



**GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN
PRIMARIA**

CURSO ACADÉMICO 2013-2014

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE
MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA:
INFLUENCIA DEL CONTEXTO**

**MATHEMATICS PROBLEM SOLVING IN PRYMARY
EDUCATION: INFLUENCE OF THE CONTEXT**

**Autora: Verónica Falcao Rocha
Directora: María José González**

21 de octubre de 2014

VºBº DIRECTORA

VºBº AUTORA

Índice

Resumen.....	3
Abstract	3
1. Introducción.....	4
2. Revisión de la literatura.....	5
3. Pregunta de investigación y objetivos específicos	8
4. Marco teórico	9
4.1. Problemas. Tipología de problemas	10
4.2. Contexto	11
4.3. Fases de resolución de problemas y heurísticas.....	12
5. Metodología	13
5.1. Muestra.....	14
5.2. Instrumentos.....	14
6. Resultados. Análisis e interpretación.....	21
6.1. Resultados	21
6.1.1. Resultados observados en la primera tanda de problemas	22
6.1.2. Resultados observados en la segunda tanda de preguntas	22
6.1.3. Resultados observados en la tercera tanda de preguntas	23
6.1.4. Análisis de la entrevista semiestructurada cuarta y quinta tandas de preguntas.....	24
6.2. Análisis e interpretación de resultados.....	24
6.2.1. Comparación de los resultados a partir de la dificultad.....	25
6.2.2. Comparación de los resultados a partir del contexto.....	25
6.2.3. Comparación de los resultados a partir del tipo de enunciado, con o sin imágenes, números grandes o pequeños	26
6.2.4. Comparación de los resultados a partir de la comunicación empleada (leído en voz alta, lectura silenciosa...)	27
6.2.5. Comparación de los resultados con relación a las estrategias utilizadas	27
7. Conclusiones	28
8. Bibliografía	30
9. Anexos.....	32

Resumen

Esta memoria presenta un estudio de caso que busca analizar la influencia del contexto y de otros elementos existentes en el enunciado de los problemas matemáticos en los procesos mentales llevados a cabo por un estudiante de tercero de primaria. El sujeto ha resuelto trece problemas aritméticos específicamente diseñados para él, en los que se ha procurado destacar la relevancia de cada uno de los elementos investigados.

Los resultados indican que la mayor influencia reside en el tamaño de los números que aparecen en el enunciado y en el contenido matemático implicado. Desde el punto de vista de las operaciones aritméticas, se ha observado que los significados que el sujeto posee sobre dichas operaciones ejercen una gran influencia en el éxito al resolver el problema, lo que puede constituir objeto de futuras investigaciones.

Abstract

This report presents a case study that seeks to analyze the influence of context and other items of the statement of the mathematical problems in the mental processes carried out by a third grade student . The student has solved thirteen arithmetic problems specifically designed for him, which has sought to highlight the relevance of each of the research elements.

The results indicate that the greatest influence lies in the size of the numbers that appear on the statement and the mathematical content involved. From the point of view of arithmetic operations, it has been observed that the meanings that the student has exert great influence on the success in solving the problem, which may be the subject of future research.

Palabras Clave: *contexto, heurísticos, resolución de problemas de matemáticas*

Keywords: *context, heuristics, mathematics problem solving*

1. Introducción

Esta investigación se desarrolla en el ámbito de la resolución de problemas matemáticos en contexto y se centra en las estrategias de resolución. Concretamente, llevamos a cabo una investigación cualitativa, mediante un estudio de caso, para identificar la influencia del contexto y de otros elementos del enunciado de un problema en las estrategias utilizadas por un estudiante de 3º de primaria de un centro público de Cantabria.

Muchos autores ratifican que la presencia de contextos reales en el aprendizaje de las matemáticas es eficaz para la comprensión de los conceptos matemáticos. Blanco & Blanco (2009, p. 79) señalan la pregunta que se hace Ahmed (1987, p. 2): «*¿Por qué los niños pueden manejar situaciones de dinero los sábados y fallar en los problemas de sumas los lunes?*»

La resolución de problemas es un proceso fundamental tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en el desarrollo de las competencias necesarias para la vida. La enseñanza de las destrezas implicadas en la resolución de problemas es reconocida por las leyes educativas recientes, que las materializan en distintos epígrafes de los currículos normativos. En dichos currículos el aprendizaje de las matemáticas se orienta desde el propósito de desarrollar en los estudiantes competencias básicas, es decir, desde una visión de la formación que prepara a los estudiantes para aplicar sus conocimientos a la resolución de los problemas que surgen en situaciones de la vida cotidiana.

Las actividades contextualizadas facilitan el aprendizaje y ayudan a desarrollar tanto la competencia matemática como su contribución a las demás competencias básicas, principalmente la de aprender a aprender y la autonomía e iniciativa personal. Arcavi (2002) defiende que el contexto cotidiano en los problemas puede sugerir enfoques diferentes para su resolución y destacar aspectos del problema que podrían pasar inadvertidos en un enunciado descontextualizado.

La cuestión central de este estudio es entender el alcance de esta influencia y determinar si el contexto es un factor dominante en la elección de las estrategias elegidas a la hora de resolver los problemas.

El sujeto es un alumno de tercero de primaria que ha resuelto trece problemas repartidos en cinco tandas. El proceso de recogida de datos se ha realizado en tres sesiones con la resolución de una tanda de problemas en cada una y una entrevista semiestructurada, dividida en dos partes. En la primera parte de dicha entrevista, el alumno explicó el proceso de resolución de la cuarta tanda de problemas. En la segunda parte, resolvió la quinta tanda de problemas.

Entre cada una de las sesiones se realizó un análisis informal de los resultados a partir del cual se diseñó la siguiente tanda de problemas con la intención de responder a algunas de las dudas surgidas del análisis de los resultados anteriores, tanto en lo que respecta al enunciado como a la forma de exposición a los problemas.

La memoria que sigue comienza presentando una revisión de la literatura pertinente al tema de investigación; seguidamente, se concreta la pregunta de investigación y los objetivos específicos; a continuación, se detalla el marco teórico empleado tanto para el diseño de los instrumentos de recogida de datos como para el análisis de los resultados; posteriormente, se presenta el enfoque metodológico llevado a cabo, detallando la muestra y los instrumentos utilizados; finalmente, se presentan los resultados y el análisis e interpretación que se hace de los mismos para llegar a las conclusiones del trabajo.

2. Revisión de la literatura

La literatura educativa sobre resolución de problemas es muy abundante. Castro Martínez (2008), en su trabajo sobre los valores educativos de la resolución de problemas matemáticos en el ámbito escolar, hace una clasificación de esta literatura en dos grandes líneas de investigación: enseñar a resolver problemas y determinar cómo pensamos cuando resolvemos problemas. Dentro de ellas, hay diferentes aproximaciones realizadas por filósofos, psicólogos, matemáticos profesionales y especialistas en Educación y Didáctica de la Matemática, cada una con enfoque propio.

Siguiendo la línea de determinar cómo pensamos cuando resolvemos problemas, se ha tratado de definir una serie de fases por las que pasa el resolutor. La clasificación más destacable es la de Polya (1945), que ocupó un lugar importante en el ambiente educativo español y ha influenciado las propuestas curriculares de matemáticas que se han promulgado en España.

La heurística, según Polya, trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas. Este autor defiende la existencia de cuatro fases en el proceso de resolución: comprender el problema; concebir un plan; ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Según Guzmán (1991) la heurística es el arte de buscar. Guzmán también describe las siguientes fases en el proceso de resolución de problemas: familiarizarse con el problema; buscar estrategias; llevar adelante la estrategia elegida; y revisar el proceso y sacar sus consecuencias.

Polya acompaña cada fase de un listado de sugerencias heurísticas apropiadas.

García Cruz (2001, p. 6), define las heurísticas como:

«Operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución».

Este autor ofrece algunos ejemplos de una amplia lista de heurísticas entre las cuales incluye: buscar un problema relacionado; resolver un problema similar más sencillo; dividir el problema en partes; considerar un caso particular; hacer una tabla; buscar regularidades; empezar el problema desde atrás o variar las condiciones del problema.

En el mismo sentido, el Grupo Cero de Valencia (1984) enfatiza la importancia de las estrategias de resolución de problemas consolidadas por la actividad matemática, enumerándolas como: generalizar, abstraer, hacer hipótesis y someterlas a pruebas, explorar, tomar decisiones, proponer ideas nuevas, hacer frente a situaciones problemáticas confiando en comprenderlas y resolverlas. Además, refuerza el papel del profesor en consolidar el uso sistemático de las herramientas heurísticas.

De todos modos, algunos autores consideran que existe un elemento bastante subjetivo en la elección no solo de las heurísticas como también de las fases. Beagle (1979) va más allá y afirma que:

«[...] hay bastantes indicadores de que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado simplista tratar de determinar una (o varias) estrategias que deberían ser enseñadas a todos (o a la mayoría) de los estudiantes».

En lo que respecta a la resolución de problemas en el ámbito escolar, los aspectos más importantes son los agentes que intervienen en la resolución y las componentes que lo articulan. Según Kilpatrick (1978), se distinguen tres componentes: el problema, el alumno y la situación. Lester (1983), por otra parte, señala algunas categorías de elementos identificables hacia una clasificación de las líneas prioritarias de las investigaciones. Son: factores de tarea, relacionados con la naturaleza del problema; factores del sujeto, que tienen que ver con las características del resolutor; factores del proceso, conductas individuales durante la resolución del problema; factores ambientales, que son características externas al problema y al resolutor además de factores de instrumentación y metodología de la investigación.

En esta misma línea, Schoenfeld (1985) considera que es mejor enseñar las estrategias ligadas a las clases de problemas e incorpora nuevos componentes de la resolución relacionados con los resolutores: conocimiento base, aspectos metacognitivos, aspectos afectivos, y sistema de creencias y prácticas. En su búsqueda de explicaciones a la conducta de los resolutores enumera los componentes que sirven para ello:

- Los **recursos cognitivos**, que son un conjunto de hechos y procedimientos conocidos por el resolutor.
- Las **heurísticas**, que son reglas y recursos para progresar en situaciones difíciles.
- El **control** o gestor, que es saber, entre las heurísticas, cuál es aplicable. Se realiza a través de las decisiones ejecutivas que hacen operativas las heurísticas, como hacer un plan, seleccionar objetivos centrales y sub-objetivos, buscar recursos conceptuales y heurísticos adecuados, evaluar el proceso a medida que lo resuelve, revisar y abandonar los planes si constata que no son eficaces. Van acompañadas de una verbalización del proceso de tipo metacognitivo,

que consiste en responder a las siguientes preguntas: ¿qué estoy haciendo?, ¿por qué y para qué lo hago?, ¿cómo lo usaré después?

- Las **creencias**, que captan la opinión personal de sujeto sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre cómo trabajar en ellas.

Además de reflexionar sobre las fases y las estrategias, distintos autores han investigado las características intrínsecas de los problemas que, a su vez, influyen en la manera de resolverlo y muchas veces determinan el éxito o el fracaso de la solución. Blanco & Blanco (2009) realzan la importancia de que las actividades propuestas se resuelvan de acuerdo al uso cotidiano que hacemos de ellas en situaciones similares. La mayoría de las dificultades que tienen los estudiantes tienen su origen en algún obstáculo a la hora de traducir el enunciado del problema y son la consecuencia de carencias de comprensión, descontextualización o ideas previas equivocadas, entre otros factores.

Finalmente, Gutiérrez, Martínez, & Nebreda (2008) explican cómo el currículo vigente en Cantabria en el momento en el que se llevó a cabo la investigación está orientado al desarrollo de las competencias, aspecto que está directamente vinculado a la consideración del contexto en el que se plantean los problemas.

