



Facultad de Educación

GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN

PRIMARIA

2013/2014

Representaciones planas de sólidos
geométricos por alumnos de Educación
Primaria de Cantabria

Two-dimensional representations of geometric
solids by Primary School students in Cantabria

Autora: Myriam Abascal Moraleja

Directora: Irene Polo Blanco

Octubre 2014

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	2
2. LITERATURA:.....	3
2.1 Aprendizaje de la geometría:.....	3
2.2 Pensamiento espacial.....	6
2.3 Visualización:	7
2.4 Representaciones planas.....	9
2.4.1 REPRESENTACIÓN EN PERSPECTIVA.....	14
3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	20
4. METODOLOGÍA.....	21
4.1. Estrategias de investigación	21
4.2. Muestra	21
4.3. Diseño de los métodos de investigación.....	22
4.4. Análisis de datos.....	23
5. RESULTADOS.....	24
6. DISCUSIÓN.....	33
7. CONCLUSIÓN	36
8. AGRADECIMIENTOS.....	37
9. BIBLIOGRAFÍA.....	37

1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene como objeto de estudio las representaciones planas de objetos tridimensionales realizadas por alumnos de entre 7 y 12 años en Cantabria.

Las representaciones planas de sólidos geométricos son una parte esencial en el aprendizaje de la geometría espacial. A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayoría de la información la recibimos a través de libros, imágenes, televisión... representaciones planas aunque posean movimiento como en es el caso de esta última. Es por este motivo que es tan importante que desde niños aprendamos a ver, comprender y realizar operaciones y relaciones entre las dos y las tres dimensiones, (Lappan y Winter, 1979).

En el caso de la enseñanza, muchas de las veces que trabajamos conceptos relacionados con objetos tridimensionales, lo hacemos a través de representaciones planas.

Para realizar representaciones planas de objetos tridimensionales se requiere visión espacial, ya que hay que realizar un paso del espacio al plano, y esta habilidad puede ser desarrollada mediante la instrucción.

El interés por investigar sobre visualización y representaciones planas de sólidos surgió a mediados del siglo XX y ha ido creciendo significativamente en los últimos años (Mitchelmore, 1976; Bishop 1980, 1989; Presmeg 1986; Ben-chaim et al. 1989; Woodrow 1991; Battista y Clements 1992,1996; Guillén et al. 1992; Gutiérrez 1992, 1996, 1998; Fernández et al. 2008; y Gutiérrez y Jaime 2012).

Este estudio pretende observar la destreza y la habilidad de los alumnos de entre 7 y 12 años en Cantabria para dibujar representaciones de sólidos en el plano, con el fin de conocer el nivel de desarrollo de la misma y descubrir algunas claves a tener en cuenta de cara a la enseñanza de la geometría espacial. El trabajo se presenta en 7 capítulos. En el capítulo 2, literatura, se hace un revisión bibliográfica sobre estudios realizados anteriormente relacionados con las representaciones planas y el proceso de visualización. También se desarrolla un marco teórico que pretende explicar en qué consiste

el proceso de visualización y el pensamiento espacial. En el capítulo 3 se plantean las preguntas de investigación que se pretenden responder. En el capítulo 4 explicaremos las estrategias seguidas, el diseño, la muestra y el análisis de los datos de la investigación. En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos en la investigación. En el capítulo 6, discusión, se analizan, interpretan y explican los resultados obtenidos. Por último, en el capítulo 6, conclusión, se presentan las ideas más importantes que se derivan de este estudio.

2. LITERATURA:

En esta sección realizaremos una revisión bibliográfica con el fin de contextualizar las representaciones planas de cuerpos tridimensionales en el aprendizaje de la geometría.

En primer lugar nos acercaremos a los principales marcos de referencia para la adquisición y aprendizaje de la geometría (§ 2.1). Posteriormente nos introduciremos en el campo del pensamiento espacial (§ 2.2) y desarrollaremos ampliamente el concepto de visualización (§ 2.3).

Por último nos centraremos en las representaciones planas, qué son, qué tipos hay y realizaremos una revisión de los diferentes estudios desarrollados sobre las mismas (§ 2.4). Dentro de esta sección nos centraremos en las representaciones en perspectiva (§ 2.4.1)

2.1 Aprendizaje de la geometría:

En el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el marco más práctico para entender y estructurar la progresión en la adquisición de conocimientos es el modelo de razonamiento de Van Hiele (1986).

También la teoría sobre la formación de conceptos geométricos en los estudiantes desarrollada por Vinner y Hershkowitz (1983) es una de las más importantes; es por ello que tomaremos ambas teorías como marco de referencia.

El modelo de razonamiento de Van Hiele

El modelo de Van Hiele intenta explicar la progresión en el aprendizaje de la geometría de los estudiantes, a través de cinco niveles:

Nivel 1. Visualización o reconocimiento: este nivel se caracteriza principalmente por la percepción de las figuras como un todo global, reconociéndolas y diferenciándolas por su aspecto físico, sin reconocer características o propiedades de las mismas.

Nivel 2. Análisis: en este nivel se empieza a percibir las partes y algunas propiedades de los objetos y figura, por medio de la observación y la experimentación. Pueden descubrir las propiedades de una familia teniendo ejemplos como soporte, ya que las pueden generalizar a todos los ejemplos de ella (Guillén 2004).

Nivel 3. Deducción informal: Se organizan y relacionan las características necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras. Pueden empezar a reconocer cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades.

Nivel 4. Deducción formal: En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, viendo su necesidad para justificar las proposiciones planteadas. Comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado. (Fouz, F. 2006).

Nivel 5. Rigor: En este nivel se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar permitiendo comparar diferentes geometrías. Se puede trabajar la Geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, alcanzándose el más alto nivel de rigor matemático (Fouz, F. 2006).

Estos niveles son secuenciales y jerárquicos, cada nivel implica el dominio de los anteriores, esto quiere decir que no es posible, por ejemplo,

pensar en el tercer nivel sin haber adquirido el razonamiento del segundo y así sucesivamente (Van Hiele, 1986, citado en Gutiérrez y Jaime, 1990, p.51).

Otra característica del modelo es que a cada nivel le corresponde un tipo de vocabulario específico para representar diferentes conceptos y relaciones entre ellos (Gutiérrez y Jaime 1990).

La adquisición de estos niveles está relacionada con la experiencia y la instrucción de los alumnos, más que con su edad. En la etapa de primaria los alumnos transcurren entre los dos primeros niveles de razonamiento. En los primeros cursos de primaria los alumnos son capaces de trabajar de forma visual con los objetos que tienen delante, aunque no saben justificar sus ideas con claridad, mientras que en los últimos cursos de la etapa han logrado, además, un cierto desarrollo en su capacidad de expresión (Gutiérrez y Jaime 1990).

Formación de conceptos de Vinner

En cuanto a la formación de conceptos espaciales Vinner considera que *adquirir un concepto significa, entre otras cosas, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal como éste está concebido por la comunidad matemática* (Vinner y Hershkowitz, 1983). Vinner diferencia entre dos tipos de atributos a la hora de adquirir el concepto: los atributos relevantes y los irrelevantes. Los atributos relevantes son las propiedades necesarias para definir el concepto, e irrelevantes, propiedades no necesarias que permiten diferenciar unos ejemplos de otros.

