



Facultad de Educación



# GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

2013/2014

Errores comunes en el aprendizaje de conceptos relacionados con la posición relativa de dos rectas en el plano; una muestra con estudiantes de 4º (9/10 años) y 6º (11/12 años) de Primaria en Cantabria

Common errors when learning concepts about the relative position of two straight lines: A sample with 9/10 and 11/12 year-old students in Cantabria

Autor: Jennifer Cuadrado Ruiz

Directora: Irene Polo Blanco

Octubre 2014

## ÍNDICE

|                                                                                    |        |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1 Introducción                                                                     | Pag 3  |
| 2 Literatura                                                                       | Pag 5  |
| 2.1 Introducción                                                                   | Pag 5  |
| 2.2 Errores en el aprendizaje de conceptos geométricos                             | Pag 5  |
| 2.3 Posición relativa de dos rectas<br>en el plano en los libros de texto          | Pag 9  |
| 2.3.1 Conocimientos previos                                                        | Pag 12 |
| 2.3.2 Posición relativa de dos rectas<br>en el plano en el currículum de primaria. | Pag 13 |
| 2.4 Errores en el aprendizaje de la posición<br>relativa de dos rectas             | Pag 15 |
| 3 Preguntas de investigación y metodología                                         | Pag 18 |
| 3.1 Preguntas de investigación                                                     | Pag 18 |
| 3.2 Selección y diseño de los métodos de investigación                             | Pag 18 |
| 3.2.1 Cuestionario                                                                 | Pag 19 |
| 3.2.2 Entrevistas cognitivas                                                       | Pag 22 |
| 3.3 Muestras                                                                       | Pag 22 |
| 4 Resultados                                                                       | Pag 23 |
| 5 Discusión                                                                        | Pag 31 |
| 6 Conclusión                                                                       | Pag 36 |
| 7 Agradecimientos                                                                  | Pag 37 |
| 8 Bibliografía                                                                     | Pag 38 |

## ANEXO

## 1. INTRODUCCIÓN

---

Los errores se han estudiado desde la antigüedad. Sócrates (citado en Rico, 1997, p.7) afirmaba que “todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente, pero la idea de errar consiste en que podemos buscar la verdad objetiva. Antes de la década de los ochenta, el error era algo que se intentaba erradicar, pues estaba considerado como una influencia negativa dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, alrededor de la época de los ochenta, se empezó a considerar el error como una parte necesaria del aprendizaje de los alumnos. El error supone que se pueda indagar en él, permitiendo a los alumnos construir su propio conocimiento (Socas, 2007). Actualmente el error se considera parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano. Es una parte legítima de dichos procesos, que no aparecen por azar sino que surge debido a unos conocimientos adquiridos anteriormente, siendo inadecuada la tendencia a condenar estos errores (Rico, 1997).

En el ámbito de la geometría se han estudiado también los errores que cometen los alumnos en el aprendizaje de ciertos conceptos geométricos (Gutierrez y Jaime, 1996; Guillén, 2000). Estos estudios tienen con frecuencia como marco teórico de referencia la teoría de formación de conceptos de Vinner (1991), pues explica muchos de los errores que cometen los alumnos.

En este trabajo nos planteamos, por un lado identificar los errores que cometen los alumnos de 9 y 10 años y de 11 y 12 años de Cantabria en el aprendizaje de conceptos de rectas paralelas y secantes. Además intentaremos dar una explicación a las posibles causas de dichos errores desde el marco de la teoría de formación de conceptos de Vinner (1991).

Esta investigación se presenta en 6 capítulos. En el capítulo 2 la literatura, se presentan estudios previos sobre la identificación de errores tanto en matemáticas en general, como en geometría en particular.

El capítulo 3 expone las preguntas de investigación que se han considerado para llevar a cabo este trabajo, así como los métodos utilizados para dar respuesta a dichas cuestiones. En el capítulo 4 se presentan los resultados. En el capítulo 5 se discuten los resultados obtenidos relacionándolos con el marco teórico propuesto. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones principales del trabajo.

## 2. LITERATURA

---

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata sobre la importancia de estudiar los errores de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en general y geometría en particular. El primer apartado (§ 2.2) trata sobre el error desde un punto de vista general, su consideración desde la antigüedad hasta la actualidad, así como los errores en geometría. El apartado siguiente (§ 2.3) trata sobre las definiciones que podemos encontrar en los libros de texto acerca de los conceptos de la posición relativa de rectas y de los conceptos involucrados (como recta y ángulo). Finalmente, se estudia de qué forma aparecen estos contenidos en el currículo de la nueva ley la LOMCE. La última sección (§ 2.4) trata sobre las dificultades que encuentran los alumnos en el aprendizaje de estos conceptos presentando diversos estudios relacionados con el tema.

### 2.2 ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS.

El error ha sido considerado desde la antigüedad. Sócrates (citado en Rico, 1997, pag.7) afirmaba que *“todos nosotros podemos errar, y con frecuencia erramos individual y colectivamente, pero la idea de errar consiste en que podemos buscar la verdad objetiva”*.

Antes de la década de los ochenta, el error era algo que se intentaba erradicar, pues estaba considerado como una influencia negativa dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, alrededor de la época de los ochenta, se empezó a considerar el error como una parte necesaria en el aprendizaje de los alumnos. El error supone que se pueda indagar en él, permitiendo a los alumnos construir su propio conocimiento (Socas, 2007).

Según los artículos analizados, se puede apreciar el error desde un punto de vista negativo o positivo. Dependiendo de la metodología utilizada por el profesor. En el primer caso, el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de los alumnos, lo que tiene que estar controlado, y debe ser evitado en la medida de lo posible. Sin embargo, en el segundo caso, el error es la muestra de conocimiento construido, donde el profesor debe contribuir cuando sea necesario, evitando bloqueos, rechazos o sanciones. Hay un aspecto del error que une ambos puntos de vista, basándose en que el error debe diagnosticarse de inmediato y hay que ayudar a los alumnos a superarlo (Rico, 1997).

Popper (1967) trataba sobre el conocimiento humano. Esto supone que tenía que admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. También concluía que junto al error hay una necesidad de ejercicio constante de la crítica con el objetivo de cuestionar el conocimiento y modificarlo si fuese necesario.

Bachelard (1978) ha considerado el error como un obstáculo epistemológico. Esto se ha utilizado como clave para el estudio, la sistematización, el análisis y también para la explicación de estos errores que se presentan en el pensamiento científico.

Por otra parte, Lakatos (1986) sostiene que los errores aparecen de forma sistemática en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos.

Finalmente, se puede apreciar que, actualmente el error se considera parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano. Es una parte legítima de dichos procesos, que no aparecen por azar sino que surge debido a unos conocimientos adquiridos anteriormente, siendo inadecuada la tendencia a condenar estos errores (Rico, 1997).

En el ámbito de la geometría los errores en el aprendizaje de conceptos geométricos pueden explicarse desde el modelo de Vinner (1991). Éste hace hincapié en la importancia que tiene la imagen mental del alumno en el aprendizaje de estos conceptos.

Estas imágenes forman el concepto en la mente del estudiante y es ahí donde se interiorizan propiedades y donde se desarrollan procedimientos asociados con dicho concepto (Barrantes y Esteve, 2008).