3. Pregunta de investigación y objetivos específicos

El propósito de esta investigación es indagar en la influencia de los diferentes tipos de contexto y de otros elementos del enunciado de un problema en las estrategias de resolución de problemas aritméticos de multiplicación y división que realiza un estudiante de tercero de primaria.

Para ello se han delimitado una serie de objetivos, que son:

- Identificar estrategias de resolución de problemas desarrolladas por el sujeto (fases, heurísticas...).
- Estudiar la influencia del contexto en la elección de las estrategias utilizadas por el sujeto.

- Estudiar la influencia que el formato del enunciado de los problemas o el tamaño de los números ejercen sobre las estrategias utilizadas y sobre el resultado a la hora de resolver los problemas.
- Identificar el conocimiento matemático que el sujeto pone en juego al resolver los problemas.
- Estudiar cómo el conocimiento matemático o su ausencia influyen en la elección de estrategias.
- Identificar dificultades y errores en los que incurre el sujeto.

Motivados por estos objetivos, y revisando la bibliografía al respecto, hemos desarrollado una serie de preguntas de investigación que trataremos de resolver a la hora de analizar los resultados:

- ¿Son diferentes las estrategias de resolución de problemas que hacen los alumnos en contextos matemático, conocido y cotidiano?
- ¿Qué otros factores intervienen en la resolución de problemas?
 - ¿El conocimiento matemático del alumno?
 - ¿El contenido matemático tratado?
 - ¿El formato en el que se les da el problema (oralmente o por escrito)?
 - ¿El formato de las preguntas y del tamaño de los números?
- ¿Qué procesos de razonamiento se dan en la resolución de problemas?

4. Marco teórico

El marco teórico de este estudio se sitúa en la resolución de problemas, los tipos de contexto y las estrategias heurísticas utilizadas por el estudiante en cada una de las fases de la resolución de problemas. Además, tendrá en cuenta la tipología de los problemas, que se distinguirán según la forma de exponerlo (oral o escrito), con o sin ayuda de gráficas o imágenes, y con números grandes o pequeños.

Profundizamos en este planteamiento teórico a continuación.

4.1. Problemas. Tipología de problemas

Los elementos comunes en la idea de problemas matemáticos incluyen la existencia de una situación exterior a lo matemático, situada en una cuestión de la vida real que tiene interés por sí misma y cuya solución implica resolver algún desafío con cierto grado de incertidumbre, indispensable a todos los enunciados.

González Marí (2009) tiene en cuenta la existencia de más de una clasificación de problemas y destaca los criterios y tipos más importantes según:

- Ámbito o entorno
- Estructuración
- Presentación
 - o Sin enunciado verbal
 - o Enunciado verbal:
 - Con estructura semántica
 - Con estructura sintáctica:
- Posibles soluciones:
 - o Única; Múltiple o Sin solución
- Proceso de resolución
 - o Cerrados o abiertos
 - o De una o de varias etapas.
- Otros:
 - o De investigación, aplicados, etc.

El autor enumera los tipos de problemas más importantes en primaria y secundaria.

- Problemas aritméticos;
- Problemas de razonamiento lógico;
- Problemas manipulativos (material didáctico);
- Problemas ligados a juegos y pasatiempos;
- Problemas de modelización matemática: *problemas de la vida real sin estructuración o preparación.*

En este trabajo nos centramos en los problemas aritméticos de enunciado verbal. Específicamente, los problemas aritméticos se clasifican en:

- Primer nivel, con una sola operación:
 - Suma y resta: pueden ser de cambio o transformación, combinación, comparación o igualación.
 - Multiplicación y división: incluyen los de reparto equitativo, comparación multiplicativa, razón o tasa y producto cartesiano.
- Segundo nivel, contiene varias operaciones combinadas o varias etapas.
 - Según la estructura del enunciado:
 - Fraccionados (varias preguntas encadenadas)
 - Compactos (una pregunta al final del enunciado)
 - Por las operaciones :
 - Combinados puros, todas las operaciones pertenecen al mismo campo operativo.
 - Combinados mixtos, operaciones de diferentes campos operativos.
- Tercer nivel, incluye en el enunciado datos en forma de números decimales, fraccionarios o porcentajes.

4.2. Contexto

Adaptando distintas acepciones de la palabra contexto que aparecen en la literatura, en esta investigación denominamos contexto a la situación concreta en la que se formula un problema. Las situaciones hacen referencia a escenarios o entornos en los que el problema tiene sentido.

El análisis de estas situaciones da lugar a una variedad de clasificaciones de contextos en la literatura.

Por un lado, nos interesan las clasificaciones en las que se habla de la existencia en el enunciado de situaciones imaginarias o evocadas que se asemejen a situaciones de la vida cotidiana; así pues, *lo cotidiano* es todo aquello, existente o inventado, que pertenece a la realidad del estudiante, está relacionado con una situación conocida por el resolutor o parte de su vida cotidiana, es habitual para él.

Por otro lado, algunos autores hablan de situaciones reales; nos interesa especialmente el matiz que añaden Albarracín & Gorgorió (2013) con una reflexión sobre el uso que se da a la palabra *real* y aportan la conclusión a la que han llegado Sriraman, Knott, & Adrián, (2009, p. 5): «La palabra *real*

asociada a los problemas no se refiere únicamente a la conexión con el mundo real, sino que también se refiere a problemas que son reales en la mente de los estudiantes».

En este sentido, hablaremos de *lo conocido*, como aquellos elementos que el sujeto conoce y que representan algo significativo para él; su conocimiento sobre ellos le permite ponerse en situación para la resolución del problema. Incluyen, por ejemplo, los conocimientos sobre unidades de medidas, el tamaño de los números, etc.

Complementamos estas dos líneas —lo cotidiano y lo conocido— con lo que llamaremos matemático puro, que hace referencia a aquellos problemas en los que no aparece ninguna situación.

Somos conscientes de que las palabras conocido y cotidiano pueden dar lugar a confusión. Sin embargo, resaltamos que nuestra concepción de lo que es un contexto está vinculada de manera indisoluble con el conocimiento que el estudiante tiene de una situación. Por ello, para cada estudiante concreto, tiene sentido distinguir lo que para él es cotidiano (habitual) y lo que no siendo habitual es conocido (tiene sentido para él).

4.3. Fases de resolución de problemas y heurísticas

El resolutor, al resolver un problema, pasa por diferentes etapas individuales en las que utiliza heurísticas para llegar a la solución. Lo que caracteriza a un resolutor competente es su habilidad para pasar por las diferentes fases y saber elegir las heurísticas adecuadas hacia un resultado ideal.

Las operaciones mentales que constituyen las heurísticas favorecen el éxito en el proceso de resolución y ayudan al individuo o grupo a progresar en su solución. Aunque no es garantía de éxito, revela la competencia necesaria para llegar a ello.

En este trabajo adoptamos del listado de procesos heurísticos descritos por Echenique (2006), los típicos para segundo ciclo de educación primaria, tal como corresponde al sujeto estudiado:

- «Decir lo mismo pero de otra forma.
- Deducir qué se puede calcular a partir de unos datos conocidos.

- Dados ciertos datos y operaciones realizadas con ellos, determinar qué quiere calcularse.
- A partir de una situación propuesta y un esquema sagital o rectangular, inventarse un enunciado de un problema.
- Presentados un enunciado y varias operaciones, señalar la que resuelve el problema».

5. Metodología

La metodología utilizada es el estudio de caso, con un enfoque cualitativo, a través de la entrevista consistente en la verbalización por parte del alumno, con sus propias palabras, de los procesos que lleva a cabo al solventar los problemas y de las causas que le hacen elegir una u otra estrategia.

La recogida de datos se ha hecho a partir del planteamiento de problemas de matemáticas. El sujeto ha resuelto cinco tandas de problemas.

Las primeras tres tandas fueron resueltas en tres sesiones grabadas en vídeo. En ellas, el sujeto describió su razonamiento estimulado por las preguntas de la investigadora respecto a los motivos y procedimientos que realizaba.

La cuarta tanda de preguntas fue resuelta de forma individual, sin ningún tipo de intervención, de forma silenciosa y sin grabación de vídeo.

Finalmente, se realizó una entrevista semiestructurada en presencia de la investigadora y de la coordinadora del TFG, fue grabada en vídeo, y en ella el sujeto explicó los procedimientos y las respuestas de la cuarta tanda y realizó la quinta tanda de problemas de forma guiada.

Cada tanda de problemas fue diseñada a partir de las reflexiones informales obtenidas del visionado de la entrevista anterior y teniendo en cuenta los elementos teóricos que hemos presentado.

El proceso esquemático de obtención de datos es el que se puede ver en la figura I.:

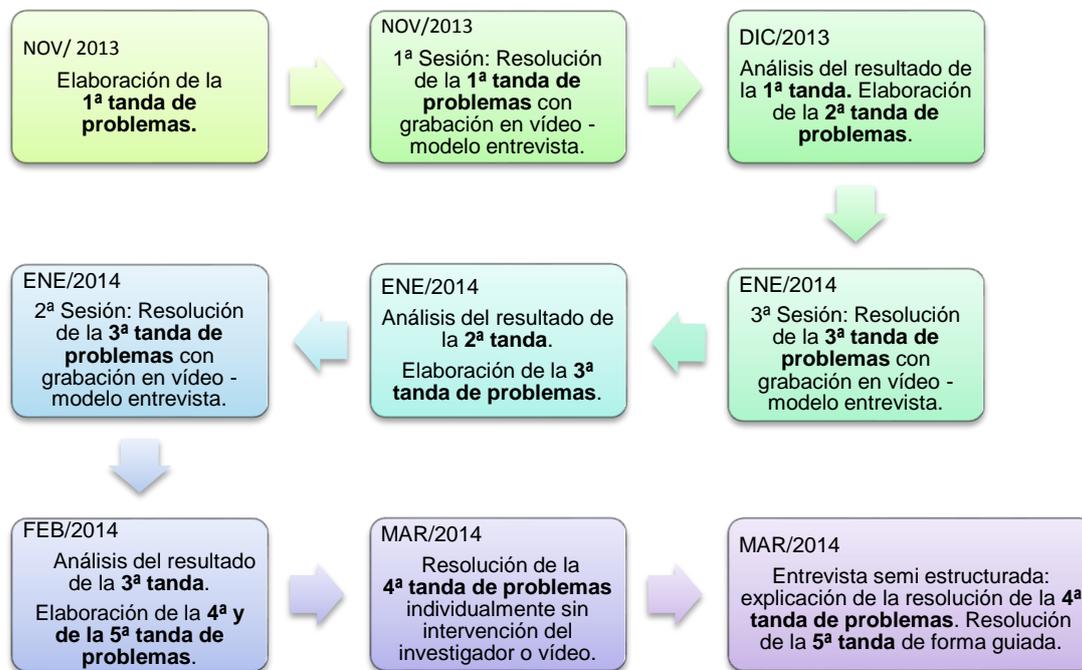


Figura 1. Descripción esquemática de la recogida de datos

5.1. Muestra

Se ha elegido a un estudiante de tercero de primaria de un centro público de Cantabria. La selección se ha realizado por disponibilidad.

El sujeto no presenta adaptaciones curriculares de ningún tipo; sin ser brillante, es un buen estudiante y el único aspecto que se ha procurado aislar es la motivación, especialmente alta en este caso.

Particularmente, el niño manifiesta que en clase, normalmente, los problemas son dictados, incluso en los exámenes. Afirma también que le gusta que los problemas tengan ilustraciones (dibujos, gráficas...), pero dice que en clase nunca los tienen.

5.2. Instrumentos

Tomamos las siguientes decisiones en cuanto a la tipología de problemas a estudiar:

- *Word problems* (problemas de palabras) con enunciado semántico, que se presentan en algunas sesiones en formato escrito y en otras de modo oral. Uno de los aspectos a analizar será la influencia de estos dos *formatos*.