Para la enseñanza de un concepto geométrico es importante la utilización de ejemplos que permitan identificar dichos atributos. Vinner y Hershkowitz (1983) señalan además que en la construcción de estos ejemplos se distinguen tres elementos: la imagen del concepto, la definición y un grupo de operaciones mentales y/o físicas que facilitan la identificación y la comparación con la imagen mental del concepto.

Es la imagen del concepto la que en este caso cobra una importancia especial, pues se refiere al conjunto de todas imágenes mentales que el

estudiante asocia al concepto, lo que está estrechamente ligado a la habilidad de visualización.

2.2 Pensamiento espacial

El pensamiento espacial es el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos espaciales, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y las diversas traducciones a representaciones materiales (MEN 1998).

El pensamiento espacial comporta la exploración del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio, es decir, representaciones planas de objetos tridimensionales (Hoyos 2012).

En relación al desarrollo de conceptos espaciales, Piaget formuló un modelo de adquisición del conocimiento en el que distingue entre *percepción*, que define como “el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos” y *representación* (o imagen mental) que comporta “la evocación de objetos en ausencia de ellos”. (Piaget e Inhelder, 1956. Citado en Dickson et al., 1991, p. 22).

En el desarrollo de la percepción espacial y el estudio de las figuras geométricas, Pallascio propone cinco etapas (Pallascio, 1985. Citado en Blanco, 2010, p. 42):

- Visualización. Tras la observación de un objeto, debemos memorizar imágenes parciales que nos permitan reconocer objetos iguales o parecidos que han cambiado de posición, es decir, reconocer el objeto entre una variedad de ellos.
- Estructuración. Una vez visualizado el objeto tenemos que poder reconocer y construir el mismo a través de sus elementos básicos.
- Traducción. Consiste en reconocer el objeto a través de una descripción verbal y viceversa.
- Determinación. Consiste en reconocer el objeto por medio de una descripción de sus relaciones métricas.

- Clasificación. Se trata de reconocer clases de objetos semejantes teniendo en cuenta distintos criterios de clasificación.

Como hemos visto en el marco de diferentes teorías e investigaciones de diversos autores (Van Hiele (1986), Vinner y Hershkowitz (1983), Pallascio (1985) entre otros) la visualización juega un papel fundamental, siendo la base para el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial.

2.3 Visualización:

La visualización es un elemento fundamental en actividades cotidianas, no solo en el aprendizaje de conceptos geométrico. Es por este motivo, como señala Gutierrez (1992, 1996), por el que ha sido objeto de numerosas investigaciones (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parysz y Van Dormolen, 1996; Gutierrez, 1996; Presmeg, 2006; Fernández, Pegito y Godino, 2008).

Para referirse a la visualización, se utilizan distintos términos como son la visualización espacial, percepción visual, visión espacial, imaginación espacial, entre otros.

Según Fernández, Pegito y Godino (2008) *visualizar* requiere ver o imaginar mentalmente objetos geométricos espaciales, así como relacionar dichos objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas (rotaciones, desarrollo, secciones...) con los mismos.

Gutierrez (1996) considera *visualización* en matemáticas como el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, ya sean físicos o mentales, que permite resolver problemas o probar propiedades.

Gutierrez (1996) señala cuatro elementos fundamentales que integran la visualización. Estos son: (1) las imágenes mentales, (2) las representaciones externas, y (3) una serie de procesos y (4) habilidades.

(1) Las imágenes mentales, son representaciones mentales que hacemos de objetos físicos, conceptos matemáticos o propiedades. En este

contexto, Presmeg (1986) señala diversos tipos de imágenes mentales. De estos tipos de imágenes, los que guardan mayor relación con el contexto de aprendizaje de la geometría son:

- imágenes concretas pictóricas, imágenes de objetos físicos.
- imágenes cinéticas (imágenes concretas en las que interviene el movimiento físico)
- imágenes dinámicas (imágenes mentales en las que los objetos o sus elementos se mueven en la mente).

Las imágenes pueden ser de dos tipos diferentes al mismo tiempo, ya que su clasificación como cinética no dinámica suele ser independiente de su clasificación como pictórica.

(2) Las representaciones externas hacen alusión a cualquier representación gráfica o verbal de conceptos o propiedades incluidas en imágenes dibujos, gráficos... que ayuda a crear o transformar imágenes mentales.

(3) Los procesos son definidos por Gutiérrez (1996) como las acciones físicas o mentales en donde las imágenes mentales están involucradas. Bishop (1989) distingue dos procesos relativos a la visualización. Por un lado, lo que él denomina “procesamiento visual” de información (VP) proceso de conversión, manipulación y extrapolación de relaciones e información abstractas o no figurativas en imágenes visuales y también transformación de una imagen visual en otra. Por otro lado, la interpretación de información figurativa (IFI) que es el proceso por el que “leemos” e interpretamos imágenes visuales para extraer información relevante. Este proceso puede verse como el inverso al anterior.

Bishop entiende estos procesos como habilidades de las personas, no haciendo distinción entre procesos y habilidades, como sí hacen otros autores.

(4) Las habilidades son el cuarto elemento que compone la visualización. Algunos autores detallan bastantes habilidades que se refieren a un contexto más amplio que el de la geometría. Sin embargo, las principales o más

importantes en el contexto de aprendizaje de la geometría son según Gutiérrez y Jaime (2012) las siguientes:

- Identificación visual: habilidad para reconocer una figura u objeto aislándola de su contexto, por ejemplo, cuando se encuentran integrados en un mosaico.
- Conservación de la percepción: habilidad para reconocer que un objeto mantiene sus propiedades, aunque deje de verse parcial o totalmente o se encuentre en diferentes orientaciones.
- Reconocimiento de posiciones en el espacio: habilidad para relacionar un objeto o imagen mental con otro.
- Reconocimiento de las relaciones espaciales: habilidad para identificar las características de relaciones entre diversos objetos
- Discriminación visual: habilidad de comparar varios objetos e identificar semejanzas y diferencias entre ellos.

Todo este conjunto de elementos está relacionado con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto no incluye solo verlo sino también reflexionar sobre él y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes y sus posibles transformaciones.

2.4 Representaciones planas

De las cuatro componentes que integran la visualización expuestas en la sección anterior, nos centraremos en las representaciones, en particular en las representaciones planas. Las representaciones geométricas planas, permiten el desarrollo de la habilidad para visualizar relaciones geométricas espaciales (Gutiérrez, 1998).

Gutiérrez (1998) afirma que al enseñar geometría espacial, el proceso de comprensión de un concepto que subyace a una representación plana del mismo se complica debido a que hay que realizar dos tareas, por un lado interpretar la figura plana y convertirla en un objeto tridimensional, y por otro lado, interpretar el objeto tridimensional para convertirlo en el objeto geométrico que estamos estudiando. Desde este punto de vista se plantea un problema

relacionado con la capacidad de visión espacial de los estudiantes y su habilidad para dibujar representaciones planas de objetos tridimensionales. En el aprendizaje de conceptos geométricos la capacidad de visualización desempeña un papel fundamental.

