) y (2.5) obtenemos lo siguiente:

$$I(v, 0) = |I_0|^2 - \frac{1}{2} \text{Re}(I_0 \cdot I_1^*) v^2 \quad (2.7)$$

$$I(0, u) = |I_0|^2 - Im(I_0^* \cdot I_1)u - \frac{1}{4}[Re(I_2^* \cdot I_0) - |I_1|^2]u^2 \quad (2.8)$$

Los distintos I_n son los momentos de la función pupila $P(\rho)$ que vienen definidos de la siguiente forma:

$$I_n = 2 \int_0^1 P(\rho) \cdot \rho^{2n+1} d\rho \quad (2.9)$$

con $n=0,1,2\dots[5, 6]$

Como puede verse, mientras que la aproximación de segundo orden de la intensidad transversal es simétrica con respecto al foco ($u=0, v=0$) no ocurre lo mismo con la intensidad axial, por lo que es necesario el cálculo del desplazamiento focal. Además, si este crece demasiado la aproximación utilizada deja de ser válida puesto que sirve en el entorno del foco geométrico. El desplazamiento del foco en función de los momentos de la pupila viene dado por la siguiente expresión [6]:

$$u_F = -2 \frac{Im(I_0^* I_1)}{Re(I_2^* I_0) - |I_1|^2} \quad (2.10)$$

Para pequeños desplazamientos del foco la posición de máxima intensidad estará en $(0, u_F)$. Las ganancias correspondientes a este punto de máxima intensidad para funciones de pupila complejas vienen dadas por las expresiones [6]:

$$G_T = 2 \frac{Re(I_0 I_1^*) - u_F Im(I_0^* I_2)}{|I_0|^2 - u_F Im(I_0^* I_1)} \quad (2.11)$$

$$G_A = 12 \frac{Re(I_2^* I_0) - |I_1|^2}{|I_0|^2 - u_F Im(I_0^* I_1)} \quad (2.12)$$

Del mismo modo también puede obtenerse una expresión para el cociente de Strehl en función de los momentos de la pupila:

$$S = |I_0|^2 - u_F \text{Im}(I_0^* I_1) \quad (2.13)$$

Sabiendo que los momentos de la función de la pupila desnuda son $I_0=1$, $I_1=1/2$ y $I_2=1/3$ se puede calcular fácilmente que se obtienen las figuras de mérito esperadas $S=1$, $G_T=G_A=1$ y $u_F=0$. Del mismo modo se pueden calcular las figuras de mérito de forma analítica para funciones de pupila simples.

Con este método la obtención de las figuras de mérito y el análisis de los filtros más complejos se reduce a ajustar los parámetros de la función pupila con filtro que se desee, lo que son usualmente únicamente una o dos variables. Las expresiones de las figuras de mérito obtenidas son complejas porque se han calculado para funciones pupila complejas, porque de esta forma son más generales y engloban todos los tipos de máscara: de amplitud, de fase y mixtas.

3.- MÁSCARAS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO

Uno de los tipos de filtro que obtienen mejores resultados de superresolución y más fáciles de fabricar son los filtros binarios de fase. En este trabajo se estudia si se puede lograr algún tipo de mejora en la intensidad de lóbulo para una misma ganancia suavizando el perfil de un filtro de fase binario utilizando funciones supergaussianas, puesto que es el gran defecto que presentan este tipo de filtros.

3.1.- MÁSCARAS DE FASE BINARIAS

Un filtro de fase binario consta de dos valores diferentes de desfase alternados en diferentes zonas de forma radial, con lo que tenemos diferentes anillos consecutivos de fase 0 y ϕ (usualmente $\phi=\pi$). Este tipo de diseños se describen con los valores del radio normalizado a la unidad para los que se produce el salto de fase. De este modo tenemos dos configuraciones equivalentes en función de que la primera zona valga 0 o ϕ .

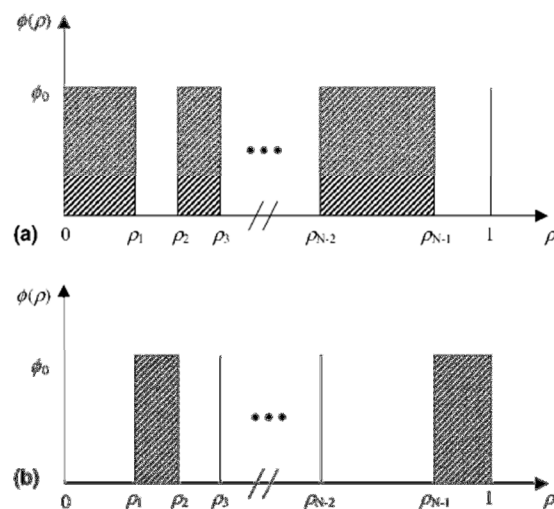


Figura 4. Filtro de fase binario de N zonas con sus dos posibles configuraciones. [6]

Partiendo de la expresión para el cálculo de los momentos de la función pupila (2.9) podemos particularizarla para este caso concreto [6]:

$$I_n = \alpha_n e^{j\phi} + \beta_n \quad (3.1)$$

Con:

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{L_\alpha} \rho_{2k+1}^{2n+2} - \rho_{2k}^{2n+2} \quad (3.2)$$

$$\beta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{L_\beta} \rho_{2k+2}^{2n+2} - \rho_{2k+1}^{2n+2} \quad (3.3)$$

Cuando el número de zonas del filtro, M, es par, tanto L_α como L_β valen $M/2 - 1$ pero cuando M es impar L_α es igual a $(M-1)/2$ y L_β es igual a $(M-3)/2$.