- Problemas extraídos de las pruebas de diagnóstico, aunque serán adaptados a la edad del estudiante y a los diferentes contextos que queremos estudiar. Este hecho hace que no estén relacionados con las unidades didácticas del libro de texto y evita que recurra a ellas a la hora de buscar las estrategias y el algoritmo que debe utilizar.
- Problemas con proceso de resolución abierto, pero con solo una respuesta correcta posible.
- Los siguientes contextos:
 - Matemático.
 - Contextualizado en alguna situación general —conocido—.
 - Contextualizado en una situación habitual para el estudiante —cotidiano—.
- Contenido matemático relacionado con las operaciones aritméticas, mayoritariamente las de multiplicación y división.
- Dejamos abierta la posibilidad de utilizar material manipulativo si el estudiante lo solicitaba, aunque no lo hemos incorporado a las tareas.

Según estas decisiones los problemas, cuyo enunciado completo puede consultarse en el Anexo I, se estructuran de la siguiente manera (tabla I):

Tanda/ Fecha/ Nombre	Presentación	Tamaño de los números	Etapas	Nivel	Contexto	Conocimiento matemático	Gráficas/ Dibujos
1ª Sesión							
1ª Tanda/ nov 2013/ Pr. 1 - Asocia con flechas	Lectura en voz alta	Números pequeños	Dos	Primer Suma, resta y Multiplicación	Matemático	Multiplicación, doble, mitad.	Sí
1ª Tanda/ nov 2013/ Pr. 2 - En el mercado – merluzas	Lectura en voz alta	Números pequeños	Cuatro	Tercer Compacto Combinado mixto	Conocido	Monedas, mitad, medida (Kg), multiplicación y suma.	No
1ª Tanda/ nov 2013/ Pr. 3 - Extraescolares	Lectura en voz alta	Números medianos	Tres	Tercer Compacto Combinado mixto	Cotidiano	Horas, mitad, semanas/meses, multiplicación y sumas.	No

2ª Sesión							
2ª Tanda/ ene 2014/ Pr. 4 – Fotocopias	Enunciado verbal	Números pequeños	Una	Segundo Compacto Combinado puro	Matemático	Medidas (cm), multiplicación y proporciones.	No/Sí.
2ª Tanda/ ene 2014/ Pr. 5 - En el mercado – manzanas.	Enunciado verbal	Números pequeños iguales al anterior	Una o dos etapas.	Segundo Compacto/ Fraccionario Combinado puro	Conocido	Monedas, medida (Kg), multiplicación y suma.	No
2ª Tanda/ ene 2014/ Pr. 6 - Excursión familiar.	Enunciado verbal	Números pequeños	Una	Segundo Compacto Combinado puro	Cotidiano	Multiplicación.	No
3ª Sesión							
3ª Tanda/ feb 2014/ Pr. 7 - Contexto matemático puro	Lectura silenciosa	Números medianos	Varias	Segundo Compacto Combinado puro	Matemático	Multiplicación y estimación.	No
3ª Tanda/ feb 2014/ Pr. 8 - Baldosas	Lectura silenciosa	Números grandes	Varias	Segundo Compacto Combinado puro	Conocido	Medida, reparto, Multiplicación y estimación.	No

Entrevista semiestructurada/ mar 2014	Primera parte: Explicación de la 4ª tanda de problemas, resueltos de forma individual. Segunda parte: problemas leídos en voz alta e intervención de la entrevistadora adaptando los problemas a medida que contestaba a las preguntas.						
1ª parte – 4ª Tanda mar 2014/ Pr. 9 - Mascotas	Lectura silenciosa	Números medianos	Una	Tercer	Cotidiano – añadimos elementos innecesarios.	Decimales, Medida, reparto, Multiplicación y estimación.	Sí
1ª parte – 4ª Tanda mar 2014/ Pr. 10 - - Electricista	Lectura silenciosa	Números pequeños y grandes	Varias	Segundo Compacto Combinado mixto	Conocido	Medida, reparto, Multiplicación y estimación.	Sí
1ª parte – 4ª Tanda mar 2014/ Pr. 11 - Tarjetas para un amigo.	Lectura silenciosa	Números pequeños	Varias	Segundo Compacto Combinado mixto	Conocido	Medida, área, reparto, Multiplicación y estimación,	Sí

2ª parte – 5ª Tanda mar 2014/ Pr. 12 - Visita a la granja	Lectura silenciosa	Números grandes y pequeños	Varias	Segundo Fraccionario Combinad o mixto	Conocido – añadimos elemento s innecesario s	Moneda, medida (Kg) y (KM), Suma, resta y estimación.	Sí
2ª parte – 5ª Tanda mar 2014/ Pr. 13 - Panadería	Lectura silenciosa	Primero números grandes y después pequeños.	Varias	Segundo Fraccionario Combinado mixto	Conocido –	Medida (Kg), reparto, Multiplicación y estimación.	Sí

Tabla I. Caracterización de los problemas utilizados

Los problemas fueron diseñados específicamente para el sujeto. En cada tanda, se cambiaba tanto la forma de exposición del alumno a los problemas como el grado de dificultad de los mismos.

A título ilustrativo, analizamos a continuación los enunciados de tres problemas aparentemente muy similares pero cuyas diferencias pretendían revelar qué elemento influía realmente en el procedimiento y en el resultado.

Pr. 8 Baldosas

Un albañil desea embaldosar el suelo de una habitación rectangular de dimensiones 310 de ancho por 275 de largo. Tiene dos modelos de baldosa:

- a) Modelo 1: baldosa cuadrada de 25x25. Cada baldosa cuesta 3 euros.
- b) Modelo 2: baldosa rectangular de 25x50. Cada baldosa cuesta 4 euros.

¿Con qué modelo de baldosa le sale más barato el material?

¿Cuántas baldosas necesitará?

Pr. 10 Electricista

Un electricista está haciendo la instalación eléctrica en las aulas de un colegio. El número de bombillas y de enchufes que coloca en cada aula depende del tamaño del aula. Tiene una tabla con los siguientes datos:

	Número de Enchufes	Tamaño	Número de bombillas
Aula 1	1 enchufe por cada 20 m ²	20 m ²	1 bombilla por cada 8 m ²
Aula 2		24 m ²	
Aula de vídeo		80 m ²	
Sala de profesores		345 m ²	

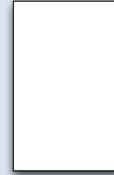
¿Cuántas bombillas y cuántos enchufes colocará en cada aula?

Pr. 11 Tarjetas para un compañero

Un compañero de clase está enfermo y ha estado en el hospital. Sus compañeros de clase van a ir a visitarlo. Quieren decorar tarjetas para llevarle el día de la visita. Van a hacer tarjetas rectangulares del tipo siguiente:

5 cm

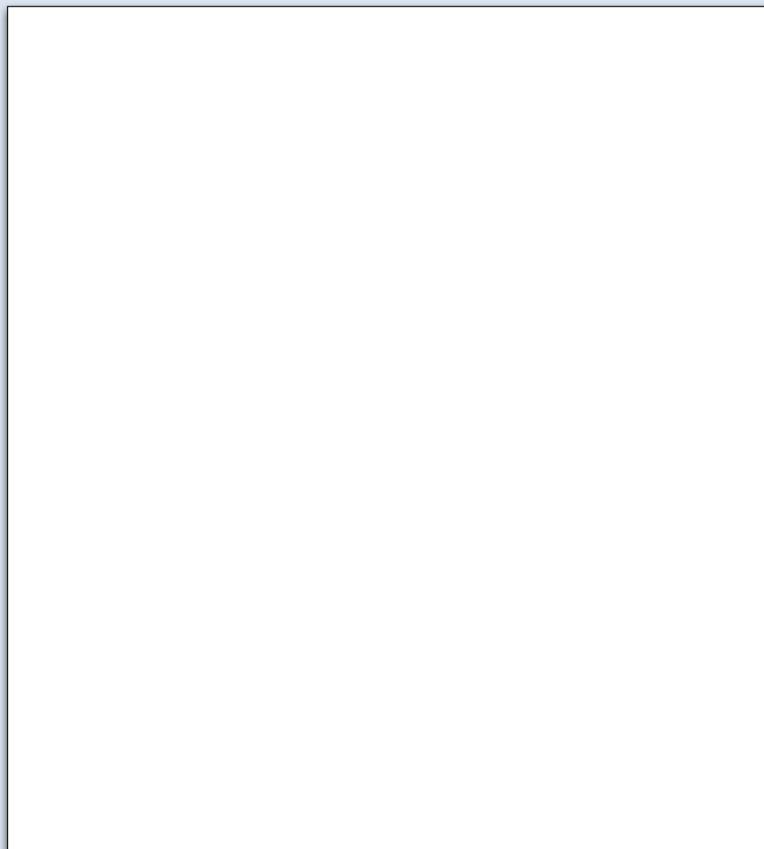
9 cm



Para elaborarlas, van a usar cartulinas grandes que miden 45 de largo y 35 de ancho.

35 cm

45 cm



- ¿Cuántas tarjetas pequeñas se pueden hacer a partir de una cartulina grande?
- Son 24 alumnos en clase y quieren decorar una tarjeta cada uno. ¿Cuántas cartulinas grandes necesitarán?

Pregunta orientativa: Si con cada cartulina hacen 15 tarjetas, ¿cuántas cartulinas grandes necesitarán?

En un principio el contenido matemático es el mismo en los tres problemas, se ha modificado el formato aportando primero una tabla en el pr. 10 y una ilustración en el pr. 11.

Tanto en el pr. 8 como en el pr. 10 el contexto era conocido, condición que se ha modificado en el pr. 11 introduciendo un contexto cotidiano.

Finalmente, se ha modificado la pregunta en el pr. 11, simplificando las operaciones y disminuyendo el tamaño de los números.

El análisis de los vídeos de las sesiones se ha hecho teniendo en cuenta la relación entre el tipo de problema, los contextos que incluyen, las estrategias heurísticas aplicadas y las fases por las que pasa el resolutor a la hora de resolverlo. Como instrumento de análisis de los vídeos se ha utilizado la tabla II, adaptada de Silva, Rodríguez & Santillán (2009, p.23).

Problema		
Fases de resolución de problemas	<p>Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.</p>	<p>a. Comprende el planteamiento del problema.</p> <p>b. Comprende parcialmente el problema.</p> <p>i. Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar.</p> <p>ii. Comprende la pregunta, pero no comprende los conceptos y no sabe qué operaciones utilizar.</p> <p>iii. Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la operación.</p> <p>c. No comprende el planteamiento del problema.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>ESTAR ATENTO A:</p> <p>Elementos del contexto</p> <p>Tamaño de los números (y en consecuencia, facilidad de las operaciones)</p> <p>Formato en el que se presenta el problema (con/sin imágenes; solo/acompañado; lectura escrita/oral).</p>
	<p>Selección y ejecución de la estrategia.</p> <p>¿Utiliza heurísticos?, ¿cuáles?</p>	<p>d. Estrategias reflexivas.</p> <p>i. Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p>

		ii. Diseña un dibujo o esquema acorde a lo planteado en el problema para encontrar la solución. iii. Razonamiento directo: procesamiento inductivo que se apoya en el uso del cálculo mental. e. Estrategias irreflexivas. i. Adivina la operación o fórmula y realiza operaciones mecánicamente. ii. Contesta "cualquier cosa", sin hacer alguna operación. iii. Borra las operaciones que realiza. Realiza correctamente las operaciones (si/no, motivo posible) Obtiene la solución correcta (si/no) Pone las unidades (si/no) (correcto/incorrecto)
	Revisión del resultado	Interpreta la solución de alguna manera (si/no) Valida la solución de alguna manera (si/no) (correcto/incorrecto)
Limitaciones	Dificultades	
	Errores	

Tabla II. Categorías de análisis de los vídeos

Para facilitar la sistematización del análisis de datos se ha empleado la tabla III en la que se han agrupado los problemas para analizarlos según una serie de criterios.