En relación a la comprensión e interpretación de representaciones planteada por Bishop (1989), manipulación de los objetos mediante procesamiento visual (VP) o interpretación de información figurativa (IFI), numerosas investigaciones han demostrado la importancia de utilizar representaciones planas de cuerpos geométricos espaciales adecuadas a los estudiantes de diferentes edades.

La necesidad de utilizar e interpretar representaciones planas para la enseñanza de la geometría tridimensional tiene como consecuencia que las características de dichas representaciones hayan sido objeto de estudio de diversos trabajos como los de Piaget e Inhelder (1956), Mitchelmore (1976), Woodrow (1991), Guillén et al. (1992), Gutiérrez (1998) entre otros.

Las representaciones planas de objetos tridimensionales son una parte importante del pensamiento espacial y del proceso y habilidad de visualización.

Diversos autores defienden que el aprendizaje de la geometría espacial en niños debe partir de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, y encaminarse hacia las representaciones bidimensionales del espacio tridimensional (Dickson et al., 1991). Según Dickson et al. (1991) cualquier representación bidimensional de objetos tridimensionales supone siempre una distorsión de algunas de las propiedades del objeto o el espacio. En este sentido, Fuson (citado en Dickson et al., 1991, p. 48) afirma que *la formación y construcción de imágenes de objetos tridimensionales cuando uno nunca puede verlos desde más de un punto de vista es tarea larga y difícil*. Sin embargo, autores como Lappan y Winter (1979) afirman que a pesar de que nuestro mundo es tridimensional, la mayoría de experiencias que proporcionan a los estudiantes en matemáticas son planas, como ocurre en los libros de texto. El uso de dibujos le supone al niño una dificultad adicional el proceso de comprensión. Sin embargo, es

necesario que los niños aprendan a superar las dificultades con las representaciones bidimensionales (Lappan y Winter (1979) citado en Dickson et al., 1991 p.48).

Según Gutiérrez (1998), hay acuerdo unánime entre diferentes autores, en que es necesario desarrollar y experimentar unidades de enseñanza con el objetivo de aprender, desarrollar y transferir habilidades para la conexión entre los espacios de 2 y 3 dimensiones.

En Gutiérrez (1998) se señala la propuesta de Gaulin y Puchalska (1987), en donde se presentan diferentes formas de representación útiles para diferentes áreas de estudio. En el contexto de la geometría sitúa las siguientes representaciones, en la figura 1 podemos ver algunos ejemplos:

- Por niveles: consiste en dibujar la vista superior de cada nivel del sólido
- En perspectiva: es la forma más tradicional de representación. Se aproxima a la visión obtenida por un humano si sitúa el ojo en el punto de fuga.
- En paralela o caballera, dos de los ejes forman un ángulo de 90° , y el eje restante suele tener 45° (o 135°) respecto a los anteriores.
- En isométrica: los ejes sobre los que se dibuja la figura forman ángulos iguales (120°)
- Ortogonal: basada en el dibujo de las vistas laterales de un sólido.
- Ortogonal codificada: representaciones asociadas a módulos multicubos, en las que se muestran las vistas laterales, acompañadas por números, que permite saber el número de cubos que hay detrás de cada uno).

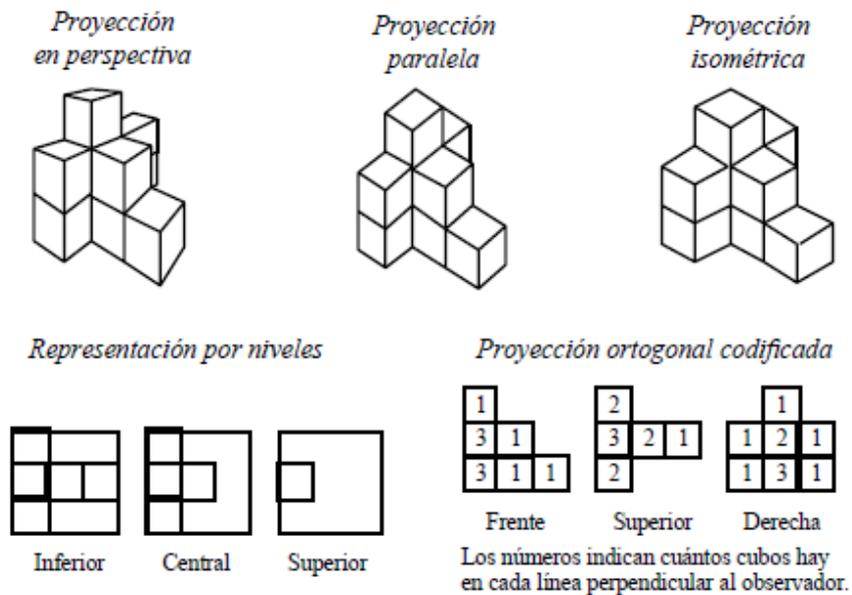


Figura 1. Representaciones planas de un modelo multicubo. (Gutiérrez, 1998)

En cuanto a los diferentes tipos de representaciones bidimensionales de sólidos (perspectiva, caballera, isométrica representación por niveles y proyección ortogonal codificada) algunas de estas conservan información del aspecto visual de los sólidos, pero pierden información relativa a las partes ocultas como puede ocurrir con las proyecciones en perspectiva, isométrica y caballera, sin embargo, otras representaciones como la proyección ortogonal codificada mantiene la información sobre la estructura pero pierden la referente a su aspecto visual, Gutiérrez (1998).

Gutiérrez (1998) señala un tipo particular de representación que algunos autores han utilizado, en el que un modulo multicubo puede representarse dibujando solo la proyección ortogonal codificada superior, lo que facilita la comprensión a los estudiantes, pues no tienen que coordinar varias proyecciones.

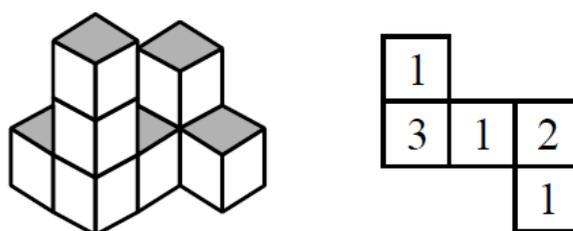


Figura 2. Proyección ortogonal codificada superior. Gutiérrez (1998)

Una forma de relacionar las representaciones de dos dimensiones y de tres dimensiones es mediante el desarrollo de un sólido, el cual nos permite pasar del desarrollo plano a la obtención del objeto espacial.

Piaget llevó a cabo un estudio (Piaget e Inhelder, 1956. Citado en Dickson et al., 1991 p.48) en el que propuso a estudiantes de entre cuatro y trece años que dibujaran el objeto tridimensional que veían (cilindro, cono cubo y pirámide) y después el desarrollo que creían que tenía cada uno. De este estudio concluyó que no eran capaces hasta los ocho años y medio de obtener el desarrollo del cilindro, cono y el cubo, y hasta los once años y medio en el caso de la pirámide

Otros resultados sacados a la luz por diversos estudios son, por ejemplo, los que muestra la encuesta APU de enseñanza primaria (1980a) (Citado en Dickson, 1991), en el que los niños tienen que traducir figuras de sólidos tridimensionales a modelos materiales utilizando dados. En el aparecieron diferentes dificultades, como colocar bloques formando ángulo u olvidar bloques traseros u ocultos que sostienen la estructura, y algunos errores derivados de no tener en cuenta la profundidad del modelo propuesto.