Con estos momentos que hemos calculado, las figuras de mérito quedan de la siguiente manera:

$$u_F = \frac{2 \operatorname{sen} \phi (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0)}{\alpha_2 \alpha_0 + \beta_2 \beta_0 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \cos \phi (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_2 \beta_0 - 2 \alpha_1 \beta_1)} \quad (3.4)$$

$$S = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + 2 \alpha_0 \beta_0 \cos \phi + \frac{u_F}{2} \operatorname{sen} \phi (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) \quad (3.5)$$

$$G_T = 2 \frac{\alpha_1 \alpha_0 + \beta_1 \beta_0 + \cos \phi (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) - \frac{u_F}{2} \operatorname{sen} \phi (\alpha_2 \beta_0 - \alpha_0 \beta_2)}{S} \quad (3.6)$$

$$G_A = 12 \frac{\alpha_2 \alpha_0 + \beta_2 \beta_0 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \cos \phi (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_2 \beta_0 - 2 \alpha_1 \beta_0)}{S} \quad (3.7)$$

Aunque se ha llegado a este resultado tomando la función pupila con el desplazamiento de fase en la primera zona los resultados son idénticos al aplicar el caso complementario, salvo en el signo del desplazamiento focal de forma que ambas distribuciones lumínicas son especulares y desplazadas entre sí $2u_F$.

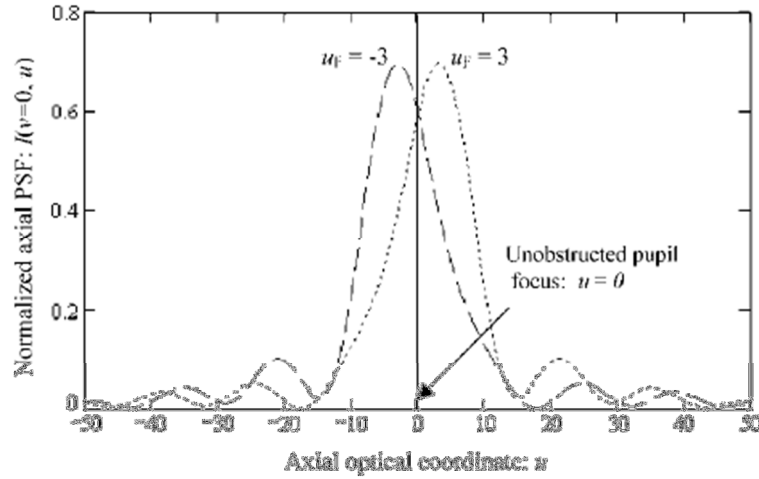


Figura 5. PSF axial normalizada producida con un filtro binario de fase $0-3\pi/2$ de dos zonas con $\rho=0,4$. La curva rayada pertenece al filtro con $3\pi/2$ en la primera zona y la punteada viene dada por el filtro con desfase 0 en la primera zona. [6]

Este tipo de filtros son los más utilizados debido a sus buenos resultados y a su sencillez de fabricación especialmente el caso de dos zonas. Además, como puede deducirse de la expresión (3.4), cuando se toma $\phi=\pi$ obtenemos $u_F=0$ para cualquier número y tamaño de zonas, lo que facilita obtener grandes ganancias sin que el foco se desplace y por tanto no sirviera la aproximación propuesta (de segundo orden en el entorno del foco geométrico). Por estos motivos tomaremos como referencia los filtros de fase binarios de dos zonas con desfase π .

3.2.- FUNCIÓN SUPERGAUSSIANA

Partiendo de los filtros de fase binarios de dos zonas vamos a estudiar los resultados obtenidos al suavizar sus bordes con una función supergaussiana.

La familia de funciones supergaussianas son una generalización de la gaussiana clásica. La expresión general de dichas funciones viene dada por:

$$SG = e^{-\left[\frac{x}{\sigma}\right]^n} \quad (3.8)$$

donde $n \geq 2$ es el parámetro que controla la velocidad de decaimiento de la exponencial y σ indica la varianza de la distribución y por tanto su anchura [7]. Como se observa fácilmente, para un valor de $n=2$ recuperamos la función gaussiana clásica y con $n=\infty$ tenemos una función binaria, que es el caso analizado en el apartado anterior. El mayor interés de este estudio es comprobar lo que ocurre con funciones pupila comprendidas entre ambos extremos.

El motivo de usar estas funciones es que al reducir el parámetro n también se reducen la intensidad de los lóbulos laterales y la anchura en la transformada de Fourier de la función, hasta llegar a $n=2$ que es la función gaussiana y cuya transformada de Fourier es también una gaussiana. De esta forma lo que se va a buscar es un compromiso entre la superresolución obtenida en el lóbulo central y la intensidad de los lóbulos laterales.