TANDA/ FECHA/ NOMBRE	PRESENTACIÓN/ FORMATO/ TAMAÑO DE LOS NÚMEROS	ETAPAS	NIVEL	CONTEXTO	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	FASES Y ESTRATEGIAS RELEVANTES	ERROR	DIFICULTAD
----------------------------	---	--------	-------	----------	----------------------------	--------------------------------------	-------	------------

Tabla III Comparativa de resultados de los problemas

6. Resultados. Análisis e interpretación.

6.1. Resultados

Los resultados han sido obtenidos de forma progresiva y encadenada: las conclusiones informales de cada sesión eran fundamentales para el diseño de la siguiente. Del análisis de los vídeos y después de rellenar las respectivas tablas de resultados (Anexo II – Categorías de análisis de datos), hemos obtenido los resultados parciales que se presentan en las cuatro subsecciones siguientes.

6.1.1. Resultados observados en la primera tanda de problemas

El alumno:

- No utiliza la analogía para relacionar los problemas, vuelve a operar sin tener en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.
- No hay estrategias irreflexivas, pone interés e intenta llegar a la respuesta correcta.
- En todos los problemas ignora el enunciado una vez que selecciona la estrategia. El contexto no cotidiano y el cotidiano sólo se han distinguido en un breve momento de la interpretación del enunciado, cuando el sujeto pregunta: *¿qué es 'la unidad'?* Sin embargo, el alumno ha solventado esto él solo, por lo que podemos decir que la influencia del contexto ha sido mínima. No ha influido en su estrategia posterior ni en las dificultades detectadas.
- Las dificultades son consecuencia de saltos en las etapas del procedimiento; conjeturamos que estas se deben a otra cosa —al cálculo mental— no al contexto.
- El problema de contexto cotidiano ha tenido una ejecución incorrecta debido a la necesidad de traducir lenguaje cotidiano a matemático: ha confundido 15 horas al mes con media hora; no ha multiplicado las semanas que tiene el mes y no lo ha transformado todo a horas antes de restar. Este sí puede ser un elemento de contexto influyente en el éxito de la ejecución.

6.1.2. Resultados observados en la segunda tanda de preguntas

El alumno:

- Utiliza la analogía para relacionar los dos primeros problemas, de hecho esto le ayuda a resolver las operaciones que selecciona a pesar de que dude sobre el significado del enunciado (*rombo o rectángulo; cuánto cuesta un kilo*).
- Cuando identifica una regularidad en los números ignora el contexto. En todos los problemas ignora el enunciado una vez que selecciona la estrategia.
- No comete errores, quizás sea por el tamaño de los números. Hace todos los cálculos mentalmente.

- No hay estrategias irreflexivas, pone interés e intenta llegar a la respuesta correcta.
- El formato de presentación del problema no interfiere mucho en el proceso de resolución. En todo caso, el formato oral le ayuda porque cuando lo lee por sí mismo no vuelve al enunciado y con la lectura por parte de la investigadora pide siempre una repetición.
- Le han resultado demasiado fáciles.
- Sólo hubo influencia del contexto en el pr. 6 - Excursión familiar (*¿no todos comen lo mismo?; ¿son 15 para cada uno?*). Hace intervenir al contexto: por ejemplo, quiere saber cuántas ciruelas come cada uno y parece resolver el problema teniendo en cuenta esa circunstancia (para ver cuánto come cada uno, en vez de dividir los números como tales números, hace una multiplicación; aunque no tenemos seguridad, podemos interpretar que va estimando cuántas ciruelas come cada uno y las reitera por el número de personas; es decir, podemos interpretar que ha caído en la cuenta de que la respuesta se obtiene multiplicando gracias al contexto).
- El contexto, por sí mismo, no es un factor determinante, sino que como factor está muy influido por el tipo y la estructura de los datos del problema. Cuando los datos son de un tamaño pequeño y tienen una regularidad obvia, ignora el contexto.
- Parece que la distinción entre contexto conocido y contexto cotidiano tiene poco peso. Parece que más que el contexto está influyendo el formato de las preguntas y el tipo de los números que se emplean.

A partir de estas observaciones decidimos diseñar problemas en los que no haya una regularidad obvia en la estructura de los datos de modo que aislemos el contexto, a ver qué influencias hay. Mantuvimos los tres contextos y diseñamos problemas con números grandes y cuyas cifras puedan ser iguales pero que las operaciones sean diferentes.

6.1.3. Resultados observados en la tercera tanda de preguntas

El alumno:

- Podría aprovechar el contexto para buscar alternativas resolutorias que compensen el hecho de no saber qué operación aplicar. Como ignora el

enunciado no aprovecha la información adicional que muchas veces aporta para compensar la ausencia de conocimiento matemático.

- En el último caso el contexto del enunciado, aunque complejo, era cotidiano y por eso no tuvo problemas para comprenderlo aunque sí en resolverlo porque no conocía las fracciones.
- Parece que hace una traducción inmediata del contexto a la operación matemática, no sabemos cómo. Puede ser que no lo necesite o puede ser que ignore el contexto (parece que manipula los números de una forma lógica según los propios números, pero sin pensar en el contexto).

En base a estas reflexiones hemos decidido buscar problemas en los que ignorar el contexto sí importe.

6.1.4. Análisis de la entrevista semiestructurada cuarta y quinta tandas de preguntas

El alumno:

- Dice que prefiere los números grandes; sin embargo, cuando los números son pequeños utiliza estrategias aditivas para multiplicar y dividir, lo que le hace tener éxito en la resolución. No obstante, cuando los números son grandes equivoca la operación que tiene que hacer.
- Parece tener algún problema con la comprensión de los significados de la multiplicación y de la división y, por eso, cuando los números son pequeños no tiene problemas porque suma o resta pero cuando son grandes y tiene que multiplicar o dividir no sabe qué operación elegir.
- Ha fallado todos los problemas de área, en cada una de las sesiones/tandas de problemas en las que fueron presentados con diferentes formatos y contextos (pr. 8 - Baldosas, pr.10 - Electricista y pr. 11 - Tarjetas).
- Lo mismo parece ocurrir con los problemas que involucran fracciones.
- Estas dos observaciones nos hacen pensar que el conocimiento matemático del alumno es dominante sobre el factor de contexto.

6.2. Análisis e interpretación de resultados

Una vez presentados los resultados parciales que nos han ido guiando durante el proceso de la investigación, para profundizar el análisis de los resultados y

observando la tabla de comparación de resultados (Anexo III – Tabla comparativa de resultados de los problemas), hemos llevado a cabo un análisis comparativo de los datos según criterios asociados a los objetivos de la investigación. Resumimos estos resultados a continuación.

6.2.1. Comparación de los resultados a partir de la dificultad

Analizando los resultados a partir de la dificultad se han constatado dos regularidades:

- No ha podido resolver los problemas que incluían el concepto de área (Pr. 8 - Baldosas, pr.10 - Electricista y pr. 11 – Tarjetas para un compañero).

En un principio parecía que el formato interfería por utilizarse el símbolo X en lugar de indicar que se refería a las medidas de las baldosas, pero en los problemas siguientes se ha modificado este ítem, además de presentarlo en una tabla en el problema pr. 10 y de proporcionarle un dibujo en el pr. 11. El único elemento que se mantuvo fue el contenido matemático, el significado de la multiplicación y de la división.

Otra observación es que parece desconocer este tipo de problemas o, por lo menos, no estar entrenado para ello.

El pr. 8 se presenta en un contexto no cotidiano para él y se observa una diferencia respecto al pr. 11, aunque no supiera resolverlo ni con números pequeños, por ser un contexto cotidiano, buscó una estrategia válida que es recurrir al dibujo.

- Ha tenido dificultades con los problemas que incluían fracciones, tanto de tiempo como de cantidad física (pr. 3 - Extraescolares y pr. 9 - Mascotas).

La idea de fracción aún no la tiene muy consolidada debido a la edad y solo conoce los conceptos que son relativos a su vida cotidiana, la idea de media hora en el pr. 3 y la de mitad y un cuarto en el caso de las pastillas en el pr. 9. En el pr. 3 no multiplicó las semanas del mes y confundió minutos con horas. En el pr. 9 no era capaz de hacer fracciones diferentes a la mitad o a un cuarto.

6.2.2 Comparación de los resultados a partir del contexto

El contexto muchas veces influye en el proceso de comprensión de los enunciados de los problemas pero no hubo diferencias evidentes entre los

errores y dificultades en los que incurrió el estudiante según el tipo de contexto presentado ni en los tipos de estrategias seguidas. La única situación en la que el contexto cotidiano sí interfiere es en la estrategia elegida en el pr. 11. En algunos momentos reflexiona sobre el contexto. En el pr. 6 – Excursión familiar él se pregunta: *¿15 es lo que ha comido cada persona? o ¿las personas de la familia han comido 15 en total?* En el pr. 2 - En el mercado - Merluzas, se pregunta *¿qué es la unidad?* En el pr. 13 - Panadería cuándo tenía que repartir las rosquillas parte del enunciado que era innecesario le hizo reflexionar: *¿la cantidad dada de rosquillas era antes o después de venderlas?*

En todos los casos soluciona, sin problemas, él solo sus dudas y estas reflexiones no han interferido aparentemente en el resultado o en los procesos de resolución.

La diferencia de resultados entre los contextos conocidos y cotidianos y el matemáticos reside en que en los primeros se introducen conceptos como horas, medidas, meses que debe relacionar y que, por desconocimiento o poca habilidad en su manipulación, le llevan a error.

6.2.3. Comparación de los resultados a partir del tipo de enunciado, con o sin imágenes, números grandes o pequeños

En un principio parecía que las tablas que aparecían en los enunciados de los problemas podrían ayudar en las estrategias para la solución de las dificultades, pero ha cometido los mismos errores en el mismo tipo de problema independiente de la representación utilizada en el enunciado.

El tamaño de los números influye en el resultado puesto que con números pequeños resuelve mejor, utilizando estrategias informales, supliendo así sus carencias en los significados formales de la multiplicación y de la división.

Un ejemplo claro es que resuelve sin problemas un mismo enunciado simplemente si le cambiamos el tamaño de los números. Por ejemplo en el pr. 10 - Electricista, resuelve bien las cuestiones que suponían operaciones con números pequeños porque utilizaba la suma, sin embargo cuando las medidas eran 340 m^2 , tuvo dificultad para saber qué operación utilizar.

Lo mismo ocurre en el pr. 11 – Tarjetas para un amigo. En el pr. 13 – Panadería, como tenía dificultades para resolver con los datos del problema le

hemos adaptado el enunciado disminuyendo los números: 12 kg. de harina repartidos en bolsas de 5 kilos. ¿Cuántas bolsas necesita y cuánto sobra? Él lo respondió sin problemas.

Por otra parte, las etapas de los problemas sí que dificultan la resolución, máxime cuando resuelve mentalmente y recurriendo al cálculo mental.

A título ilustrativo se puede destacar que al darse cuenta de un error e intentar resolverlo se le olvidaban otros pasos que había resuelto anteriormente. En el Pr. 2- En el mercado – Merluzas identifica qué es medio kilo y divide el precio de un kilo, 4€, encontrando como respuesta 2€. Considera que se gastó 4€ en merluzas, 2 a 10€ cada una. Suma el gasto y resta de lo que tenía, sabe que la respuesta es lo que le queda. Realiza la prueba de la operación y considera la respuesta adecuada: 24€. Una vez terminados todos los problemas se da cuenta de su error al considerar el gasto en merluzas. En esta ocasión, sin embargo, ignora los guisantes por lo que nos damos cuenta de que reconoce cada etapa y es capaz de resolverla pero tiene dificultad para ejecutarlas todas juntas.

El formato influye en varios casos, algunos no se han podido comprobar si la influencia era relevante pero concretamente en el caso del pr. 8 - Baldosas sí que influyó en el resultado puesto que el sujeto multiplicó el ancho por el alto de cada baldosa por estar representados utilizando una X, símbolo de la multiplicación.