Vinner (1991) hace diferencia entre el concepto matemático y la imagen mental que tiene el alumno de dicho concepto. El concepto es una definición verbalizada por el alumno, mientras que una imagen mental es el conjunto de imágenes asociadas al concepto en la mente del estudiante. Además, Vinner (1991), considera que una imagen mental sobre un concepto es correcta cuando permite al alumno discriminar sin errores todos los ejemplos de dicho concepto (Gutierrez y Jaime, 1996). Aunque los alumnos memoricen una cierta definición y lo muestren verbalmente, a menudo son incapaces de resolver un problema donde el concepto esté implicado. Vinner (1991) considera que una explicación a este problema puede ser la poca variedad de ejemplos mostrados a los alumnos y el abuso de conceptos que denomina “prototípicos”. Una solución válida para mejorar la imagen conceptual al alumno es ofrecerle una amplia colección de ejemplos y contraejemplos lo que da lugar a una mejor calidad de las imágenes conceptuales en los alumnos (Gutierrez y Jaime, 1996).

Vinner y Hershkowitz (1990) señalan que en la construcción de ejemplos de un concepto se pueden observar tres aspectos. El primero se basa en la imagen del concepto. El segundo consiste en la definición del concepto, y el tercero en un conjunto de operaciones, tanto físicas como mentales, para obtener una orientación en la que una comparación con el dibujo mental sea más fácil.

Hershkowitz (1983) describe tres tipos de comportamiento según el modelo de Vinner. En primer lugar, estudiantes con imágenes conceptuales muy pobres, formadas por pocos ejemplos prototípicos, que rechazan aquellas figuras que no coinciden con sus imágenes del concepto.

En segundo lugar, los alumnos que tienen pocos ejemplos prototípicos, pero incluyen propiedades matemáticas de las figuras. Estos alumnos rechazan las figuras que no verifican dichas propiedades.

Por último los alumnos que han sido capaces de construir imágenes conceptuales completas, que poseen una gran variedad de ejemplos y todas sus propiedades importantes.

En general, el origen de casi todos los tipos de errores detectados en el aprendizaje de conceptos geométricos se basa en unas imágenes conceptuales muy pobres, aprendidas con unos ejemplos prototípicos que no manifiestan características importantes (Gutierrez y Jaime, 1996).

Según Barrantes y Esteve (2008) estos errores están causados, en la mayoría de las ocasiones, a un excesivo uso del libro de texto, así como la ausencia de recursos o materiales que amplíen la imagen conceptual del alumno.

Además, se ha observado que los profesores ponen más énfasis en las definiciones, que en los ejemplos. Sin embargo, Vinner (1991) considera que al leer o escuchar un concepto geométrico conocido, se estimula nuestra memoria y no recordamos la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, es decir, la imagen conceptual.

Por otra parte, los alumnos también pueden desarrollar conceptos erróneos debido a unos criterios falsos o limitados. Greenes (1979) señala que cuando una forma geométrica cambia de posición, el alumno cree que su forma, tamaño, y cualquiera de sus propiedades también han cambiado.

Fisher (1978) considera tras haber realizado un estudio, que incluso habiendo enseñado utilizando figuras inclinadas, los alumnos tienen más facilidad en reconocer las figuras en posición estándar. Esto sugiere que las tendencias naturales también tienen una importante función, además de la instrucción.

Estos resultados son explicados por Hershkowitz (1990) utilizando el concepto de “distractor”.

Para Hershkowitz (1990) los distractores surgen del abuso de los ejemplos prototípicos con fuertes características visuales. De esta forma, un atributo irrelevante como puede ser la posición de la figura se convierte en relevante en la mente del estudiante y pasa a formar parte de su imagen conceptual. Por ejemplo, el alumno puede identificar un cuadrado solamente cuando está apoyado sobre uno de sus lados paralelos al borde inferior del libro, y descartar que la misma figura sea un cuadrado si aparece apoyada sobre uno de los vértices.

En el caso del concepto de rectas paralelas, los distractores de orientación surgen porque se trazan rectas siempre siguiendo la misma dirección (Barrantes y Esteve, 2008).

### 2.3 POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO EN LOS LIBROS DE TEXTO

En relación a la posición relativa de dos rectas en el plano aparecen las definiciones de los conceptos de *rectas paralelas* y *rectas secantes*. En los libros de primaria de tercer curso, como por ejemplo aparece en la figura 1, donde se define *rectas paralelas* como “rectas que nunca se cortan” y *rectas secantes* como “rectas que se cortan en un punto” (Anaya, 3º de primaria)

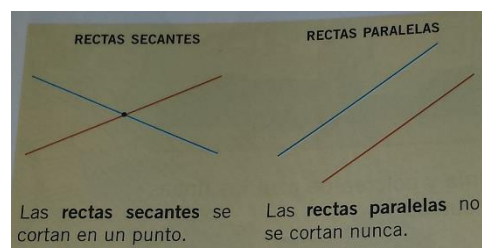


Figura 1: Definiciones de rectas paralelas y secantes. Matemáticas 3º de Primaria (Anaya, 2001)

Por otra parte, en otro libro de tercero de primaria, de la editorial SM, se introduce el concepto de *rectas paralelas*, como aparece en la figura 2, la definición de paralelismo se muestra así: “observa las vías del tren. Son líneas rectas que no se cortan. Decimos que son rectas paralelas”.

Sin embargo, como observamos en la figura 3, el concepto de secante aparecen de la siguiente manera: “¡Cuidado! Si los esquiadores no se desvían..., chocarán. Las huellas de los esquiadores son líneas rectas que, al prolongarse, terminan por cortarse”. (SM, 3º de primaria)

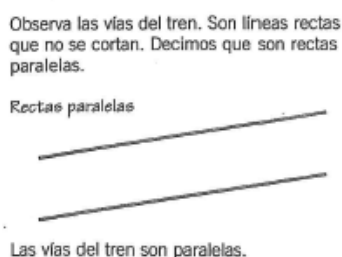


Figura 2: Definición de rectas paralelas. Matemáticas, 3º de primaria (SM, 2012)

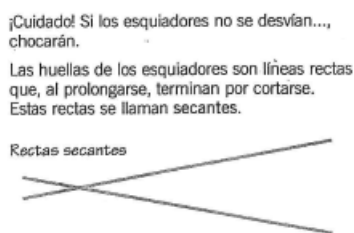


Figura 3: Definición de rectas secantes. Matemáticas 3º de primaria (SM, 2012)

En el libro de cuarto de primaria, como podemos observar en la figura 4: se define dos *rectas paralelas* como “dos rectas que por mucho que se prolonguen, no se cortan”. Dos *rectas secantes* se definen como “dos rectas que al prolongarse se cortan”. Como caso particular de rectas secantes se definen las rectas perpendiculares como “dos rectas que al cortarse forman cuatro ángulos iguales”. (SM, 4º de primaria)

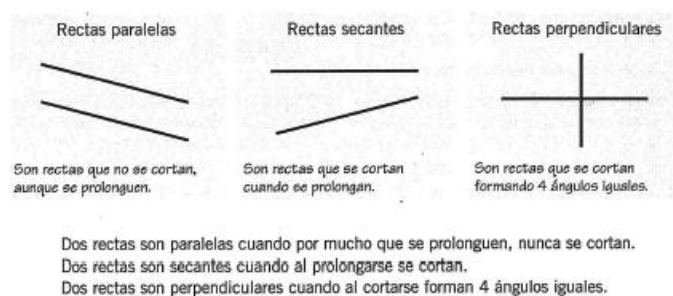


Figura 4: Definiciones de rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Matemáticas 4º de primaria (SM,2012)

Por último, en el libro de quinto de primaria, como podemos observar en la figura 5: las rectas paralelas están definidas como: “son rectas que nunca se cortan aunque se prolonguen” y las secantes como: “son rectas que se cortan aunque tengamos que prolongarlas”.