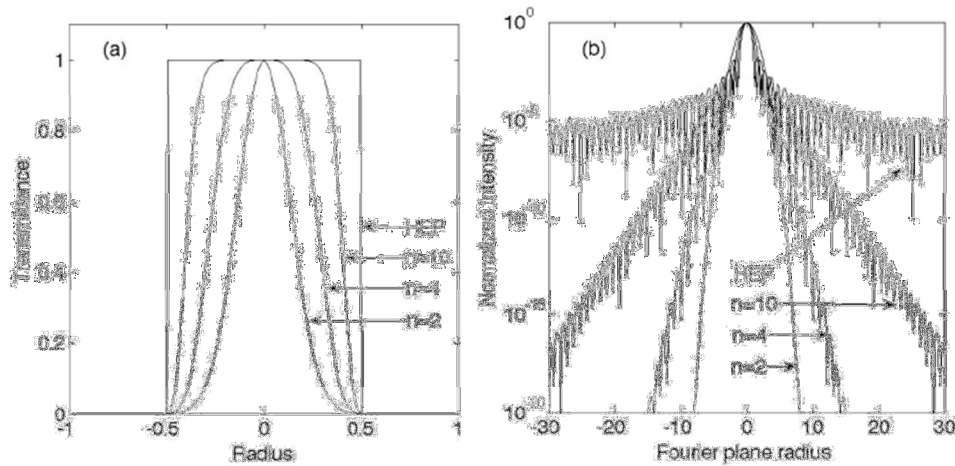


Figura 6. A la izquierda, varias funciones de la familia supergaussiana, con distinto n , siendo HEP (hard edge circle pupil) la función pupila binaria que se obtiene cuando n tiende a infinito. A la derecha, el modulo cuadrado de las transformadas de Fourier de dichas funciones, donde se observa que a menor n disminuye la intensidad fuera del centro hasta llegar a la función gaussiana que no cambia. [8]

Usando el método basado en los momentos de la pupila podemos estudiar de forma sencilla la respuesta del sistema variando únicamente los parámetros n y σ .

3.3.- SIMULACIÓN DEL SISTEMA CON MÉTODOS NUMÉRICOS

Para poder simular la respuesta de los filtros de fase con contorno supergaussiano se ha diseñado un programa en Mathcad que nos permite expresar la pupila y la intensidad lumínica en el foco de forma discreta y bidimensional utilizando métodos numéricos.

En primer lugar se ha definido el número de puntos a utilizar para cada coordenada, Np , y otra variable con la que podemos ajustar a apertura de la pupila sin filtro, pad . Para la simulación se ha usado $Np=512$ y $pad= 8$. De este modo se define la función pupila sin filtro como:

$$Pup1_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\left(i - \frac{Np}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Np}{2}\right)^2} \leq \frac{Np}{2pad} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.9)$$

donde i y j son las coordenadas cartesianas, Np^2 el número total de puntos utilizados y $Np/(2.pad)$ el radio de la pupila.

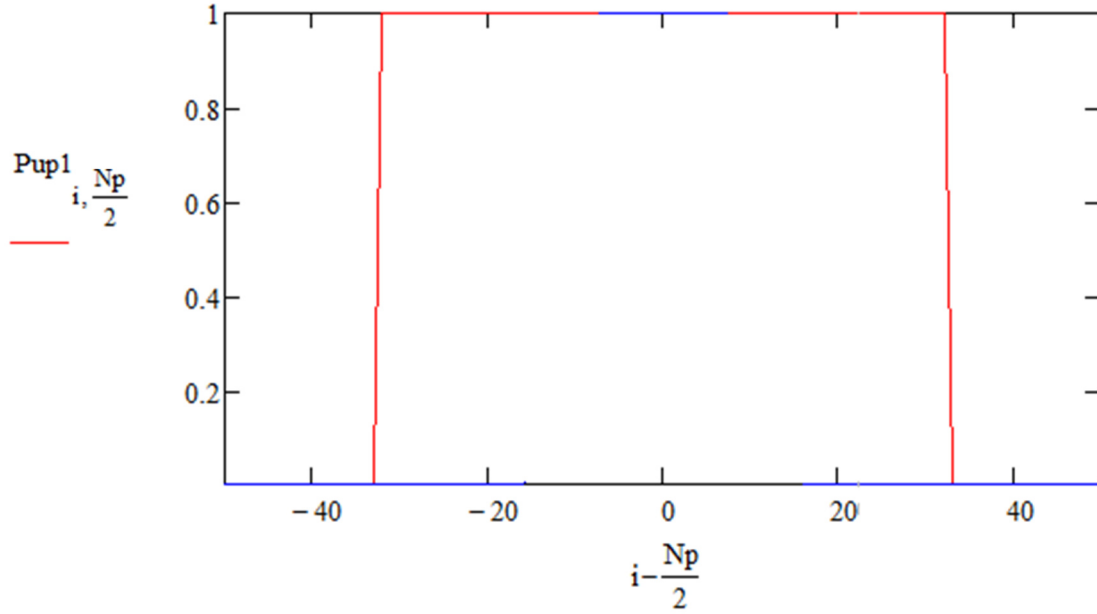


Figura 7. Función pupila sin filtro definida según la ecuación 3.9.