6.2.4. Comparación de los resultados a partir de la comunicación empleada (leído en voz alta, lectura silenciosa...)

No se han observado diferencias en los resultados dependiendo del formato de presentación del problema. En todo caso, la lectura por parte de la entrevistadora supuso una ventaja, considerando que pedía que se lo repitiese, mientras que cuando era él quien leía, pocas veces repetía la lectura del enunciado.

6.2.5. Comparación de los resultados con relación a las estrategias utilizadas

Con relación a las estrategias hemos observado que siempre sigue las mismas fases:

Identifica el problema, elige una operación, la resuelve y hace la prueba. La mayoría de las veces lo hace oralmente, algunas veces (números pequeños) con cálculo mental, pero no hace anotaciones más allá de las operaciones con números demasiado grandes y casi nunca vuelve al enunciado para reflexionar sobre el resultado, cuando lo hace se da cuenta de su error. En todo caso, lo hace si la entrevistadora le anima a hacerlo o si necesita (en el formato oral) que se lo vuelva a leer.

Cuando le hemos presentado una situación de regularidad en los números sí que percibió la analogía y la aprovechó como estrategia. Esto ocurrió en los pr. 4 - Fotocopias y el pr. 5 – En el mercado - Manzanas. No solo se dio cuenta de la regularidad, sino que además esto le hizo compensar su dificultad para resolver la división.

En el pr. 11 el contexto parecía influir en la estrategia puesto que se puso a hacer un dibujo. Lamentablemente, no la acabó de ejecutar por lo que no sabemos si podría haber influido en el resultado.

Finalmente, la mayoría de los errores derivan de que el sujeto resuelva la mayoría de las operaciones por cálculo mental, no reflexione sobre el resultado, solamente verifique las operaciones ya efectuadas por la prueba. No utiliza apenas estrategias de resolución más allá de la identificación de la operación correspondiente y no dispone de un proceso o de etapas en la resolución.

7. Conclusiones

Los resultados obtenidos son útiles para la respuesta a los objetivos y para resolver las preguntas de investigación. Así mismo, han dado lugar a nuevas inquietudes que se pueden solventar en trabajos futuros.

El estilo de relación del sujeto con las matemáticas es procedimental y rutinario, por lo que sigue siempre las mismas fases de resolución.

Parece no estar entrenado para usar heurísticas. Emplea el estilo heurístico de forma muy débil, puede deberse al tipo de problema que se le plantea que no fomenta el uso de heurísticas o a hábitos rutinarios y procedimentales de resolución de problemas.

Existe poca diferencia entre la influencia del contexto conocido y el cotidiano sin embargo tanto la regularidad de los números como su tamaño, en todos los contextos sí que son relevantes para la solución de los problemas.

El tamaño de los números puede estar relacionado con los contextos cotidianos del sujeto ya que, por la edad, los números pequeños son más cercanos a su realidad, está más entrenado en manejarlos en su vida diaria, ya ha elaborado heurísticas para operar con ellos. Cuando falla el conocimiento matemático, el contexto cotidiano ayuda a la resolución.

El formato y la forma de presentación del problema no parecen ejercer una influencia relevante para el resolutor puesto que selecciona rápidamente la operación a seguir y no suele volver al enunciado

El desconocimiento de algunos contenidos matemáticas resultaban un obstáculo a la solución de los problemas. Su principal dificultad se refiere al desconocimiento del significado de algunas operaciones y a la operatoria mental sin apenas tomar notas.

En base a estas conclusiones se da respuesta a las preguntas de investigación.

Las estrategias de resolución de problemas fueron las mismas para los diferentes tipos de contexto, exceptuando la mayor facilidad que tuvo con la manipulación de números pequeños. Se puede suponer que esto es así por estar más habituado a resolver situaciones con estos números o porque estos números facilitan la operatoria y suplen carencias en el conocimiento matemático.

El conocimiento matemático del alumno y el tratado en cada problema parecen cobrar relevancia en la resolución de problemas principalmente porque el sujeto tiene un estilo procedimental que impide la búsqueda de estrategias alternativas.

Finalmente, cabe destacar que al realizar este trabajo hemos identificado, algunas líneas de investigación futuras en las que se podría seguir avanzando.

Por un lado, hemos identificado algunas debilidades que podrían ser subsanadas. Concretamente, nos gustaría analizar problemas nuevos que estuviesen especialmente diseñados para poner en juego estrategias

heurísticas que no han aparecido en la experiencia debido a la tipología de problemas usados.

Por otro lado, hemos identificado algunas conjeturas para las que no tenemos suficiente información. Concretamente, nos gustaría profundizar en el peso que tienen determinados factores, ya que, aunque hemos podido identificar su influencia, no hemos podido concluir si son o no dominantes.

8. Bibliografía

- Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics. A curriculum in mathematics Project*. Her Majesty's Stationary Office.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2013). Problemas de Estimación de Grandes Cantidades: Modelización e Influencia del Contexto. *Relime*, vol.16 (3).
- Arcavi, A. (2002). The everyday and the Academic in Mathematics. In M. B. Moschkovich, *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom* (pp. 12-29). Reston (VA): USA: NCTM.
- Beagle, E. (1979). *Critical variables in mathematics education*. Whashington DC: Mathematical Association of America. NCTM.
- Blanco, B., & Blanco, L. J. (2009). Números. Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Revista de Didáctica de las matemáticas*, 75-85.
- Castro Martínez, E. (2008, 07 22). Resolución de Problemas Ideas, tendencias e influencias en España.
- Cero, G. (1984). *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas*. Valencia: Nau Libres.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas Resolución de Problemas*. Pamplona: GOBIERNO DE NAVARRA. Departamento de Educación.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 427-442.
- García Cruz, J. A. (2001). Matemáticas en Secundaria. *La Didáctica de las Matemáticas: una visión general*. Red Telemática Educativa Europea.
- González Marí, J. L. (2009). Resolución de problemas de matemáticas. *Fundamento y práctica de la competencia matemática*. Ceuta: CEP.
- Gutiérrez, L., Martínez, E., & Nebreda, T. (2008). *Cuadernos de Educación de Cantabria: Las competencias básicas en el área de Matemáticas*. Santander: Gobierno de Cantabria. Consejería de Educación.
- Guzmán, M. d. (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona : Labor.

- Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. In L. L. Hatfield, & D. A. Bradard, *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus Ohio: ERIC/ SMEAC.
- Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. In R. Lesh, & M. Landau, *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton (NJ).
- Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Sriraman, B., Knott, L., & Adrián, H. (2009). The mathematics os estimation: Possibilities for interdisciplinary pedagogy and social consciousness. *Interchange: A Quarterly Review of Education*, 40(2), 205-223.

9. Anexos.

Anexo I – Enunciado de los problemas

Sesión 1, 1ª Tanda de problemas

Pr. 1. Asocia con flechas

Asocia con flechas cada operación con su resultado:

La mitad de 4	20
El doble de 10	8
30 menos la mitad de 4	22
El doble de 10 más la mitad de 4	2
30 menos (el doble de 10 más la mitad de 4)	28

Pr. 2. En el mercado - Merluzas

Paula va al mercado para realizar la compra. Tiene que comprar las verduras y el pescado. Lleva 30 euros y compra lo siguiente:

- medio kilo de guisantes a 4 euros el kilo
- 2 merluzas a 10 euros la unidad

¿Cuánto dinero le sobraré?

Pr. 3. Extraescolares

En el conservatorio, Mateo tiene dos tipos de clases de música: solfeo y piano.

- Tiene media hora de piano a la semana.
- Tiene dos horas de solfeo a la semana.

Sabemos que dispone de 15 horas al mes para hacer música y fútbol.

¿Cuántas horas le quedan para el fútbol?

Sesión 2, 2ª Tanda de problemas

Pr. 4. Fotocopias

Las longitudes de los lados de un rectángulo son 3 cm y 12 cm. Hemos hecho una fotocopia ampliada y ahora el lado de 3 cm mide 6 cm en la fotocopia. ¿Cuánto medirá en la fotocopia el lado de 12?

Pr. 5. En el mercado – Manzanas

Tres kilos de manzanas cuestan 12 euros, ¿cuánto costarán 6 kilos?

Si tres kilos de manzanas cuestan 12 euros, ¿cuánto cuesta un kilo?

Pr. 6. Excursión familiar

Somos 5 personas en la familia. Cuando vamos de excursión a pasar el día, llevamos para el postre 15 ciruelas. ¿Cuántas ciruelas tendrá que llevar una familia de 3 personas?

5 personas en una familia comen 15 ciruelas. ¿Cuántas ciruelas come cada persona?

Sesión 3, 3ª Tanda de problemas

Pr. 7. Contexto matemático puro

Encuentra un número que al multiplicarlo separadamente por 15 y 48 se acerque lo más posible a 170 y 420 pero sin sobrepasarlos.

Pr. 8 Baldosas

Un albañil desea embaldosar el suelo de una habitación rectangular de dimensiones 310 de ancho por 275 de largo. Tiene dos modelos de baldosa:

- a) Modelo 1: baldosa cuadrada de 25x25. Cada baldosa cuesta 3 euros.
- b) Modelo 2: baldosa rectangular de 25x50. Cada baldosa cuesta 4 euros.

¿Con qué modelo de baldosa le sale más barato el material?

¿Cuántas baldosas necesitará?

Entrevista Semiestructurada
Primera parte 4ª Tanda de problemas

Pr. 9 Mascotas

(Adaptado de pruebas de diagnóstico-Andalucía 2006/07)]

LAS MASCOTAS

Adrián tiene una amiga que se ha ido de viaje durante 7 días y él debe cuidar sus tres mascotas:

- Un pastor alemán de cuatro años.
- Una hembra labrador que está criando a 6 cachorritos.
- Un beagle de 3 meses.

Le ha dejado esta tabla con los siguientes datos:

	Necesidad de comida al día	Peso	Necesidad de agua al día	Medicinas (una sola vez)
Perro pastor alemán	700-850 gr.	45 kg.	1,5 a 2 litros	1 pastilla por cada 10 kg. de peso
Perra labrador	550-600 gr.	38 kg.	3 litros	
Cachorro beagle	220-260 gr.	10 kg.	0,5 litros	

¿Cuántas pastillas le dará a cada uno?

Pr. 10 Electricista

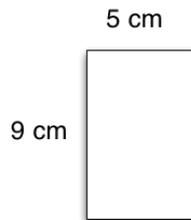
Un electricista está haciendo la instalación eléctrica en las aulas de un colegio. El número de bombillas y de enchufes que coloca en cada aula depende del tamaño del aula. Tiene una tabla con los siguientes datos:

	Número de Enchufes	Tamaño	Número de bombillas
Aula 1	1 enchufe por cada 20 m ²	20 m ²	1 bombilla por cada 8 m ²
Aula 2		24 m ²	
Aula de vídeo		80 m ²	
Sala de profesores		345 m ²	

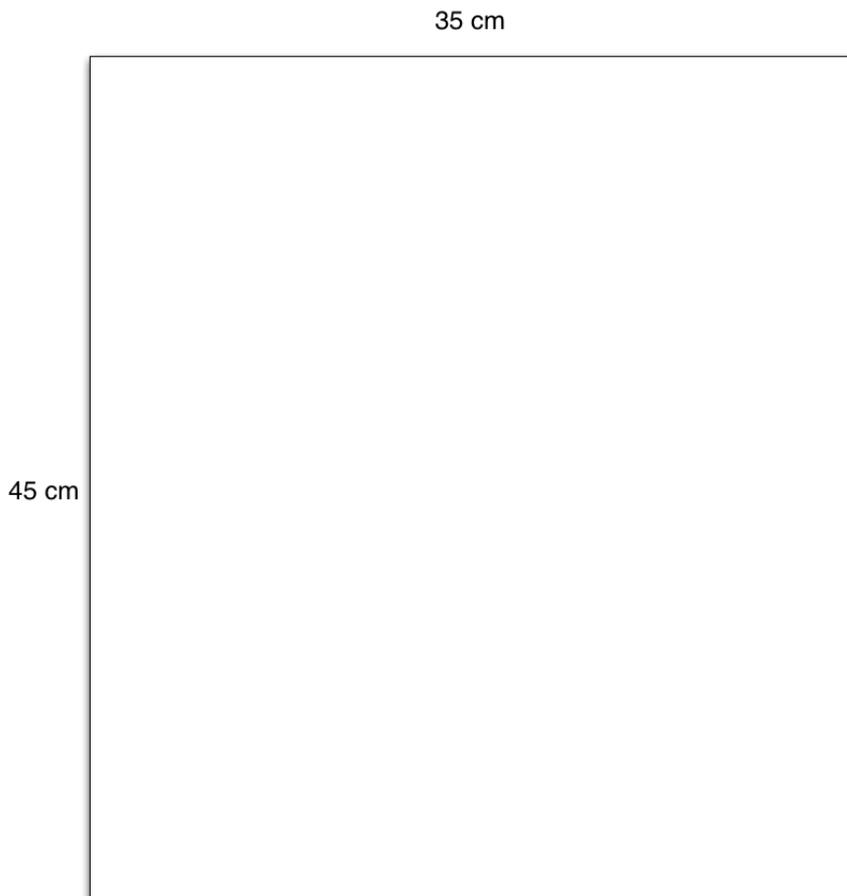
¿Cuántas bombillas y cuántos enchufes colocará en cada aula?