Finalmente, las perpendiculares están definidas de la siguiente manera “son rectas secantes que forman cuatro ángulos rectos”. (SM, 5º de primaria)

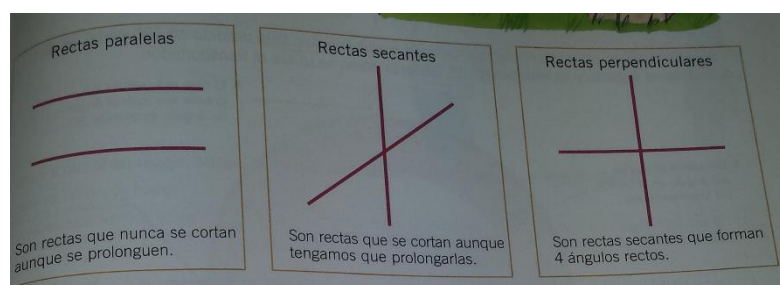


Figura 5: Definición de rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Matemáticas 5º de primaria (SM, 2005)

### 2.3.1 CONOCIMIENTOS PREVIOS

En el aprendizaje de la posición relativa de dos rectas intervienen otras nociones geométricas importantes, como son los conceptos de recta y ángulo.

El concepto de recta es introducido por primera vez en primero de primaria. Este aparece como caso particular de línea abierta y no curva. Los alumnos no reciben una definición formal sobre este concepto hasta tercero de primaria, cuando se les proporciona definiciones del tipo: “las rectas secantes se cortan en un punto” (Anaya, 3º de primaria, 2001)

Lo que se incluye para iniciar a los alumnos con éste término, son unos dibujos para, en primer lugar, reconocer qué líneas son abiertas y qué líneas son cerradas. Posteriormente, mediante otro dibujo, se les plantea si son rectas o curvas. Y, finalmente, añaden los términos de horizontales, verticales e inclinadas. (Anaya, 2001)

También es importante la noción de ángulo, que es introducida por primera vez en tercero de primaria, pero no es una definición formal hasta cuarto de primaria.

En tercero aparece ejemplificado en forma de abanico. Se hacen comparaciones entre abanicos, para observar cuál de ellos forma un ángulo mayor. Se empieza a introducir los elementos de los ángulos, tales como el vértice, y el lado, y también se introduce la noción de ángulo recto, agudo y obtuso. Para esto último, se muestran ejemplos mediante relojes, donde las agujas forman ángulos (Anaya, 2001).

En cuarto de primaria se da una definición de ángulo, dada de la siguiente manera: “Cuando dos rectas se cortan, forman cuatro regiones llamadas ángulos. Un ángulo tiene dos lados y un vértice. Puede ser recto, agudo u obtuso”. (Libro SM, colección “Proyecto conecta 2.0”, 4º de primaria).

### **2.3.2 POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA**

En el currículo de primaria (BOC, 2014, p. 1685) se hace explícito cuándo empiezan los alumnos a trabajar con estos términos. El tema de geometría se trata en el primer curso de educación primaria. El contenido se muestra de la siguiente manera:

- Líneas rectas, curvas y poligonales.
- Posiciones relativas de rectas: verticales, horizontales e inclinadas. Rectas que se cortan o no se cortan.

Además, los estándares de aprendizaje evaluable también se aprecian de la siguiente forma:

- Identifica y representa líneas rectas, curvas y poligonales.
- Identifica líneas que se cortan o no se cortan.

En segundo de primaria (BOC, 2014, p. 1692) se trata la geometría en la explicación de recta, semirrecta y segmento, y en la posición relativa de rectas: paralelas y oblicuas. En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluable no aparece nada en cuanto a la identificación de rectas.

En tercero de primaria (BOC, 2014 p. 1700) los contenidos se centran en la posición relativa de las rectas: paralelismo y la perpendicularidad. Además, también empiezan a visualizar los ángulos, sus elementos y su clasificación.

Por otra parte, los estándares de aprendizaje evaluable no buscan una identificación de paralelismo de forma directa, indican la clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados, además de la clasificación de triángulos atendiendo a la medida de sus lados y ángulos.

En cuarto de primaria (BOC, 2014, p. 1712) no hacen referencia a la posición relativa de las rectas, lo único que mencionan es la medida y construcción de ángulos.

En los estándares de aprendizaje evaluable tampoco mencionan nada de paralelismo y perpendicularidad, si no que incluye la medida y construcción de ángulos utilizando el transportador.

En quinto de primaria (BOC, 2014, p. 1722) vuelven a mencionar la posición relativa de las rectas en sus contenidos, e incluye la posición relativa de una recta. También aparece la definición de ángulos en distintas posiciones, así como los complementarios y suplementarios.

Por último, en sexto de primaria (BOC, 2014, p. 1733) no aparece ningún contenido que haga referencia a la posición relativa de las rectas ni nada relacionado con los ángulos. Además, en los estándares de aprendizaje evaluables tampoco aparece ningún apartado que haga referencia al paralelismo, perpendicularidad o identificación de ángulos.

## 2.4 ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

A continuación trataremos aspectos sobre el aprendizaje de la noción de recta, ángulo, paralelismo, perpendicularidad y secante, según estudios realizados por diferentes autores.

Rico (n.d.) destaca la dificultad que encierran algunos conceptos geométricos como la noción de punto y recta debido a su alto nivel de abstracción. Según Rico (n.d.) esto conlleva dificultades en conceptos derivados como en el concepto de ángulo o paralelismo. Por ejemplo, no es fácil para ellos comprender la independencia del ángulo respecto a la longitud de sus lados.

En primer lugar, porque el ángulo para ellos es la figura concreta dibujada, con dos longitudes concretas de los lados. En segundo lugar, por el concepto de la infinitud de las semirrectas que forman los lados.

Para trabajar esta dificultad, Rico (n.d.) plantea un ejemplo donde propone construir todos los ángulos con un vértice común en un determinado punto del geoplano. Se advierte a los alumnos que los ángulos son iguales, con los lados superpuestos, pero con longitudes diferentes. Resultan distintos y se observa cómo los alumnos tienen dificultades para aceptar un punto de vista distinto.

La noción de paralelismo es también muy difícil de comprender para los alumnos, debido a que tiene incluido el término infinitud entre sus características. Como bien aporta Rico (n.d.) “dos segmentos rectos pueden no ser paralelos, aunque no se corten; se cortarían si se prolongaran”, lo que supone que el alumno no comprenda, en determinadas ocasiones que una recta no se puede prolongar porque infinita en sí misma.

Según Rico (n.d.) la razón por la que los alumnos no entienden con facilidad el carácter infinito de la recta, es derivado de sus propias percepciones. Todos los elementos que observan los alumnos en su vida cotidiana con segmentos rectos, de longitud finita. Por lo que no entienden el concepto de infinito.

Además, según Piaget los alumnos de primaria se encuentran en el periodo de “lógica concreta”, etapa en la que no cabe la consideración de entidades tan abstractas como la infinitud.

Numerosos estudios han tratado de identificar errores en el aprendizaje de conceptos geométricos (Dickson, 1991; Vinner, 1991; Guillén, 2008).

Mitchelmore (1992) realizó un estudio con niños desde primero hasta cuarto de primaria, en un colegio de Australia, tratando de identificar en el aprendizaje de los alumnos el concepto de ángulo. Mitchelmore (1992) concluye que los alumnos reconocen los ángulos rectos un nivel global, lo que debería haber sido suficiente para identificar los ángulos rectos en varias figuras. Sin embargo, encuentran dificultad entre dos ángulos producidos por una intersección en las representaciones estándares en forma de L. Presentar únicamente este modelo es erróneo porque también los ángulos necesitan ser mostrados como intersecciones en forma de T ó X.