La función supergaussiana en función de las coordenadas i y j y de los parámetros n y σ queda:

$$SG_{i,j} = e^{-\left[\frac{\sqrt{\left(i - \frac{Np}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Np}{2}\right)^2}}{\sigma}\right]^n} \quad (3.10)$$

y por lo tanto la pupila del filtro de fase:

$$PupF_{i,j} = Pup1_{i,j} \cdot e^{i\pi \cdot SG_{i,j}} \quad (3.11)$$

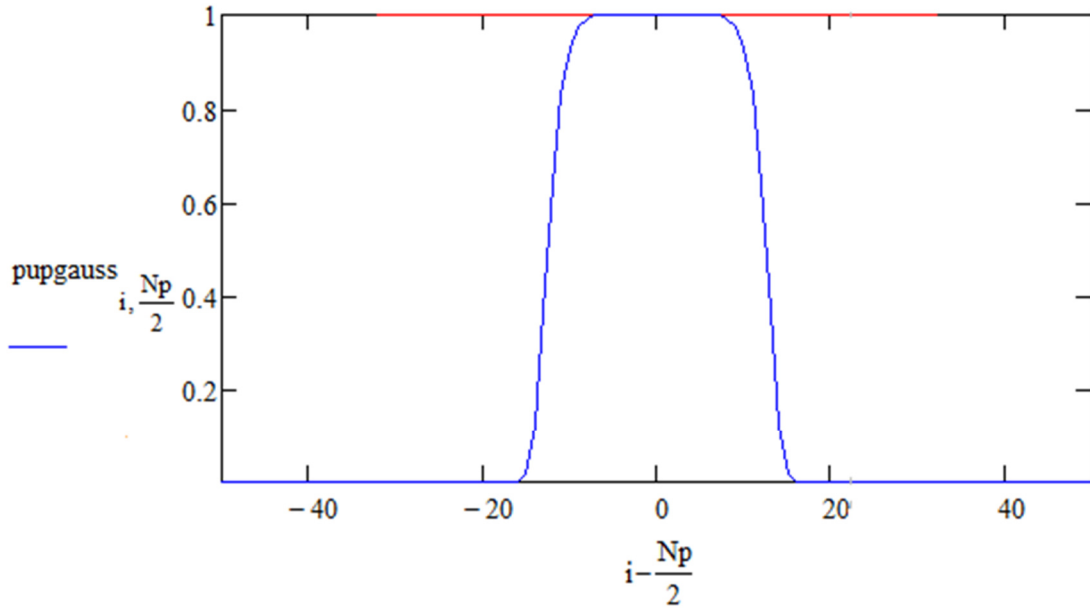


Figura 8. Función supergaussiana con $n=10$ y $\sigma=13$ definida según la ecuación 3.10.

A la hora de calcular los momentos de la función pupila transformamos la ecuación (2.9), que está en forma continua, en un sumatorio discreto. La ecuación integral de los momentos está escrita en forma radial de forma que tenemos que expresar el radio ρ en función de i y j de la forma $\sqrt{\left(i - \frac{Np}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Np}{2}\right)^2}$. Además, al ser la pupila circularmente simétrica, podemos expresarlo en una sola variable. De esta forma tenemos:

$$I_k = \sum_{i=0}^{Np-1} \frac{PupF_{i,j} \left[\frac{\sqrt{\left(i - \frac{Np}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Np}{2}\right)^2}}{\frac{Np}{2 \cdot pad}} \right]^{2k+1} \cdot \sqrt{2}}{\frac{Np}{2 \cdot pad}} \quad (3.12)$$

con k de 0 a 2.

A partir de los momentos de la función pupila se aplican las expresiones (2.10) a (2.13) para obtener las figuras de mérito del sistema. Controlando únicamente los parámetros n y σ se pueden barrer todos los tipos de perfiles supergaussianos.

4.- RESULTADOS

4.1.- FILTROS BINARIOS DE FASE

En primer lugar vamos a comprobar los resultados que nos ofrece el programa diseñado en Mathcad para filtros binarios de fase $0-\pi$ y compararlos con los resultados analíticos obtenidos en el artículo [6] para filtros de dos zonas.

La función pupila utilizada es igual que en (3.11) pero cambiando la función supergaussiana SG por la siguiente:

$$Bin = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\left(i - \frac{Np}{2}\right)^2 + \left(j - \frac{Np}{2}\right)^2} < \frac{Np}{2 \cdot pad} \cdot w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

donde w es una variable comprendida entre 0 y 1 que nos permite ajustar el radio de la que separa las dos zonas del filtro.

Radio	S (art.)	S	Gt (art.)	Gt
0,315	0,7	0,679	1,2	1,169
0,429	0,4	0,405	1,5	1,437
0,585	0,1	0,077	2,4	2,61

Tabla 1: Comparación de los datos de filtro binarios de fase $0-\pi$ obtenidos de forma numérica con Mathcad con los de la bibliografía.

Como se ve en la tabla 1 los resultados concuerdan razonablemente con los de la bibliografía dentro de la precisión del cálculo. No se ha prestado

atención en este caso al desplazamiento del foco porque, como vimos en el análisis de los filtros binarios, si la máscara es $0-\pi$ este es siempre nulo.

4.2.- STREHL Y GANANCIA EN FILTROS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO

Una vez se ha comprobado que el programa diseñado ofrece buenos resultados para los filtros binarios se procede a analizar los filtros con perfil supergaussiano. Para esto variamos uno de los parámetros n o σ dejando el otro fijo comprobar cómo afecta cada uno de los parámetros a las figuras de mérito.