Pr. 11 Tarjetas para un compañero

Un compañero de clase está enfermo y ha estado en el hospital. Sus compañeros de clase van a ir a visitarlo. Quieren decorar tarjetas para llevarle el día de la visita. Van a hacer tarjetas rectangulares del tipo siguiente:



Para elaborarlas, van a usar cartulinas grandes que miden 45 de largo y 35 de ancho.



- a) ¿Cuántas tarjetas pequeñas se pueden hacer a partir de una cartulina grande?

b) Son 24 alumnos en clase y quieren decorar una tarjeta cada uno.
¿Cuántas cartulinas grandes necesitarán?

Pregunta orientativa: Si con cada cartulina hacen 15 tarjetas, ¿cuántas cartulinas grandes necesitarán?

Entrevista Semiestructurada
Segunda parte 5ª Tanda de problemas

Pr. 12 Visita a la granja

“En la última semana del mes de marzo, la clase de 4º de Educación Primaria ha visitado una Granja- Escuela en la que pudieron realizar diversas actividades al aire libre y conocer más aspectos de los animales domésticos y de las plantas”.



La entrada a la Granja-Escuela valía 9 euros con 60 céntimos. Selecciona el conjunto de monedas que marca esa cantidad exactamente.

A.	
B.	
C.	
D.	

— El tractor de la Granja-Escuela pesa 4.735 kilogramos. Si el tractor y su remolque juntos pesan 8.371 kilogramos. ¿Cuánto pesa el remolque?

- A. 4.636 kilogramos
- B. 3.646 kilogramos
- C. 3.636 kilogramos
- D. 13.106 kilogramos

— ¿Qué unidad de longitud utilizarías para medir la distancia que ha recorrido el autobús que nos ha llevado a la Granja-Escuela?

- A. Km
- B. m
- C. mm
- D. cm

Pr. 13 Panadería

PANADERÍA

Carlos compra, junto con su padre, casi todos los días en la panadería de la Sra. Juana. Juntos han elaborado una lista con lo que compraron durante el año pasado en este establecimiento.

Pan.....	250 barras.
Leche.....	175 litros.
Refrescos.....	50 botes.
Bollos.....	225 unidades.
Pastas de té.....	125 paquetes.

La Sra. Juana ha repartido 2.062 pastas en bolsas cerrándolas herméticamente para que no se estropeen. En cada bolsa ha puesto 8 pastas. ¿Cuántas bolsas ha necesitado y cuántas pastas le han sobrado?

El depósito de harina está casi vacío. Tan solo está ocupado un cuarto de su contenido. ¿Cuántos kg de harina deben pedir a la fábrica para llenar totalmente el depósito si en el interior quedan en estos momentos 330 kg?

- a) 330 kg
- b) 660 kg
- c) 990 kg
- d) 1.320 kg

Sesión 1, 1ª Tanda de problemas

Pr. 1. Asocia con flechas

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	Comprende de forma inmediata el planteamiento del problema. Motivo posible: Es posible que esté habituado a resolver operaciones.
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	Selecciona las operaciones cuyo significado es apropiado y las ejecuta de forma inmediata. Resuelve por cálculo mental las cuatro primeras órdenes del problema y realiza correctamente las operaciones. Se equivoca en la última: <i>30 menos (el doble de 10 más la mitad de 4).</i> Al resolver omite el doble de 10 sin embargo anteriormente había resuelto bien el doble de 10 más la mitad de 4 por cálculo mental. Motivos posibles: El contexto del enunciado del problema puede haber interferido por la presentación dentro del paréntesis. Puede ser un problema de estrategias, como no realiza las operaciones de forma ordenada facilita la posibilidad de olvidar etapas. La cantidad de etapas puede presentar una dificultad. En los otros cuatro pasos solo había una o dos operaciones y en esta son tres.
	Revisión del resultado	No interpreta la solución o se daría cuenta de que no hay la opción con el resultado encontrado. Hace la prueba y piensa que con ello valida la solución. Aspectos destacables: -La necesidad de hacer la prueba en la última orden del problema mientras que en las demás solo hizo cálculo mental. Hace la prueba: resultado de $30 - 12 = 18$; $18 + 12 = 30$ y valida el problema como resuelto. -No percibe que al unir con flechas el resultado (18) que encuentra no está entre las opciones.
Limitaciones	Dificultades	Tiene dificultad en entender el sentido global del problema, no aprovecha las respuestas anteriores para resolver cada etapa. Posibles dificultades en operación en la que tuvo dificultad: <ul style="list-style-type: none"> - Lectura del paréntesis. - Realización de tres operaciones en lugar de dos. - Presentación del comando en secuencia desordenada con relación al proceso de resolución. Quizás no hubiese fallado si hubiera extrapolado/ relacionado los resultados anteriores y así disminuido el trabajo. No ha valorado la coherencia, el hecho de que tenía que relacionar con una fila de respuestas y la suya no estaba.
	Errores	Ignora el doble de 10 en la quinta orden del problema aunque lo conoce.

Pr. 2. En el mercado – Merluzas

Fases de resolución de problemas	<p>Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.</p>	<p>Comprende el problema porque describe el proceso de resolución. “Saber cuánto se ha gastado para ver cuánto le queda”.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Comprende los elementos del contexto.</p> <p>El tamaño de los números es pequeño.</p> <p>El problema no tiene imágenes ni tablas pero el enunciado y la pregunta están separados de la lista de los valores a operar.</p> <p>Disponía del texto del problema, lectura individual acompañado.</p>
	<p>Selección y ejecución de la estrategia.</p> <p>¿Utiliza heurísticos, cuáles?</p>	<p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Deduce qué se puede calcular con los datos.</p> <p>Se apoya en el uso del cálculo mental. Apenas realiza anotaciones.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones aunque no todas las necesarias y por ello la solución del problema no es correcta:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Identifica qué es medio quilo y divide encontrando la respuesta: 2. - Considera que dos merluzas a 10 euros, es cuatro, - Suma el gasto: 2+4: 6, menos 30, 24. - Al revisar se da cuenta de su error, de que las merluzas cuestan 20 euros pero al resolver este problema ignora el precio de los guisantes. <p>Pone las unidades pero no el símbolo del euro, quizás lo desconozca, escribe la palabra.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>La cantidad de etapas puede presentar una dificultad.</p>
	<p>Revisión del resultado</p>	<p>Realiza la prueba de la operación y considera que esto demuestra que el problema está correcto.</p> <p>No vuelve a leer el enunciado.</p> <p>Posteriormente revisa todo el problema y percibe que se ha confundido.</p>
Limitaciones	<p>Dificultades</p>	<p>Se pregunta qué es una unidad pero especula y acierta.</p>
	<p>Errores</p>	<p>Suma merluzas y euros.</p> <p>No multiplica 10 x 2 aunque sabe hacerlo, puesto que después sí que lo hace pero vuleve a olvidar una parte del problema.</p> <p>En la corrección del resultado multiplica 10x2 pero se le olvidan los guisantes.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Puede deberse a un problema de atención o a que el problema tiene demasiadas etapas y eso le dificulta la operación.</p>

Pr. 3. Extraescolares

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende parcialmente el problema.</p> <p>Comprende el problema, los conceptos y las operaciones, pero se confunde con la operación y mezcla unidades.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Probablemente eran demasiados conceptos, una vez que pasó a minutos ya no tuvo en cuenta el enunciado, solo veía números.</p> <p>Quizás desconozca cuántas semanas tiene un mes.</p> <p>Disponía del problemas para revisar el enunciado pero no había tablas, gráficas ni imágenes.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Realiza las operaciones parcialmente correctas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Encuentra los minutos semanales pero no los mensuales y al restar las horas confunde minutos con horas. - Como no puede restar 30 de 120, aplica la propiedad conmutativa a la resta. - No obtiene la solución correcta. <p>Pone las unidades pero no utiliza símbolos, escribe la palabra.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No controla las operaciones con fracciones de horas, días, semanas...</p> <p>Es posible que no tenga muy afianzada la resta y sus propiedades.</p>
	Revisión del resultado	<p>Una vez más realiza la prueba pero no vuelve a leer el enunciado.</p> <p>Relaciona el resultado correcto con la corrección de las operaciones que ha seleccionado.</p>
Limitaciones	Dificultades	<p>Tiene problemas al relacionar horas y minutos, hace bien las conversiones pero se olvida etapas.</p> <p>No multiplica las semanas (¿sabrá cuántas tiene el mes?) y no convierte las horas en minutos o los minutos en horas para hacer la operación.</p>
	Errores	<p>No multiplica las semanas que tiene un mes.</p> <p>Mezcla minutos y horas.</p> <p>Aplica la propiedad conmutativa a la resta.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Puede ser que desconozca los conceptos.</p> <p>Puede ser que no sepa las propiedades de la resta.</p>

Sesión 2, 2ª Tanda de problemas

Pr. 4. Fotocopias

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende el planteamiento del problema cuando lo leemos una segunda vez.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>El problema se presenta leído por la investigadora, no tiene acceso a dibujo.</p>
	<p>Selección y ejecución de la estrategia.</p> <p>¿Utiliza heurísticos, cuáles?</p>	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Solo hace el dibujo porque se lo pedimos, no tenía necesidad.</p> <p>Razonamiento directo: procesamiento inductivo que se apoya en el uso del cálculo mental.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones .</p> <p>Obtiene la solución correcta.</p> <p>Pone las unidades correctamente aunque pide confirmación: centímetros es cm, ¿verdad?</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No se equivoca aunque confunde rombo y rectángulo porque hace analogía con el problema anterior.</p>
	Revisión del resultado	<p>Interpreta la solución.</p> <p>Aunque el resultado es correcto, percibe la proporcionalidad, no le parece que tenga sentido porque confunde el rectángulo con un rombo por lo que tendría que tener todos los lados iguales.</p> <p>Al poco reflexiona y se da cuenta de su equivocación.</p>
Limitaciones	Dificultades	<p>No presenta dificultades.</p> <p>Confunde rombo y rectángulo pero lo soluciona él solo.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Esto es una evidencia de que desprecia el contexto en el enunciado.</p> <p>Si tuviera en cuenta el contexto no habría podido realizar la operación y consecuentemente no habría podido resolver el problema.</p>
	Errores	No comete errores.