El estudio llevado a cabo por Lappan y Winter (1979) (citado en Dickson, 1991 p.52) con niños de ocho a once años, en el que la tarea era reconstruir un edificio tridimensional a partir de sus vistas bidimensionales, también muestra diferentes dificultades como confundir las orientaciones izquierda-derecha de los alzados laterales, confundir la orientación de las vistas a la hora de dibujarlas o dificultad para construir algún sólido a partir de sus vistas. Realizar este proceso entre lo tridimensional y lo bidimensional supone un paso hacia la abstracción. Algunos estudios como los realizados por Bishop (1977) sugieren que la representación bidimensional de objetos tridimensionales no es “innata” sino que es preciso aprenderla.

En su estudio, Gutiérrez (1998) hace referencia a estudios realizados por otros autores como Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989) y Battista y Clements (1996) quienes muestran que los estudiantes de primaria tienen dificultades

para calcular la cantidad de cubos que hay en un modelo multicubo con forma de prisma rectangular representado en proyección isométrica o paralela. En cuanto a la interpretación de representaciones planas, muchas estrategias resultan ineficaces. Otras investigaciones han observado que la enseñanza específica mejora la capacidad de los alumnos para relacionar cuerpos tridimensionales con sus representaciones planas de lo que algunos autores derivan que los resultados son mejores cuando se utilizan materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements y Battista, 1992).

Es fundamental conocer las características de cada representación, los convenios implícitos y el significado de las claves para poder hacer una lectura correcta de la misma.

También debemos tener en cuenta las descripciones de sólidos que hacemos sobre el papel, Gutiérrez (1998) diferencia entre representaciones gráficas, sin texto o texto irrelevante; verbales, únicamente texto o acompañada por alguna imagen con valor secundario; y mixtas, en las que tanto el dibujo como el texto aportan información relevante.

En relación al uso de ejercicios basados en estas descripciones surgen algunas cuestiones derivadas de diferentes estudios. Estas son, Gutiérrez (1998) que la mayor o menor complejidad de los sólidos empleados puede inducir diferentes tipos de respuestas, que la forma de enunciar el problema puede inducir a determinados tipos de respuestas, cuando se plantean varias actividades seguidas, las primeras pueden influir en la forma de resolver las siguientes, y que la proyección en perspectiva es la forma más natural de representación de sólidos aunque la más difícil de realizar con corrección.

Las dificultades que encuentran los alumnos a la hora de realizar representaciones planas, se deben a diferentes características entre ellas evolutivas, habilidad para dibujar y culturales.

2.4.1 REPRESENTACIÓN EN PERSPECTIVA

Mitchelmore (1976) evaluó la habilidad de dibujar en perspectiva de 80 estudiantes de alta capacidad (40 chicos y 40 chicas) de edades entre 7 y 15 años en Jamaica. Se les dispuso individualmente para dibujar cinco sólidos de

madera puestos a una distancia y orientación fijas. Los sólidos fueron un cubo, un cilindro, un prisma, una pirámide y un cono. Se realizaron dos dibujos de cada figura, uno tras haber observado la figura durante unos segundos, y otro con la figura expuesta por tiempo indefinido. No se tuvo en cuenta los dibujos del cono ya que resultaron incomparables. De los otros cuatro sólidos se obtuvieron 5 niveles de representación que Mitchelmore (1976) describió como:

1. Se representa un esquema del sólido o una de sus caras ortogonalmente.

2. Se muestran varias caras pero no de forma correcta. A menudo pueden mostrar caras ocultas. No llegan a dar sensación de profundidad.

3. a) solo se muestran las caras visibles, en correcta relación unas con otras pero con una pobre sensación de profundidad.

b) las caras visibles se encuentran algo distorsionadas en un intento de mostrar profundidad.

4. Los dibujos son correctos, usando líneas paralelas o ligeramente convergentes de forma adecuada para representar los bordes de los sólidos

Gutierrez (1998) asignó un nombre a cada una de las etapas, siendo la primera etapa *esquemática plana*, la segunda *esquemática espacial*, la tercer *pre-realista* y la cuarta *realista*.

En la figura 2 se muestran ejemplos de las representaciones en perspectiva de un prisma recto, un cilindro, una pirámide y un cubo, en función de las diferentes etapas

Solid				
STAGE	Cuboid	Cylinder	Pyramid	Cube
1				
2				
3A				
3B				
4				

Figura 3. Dibujos típicos de cada etapa de representación de sólidos (Mitchelmore, 1976)

Como vemos en la imagen 2, en la etapa 1 se presentan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente. En la etapa 2 dibujan varias caras, incluidas ocultas. En la etapa 3 ya no aparecen caras ocultas y los dibujos tratan de dar sensación de profundidad sin llegar a conseguirlo plenamente; esta etapa se subdivide en dos subetapas (3A y 3B) cuya diferencia se encuentra en la perfección de los dibujos. En la etapa 4 los dibujos son bastante correctos y siguen de forma más o menos regular las reglas del dibujo en perspectiva.

En relación a las etapas de representación plana de sólidos, algunos autores como Lewis (1962) (citado en Mitchelmore, 1976) no subdivide la tercera etapa en dos, sino que considera cada una de ellas como independiente, estableciendo cinco etapas.

Esta prueba se realizó de nuevo en Columbus (Ohio), con estudiantes de capacidad media, el único cambio fue la sustitución del cono por una pirámide triangular. Los resultados corroboraron las etapas establecidas en la prueba de Jamaica (Mitchelmore, 1976). La única diferencia tenía que ver con la puntuación obtenida, la cual fue más alta para los jamaicanos, lo cual se deba posiblemente a que estos fueron elegidos como alumnos de alta capacidad, frente a los alumnos americanos de capacidad media.

Los resultados Mitchelmore (1976) mostraron además que los alumnos rara vez realizaron dibujos más avanzados en el periodo de exposición indefinido de los sólidos. Considera además, que es más difícil dibujar que interpretar una representación plana.

Anterior al experimento de Mitchelmore (1976) encontramos el realizado por Piaget e Inhelder (1956) descrito anteriormente, el cual resulta relevante en el estudio de las representaciones planas de sólidos, aunque sus autores no interpretan los resultados con relación a las representaciones, recordemos que les pedía que representaran el sólido tal cual lo veían y posteriormente el desarrollo del mismo.