En otro estudio de características similares (White y Mitchelmore, 2003), se observó que los alumnos de tercero y cuarto de primaria, asociaban el tamaño del ángulo con la medida de los lados de su representación. Por ejemplo, en una figura rectangular con numerosos ángulos iguales, como aparece en la figura 6, consideran que los ángulos de la parte superior e inferior, son más grandes que los que se encuentran a los lados.

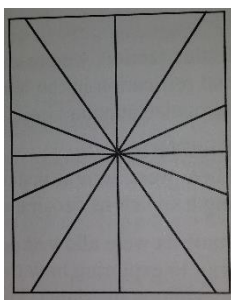


Figura 6: Ejemplo de actividad en la que los alumnos no saben observar la similitud entre ángulos.

Un estudio realizado en 1980, en Estados Unidos, a alumnos de secundaria (NAEP, 1980, citado en Dickson, et al. 1991, p. 37), planteaba ciertas cuestiones que suponían la comprensión de las propiedades de las figuras. Un 14% de los alumnos de 13 años y un 20% de los de 17 años respondieron correctamente *“todos los ángulos han de ser rectos”*. Un 40% y un 34% respectivamente respondieron *“los lados son paralelos”*. A alumnos británicos también se les planteó esta encuesta, de los que el 20% de alumnos de 11 años mencionó “ángulos rectos”, mientras que un 10% nombró “lados rectos”. Finalmente, las propiedades de “lados opuestos” y “lados iguales” fueron sugeridas por el 50% de los alumnos.

En 1980 se realizó un informe APU (APU, 1980a, citado en Dickson, et al. 1991, p.37) de enseñanza primaria con niños de once años, en el que se estudiaron los errores en el aprendizaje de paralelismo y perpendicularidad. Este estudio concluye que la mitad de los niños no fueron capaces de distinguir entre rectas paralelas y no paralelas, y que solo el 30% pudo seleccionar figuras que tenían más de un lado paralelos.

Otro informe similar realizado en educación secundaria con alumnos de 15 años (APU, 1980b, citado en Dickson, et al. 1991, p.37), muestra que solo un 25% de alumnos de 15 años definieron “perpendicularidad” correctamente y un 15% definir “paralelismo” correctamente.

En el trabajo Dickson et al. (1991) sobre la identificación de rectas paralelas en niños de 10 años se manifestó que para un porcentaje muy alto de los niños encuestados la igualdad de la longitud de los segmentos era una condición necesaria. En este estudio un 73% identifica como paralelas las representadas por segmentos verticales de igual longitud. Un 71% identifica como paralelas las representadas por segmentos inclinados de igual longitud. Sin embargo, solo un 43% de los alumnos identificó como paralelas dos rectas representadas por segmentos desiguales en posición vertical., y un 38% las representadas por dos segmentos inclinados de distinta longitud (Dickson et al, 1991).

### **3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA**

---

#### **3.1 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

Como hemos podido observar en la literatura, los alumnos de primaria tienen dificultades en la adquisición de conceptos relacionados con la posición relativa de las rectas. Por esto, el objetivo principal de este proyecto es identificar estos errores, así como buscar su posible causa. Por esto, en este estudio se plantean dos preguntas de investigación que nos ayudarán a orientar el trabajo para cumplir nuestro objetivo.

1. ¿Qué errores cometen los alumnos en la identificación de posiciones relativas de dos rectas?
2. ¿Qué interpretación se puede hacer de estos errores en términos de la teoría de formación de conceptos de Vinner?

#### **3.2 SELECCIÓN Y DISEÑO DE LOS MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN**

Para llevar a cabo esta investigación se ha utilizado un cuestionario. El objetivo es obtener el mayor número de datos posible, para saber el concepto matemático que tienen los alumnos, además de su imagen conceptual. También nos ha permitido saber si los alumnos saben distinguir un ejemplo de un contraejemplo.

El diseño del cuestionario está basado en el trabajo de Dickson, et al. (1991). En la primera y la segunda pregunta se pide a los alumnos ofrecer una definición de dos rectas paralelas y dos rectas secantes. La tercera y la cuarta pregunta consisten en dibujar dos rectas paralelas y dos secantes. En la quinta y la sexta se les ofrece una serie de ejemplos y tienen que distinguir cuáles son paralelas, en la pregunta cinco, y cuáles son secantes, en la pregunta seis.

La pregunta cinco está obtenida literalmente del trabajo de Dickson et al. (1991), y la pregunta seis está orientada también en este trabajo, con el objetivo de que los alumnos también distinguiesen las secantes, no sólo las paralelas.

Finalmente, la actividad siete también está obtenida del trabajo de Dickson et al. (1991) y tiene el objetivo de averiguar si los alumnos identifican paralelismo entre rectas en un conjunto de tres rectas paralelas.

### **3.2.1 CUESTIONARIO**

En esta sección se detalla el diseño del cuestionario que realizan los alumnos, con el objetivo de responder a las preguntas de investigación, así como observar si los errores en geometría planteados en la literatura se corresponden con los que cometen aquí los alumnos. La clasificación de los errores es la siguiente:

1. Errores en la definición de rectas paralelas.
2. Errores en la definición de rectas secantes.
3. Errores en el trazo de rectas paralelas.
4. Errores en el trazo de rectas secantes.
5. Errores al distinguir ejemplos en rectas paralelas.
6. Errores al distinguir ejemplos en rectas secantes.
7. Errores en la distinción de rectas paralelas.

El cuestionario se divide en dos partes. La primera parte se centra en los datos de los alumnos, así como la nota que suelen obtener éstos en matemáticas. La segunda parte se centra en las actividades planteadas a los alumnos. El cuestionario sufrió alguna leve modificación, en cuanto al enunciado de los ejercicios, debido a que la primera versión no era totalmente comprensible y daba lugar a confusiones entre los alumnos. Se les preguntó a varios profesores sobre la idoneidad del cuestionario. Estos lo validaron pues lo consideraron adecuado al nivel de los alumnos.

Todas las actividades se diseñaron para comprobar los errores de los alumnos, clasificados anteriormente. Los ejercicios están propuestos para observar tres tipos de errores.

En primer lugar, errores en la definición, y en segundo lugar, errores en el dibujo de estas rectas, y finalmente, errores en la distinción de ejemplos de contraejemplos.



## CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS

**Rellena los siguientes datos:**

Nombre y apellidos: .....

Sexo: chico ☐      chica ☐      Edad: .....      Curso: .....

¿Qué nota obtienes normalmente en matemáticas? Da un número del 1 al 10:

**1 . ¿Cuándo dos rectas son paralelas?**

Respuesta

**2. ¿Cuándo dos rectas son secantes?**

Respuesta

**3. Dibuja dos rectas paralelas.**

Respuesta

**Dos rectas paralelas**

**4. Dibuja dos rectas secantes.**

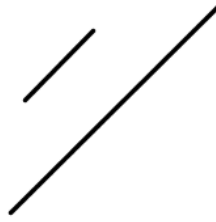
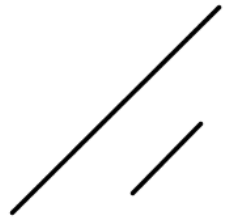
Respuesta

**Dos rectas secantes**

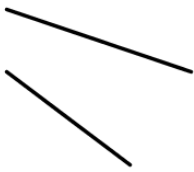
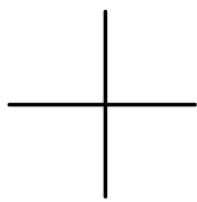
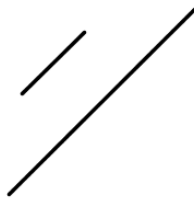
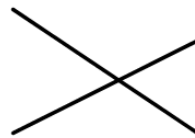
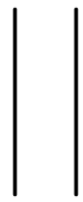
5. Señala con una cruz los pares de rectas que sean paralelos.