En primer lugar analizamos lo que ocurre al fijar n y variar σ :

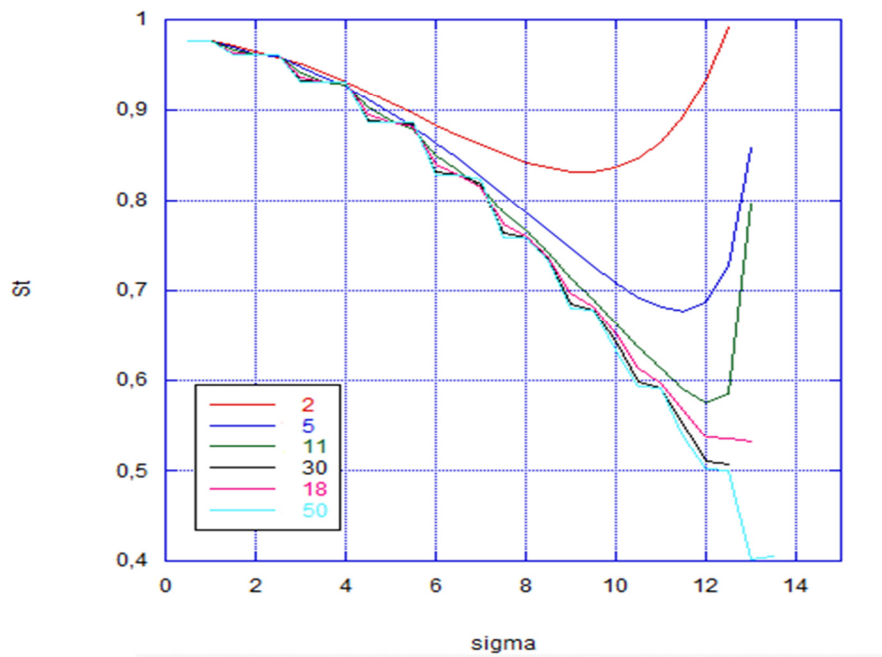


Figura 9: Gráfica del cociente de Strehl en función de σ para distintos valores de n .

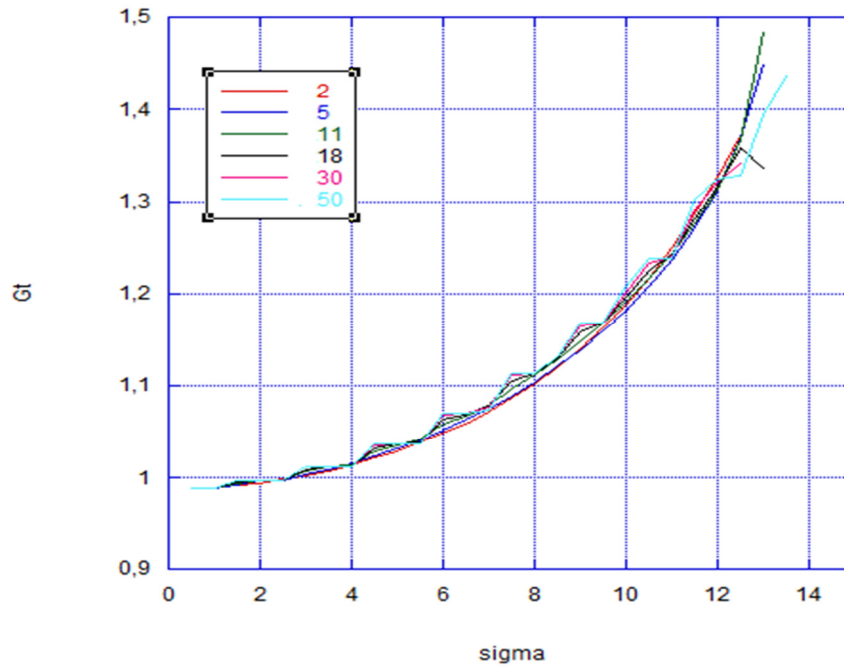


Figura 10: Gráfica de la ganancia transversal en función de σ para distintos valores de n .

En la figura 9 se observa que el cociente de Strehl en general disminuye al aumentar σ para todos los valores de n . Además vemos que hay un punto en el que el cociente de Strehl vuelve a subir. Esto es debido a que el desplazamiento focal crece por encima de 2~3 unidades ópticas y las aproximaciones usadas dejan de ser válidas, por lo que los mínimos de la gráfica son los últimos resultados válidos. Observando la figura 10 es fácil llegar a la conclusión de que la ganancia trasversal depende únicamente de la anchura σ .