Pr. 5. En el mercado - Manzanas

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende de inmediato el planteamiento del problema.</p> <p>Cuando le preguntamos cuánto cuesta un kilo no sabe hacerlo al principio.</p> <p>Necesita que le lea varias veces el problema, pide confirmación pero al final razona.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Tanto el procedimiento como los números eran los mismos que el anterior problema que acababa de resolver.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Razonamiento directo: procesamiento inductivo que se apoya en el uso del cálculo mental.</p> <p>Explica su estrategia:</p> <p>Hay que hacer 12×2? Porque 6 es lo mismo que 2×3.</p> <p>Hace el cálculo mental y responde de inmediato.</p> <p>Aplica la anañogía. Hace referencia al problema anterior: antes hemos hecho el mismo cálculo.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones.</p> <p>Obtiene la solución correcta.</p> <p>No pone la unidad pero se refiere a ella como kilos, no reflexiona porque no es necesario para él en este caso.</p>
	Revisión del resultado	<p>Valida la solución razonando, relacionando con las respuestas anteriores.</p>
Limitaciones	Dificultades	<p>La única dificultad es en lo que se refiere al precio de un kilo, aun así la resuelve.</p> <p>Utiliza la multiplicación para llegar a la división. En realidad deduce a partir de las tablas.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No está entrenado en la división.</p>
	Errores	<p>No comete errores.</p>

Pr. 6. Excursión familiar

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende el planteamiento del problema.</p> <p>Pide una aclaración respecto al enunciado:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿Cada persona come 15? <p>Depués de la segunda lectura inmediatamente empieza a operar: 15/3...se corrige y dice 15/5.</p> <p>Vuelve a pedir aclaración:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿para que dê 3 para cada uno? Piensa un segundo y dice: Muy fácil. <p>Motivo posible:</p> <p>Parece que en este caso el contexto cotidiano le ha facilitado la resolución.</p> <p>No hizo analogía con los problemas anteriores.</p> <p>Los números eran pequeños.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto y la realiza por escrito.</p> <p>Para la segunda pregunta sí que realiza cálculo mental.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones ya que los números son pequeños.</p> <p>Obtiene la solución correcta.</p> <p>No pone las unidades, contesta verbalmente.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Parece que es un ejercicio que efectúa en u vida cotidiana, con números relativamente pequeños y verosímiles.</p>
	Revisión del resultado	No reflexiona sobre el resultado, le parece evidente.
Limitaciones	Dificultades	No presenta dificultades
	Errores	No hay errores

Sesión 3, 3ª Tanda de problemas

Pr. 7. Contexto matemático puro

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende parcialmente el problema.</p> <p>Piensa que debe encontrar dos números, hace operaciones, no estima.</p> <p>En algún momento dice que no puede continuar porque no sabe la tabla del 11.</p> <p>Encuentra el resultado de $15 \times 11 = 165$ y no sabe si multiplicando por 12 se pasa.</p> <p>Empieza por números altos en el caso del 48 porque sospecha que tiene que repetirse muchas veces.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Es un enunciado desconocido, no está entrenado.</p> <p>No tiene un significado asociado que le ayude a razonar.</p> <p>No está acostumbrado a estimar.</p> <p>Parece no saber el significado de las operaciones. (multiplicación como suma reiterada).</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Realiza correctamente casi todas las operaciones. Falla por problemas con las tablas de multiplicar.</p> <p>No obtiene la solución correcta porque no ha entendido bien el enunciado: un número...</p>
	Revisión del resultado	No interpreta la solución
Limitaciones	Dificultades	<p>Tiene dificultades con el enunciado y con las operaciones.</p> <p>La dificultad con las tablas ralentizan mucho el proceso.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Aun no tiene bien aprendidas las tablas de multiplicar.</p> <p>No realiza correctamente los recursos del cálculo mental.</p> <p>No está entrenado en este tipo de problemas.</p>
	Errores	Errores con las tablas de multiplicar.

Pr. 8. Baldosas

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende parcialmente el problema. Comprende la pregunta, pero no comprende los conceptos y no sabe qué operaciones utilizar.</p> <p>Multiplica ancho por largo pero no sabe a qué se refiere, es normal puesto que no tiene concepto de área, tendría que hacer un dibujo para resolverlo.</p> <p>Llega a la misma conclusión que antes de operar, la respuesta correcta.</p> <p>La de 25x50 es más grande y aunque cueste más es necesita menos.</p> <p>Para saber cuantas tendría que comprar tendría que multiplicar lo que mide la habitación por las baldosas: 310x1250... (solo multiplica el ancho de la habitación, no tiene concepto de área). 1250 es lo que mide el modelo 2 de baldosa.</p> <p>Cuando acaba de operar ya no se acuerda lo que está haciendo.</p> <p>Tiene claro que la baldosa más rentable es la más grande.</p> <p>No sabe el resultado a la segunda pregunta, cuántas baldosas son necesarias.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>En este caso el contexto influye mucho pues no sabe o no le importa cómo se colocan las baldosas y es fundamental para entender el planteamiento.</p> <p>El problema fue diseñado para que el contexto fuera relevante.</p> <p>Llega a una conclusión de razonamiento aunque opera.</p> <p>El formato está influyendo mucho: en lugar de ancho y largo se usa una x que él confunde con el símbolo de la multiplicación.</p> <p>Si hubiese imágenes le facilitaría puesto que no hace dibujos.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Dice el resultado sin necesidad de operar, sabe que debe multiplicar pero no entiende muy bien para qué, utiliza la lógica para el resultado.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones y el resultado es correcto.</p> <p>No pone la unidad porque no sabe cuál es.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No sabe dividir por lo que tendría que usar la estimación o la multiplicación.</p> <p>No estima ni hace analogía con el anterior.</p>
	Revisión del resultado	<p>En realidad lo único que tiene claro es la respuesta, es la más grande porque, aunque es más cara se usan menos.</p>
Limitaciones	Dificultades	<p>No sabe qué hacer en el problema.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Tiene dificultades con la presentación del problema.</p> <p>No conoce el significado de la multiplicación como suma reiterada ni el concepto de área.</p> <p>No está entrenado en este tipo de problemas.</p>
	Errores	<p>Su principal error es de estrategia puesto que sabe la respuesta pero no sabe justificarla.</p>

Entrevista Semi estructurada
Primera parte 4ª Tanda de problemas

Pr. 9. Mascotas

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende el planteamiento del problema.</p> <p>Desprecia toda la información innecesaria.</p> <p>Sabe que solo necesita el peso.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Tanto el contenido como el contexto son cotidianos.</p> <p>El formato, con kilos y fracciones es lo que dificulta porque parece no saber la diferencia entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.</p>
	<p>Selección y ejecución de la estrategia.</p> <p>¿Utiliza heurísticos, cuáles?</p>	<p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto tiene dificultades con las fracciones aunque sabe que $\frac{1}{4}$ es menos que $\frac{1}{2}$ le resulta difícil hacer fracciones que no sean exactamente $\frac{1}{2}$ o 1 entero.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones.</p> <p>Obtiene la solución correcta (si/no)</p> <p>Pone las unidades (si/no) (correcto/incorrecto)</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No controla la manipulación de fracciones.</p>
	Revisión del resultado	<p>Ni revisa el resultado ni lo valida, reflexiona sobre ello pero no está seguro.</p>
Limitaciones	Dificultades	<p>No presenta dificultad de comprensión pero sí al operar.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No tiene el concepto de fracción.</p> <p>Solo conoce las fracciones que existen en su vida cotidiana, no entiende su significado real.</p>
	Errores	<p>Operar con fracciones.</p>

Pr. 10. Electricista

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende la pregunta y los conceptos pero confunde la idea de reparto con la de multiplicación.</p> <p>Además no sabe qué datos utilizar para cada operación.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No conoce el contexto, una vez más le confunde la idea de área.</p> <p>Puede ser que, desconociendo el contenido matemático y el contexto no tenga recursos para resolverlo.</p> <p>Cuando el tamaño de los números es pequeño utiliza la suma y no tiene problemas pero con números más grandes tiene dificultad para dividir.</p> <p>El problema se presenta con una tabla, en teoría podría facilitar la resolución pero no parece que haga ningún efecto.</p> <p>No relaciona este problema con el anterior, el de las mascotas.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Selecciona una operación pero su significado no es apropiado para el texto.</p> <p>Utiliza el cálculo mental.</p> <p>Con números pequeños utiliza la suma.</p> <p>Con números grandes multiplica en lugar de dividir.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones pero como no son las correctas, no obtiene la solución correcta.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>El problema fue diseñado para que el contexto fuera relevante.</p> <p>No conoce el significado de la multiplicación como suma reiterada.</p> <p>No conoce el concepto de área.</p> <p>No está entrenado en este tipo de problemas.</p>
	Revisión del resultado	<p>No interpreta la solución puesto que no entiende lo que está haciendo.</p> <p>Al multiplicar le da un resultado muy alto, más bombillas que metros, no reflexiona sobre ello.</p>
Limitaciones	Dificultades	Tiene problemas con el concepto de área, no entiende bien la división como reparto.
	Errores	Al plantear las estrategias no ha sabido qué hacer.

Pr. 11. Tarjetas para un amigo

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende parcialmente el problema.</p> <p>Comprende la pregunta y los conceptos, pero no identifica las operaciones que debe realizar.</p> <p>Para la segunda parte del problema suponemos que se hacen 15 tarjetas con cada cartulina grande entonces lo soluciona sin problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Necesita dos cartulinas y le sobran 6 tarjetas. <p>Motivo posible:</p> <p>Es un problema de la noción de área, no entiende el significado de la multiplicación como suma reiterada.</p> <p>El contexto parece que no influye. No resuelve bien ninguno de los problemas que tienen esta idea de área.</p> <p>En este caso el tamaño de los números era pequeño y había un dibujo y tampoco lo ha resuelto. Ha intentado dibujarlo con una regla pero tenía problemas para encajarlo en el folio.</p> <p>No estima.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Intenta diseñar un dibujo o esquema acorde a lo planteado en el problema para encontrar la solución.</p> <p>No realiza correctamente las operaciones pues no sabe lo que tiene que hacer. Intenta dibujarlo pero no lo consigue.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>El problema fue diseñado para que el contexto fuera relevante.</p> <p>No conoce el significado de la multiplicación como suma reiterada.</p> <p>No conoce el concepto de área.</p> <p>No está entrenado en este tipo de problemas.</p>
	Revisión del resultado	No la interpreta porque no lo entiende.
Limitaciones	Dificultades	Concepto de área
	Errores	Solo al elaborar las estrageias para calcular el área.