Otros experimentos e investigaciones posteriores han confirmado los resultados de Mitchelmore (1976), como es el caso del llevado a cabo por Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989) en el que los alumnos de diferentes edades veían un edificio formado por cubos, y debían hacer todos los dibujos que creyeran convenientes para comunicar a sus compañeros cómo era exactamente ese edificio, solo a través de dibujos, vistas o representaciones en perspectiva. Todos los dibujos mostraron las características de las diferentes niveles etapas propuestas por Mitchelmore. En la figura 3 se muestran las representaciones realizadas por dos estudiantes, un chico de 7^o grado y una chica de 6^o, que corresponderían con las edades de 12 y 11 años respectivamente:

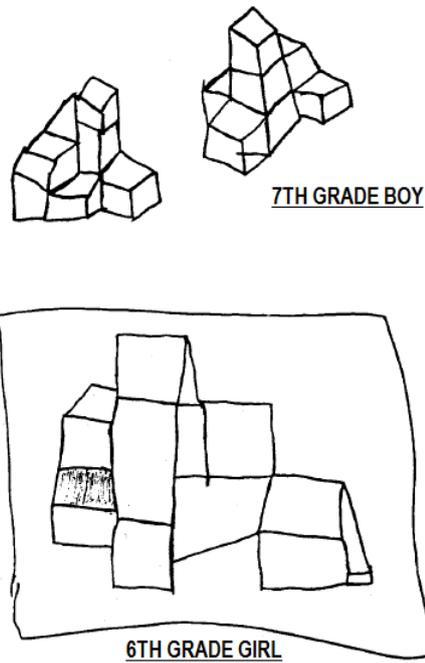


Figura 4. Dibujos realizados por dos estudiantes que muestran dificultades en la representación de paralelas y perpendiculares en figuras espaciales. (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1989)

Woodrow (1991) propuso a 6 niños de entre 9 y 10 años que copiaran el diagrama que se encuentra a la izquierda en la figura 4.

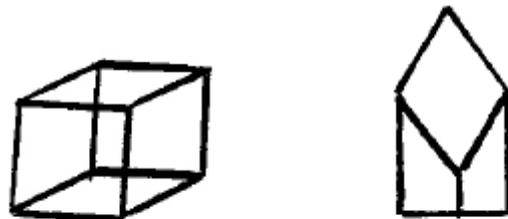


Figura 5. A la izquierda, el diagrama a copiar por los niños. A la derecha el dibujo realizado por cinco de ellos. (Woodrow, 1991)

Cinco de los seis niños realizaron el dibujo que se muestra a la derecha de la figura 4. Si volvemos a mirar el cuadro de la figura 2, mostrado anteriormente, observaremos que el diagrama de la derecha se corresponde con una de las representaciones típicas del cubo (etapa 3a Mitchelmore).

Otro estudio que corrobora las etapas de Mitchelmore y las características de los dibujos de cada etapa es el llevado a cabo por Guillén et al. (1992). En él se pide a 3 alumnos de sexto de primaria que dibujen en papel, en alguna de las formas de representación, un sólido que se les presentaba. Las representaciones reflejaron grados diferentes de destreza, en donde algunos de los dibujos eran casi idénticos a los modelos incluidos por Mitchelmore (figura 2).

A pesar de la diversidad de dibujos que podemos encontrar, cabe aclarar que las dificultades que tienen los alumnos a la hora de realizar dibujos correctos para representar sólidos tienen que ver con dificultades de coordinación a la hora de integrar los segmentos en la representación plana de un poliedro y no porque representen el sólido de la misma forma que lo ven. En algunos casos es fácil comprobar que algunos segmentos actúan como distractores y que las orientaciones de los dibujos influyen en el grado de dificultad de los mismos. En numerosas ocasiones podemos observar que los niños borran el dibujo o una parte del mismo e intentan hacerlo de nuevo, esto quiere decir que son conscientes de los errores que cometen, sin embargo no poseen la destreza suficiente para realizar representaciones correctas.

En su experimentación Gutiérrez (1998), los estudiantes manipularon sólidos reales y diferentes tipos de representaciones planas de estos, pero no se les enseñaron técnicas de dibujo en perspectiva. Se les pidió que dibujaran algunos de los sólidos. Se les pidió de nuevo que dibujaran los mismos sólidos en otras dos ocasiones, durante la experiencia y al final de la misma. Al comparar los dibujos que cada niño había realizado en las diferentes pruebas, no aparecieron diferencias significativas entre ellos.

Con este experimento se pudo comprobar que la habilidad para dibujar representaciones planas de sólidos no crece o apenas lo hace de forma espontánea, por lo que es necesario realizar tareas específicas para desarrollar esta habilidad.

En su estudio también concluyó que unas formas de representación son más fáciles de entender que otras, por ejemplo las representaciones isométricas

frente a las ortogonales, mientras que a la hora de dibujarlo ocurre todo lo contrario, es más fácil dibujar representaciones ortogonales que isométricas. También que las representaciones por niveles son las más fáciles tanto como para comprender como para dibujar. Su estudio mostró que incluso niños de segundo de primaria eran capaces de dibujar representaciones por niveles y construir los sólidos dibujados, aunque en el dibujo cometieron algunos errores relacionados con los marcos de los niveles.

En conclusión, Gutiérrez (1998) afirma la necesidad de que los alumnos aprendan a dibujar y leer representaciones planas de sólidos para comprender y facilitar el aprendizaje de la geometría espacial. Y como hemos mencionado anteriormente, es necesaria una enseñanza específica, pues el desarrollo de las capacidades de visualización y de dibujo no son innatas.

3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Como hemos podido observar en la revisión bibliográfica, las representaciones planas de objetos tridimensionales son una parte fundamental en el aprendizaje de la geometría espacial. La mayoría de las veces cuando trabajamos conceptos relacionados con sólidos, lo hacemos a través de representaciones planas. A través de la literatura hemos podido comprobar que los alumnos muestran una serie de dificultades a la hora de dibujar las representaciones planas de los sólidos. Además, se han observado diversas etapas en el desarrollo de las representaciones en perspectiva (Mitchelmore, 1976). El objetivo de este estudio es observar de qué forma se manifiestan estas etapas en la representación de cuerpos tridimensionales por alumnos de 7 a 12 años en Educación Primaria en Cantabria, y observar la destreza de estos al dibujar en perspectiva con el fin de entender mejor los procesos de visualización de los alumnos. Esto permitirá a los docentes adecuar mejor las estrategias para desarrollar las capacidades de visualización de los estudiantes.

Por tanto, las preguntas de investigación que se plantean en este trabajo son las siguientes:

- ¿De qué forma se manifiestan las etapas de representación en perspectiva de cuerpos tridimensionales en alumnos de 7 a 12 años en Cantabria?
- ¿De qué forma evoluciona la representación en perspectiva a medida que avanza la edad de los alumnos?

4. METODOLOGÍA

En este apartado describiremos la metodología adoptada en este estudio, detallada en las diferentes secciones. En primer lugar presentaremos la estrategia de investigación llevada a cabo (§ 4.1), en segundo lugar describiremos las características de la muestra seleccionada para la investigación (§ 4.2), en tercer lugar mostraremos el diseño de los instrumentos de investigación (§ 4.3) y por últimos, el análisis de los datos (§ 4.4).

4.1. Estrategias de investigación

Una vez planteadas las preguntas de investigación, vamos a describir en este apartado la estrategia de investigación adoptada en el estudio.

Hay tres estrategias principales de investigación si tenemos en cuenta el análisis de datos: (1) Análisis cualitativos (2) análisis cuantitativos y (3) análisis mixtos (Ercikan y Roth, 2006). El primer y segundo caso, se trata de análisis cualitativos y cuantitativos respectivamente, mientras que el último caso se trata de una combinación de ambos métodos.

De acuerdo con las necesidades de nuestras preguntas de investigación se ha optado por un estudio cuantitativo, pues pretendemos identificar el porcentaje de alumnos que se encuentra en cada una de las etapas de representación en perspectiva.