A continuación hacemos lo mismo pero dejando fijo σ y variando n :

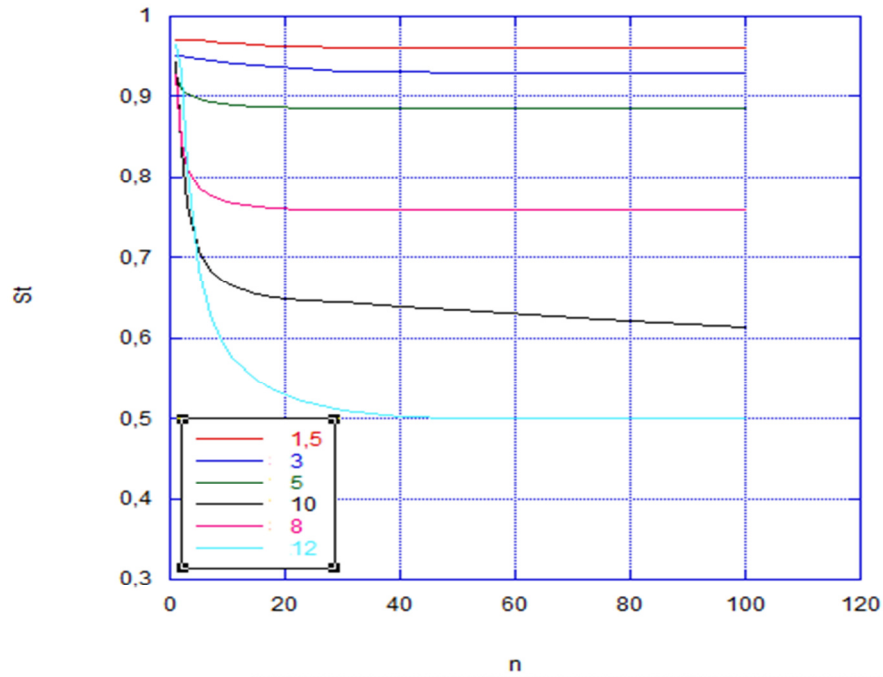


Figura 11: Gráfica del cociente de Strehl en función de n para distintos valores de σ .

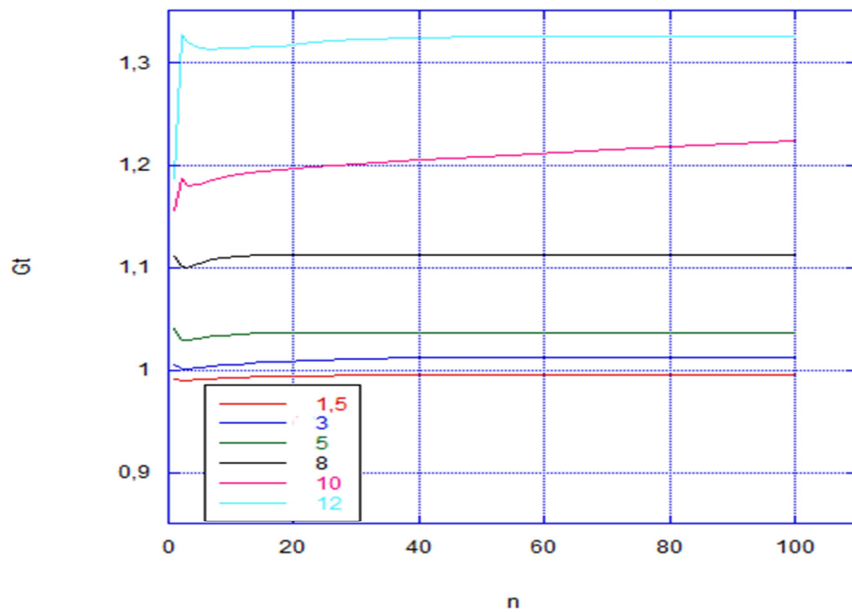


Figura 12: Gráfica de la ganancia transversal en función de n para distintos valores de σ .

Tanto en la figura 11 como la 12 todas las variaciones se producen para valores de n bajos por lo que conviene “ampliar” esa zona para analizarla mejor:

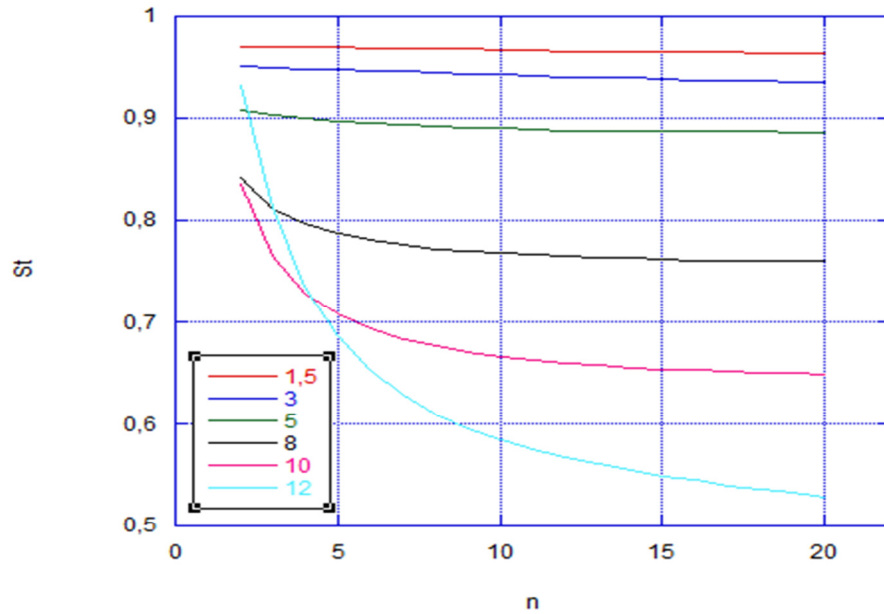


Figura 13: Gráfica del cociente de Strehl en función de n para distintos valores de σ .