Entrevista Semi estructurada
Segunda parte 5ª Tanda de problemas

Pr. 12. Visita a la granja

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende el planteamiento del problema.</p> <p>Seleccionar la moneda, ignora la palabra exactamente y ha marcado las monedas que componían el valor. Si le sobra no le importa, dijo, ¿si me sobra no importa, verdad? En lo demás no tiene problemas, cuenta y encuentra la respuesta. Aunque dice que n ha dado la unidad del dinero.</p> <p>Respecto al peso del tractor, comprende el enunciado y dice que habrá que restar para encontrar la respuesta. Porque el resultado será lo que me queda.</p> <p>Sobre la medida de longitud le influye: dice que no lo sabe porque no han dicho a qué distancia está.</p> <p>Sobre el tiempo no tiene ningún problema lo calcula rápidamente.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Ignora rápidamente el contexto y efectúa las operaciones, primero suma, luego resta, luego multiplica.</p> <p>Tiene una forma extraña de restar.</p> <p>Puede que tenga problemas con la distancia porque vive en un pueblo y puede haber una granja a pocos metros del colegio.</p> <p>Podría tener en cuenta el enunciado y pensar que en autobús tenía que estar lejos.</p> <p>En este caso hay una influencia del contexto.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>Selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Realiza correctamente las operaciones pero tiene una forma peculiar de restar que le da problemas con las llevadas y eso hace que se equivoque.</p>
	Revisión del resultado	<p>Interpreta la solución y se da cuenta de que tiene que estar mal porque no encuentra la opción con el valor que ha encontrado.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>No se había dado cuenta en el primer problema que también era de opciones y la respuesta que ha encontrado no estaba. ¿porque será?</p>
Limitaciones	Dificultades	No hubo dificultades aparentes, ha resuelto el error de cálculo y se dió cuenta de ello solo.
	Errores	Un pequeño error de cálculo solventado por él

Pr. 13. Panadería

Fases de resolución de problemas	Comprensión enunciado. Desde que lo lee hasta que empieza la operación aritmética.	<p>Comprende el planteamiento del problema.</p> <p>No sabe qué es SRA.</p> <p>Lee los datos en los que faltan, a propósito, la pregunta y dice ¿pero qué hay que hacer?</p> <p>Tenemos que leerle lo que viene a continuación.</p> <p>Confunde patatas con pastas.</p> <p>Necesita saber si tiene 125 pastas en la tienda o si las ha comprado. Hay unos datos arriba y confunde las pastas que han sido vendidas y las que ha repartido.</p> <p>Luego se da cuenta de que lo que reparte es otro valor, vuelve a leerlo pero multiplica.</p> <p>Para saber cuántas han sobrado piensa que tiene que multiplicar y luego restar.</p> <p>Para saber si tiene problemas con el razonamiento, con el contexto o con el tamaño de los números le planteamos un problema similar: 12kg de harina repartidos en bolsas de 5 kilos. ¿cuántas bolsas necesita y cuanto sobra? Responde rápidamente.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>La presentación del problema, el contexto le está influyendo.</p> <p>Como los números son grandes y le falta significado a la división por eso multiplica.</p> <p>Sabe explicar que no es resta porque no quiere saber lo que ha vendido. Entiende la estructura multiplicativa y aditiva. Pero confunde multiplicación y división</p> <p>No es consciente de que el resto de la división es lo que no puedes repartir.</p> <p>No tiene significado en contexto de multiplicación y división. En tercero a veces hacen operatoria antes de dar significado.</p> <p>Lo tiene con números pequeños. No lo ha extrapolado. Es que suma con números pequeños. Cuando el número es muy grande no puede sumar.</p>
	Selección y ejecución de la estrategia. ¿Utiliza heurísticos, cuáles?	<p>Estrategias reflexivas.</p> <p>No selecciona la operación cuyo significado es apropiado para el texto.</p> <p>Intenta multiplicar.</p>
	Revisión del resultado	<p>No interpreta la solución.</p> <p>Hace la prueba de la división.</p>
	Limitaciones	<p>Dificultades</p> <p>El significado de la división y su resto.</p> <p>Motivo posible:</p> <p>Todavía no ha aprendido el significado de las operaciones.</p> <p>Errores</p> <p>Selección de la operación.</p>

Anexo II – Tabla comparativa de resultados de los problemas

TANDA/ FECHA/ NOMBRE	PRESENTACIÓN/ FORMATO/ TAMAÑO DE LOS NÚMEROS	ETAPAS	NIVEL	CONTEXTO	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	FASES Y ESTRATEGIAS RELEVANTES	ERROR	DIFICULTAD
1ª Tanda/ nov 2013/ Asocia con flechas	Lectura en voz alta/ Enunciado con gráficas/ Números pequeños (dos cifras)	Dos	Primer Suma, resta y Multiplicación	Matemático	Multiplicación, doble, mitad.	Cálculo mental/ no evalúa el resultado.	Omite una de las fases de la operación en una de las tareas.	Parentesis Existencia de más de dos operaciones encadenadas.
1ª Tanda/ nov 2013/ En el mercado – merluzas	Lectura en voz alta/ Enunciado sin gráficas/ Números pequeños (dos cifras).	Cuatro	Tercer Compacto Combinado mixto	Conocido	Monedas, mitad, medida (Kg), multiplicación y suma.	Cálculo mental/ evalúa el resultado pero al rectificar vuelve a equivocarse en otro paso.	Omite una de las fases de la operación , posiblemente por despiste. Al revisar corrige este fallo y vuelve a omitir otro dato.	Realizar las operaciones sin anotaciones Duda sobre qué es una unidad pero lo soluciona
1ª Tanda/ nov 2013/ Extraescolares	Lectura en voz alta/ Enunciado sin gráficas./ Números medianos (dos o tres cifras)	Tres	Tercer Compacto Combinado mixto	Cotidiano	Horas, mitad, semanas/meses, multiplicación y sumas.	No tenía una estrategia clara, mezcla unidades (horas minutos). Realiza la prueba de las operaciones elegidas para validarlas.	No multiplica las semanas de mes Mezcla unidades Invierte los factores de la resta.	Desconoce cuántas semanas tiene un mes. Demasiados conceptos en un mismo enunciado. Demasiadas etapas para una sola pregunta. No controla las unidades. No tiene afianzadas las propiedades de la resta.

2ª Tanda/ ene 2014/ Fotocopias	Enunciado verbal/ Enunciado sin gráficas./ números pequeños (dos cifras)	Una	Segundo Compacto Combinado puro	Matemático	Medidas (cm), multiplicación y proporciones.	Cálculo mental	No comete errores	Confunde rectángulo con rombo pero desprecia esta confusión (contexto) y resuelve el problema No divide, como son números pequeños recurre a las tablas.
2ª Tanda/ ene 2014/ En el mercado – manzanas.	Enunciado verbal/ Enunciado sin gráficas/ números pequeños, iguales que el problema anterior	Una o dos etapas.	Segundo Compacto/ Fraccionario Combinado puro	Conocido	Monedas, medida (Kg), multiplicación y suma.	Cálculo mental y validación por relación con los resultados anteriores.	No comete errores	Le cuesta entender cuánto cuesta un kilo pero al final lo resuelve. No divide, como son números pequeños recurre a las tablas.
2ª Tanda/ ene 2014/ Excursión familiar.	Enunciado verbal/ Enunciado sin gráficas./ números pequeños (dos cifras)	Una	Segundo Compacto Combinado puro	Cotidiano	Multiplicación.	No hace analogía con los problemas anteriores. Utiliza en contexto para reflexionar.	No comete errores	Pregunta si es en total o cada persona.
3ª Tanda/ feb 2014/ Contexto matemático puro	Lectura silenciosa/ Enunciado sin gráficas./ números medianos (dos o tres cifras)	Varias	Segundo Compacto Combinado puro	Matemático	Multiplicación y estimación.	Multiplica por escrito cada uno de los números por varios otros	Comete errores al multiplicar por falta de control de las tablas.	No entiende bien el enunciado, piensa que son dos números, no uno que valga para los dos. Quizás por el contexto.

<p>3ª Tanda/ feb 2014/ Baldosas</p>	<p>Lectura silenciosa/ Enunciado sin gráficas/ números grandes tres cifras.</p>	<p>Varias</p>	<p>Segundo Compacto Combinado puro</p>	<p>Conocido</p>	<p>Medida, reparto, Multiplicación y estimación.</p>	<p>Multiplica ancho por largo de cada una de las opciones y llega a la conclusión de que la más grande es más ventajosa.</p> <p>Cuando le preguntamos la cantidad de baldosas multiplica el ancho de la habitación por el producto de las medidas de las baldosas.</p>	<p>No se trata de un erro de resolución sino de comprensión o de estrategia.</p>	<p>Respecto al contexto solo reflexiona sobre la falta de indicación de la unidad de medida.</p> <p>El formato parece interferir por la falta de imágenes y por utilizarse el símbolo X en lugar de indicar largo y ancho.</p> <p>Desconoce este tipo de problemas – no está entrenado.</p>
<p>Entrevista semi estructurada/ mar 2014</p>	<p>Lectura en voz alta e intervención de la entrevistadora adaptando los problemas a medida que contestaba a las preguntas.</p>							
<p>4ª tanda/ mar 2014/ Mascotas</p>	<p>Lectura silenciosa/ Enunciado con gráficas/ números medianos (dos y tres cifras)</p>	<p>una</p>	<p>Tercer</p>	<p>Cotidiano – añadimos elementos innecesarios.</p>	<p>Decimales, Medida, reparto, Multiplicación y estimación.</p>	<p>Dice que suma por cálculo mental</p> <p>Es destacable la comprensión de este contexto cotidiano, desprecia la información inútil puesta a propósito.</p>	<p>Se acerca al resultado pero especula con las fracciones y no es preciso.</p>	<p>El desconocimiento de las fracciones interfiere en el resultado. Solo conoce la idea de 1/2 y de 1/4.</p>
<p>4ª tanda/ mar 2014/ Electricista</p>	<p>Lectura silenciosa/ Enunciado con gráficas./ números pequeños (dos cifras) y números grandes.</p>	<p>varias</p>	<p>Segundo Compacto Combinado mixto</p>	<p>Conocido</p>	<p>Medida, reparto, Multiplicación y estimación.</p>	<p>Con números pequeños utiliza la suma.</p> <p>Con números grandes multiplica en lugar de dividir.</p>	<p>Ignora la fracción cuándo tiene una veintena incompleta.</p> <p>Multiplica el tamaño por la</p>	<p>Se suma tres dificultades muy claras, por un lado la idea fracción, por otra el significado de la multiplicación/divis</p>

							cantidad de enchufes y bombillas.	ión y finalmente la idea de área.
4ª tanda/ mar 2014/ Tarjetas para un amigo.	Lectura silenciosa/ Enunciado con gráficas/ números pequeños (una cifra o dos cifras)	varias	Segundo Compacto Combinado mixto	Conocido	Medida, área, reparto, Multiplicación y estimación,.	Intenta dibujarlo pero no le cabe la cartulina en el folio y dice que entonces no lo puede resolver. Necesita un papel más grande. Para la segunda parte del problema utiliza el cálculo mental y resuelve correctamente el problema.	No es un error ni de comprensión de estrategia, es más bien una dificultad	No sabe resolver este tipo de problemas tampoco con números pequeños o con una imagen pero por lo menos en este caso recurrió a una estrategia más apropiada. No tiene el concepto de área.
mar 2014/ Visita a la granja	Resolución guiada / Enunciado con gráficas/ no es relevante, son números grandes y pequeños.	varias	Segundo Fraccionario Combinado mixto	Conocido – añadimos elementos innecesarios	Moneda, medida (Kg) y (KM), Suma, resta y estimación.	Ignora rápidamente el contexto y efectúa las operaciones, primero suma, luego resta, luego multiplica.	No comete ningún error. No contesta a la pregunta sobre longitud	Resta de una forma peculiar. Vive en una zona rural y es posible visitar, desde su colegio a una granja a menos de un kilómetro. No tiene en cuenta que para ello podría ir andando.

<p>mar 2014/ Panadería</p>	<p>Resolución guiada/ Enunciado con gráficas/ primero números grandes (más de tres cifras) y luego números pequeños (una y dos cifras)</p>	<p>varias</p>	<p>Segundo Fraccionari o Combinad o mixto</p>	<p>Conocido – añadimos elementos innecesario s</p>	<p>Medida (Kg), reparto, Multiplicación y estimación.</p>	<p>Identifica la operación y realiza la división. En la segunda parte multiplica y luego resta Al adaptar el problema para números más pequeños ((12kg en 5 bolsas) realiza cálculo mental, sumando y responde rapidamente. (se relaciona con un problema similar en el problema de las tarjetas.</p>	<p>Multiplica en lugar de dividir (concepto de reparto),</p>	<p>Es el problema en el que más ha influido el contexto. Es comparable al de las mascotas pero es un contexto no cotidiano, aunque conocido. Hace preguntas sobre los datos innecesarios, (fue antes o después de vender las pastas). Esto, sin embargo no influye ni en la estrategia ni en el resultado. No entiende que el resto de la división es lo que sobra después de un reparto. Tiene problemas con el significado de la división/multiplic ación.</p>
--------------------------------	--	---------------	---	--	---	---	--	--