4.2. Muestra

Para llevar a cabo esta investigación se seleccionó una muestra en total de 73 alumnos de entre 7 y 12 años de un centro público de Educación Primaria de Cantabria. Esta muestra se dividió en grupos de edades

correspondientes al último curso de cada ciclo, tomando por tanto 23 alumnos de entre 7 y 8 años que cursaban segundo de primaria, 26 alumnos de entre 9 y 10 años que cursaban cuarto de primaria y por último, 24 alumnos de entre 11 y 12 años que cursaban 6º de primaria. La muestra era homogénea, en cuanto a que no había alumnos con necesidades educativas especiales, ni adaptaciones curriculares individuales, en todos los grupos salvo en este último grupo que había 3 alumnos que realizaban 6º por segunda vez.

El centro del que se tomó la muestra se trataba del centro en el que la autora estaba realizando las últimas prácticas del grado, y por lo tanto tenía acceso a diferentes grupos/clase, por lo que se trata de una muestra por conveniencia.

Ningún alumno supo de la prueba que iban a realizar hasta el mismo momento de hacerla. Además la prueba se realizó en presencia de la tutora de cada grupo y se administró al total de la muestra.

El centro del que se tomó la muestra está considerado de un nivel sociocultural medio-bajo.

4.3. Diseño de los métodos de investigación

Para dar respuesta a nuestras preguntas de investigación hemos llevado a cabo un experimento a través de la realización de una prueba. El experimento está inspirado en el llevado a cabo por Piaget e Inhelder (1956), (ver sección 2.4).

La prueba consistió en mostrar cuatro sólidos contruidos con cartulina, un cilindro, un cono, un cubo y una pirámide (tetraedro) de alturas 15, 18, 6 y 8 centímetros respectivamente, a cada grupo de niños por edades en diferentes sesiones.

La prueba tenía dos partes, en una había que dibujar el sólido tal cual lo veían y en la segunda parte debían dibujar como creían ellos que era el desarrollo de esa figura.

Antes de la realización de la prueba se les mostró uno por uno los diferentes sólidos y se les explicó en lo que consistía el desarrollo de una figura mostrando un 5º sólido como ejemplo, un prisma triangular. Los datos

recogidos en la segunda parte de la prueba no se han tenido en cuenta en el presente trabajo.

Una vez explicado esto, se colocaron los diferentes sólidos sobre una mesa delante de la pizarra. Dado que por la organización de la clase no todos los alumnos tenían los sólidos desde la misma perspectiva ni a la misma distancia, se permitió a los alumnos que lo necesitaran acercarse a la mesa donde se encontraban éstos.

La disposición de los sólidos fue la siguiente: el cilindro se apoyaba sobre una de las caras circulares, el cono sobre su cara circular, y el cubo y el tetraedro sobre una de sus caras.

Los alumnos podían utilizar todo tipo de material, aunque la mayoría tan solo utilizó lápiz y goma, o bolígrafo en algún caso. Solo algunos alumnos utilizaron la regla. También podían realizar las correcciones que creyeran necesarias.

La duración de la prueba no estaba limitada, los alumnos podían tomarse el tiempo necesario para realizar las representaciones. En ningún caso, la duración de la prueba fue superior a 45 minutos.

4.4. Análisis de datos

En primer lugar, se analizaron las diferentes representaciones realizadas por los alumnos y se clasificaron en distintas etapas teniendo en cuenta las fases descritas por Mitchelmore (1976).

El análisis de los datos se realizó a través del programa informático Microsoft Office Excel 2007, en el que se fue recogiendo por grupos de edades y por figuras, la etapa a la que pertenecía cada representación. Para ello se asignó el valor 1 a la etapa esquemática plana, el valor 2 a la etapa esquemática espacial, el valor 3,1 y 3,2 a las subetapas 3A y 3B respectivamente de la etapa pre-realista y el valor 4 para la etapa realista, de forma que se pudiesen calcular el porcentaje de representaciones respectivas a

cada etapa en cada una de las representaciones de los diferentes sólidos, y los porcentajes globales respecto al total de las representaciones.

5. RESULTADOS

En esta sección analizaremos los dibujos en perspectiva de los sólidos presentados a los niños, clasificándolos en diferentes etapas según la habilidad de representación que posee cada uno. Además, trataremos de identificar qué relación hay entre las edades y las etapas de representación que muestren los alumnos.

Una vez observado que las representaciones se pueden agrupar en etapas teniendo en cuenta sus características, clasificaremos estas teniendo en cuenta las etapas que utiliza en su estudio Gutiérrez (1998), propuestas y descritas por el investigador Mitchelmore (1976), (ver sección 2.4.1).

A continuación se presentan los resultados de las etapas identificadas en los estudiantes de 7 y 8 años de edad al realizar las representaciones de los cuatro sólidos propuestos en el estudio.

Etapa	Sólidos			
	Cilindro	Cono	Cubo	Pirámide
1. Esquemática plana	39,1%	47,43%	82,61%	68,26%
2. Esquemática espacial	39,1%	47,43%	17,39%	26,6%
3A. Pre-realista A	18,26%	5,76%	0%	0%
3B. Pre-realista B	5,76%	0%	0%	5,76%
4. Realista	0%	0%	0%	0%

Tabla 1. Porcentaje de alumnos de 7 y 8 años en cada etapa en la representación de cada uno de los sólidos

Como se aprecia en la Tabla 1, las representaciones del cilindro que realizaron estos niños se encuentran en su mayoría entre las etapas esquemática plana y esquemática espacial, que juntas suponen casi el 80%, como podemos ver en la Tabla 1. El resto de representaciones se encuentra en la etapa pre-realista, siendo mayoritaria la primera subetapa (3a). En estas edades no se encontró ningún dibujo perteneciente a la etapa realista.

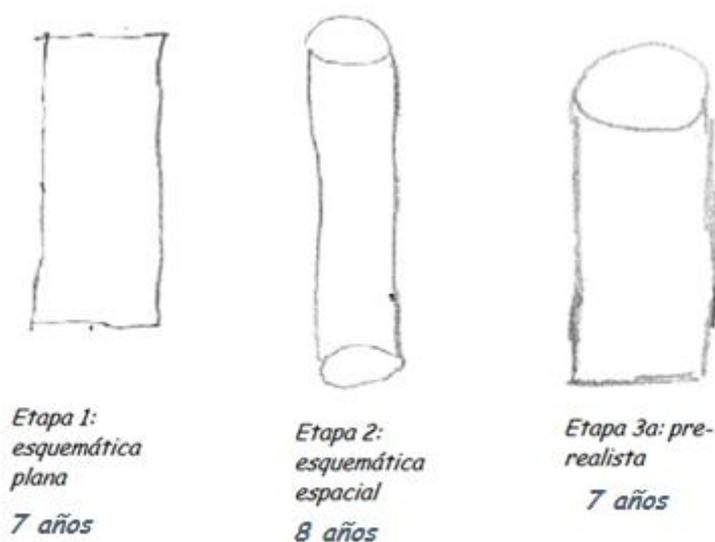


Figura 6. Ejemplos de representaciones del cilindro características de las etapas 1, 2, y 3A realizadas por alumnos de 7 y 8 años

En el caso del cono, el 95% de las representaciones de este grupo de edad, se encuentran en las etapas esquemática plana y espacial, ambas en la misma proporción (47% cada una). La pequeña parte restante se completa con las representaciones pertenecientes a la etapa pre-realista 3a, no apareciendo en ningún caso representaciones de etapa realista ni tampoco de la segunda subetapa pre-realista (3b).