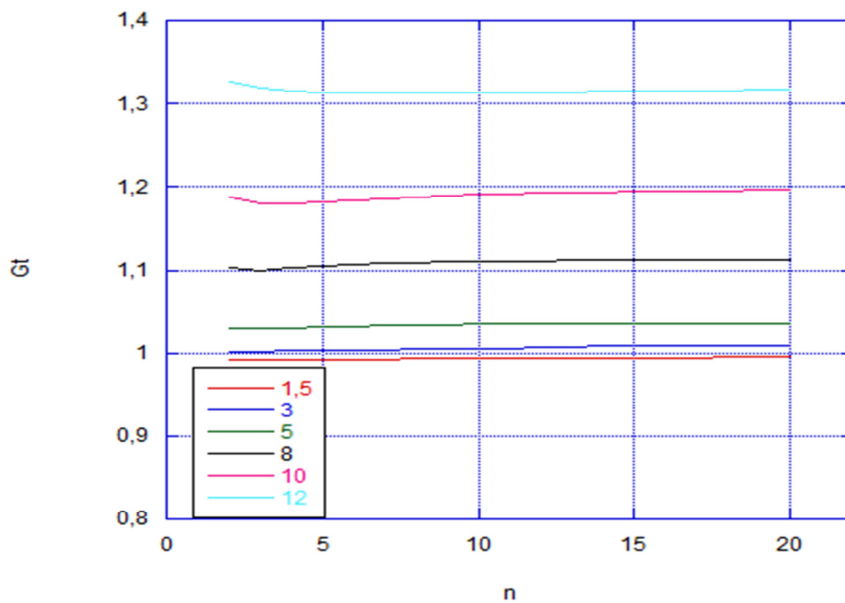


Figura 14: Gráfica de la ganancia transversal en función de n para distintos valores de σ .

En ambas gráficas, para valores pequeños de n y altos de σ el desplazamiento del foco crece mucho, provocando los valores extraños en las gráficas con valor de σ 10 y 12 para n entre 2 y 4.

Como en el caso anterior, se ve que tanto la ganancia como el cociente de Strehl dependen principalmente de σ pero esta variable no puede aumentar demasiado sin que el desplazamiento focal crezca

enormemente para n bajo. Este problema no ocurre con los filtros binarios $0-\pi$, para los cuales el desplazamiento focal es siempre 0, por lo que en este aspecto son superiores.

4.3.- INTENSIDAD DE LÓBULO SECUNDARIO EN FILTROS DE FASE DE PERFIL SUPERGAUSSIANO

Finalmente vamos a comprobar si obtenemos algún tipo de mejora en la intensidad de los lóbulos secundarios, que es el mayor problema que presentan los filtros binarios. Para compararlos se utiliza el cociente entre el lóbulo principal y los primeros secundarios en función de la ganancia del filtro. No se ha tenido en cuenta el parámetro σ puesto que en cada función será distinto para una misma ganancia transversal, que es lo que realmente interesa tener en cuenta en la comparación:

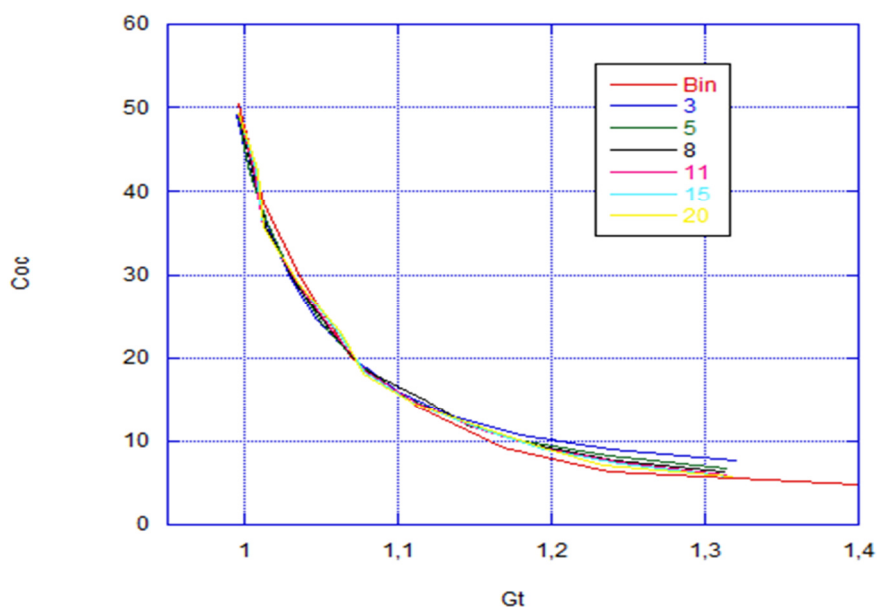


Figura 15: Gráfica del cociente del lóbulo principal de la PSF entre el primer lóbulo secundario en función de la ganancia transversal para filtros con distinta n y un filtro binario $0-\pi$.