☐

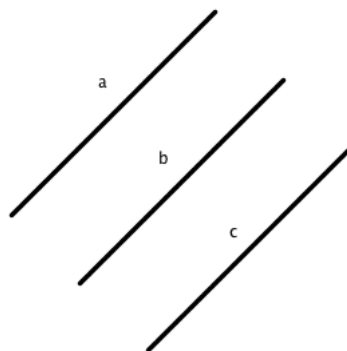
☐

☐

☐

☐

6. Señala con una cruz los pares de rectas que sean secantes.


☐

☐

☐

☐

☐

7. Observa las rectas a, b y c:



¿Son las rectas a y b paralelas?

¿Son las rectas b y c paralelas?

¿Son las rectas a y c paralelas?

### **3.2.2 ENTREVISTAS COGNITIVAS**

Para obtener información más detallada sobre las respuestas de los alumnos se realizaron entrevistas cognitivas después de recoger los datos y analizarlos. Éstas suponen una realización de preguntas a unos alumnos determinados con el objetivo también de ayudar en la categorización final de los errores.

### **3.3 MUESTRA**

En el estudio se tomaron 92 cuestionarios de alumnos de 9/10 años y de 11/12 años (53 chicos y 39 chicas) Los cuestionarios se llevaron a cabo en dos colegios públicos de Cantabria. Ambos han sido centros donde la autora ha realizado las prácticas.

Para que los resultados fueran más fiables, los alumnos no tenían conocimiento previo sobre este cuestionario. La muestra era homogénea, ninguno de los alumnos acudía a clases de apoyo, para asegurar un conocimiento similar sobre los contenidos preguntados. Además, los cuestionarios se llevaron a cabo en presencia de la tutora, que no dio ninguna explicación a las dudas que tenían.

#### 4. RESULTADOS

---

En este capítulo se presentan los resultados de los ejercicios, de forma ordenada, que se incluyeron en el cuestionario.

**Tabla 1. Porcentaje de errores en la cuestión 1: “¿Cuáles son dos rectas paralelas?”**

|                                            |       |
|--------------------------------------------|-------|
| Usos de términos inadecuados               |       |
| (cruzar, juntar, chocar, tocar, en frente) | 56.4% |
| Mal con errores inespecíficos              | 9.8%  |
| Vacío                                      | 15.2% |

El 18.46% de los estudiantes han dado una definición correcta en la que se incluye “rectas que nunca se cortan” y “rectas que no se cortan aunque se prolonguen”. Por ejemplo Silvia (11 años) afirma “dos rectas son paralelas cuando al prolongarse nunca se cortan”.

Más de la mitad de los alumnos, un 56,4%, cometieron errores en la definición por un uso de términos inadecuados. Entre estos términos están cruzar, juntar, chocar, tocar y en frente. El 26% de los alumnos ha utilizado el término “cruzar” para indicar la intersección de las rectas. Por ejemplo Patricia (11 años) afirma “dos rectas son paralelas cuando no cruzan en ningún punto”. El 14% de los alumnos ha utilizado el término “juntar”. Para indicar que las rectas no coinciden en ninguno de sus puntos.

El 9.74% de los alumnos utilizaban estos dos términos. Por ejemplo, Isabel (9 años) afirma “dos rectas paralelas son dos rectas que si avanzan no se chocan”. Y Pedro (12 años) define las rectas paralelas de la siguiente forma: “cuando alargamos dos rectas y nunca se llegan a tocar”.

También hemos observado en los cuestionarios el término “en frente” lo ha utilizado un 6.5% de los estudiantes. Gema (11 años) afirma que dos rectas son paralelas “cuando están en frente y son iguales”. Por otra parte, hay un 9.8% de los alumnos que tienen el ejercicio mal con errores inespecíficos.

Dentro de estos errores inespecíficos hemos incluido, por ejemplo, la respuesta de Paula (9 años) que afirma que dos rectas son paralelas “cuando están tumbadas”. Por último, encontramos un gran porcentaje de alumnos que han dejado el ejercicio sin contestar, el 15.2%. Dentro de este porcentaje, podemos observar alumnos que han dejado en cuestionario sin contestar entero, y alumnos que han dejado sin contestar sólo estas dos preguntas porque no saben definirlo, saben lo que significa pero no saben dar una definición. En concreto, Jesús (9 años) ha dejado sin responder las dos primeras cuestiones, pero, sin embargo el resto de ejercicios los tiene resueltos. Estos alumnos tienen problemas en comprender lo que significa definir.

**Tabla 2. Porcentaje de errores en la cuestión 2: “¿Cuándo dos rectas son secantes?”**

|                                                              |        |
|--------------------------------------------------------------|--------|
| Uso de términos inadecuados (cruzar, chocar, tocar y juntar) | 55.42% |
| Mal con errores inespecíficos                                | 6.5%   |
| Vacío                                                        | 18.5%  |

El 19.5% de los alumnos han dado una definición correcta en la que se incluye “rectas que se cortan” y “rectas que se cortan al prolongarlas”.

En esta pregunta encontramos el uso de la mayoría de los términos utilizados en la cuestión anterior.

El 55.4% de los alumnos, han cometido errores en la definición de rectas secantes por el uso de términos inadecuados. El 39% de los alumnos han utilizado el término “cruzar”. Por ejemplo, Pedro (11 años) afirma “dos rectas son secantes cuando se cruzan”.

Como ha ocurrido en la cuestión anterior, hemos agrupado los términos “chocar y tocar”, y el 9.82% de los alumnos ha utilizado estos términos. Por ejemplos José (11 años) afirma “dos rectas son secantes cuando se tocan por los dos lados en las rectas”.

El 6.5% de los alumnos ha utilizado el término “juntar”. Como por ejemplo Manuel, (9 años) afirma que “dos rectas secantes son “dos rectas que en algún punto se juntarán”.

Por otra parte, hay un 6.5% de los alumnos que han tenido la pregunta mal con errores inespecíficos. Por ejemplo María (10 años) indica que “dos rectas son secantes cuando están torcidas. Tras preguntarle en una entrevista cognitiva a qué se refería, afirmó que era cuando las rectas estaban en forma de X y ninguna vertical ni horizontal.

Finalmente, también hemos observado que un 18.5% de los alumnos no ha respondido a la pregunta. Como ha ocurrido en el ejercicio anterior, hay alumnos que no han respondido a ninguna pregunta del cuestionario, y hay alumnos que han respondido a todo el cuestionario excepto a las dos primeras preguntas.

**Tabla 3. Porcentaje de errores en la cuestión 3: “Dibuja dos rectas paralelas”**

|                               |      |
|-------------------------------|------|
| Representación correcta       | 88%  |
| Mal con errores inespecíficos | 4.4% |
| Vacío                         | 7.6% |

El 88% de los alumnos ha realizado un dibujo adecuado para representar rectas paralelas. Consideramos correcto el ejercicio cuando el alumno es capaz de representar dos rectas por dos segmentos paralelos.

Dentro de este porcentaje incluimos varios grupos de alumnos que han dibujado las rectas en diferentes posiciones. En primer lugar, el 45% de los alumnos ha dibujado dos rectas paralelas de igual longitud en posición vertical. El 26% de éstos, las ha dibujado también con la misma longitud y en posición horizontal. El 17% las ha dibujado de igual longitud e inclinadas, y el 1% las ha dibujado vertical y con distinta longitud.

Sin embargo, ha sido minoría el número de alumnos que han respondido mal a la pregunta, o que no la ha contestado. Un 4.4% de los alumnos ha respondido la pregunta mal con errores inespecíficos. Destacamos el caso de Fernando (10 años), que ha intercambiado el significado de paralelismo y secante.