Figura 7. Ejemplos de representaciones del cono características de las etapas 1 y 2, realizadas por niños de 7 años.

En el caso del cubo, el 83% de las representaciones realizadas por niños de entre 7 y 8 años pertenecen a la etapa esquemática plana, y el 17% restante pertenece a la etapa esquemática espacial. En este grupo de edad no aparece ninguna representación de las etapas pre-realista y realista.

En la figura 8 podemos ver algunas de las representaciones de este grupo de edad.

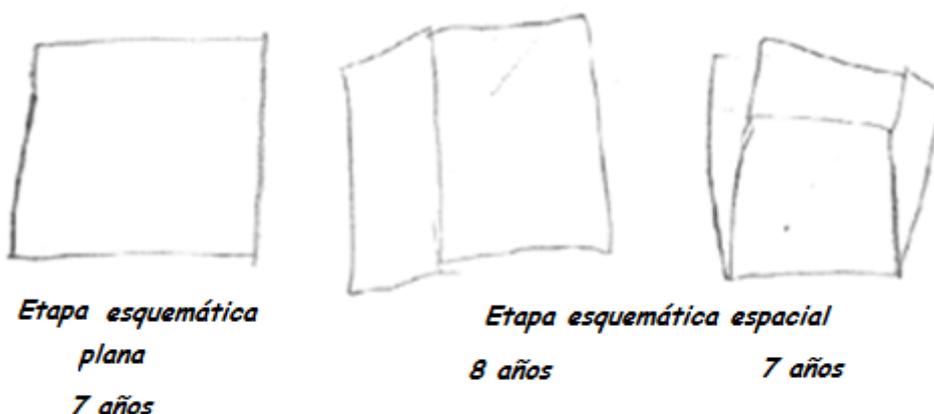


Figura 8. Ejemplos de representaciones del cubo características de las etapas 1 y 2 realizadas por niños de 7 y 8 años.

En cuanto al tetraedro o pirámide, en este grupo de edad, la mayoría de las representaciones pertenece a la etapa esquemática plana (68,26%) y el resto a la etapa esquemática espacial, a excepción de un 6% de representaciones que pertenecen a la segunda subetapa pre-realista. No



Figura 9. Ejemplo de representación de la pirámide característica de la etapa espacial realizada por un niño de 8 años

aparece ninguna representación de la primera subetapa pre-realista, ni tampoco de la etapa realista.

De forma global, el 59,8% de las representaciones realizadas por los alumnos de entre 7 y 8 años mostraron encontrarse en la etapa 1, esquemática plana; el 32,6% se encuentran en la etapa 2, esquemática espacial; y tan solo el 5,4% y el 2,2% de las representaciones correspondieron a las subetapas 3^a y 3B respectivamente.

En la tabla 2, se presentan los resultados de las etapas identificadas en los estudiantes de 9 y 10 años de edad al realizar las representaciones de los cuatro sólidos propuestos.

Etapa	Sólidos			
	Cilindro	Cono	Cubo	Pirámide
1. Esquemática plana	7,69%	7,69%	38,46%	26,92%
2. Esquemática espacial	57,69%	53,85%	23,08%	34,62%
3A. Pre-realista A	0%	0%	3,85%	0%
3B. Pre-realista B	0%	0%	11,54%	0%
4 Realista	34,62%	38,46%	23,08%	19,23%

Tabla 2. Porcentaje de alumnos de 9 y 10 años en cada etapa en la representación de cada uno de los sólidos

Entre las representaciones de los niños de entre 9 y 10 años del cilindro, se abandona la etapa esquemática plana, apareciendo en tan solo un 8 %, y dejando la parte mayoritaria a la etapa esquemática espacial, que ocupa el 58% de las representaciones. Dentro de este grupo de edad el resto de las representaciones, en torno al 34%, pertenecen a la etapa realista, apareciendo por primera vez en este grupo de edad. Sin embargo, no aparece ninguna representación de la etapa pre-realista.



Etapa realista
9 años

Figura 10. Ejemplo de representación del cilindro característica de la etapa realista realizada por un niño de 9 años

En las representaciones del cono, ocurre lo mismo que con el cilindro; se reduce el porcentaje de representaciones de la etapa esquemática plana (un 8%) para dar la mayoría a la etapa esquemática espacial (casi un 54%). Al igual que en el caso del cilindro, el resto de las representaciones pertenecen a la etapa realista, no apareciendo ninguna representación de la etapa pre-realista.



Etapa realista
9 años

Figura 11. Ejemplo de representación realista del cono realizada por un estudiante de 9 años

En el caso de las representaciones del cubo, estas están más repartidas entre todas las etapas, aunque sigue predominando la etapa esquemática plana con el 38% de las representaciones. Aparecen en igual número las etapas esquemática espacial y realista (23% cada una). El resto de las representaciones pertenecen a la etapa pre-realista, con predominio de la subetapa 3B (11,54% de la subetapa 3B, frente al 3,85% de la 3A).



Etapla pre-realista 3b

9 años

Figura 12. Ejemplo de representación en etapa pre-realista 3B, por un estudiante de 9 años

Con respecto a las representaciones de la pirámide en este grupo de edad, predominan con casi un 35% las representaciones de la etapa esquemática espacial. La etapa esquemática plana tiene una importante representación con casi un 27%. El resto de representaciones pertenecen a las etapas pre-realista y realistas, ambas en la misma medida. En estas representaciones, aparecen algunos dibujos que no son correctos, como la pirámide cuadrangular de la figura 13 (pirámide central), que a pesar de no ser un tetraedro, hay un intento de dar profundidad. También es frecuente la representación del tetraedro mostrando caras y aristas ocultas, como en la pirámide de la izquierda de la figura 13.

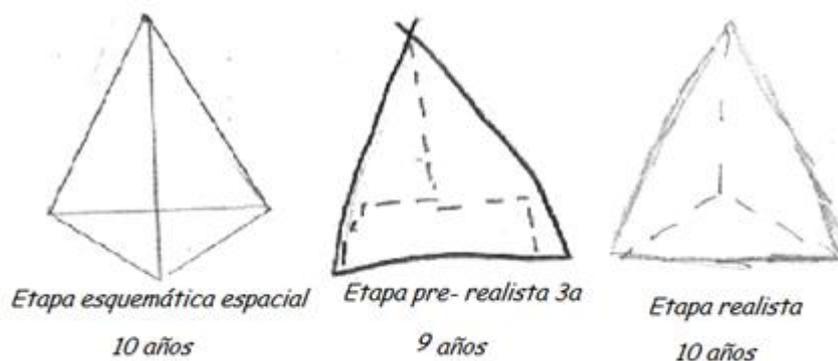


Figura 13. Ejemplos de representaciones de la pirámide características de las etapas 2, 3A y 4 realizadas por niños de 9 y 10 años

En conjunto, las representaciones más numerosas con el 42,3% pertenecen a la etapa 2, esquemática espacial. En este grupo de edad las representaciones de la etapa 4, realista, representan el 28,8%. La etapa esquemática plana aun supone el 20,2% de las representaciones, siendo la etapa pre-realista la que obtiene menor representación en este grupo de edad (5,8% en la subetapa 3A y 2,9% en la subetapa 3B).