Como queda patente en la gráfica 15, al aumentar la ganancia aumenta en todos los casos el tamaño del primer lóbulo secundario respecto al máximo central. También se ve a menor n más lentamente decae el cociente. Para analizar la dependencia del cociente con n se define el porcentaje de mejora como la diferencia porcentual del cociente obtenido utilizando una función supergaussiana con un determinado n con respecto al cociente obtenido con el filtro binario para una misma ganancia transversal.

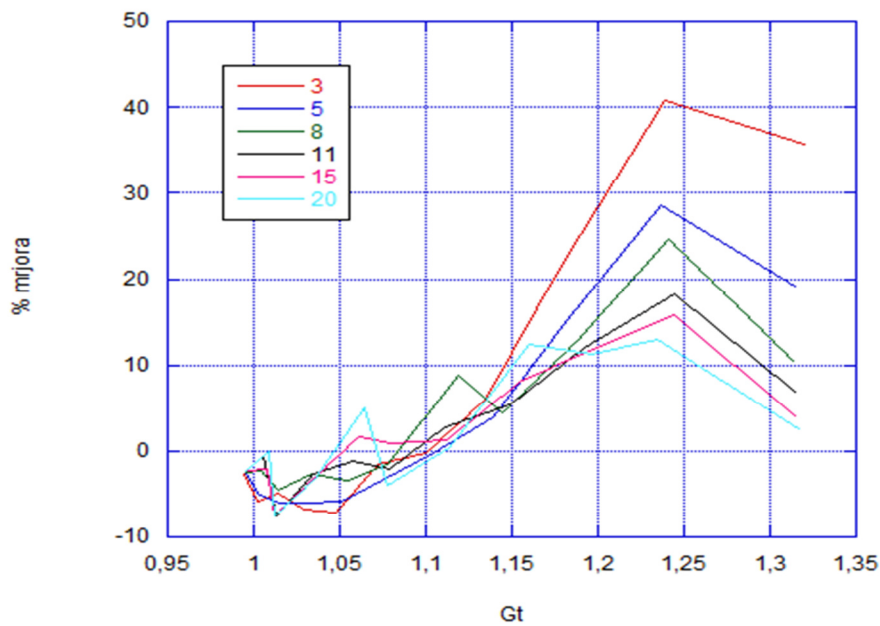


Figura 16: Gráfica del porcentaje de mejora de la intensidad de lóbulo de los distintos filtros con diferentes n con respecto al filtro binario.

Aunque en la gráfica 15 la mejora parece muy pequeña al analizarlo porcentualmente vemos que se pueden conseguir mejoras de entre el 10 y el 40% en función del parámetro n de la supergaussiana. Se puede ver que, en general, para una misma ganancia es mejor el filtro con menor n .

5.- CONCLUSIONES

En este trabajo se ha partido de los resultados de los filtros de fase binarios para comprobar si se consigue algún tipo de mejora suavizando su perfil con funciones supergaussianas. La mejora se buscaba principalmente en la intensidad de los lóbulos secundarios, puesto que el principal problema que presentan los filtros de fase binarios es que estos lóbulos crecen demasiado, eclipsando el lóbulo central.

Se ha creado un programa para simular numéricamente los resultados tanto de los filtros binarios como de los de perfil supergaussiano, lo que ha permitido comparar los resultados.

Como se esperaba, se ha comprobado que los filtros de fase binarios $0-\pi$ permiten obtener mayores ganancias, principalmente debido a que no producen desplazamiento en el foco respecto al foco geométrico, aunque su capacidad de superresolver se ve limitada por la intensidad de los lóbulos laterales.

En cuanto a los filtros de fase con perfil supergaussiano, que no permiten ganancias tan altas, se ha comprobado que la intensidad de los lóbulos laterales es menor que en los filtros binarios. En las gráficas de las figuras 15 y 16 se observa que se pueden conseguir reducciones en la intensidad relativa de los lóbulos de hasta un 40%.

A la luz de los resultados se puede concluir que, para una misma ganancia, es preferible utilizar un filtro de perfil supergaussiano con el menor exponente posible, puesto que se obtiene un mayor contraste entre el lóbulo principal y los secundarios.

6.- REFERENCIAS

- [1] *“Diseño de filtros para superresolución”* Trabajo fin de carrera. L. Acero Fernandez (2006) Pag. 2-11
- [2] *“Física para la ciencia y la tecnología”* P.A. Tipler, G. Mosca (Ed. 2005) Pag. 449-450, 1025-1026
- [3] <http://www.astromia.com/glosario/difraccion.htm>
- [4] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/phyopt/raylei.html>
- [5] *“Desing of superresolving continuous phase filters”*, D.M. de Juana, V.F. Canales, J.E. Oti y M.P. Cagigal, Optics Letters **28**, 607-609 (2003)
- [6] *“Focusing propierties of anular binary phase filters”*, D.M. de Juana, V.F. Canales, P.J. Valle y M.P. Cagigal, Optics Communications **229**, 71-77 (2004)
- [7] *“Blind source recovery using an adaptive generalized gaussian score function”*, K. Waheed y F.M. Salam, en el 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems 2002, MWSCAS-2002, II-418 – II-421 **vol. 2** (2002)
- [8] *“Super-Gaussian apodization in group based telescopes for high contrast coronagraph imaging”*, M.A. Cagigas, P.J. Valle y M.P. Cagigal, Optics Express **21**, 12744-56 (2013)