Finalmente, el 7.6% de los alumnos han dejado la actividad sin responder.

**Tabla 4. Porcentaje de errores en la cuestión 4: “Dibuja dos rectas secantes”**

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| Representación correcta       | 87.0% |
| Mal con errores inespecíficos | 5.4%  |
| Vacío                         | 7.6%  |

El 87% de los alumnos han respondido de forma correcta a esta actividad. La mayoría de los alumnos han sido capaces de representar dos rectas secantes de forma correcta, haciendo que dos rectas coincidan en un punto. En este caso hemos podido observar dos tipos de representaciones. Algunos alumnos han dibujado dos rectas que en su representación no aparece ningún punto de intersección. Otros alumnos han dibujado dos rectas en cuya representación sí tienen un punto en común.

Dentro de este porcentaje, El 55% de los alumnos ha representado las rectas secantes de forma perpendicular. El 23% de los alumnos lo ha representado de forma que no tienen ningún punto en común.

Finalmente, sólo el 9% de los alumnos las ha representado de forma que los segmentos crean ángulos rectos. Todas estas respuestas son correctas, sin embargo se observa que hay una clara diferencia entre las representaciones de los alumnos, la mayoría son también perpendiculares, lo que significa que ésta es el ejemplo estándar para las rectas secantes. También se considera ejemplo estándar la representación en la que los segmentos son perpendiculares.

Por otra parte, podemos observar una minoría de alumnos que han respondido la pregunta de forma errónea, o no la han contestado. El 5.4% de los alumnos tiene esta actividad mal con errores inespecíficos. Algunos alumnos han contestado mal por confundir el concepto de recta paralela con el de secante. Otros han dibujado otras figuras que no se relacionan con los conceptos implicados. Por último, el 7.6% de los alumnos no han respondido a la actividad.

**Tabla 5. Errores en la cuestión 5: “Señala con una cruz los pares de rectas que sean paralelos”**

|                                                       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|
| Solución correcta                                     | 48.8% |
| Bien parcialmente sólo segmentos igual longitud       | 26.7% |
| Bien parcialmente sólo posición estándar              | 8.1%  |
| Bien parcialmente sólo segmentos de distinta longitud | 3.5%  |
| Bien parcialmente sólo segmentos verticales           | 2.3%  |
| Bien parcialmente sólo segmentos inclinados           | 2.3%  |
| Todas incorrectas                                     | 2.3%  |
| Vacío                                                 | 5.8%  |

Aproximadamente el 50% de los alumnos ha tenido la pregunta entera correcta.

El 26.7% de los alumnos sólo ha señalado la opción uno y dos que son ambas representaciones con segmentos de igual longitud. El 8,1% de los alumnos han marcado como correctas los segmentos verticales con la misma longitud. Esto supone que los alumnos sólo identifican como paralelas, dos rectas que son verticales y con la misma longitud.

El 3.5% de los alumnos marcan como correctos las opciones tres, cuatro y cinco, que son todas las representaciones con segmentos de distinta longitud.

El 2.3% de los alumnos, ha marcado como correctas sólo las representaciones que son verticales. También el 2.3% de los alumnos consideran paralelos los segmentos que están inclinados.

Por otra parte, hay una minoría, un 8% aproximadamente, de los alumnos que ha respondido mal a la pregunta, o no ha contestado. El 2.3% de los alumnos tiene todas incorrectas. Que las tenga incorrectas significa que no ha marcado ninguna representación. En este caso lo hemos considerado como incorrecto porque los demás ejercicios del cuestionario están resueltos.

Sin embargo, el 5.8% de los alumnos ha dejado la actividad sin responder. En este caso lo hemos considerado como “vacío” porque ninguna actividad del cuestionario está resuelta.

**Tabla 6. Error en la pregunta 6: “Señala con una cruz los pares de rectas que sean secantes”**

|                                                                   |       |
|-------------------------------------------------------------------|-------|
| Solución correcta                                                 | 43.8% |
| Bien parcialmente sólo segmentos con un punto de intersección     | 23.8% |
| Bien parcialmente, excluyen caso perpendicular                    | 17.5% |
| Bien parcialmente posición estándar, excluyendo perpendicularidad | 5.0%  |
| Todas las respuestas incorrectas                                  | 3.8%  |
| Vacío                                                             | 6.3%  |

El 43.8% de los alumnos ha respondido de forma correcta a la pregunta, relacionando todas las posiciones correctas. El 23.8% de los alumnos ha señalado que son secantes las dos representaciones prototípicas que son las dos en las que aparece representado el punto de intersección.

El 17,5% de los alumnos ha marcado como secantes las representaciones adecuadas, excluyendo en la representación perpendicular.

El 5% de los alumnos, ha marcado como secante únicamente la representación que tiene un punto de intersección, pero no es perpendicular.

Por otra parte, hay una minoría de los alumnos, el 10% aproximadamente, que ha respondido mal a la pregunta, o que no ha respondido. El 3.8% de los alumnos tiene la cuestión incorrecta, debido a que ha elegido otras representaciones que no son las adecuadas. Por ejemplo, el alumno que invierte ambos conceptos, ha marcado como secantes las rectas paralelas. Por último, el 3.6% de los alumnos no ha respondido a esta actividad, dejándola vacía.

La mayoría de los alumnos que ha dejado esta actividad en blanco, ha dejado también el resto del cuestionario en blanco.

**Tabla 7. Errores en la pregunta 7: “Observa las rectas a, b y c “**

|                                                       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|
| Todas las respuestas correctas                        | 73.6% |
| Todas bien menos en la que la recta “b” está en medio | 21.8% |
| Todas las respuestas incorrectas                      | 4.5%  |
| Vacío                                                 | 6.9%  |

El 73.6% de los alumnos tienen el ejercicio correcto. Es importante destacar que el 21.8% de los alumnos ha considerado que las rectas a y c no son paralelas “porque la recta b está en medio”. Esta ha sido su contestación al preguntarles en las entrevistas cognitivas el por qué d su respuesta.

Por otra parte, un 11.4% de los alumnos tienen las respuestas incorrectas, o han dejado la actividad sin responder.

## 5- DISCUSIÓN

---

En este apartado se comentan los resultados obtenidos del cuestionario expuesto anteriormente. Los errores están expuestos según la clasificación, añadida en el apartado (§ 3.3.2.1) Cuestionario: (1) Errores en la definición de rectas paralelas, (2) Errores en la definición de rectas secantes, (3) Errores en el trazo de rectas paralelas, (4) Errores en el trazo de rectas secantes, (5) Errores al distinguir ejemplos de contraejemplos en rectas paralelas, (6) Errores al distinguir ejemplos de contraejemplos en rectas secantes y (7) Errores en la distinción de rectas paralelas. También es importante destacar que el método utilizado para identificar y justificar los errores, es el de Vinner (1991).

### *(1) Errores en la definición de rectas paralelas y secantes y (2) Errores en la definición de rectas secantes*

La tarea uno estaba diseñada para comprobar la definición del concepto de paralelismo que tenían los alumnos sobre las rectas paralelas. La tarea dos estaba diseñada para comprobar la definición de secante en éstas rectas. Tras analizar los resultados, en ambas cuestiones pudimos observar tres aspectos en sus respuestas. Para empezar, los alumnos utilizaban términos considerados inadecuados, como “Cruzar, juntar, chocar, en frente...”. En segundo lugar, se han encontrado respuestas con errores inespecíficos, es decir, definiciones sin ninguna relación con el término “paralelismo”. Finalmente, también ha habido un porcentaje importante de alumnos que ha dejado la actividad sin responder. También hay alumnos que han respondido a todas las actividades del cuestionario menos las dos primeras. Esto conlleva a suponer que los alumnos no son capaces de definir un concepto aunque tengan en su imagen mental los ejemplos de dichos conceptos.

Se ha observado que tanto en la definición de rectas paralelas como secantes, los alumnos utilizan verbos coloquiales como “chocar, juntar, tocar...” para indicar el concepto de intersección (un 56.4% en paralelismo y un 55.4% en secante).

Por otra parte, en ambas preguntas se ha hecho un uso abusivo de términos como “prolongación” y “tocar”. Estos términos se pueden apreciar en los libros de texto (ver sección § 2. Literatura, en subsección § 2.3. posición relativa de dos rectas en el plano en los libros de texto). Estos dos términos aunque no sean adecuados en un lenguaje matemático, han sido considerados correctos porque a los niños les han enseñado con esta terminología.

### *(3) Errores en el trazo de rectas paralelas.*

El ejercicio 3 consiste en que los alumnos dibujen dos rectas paralelas. Es importante el porcentaje de respuestas correctas, el 88%. Dentro de estos alumnos, la mitad ha dibujado las rectas en posición vertical. Un cuarto ha dibujado las rectas en posición horizontal. Otro cuarto de los alumnos ha dibujado las rectas en posición inclinada. Cabe destacar que solamente un alumno ha realizado una representación con dos segmentos de distinta longitud. Esto demuestra que los ejemplos mostrados a los niños para ejemplificar el concepto matemático, se basan en rectas paralelas de igual longitud y en posición vertical. Se debe al abuso de representaciones prototípicas tanto en los libros de texto como en las explicaciones del profesor.

Esto provoca una confirmación de la teoría de Vinner (1991), quien afirma que la imagen conceptual de los alumnos es muy pobre debido a los ejemplos prototípicos.

Por otra parte, los alumnos que han dejado el ejercicio sin responder forman un 7% aproximadamente. Es importante añadir que todos los alumnos que han dejado este ejercicio sin contestar es porque todo el cuestionario está sin contestar, por lo que se entiende que los alumnos no tienen conocimiento sobre ello.

#### *(4) Errores en el trazo de rectas secantes.*

En este ejercicio los porcentajes son similares a los del ejercicio anterior. En este caso, un 87% de todos los estudiantes tienen la respuesta correcta.

En este caso, la mitad de los alumnos han escogido la representación prototípica (dos segmentos que se cortan en un ángulo distinto a noventa grados). El 9% de los alumnos lo ha representado en forma perpendicular. Cabe destacar que un alto porcentaje (23%) escoge una representación donde el punto de intersección no aparece. Esto puede ser debido a la inclusión paulatina en los libros de texto de una representación no estándar (ver sección § 2. Literatura, en subsección § 2.3. posición relativa de dos rectas en el plano en los libros de texto).

Finalmente, es importante también mencionar que el porcentaje de alumnos que no han contestado a esta actividad es el mismo que en el ejercicio anterior, un 7,6%. Esto significa que los motivos por los que no han contestado son los mismos que en la actividad 3.

#### *(5) Errores al identificar ejemplos de rectas paralelas.*

En el ejercicio cinco los alumnos tenían que marcar con una cruz qué pares de rectas son paralelas. La mitad de los alumnos ha señalado todas las respuestas correctas.

Sin embargo, es importante destacar que más de un tercio de los alumnos ha señalado como paralelas sólo aquellas figuras formadas por segmentos paralelos de igual longitud. Como afirma Vinner (1991), estas figuras se tratan de ejemplos prototípicos que se les muestra a los alumnos, lo que supone que éstos tengan unas imágenes mentales muy pobres. No son capaces de aceptar como válido cualquier otra representación que no se corresponda con su imagen mental. Dentro de este grupo de alumnos hay algunos que sólo identifican los segmentos verticales y de igual longitud, que supone la representación más estándar.

El 8.1% de los alumnos señala la posición estándar como única imagen mental que tienen del concepto. El 2.3% de los alumnos incluye ser vertical como atributo relevante en la definición de recta paralela, cuando realmente no lo es. El 2,3% de los alumnos incluye también que estar inclinado es un atributo relevante, cuando tampoco lo es.

Según Hershkowitz (1983) este comportamiento se corresponde con estudiantes con imágenes conceptuales muy pobres, formadas por pocos ejemplos prototípicos, que rechazan aquellas figuras que no coinciden con sus imágenes del concepto.

#### *(6) Errores al distinguir ejemplos en rectas secantes.*

En el ejercicio 6 los alumnos tenían que marcar con una cruz qué pares de rectas son secantes. La mitad de los alumnos han respondido correctamente a la actividad.

El 24% de los alumnos ha señalado solamente como rectas secantes las representadas por segmentos que se cortan en un punto (posición estándar). En la imagen mental de estos alumnos no está incluida en la representación de dos segmentos que no se cortan, no paralelos. Esto demuestra que estos alumnos saben si dos rectas son secantes cuando ambas coinciden en un punto. No han sido capaces de identificar como secante las rectas en cuya representación no aparece ningún punto de intersección.

Esto indica que no se tiene interiorizado el concepto de infinitud de la recta y se confunden los términos de segmento y recta.

Es importante destacar que un 17% de los alumnos encuestados excluyen el caso perpendicular en su imagen mental de secante. Una posible explicación podría ser que el concepto de perpendicular aparece no como caso particular de rectas secantes, sino posteriormente para definir ángulo recto (ver sección § 2. Literatura, subsección § 2.3. posición relativa de dos rectas en el plano en los libros de texto), por esto los alumnos tienen un concepto de que dos rectas si

son perpendiculares, no son secantes, lo que supone que no las identifiquen como tal. Esto es un error, porque no tienen este conocimiento de que dos segmentos pueden ser al mismo tiempo secantes y perpendiculares.

Por otra parte, se presentan los conceptos “paralelismo, secante y perpendicularidad”, en una clasificación que parece excluyente.

#### *(7) Errores en la distinción de rectas paralelas.*

El ejercicio 7 consiste en responder tres preguntas relacionadas con una figura compuesta por tres rectas paralelas en una posición inclinada, lo que supone que puede considerarse como una posición estándar.

Un 73% de los alumnos ha considerado todas las respuestas correctas. Para Hershkowitz (1983) estos alumnos tienen pocos ejemplos prototípicos, pero incluyen propiedades matemáticas de las figuras.

El 22% de los alumnos no han considerado las tres rectas paralelas porque entre la recta “A” y la recta “C” hay otra recta. Estos alumnos justifican que la recta “A” y la “C” no son paralelas porque hay otra recta situada en medio. Los alumnos no son conscientes de que las tres rectas son paralelas porque no han visualizado un ejemplo de rectas paralelas como éste.

En casi todos los casos, los ejemplos que se proporcionan consisten en dos rectas representadas por dos segmentos paralelos. Esto se debe a que en la imagen conceptual del alumno se está incluyendo “estar una recta al lado de la otra” como atributo relevante del concepto de paralelismo, cuando no lo es.

## 6- CONCLUSIONES

---

Esta investigación se basa en el aprendizaje de los conceptos relacionados con la posición relativa de las rectas. El objetivo de este estudio consiste en dar respuesta a las preguntas planteadas en el apartado (§ 3.2) Preguntas de investigación: *¿Qué errores cometen los alumnos en la identificación de posiciones relativas de dos rectas?. ¿Qué interpretación se puede hacer de estos errores en términos de la teoría de formación de conceptos de Vinner?*

En el ámbito de los errores en geometría encontramos diversos estudios que intentan dar una interpretación desde el modelo de Vinner (1991). Vinner hace diferencia entre el concepto matemático y la imagen mental que tiene el alumno de dicho concepto. El concepto es una definición verbalizada por el alumno, mientras que una imagen mental es el conjunto de imágenes asociadas al concepto en la mente del estudiante. Muchos errores en el aprendizaje de conceptos geométricos provienen de una imagen mental pobre de dichos conceptos.

Tras analizar los cuestionarios se ha observado en el caso particular de la posición relativa de dos rectas muchos de los errores provienen de una imagen mental incompleta. Esto se debe a su vez a diversas causas. Con frecuencia el alumno recibe poca variedad de ejemplos y muchos de ellos considerados prototípicos. En la identificación de rectas paralelas y secantes encontramos que más de la mitad de los alumnos cometen errores. Por ejemplo, muchos alumnos no identifican la representación por dos segmentos paralelos oblicuos como rectas paralelas. Esto es debido a que no tienen en su imagen mental dicha representación.

Coincidimos con Rico (n.d) en que la abstracción de algunos de los conceptos implicados conlleva a que los alumnos cometan errores en esta área. Por ejemplo, no distinguen entre rectas y segmentos que la representan, por no tener adquirido el concepto de infinitud. Por ejemplo, esto se manifiesta cuando

los alumnos no reconocen como rectas secantes las representadas por segmentos no paralelos sin punto de intersección representado.

Consideramos importante identificar estos errores, así como sus posibles causas para poder hacer hincapié en la abstracción de los conceptos implicados. Además, no se debe abusar de ejemplos prototípicos, sino proporcionar una amplia variedad de ejemplos y contraejemplos de cada concepto para enriquecer la imagen mental del alumno.

#### *Limitaciones e implicaciones futuras*

En este estudio se ha hecho una clasificación de los errores principales cometidos por los alumnos de 9/10 años y 11/12 años de Cantabria. En esta investigación se ha utilizado una muestra limitada, pero sería conveniente para futuras investigaciones ampliar el tamaño de la muestra para que los resultados sean más significativos. Además, se podría comparar los resultados obtenidos en cada curso para observar si los errores disminuyen con el tiempo. En el uso de definiciones se observaría también si los alumnos van abandonando términos coloquiales para dar paso a otros más académicos.

## **7. AGRADECIMIENTOS**

---

Me gustaría dar mi más sincero agradecimiento a Irene Polo Blanco, por haberme ayudado en todo lo que le ha sido posible en este trabajo. También me gustaría dar las gracias a José Manuel Diego Mantecón, por haberme ofrecido su ayuda incondicional. Por último, también quiero agradecer la participación de todos los profesores y alumnos que han permitido la realización de esta investigación.

## 8- BIBLIOGRAFÍA

---

- Anaya, (2001). Proyecto “la tira de colores”. Segundo ciclo, tercero de primaria.
- APU: Assessment of performance unit (1980). *Mathematical development, primary survey report*. HMSO.
- Barrantes M., Esteve Zapata, M.A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Revista de educación*, Vol. 27, N°1. Pp, 55-71.
- Bachelard, G. (1978) La formación del espíritu científico. *Editorial Siglo XXI, México*.
- Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Fielker, D. (1973). A structural approach to primary education school geometry, *Mathematics teaching*, vol. 63, 12-16
- Fielker, D. (1973). Removing the Shackles of Euclid 1. Classification; 2. Interpretations; 3. Context. *Mathematics teaching*, 95 (1981), 16-20; 96 (1981); 24-28; 91 (1981), 321-327.
- Fisher, N. (1978) Visual influences of figure orientation on concept formation in geometry, en R. Lesh (ed.): *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, The Ohio state university: Eric Clearinghouse for science mathematics and environmental education.
- Guillen, G. (2000) Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, vol. 18, no 1, p. 35-54.
- Grenees, C.E. (1979). The learning disabled child in mathematics, *Focus-On Learning problems in mathematics* (Framingham, Massachusetts), 1(1).
- Gutierrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En: J.Giménez; S.Llinares y M.V. Sanchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, pp. 143-170.

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, vol. 32, pp. 55-70.
- Lakatos, I., Worrall, J., Zahar, E., y Santos, C. S. (1986). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial.
- Mitchelmore, M. (1986). Geometrical foundations of children's drawing. *The nature and development of pictorial representation*, pp. 89-209.
- Mitchelmore, M. (1992). Children's concepts of perpendiculars. *School of education*. pp. 2-120.
- Popper, K. (1967). El desarrollo del conocimiento científico: conjeturas y refutaciones. *Teoría del conocimiento, ciencia e investigación científica*.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas, *Revista Epsilon*. pp. 185-198.
- Rico, L. (n.d.). Propuesta de desarrollo de la geometría en educación infantil y primaria. CEIP- Dr. Caravaca.
- Rico, L. *Paralelismo. Ángulos. Perpendicularidad*
- SM, (2012) "proyecto conecta 2.0". Segundo ciclo, tercero de primaria.
- SM, (2012) "proyecto conecta 2.0". Segundo ciclo, cuarto de primaria.
- SM, (2005) "Proyecto mundo para todos". Tercer ciclo, quinto de primaria.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico, *Investigación en educación matemática, XI*.
- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, pp. 20-25.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, pp. 65-81.
- White, P. y Mitchelmore, M (2003). Teaching angles by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zillox (Eds.), *proceedings of the 27<sup>th</sup> PME International conference*, vol. 4, 403-4



## CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS

**Rellena los siguientes datos:**

Nombre y apellidos: .....

Sexo: chico

☐

chica

☐

Edad: .....

Curso: .....

¿Qué nota obtienes normalmente en matemáticas? Da un número del 1 al 10:

**1. ¿Cuándo dos rectas son paralelas?**

Respuesta

**2. ¿Cuándo dos rectas son secantes?**

Respuesta

**3. Dibuja dos rectas paralelas.**

Respuesta

**Dos rectas paralelas**

**4. Dibuja dos rectas secantes.**

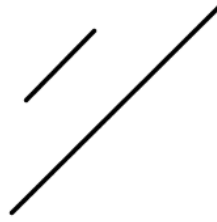
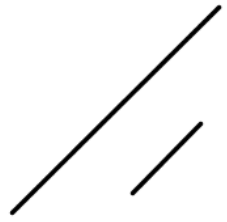
Respuesta

**Dos rectas secantes**

5. Señala con una cruz los pares de rectas que sean paralelos.

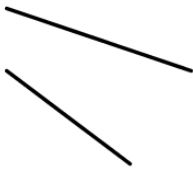
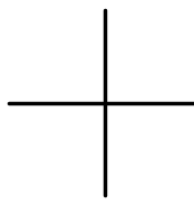
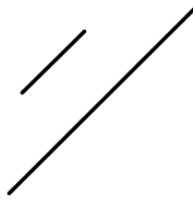
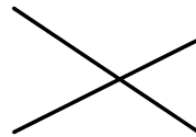
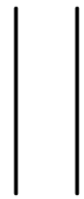

☐

☐

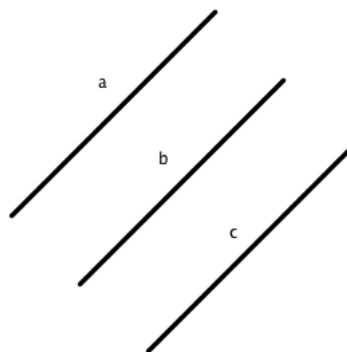
☐

☐

☐

- 6. Señala con una cruz los pares de rectas que sean secantes.

-


☐

☐

☐

☐

☐

- 7. Observa las rectas a, b y c:



- ¿Son las rectas a y b paralelas?
- ¿Son las rectas b y c paralelas?
- ¿Son las rectas a y c paralelas?