Por último, presentaremos los resultados de las etapas identificadas en los estudiantes de entre 11 y 12 años al realizar las representaciones de los sólidos presentados en el estudio.

Etapa	Sólidos			
	Cilindro	Cono	Cubo	Pirámide
1. Esquemática plana	8,33%	37,5%	8,33%	16,66%
2. Esquemática espacial	50%	33,33%	29,16%	25%
3A. Pre-realista A	16,66%	0%	16,66%	16,66%
3B. Pre-realista B	8,33%	4,16%	25%	8,33%
4 Realista	16,66%	25%	20,83%	33,33%

Tabla 3. Porcentaje de alumnos entre 11 y 12 años en cada etapa en la representación de cada sólido

En relación al cilindro en este grupo de edad, el 50% de las representaciones está en la etapa esquemática espacial. En algunos casos se observa que tratan de dar profundidad a la figura, pero utilizan de forma errónea las líneas ocultas. Siguen apareciendo en pequeño porcentaje las representaciones pertenecientes a la etapa esquemática plana. La etapa realista aparece en el 17% de las representaciones, siendo el resto representaciones de la etapa pre-realista.

En el caso del cono, las representaciones pertenecientes a la etapa esquemática plana suponen el 37,5% del total, siendo la etapa más repetida. En segundo lugar, se encuentra la etapa esquemática espacial con un 33% de las representaciones. La etapa pre-realista solo alcanza el 5% de las representaciones siendo todas ellas de la segunda subetapa (3B). El resto de las representaciones (25%), pertenecen a la etapa realista. En este grupo de edad no hay similitudes entre los porcentajes de las representaciones del cilindro y el cono como sí ocurre en los grupos anteriores.

En el caso del cubo en este grupo de edad, se reducen hasta el 8% las representaciones que pertenecen a la etapa esquemática plana y aumentan las correspondientes a la etapa esquemática espacial (30%). La etapa predominante en este grupo es la etapa pre-realista que supone casi el 42% de las representaciones, adquiriendo mayor porcentaje la segunda subetapa pre-realista (3B). Por último, en torno al 20% de las representaciones pertenecen a la etapa realista.

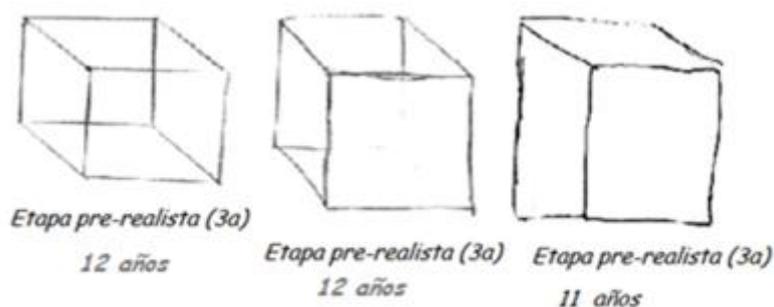


Figura 14. Ejemplos de representaciones del cubo características de la etapa 3A realizadas por estudiantes de 11 y 12 años

Unas de las representaciones que más se repiten en los dos últimos grupos de edad (9- 12 años) son las que aparecen en la figura 14, en la izquierda y en el centro de la imagen. Son representaciones del cubo en el que se ven todas las caras y aristas ocultas del cubo, o como en el caso del cubo central (figura 14) en el que se han intentado borrar, sin éxito, las aristas ocultas.

Por último, en el caso de la pirámide, la etapa que predomina es la realista con casi el 33% de las representaciones. La etapa minoritaria es la etapa esquemática plana (17%). El resto de representaciones pertenecen a las etapas esquemática espacial y pre-realista a partes iguales, aunque dentro de la etapa pre-realista, predomina la primera subetapa (3a) con casi el 17% de las representaciones.



Figura 15. Ejemplo de representación de una pirámide por un estudiante de 12 años

De forma global, el 34,4% y el 23,9% de las representaciones realizadas por los alumnos de entre 11 y 12 años se encuentran en la etapa 2, esquemática espacial y en la etapa 4, realista, respectivamente. El 17,7% de las representaciones pertenecen a la etapa 1, esquemática plana y el porcentaje restante corresponde a la etapa pre-realista, un 12,5% en la subetapa 3A y un 11,5% en la subetapa 3B.

En general, y teniendo en cuenta todas las representaciones de los diferentes sólidos, en las edades más tempranas predomina la etapa esquemática plana, no llegando a alcanzar en ningún caso la etapa realista; mientras que en los otros dos grupos de edad, aunque predominan las etapas esquemática espacial y realista, las representaciones se encuentran más repartidas en el resto de etapas.

6. DISCUSIÓN

En este apartado se comentan los resultados obtenidos y descritos en la sección anterior teniendo en cuenta las diferentes etapas.

En el primer grupo de edad, entre 7 y 8 años, la mayoría de las representaciones realizadas se encuentran en la primera etapa descrita por Mitchelmore (1976) correspondiente a la etapa esquemática plana. En este grupo de edad casi todas las representaciones se encuentren entre la primera y la segunda etapa, no llegando en ningún caso a la etapa realista. Este hecho puede estar relacionado con el desarrollo cognitivo de estos niños ya que por su edad, se encuentran en un proceso de transición entre la etapa de inteligencia preoperatoria y la etapa de inteligencia operatoria concreta descrita por Piaget e Inhelder (1978). Es posible que entren en juego otras variables como son el trabajo previo con estos sólidos, ya que teniendo en cuenta los contenidos curriculares del primer ciclo de educación primaria, se habrían introducido estos sólidos.

Su habilidad para realizar representaciones también está relacionada con que hayan aprendido (o no por el momento) pautas para dibujar en el plano objetos tridimensionales.

En algunos casos también se observa que hay alumnos que aún no tienen un control pleno de la grafomotricidad como podemos ver en la figura 16,

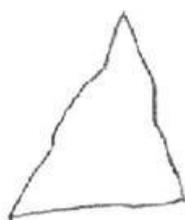


Figura 16. Representación del cono por un alumno de 7 años

aunque este aspecto no influye necesariamente en la evolución para realizar dibujos en perspectiva más realistas.

En los otros dos grupos de edades, la etapa esquemática plana deja de ser la principal, ocupando esta posición la etapa esquemática espacial. Además, las etapas pre-realista y realista adquieren más peso. Además de por la maduración cognitiva que supone la edad, también influye que estos grupos ya han trabajado anteriormente con los sólidos y seguramente hayan adquirido algunas nociones básicas para dibujar cuerpos tridimensionales.

Un aspecto interesante que mostraron los resultados, fue que en los dibujos del cilindro, los alumnos de entre 9 y 10 años realizaron mayor número de representaciones características de la etapa realista que los alumnos de entre 11 y 12 años. Esto puede resultar contradictorio ya que alumnos más jóvenes han alcanzado esta etapa primero y en mayor número. Es posible que las diferencias radiquen en errores cometidos sobre reglas del dibujo en perspectiva como ocurre con el dibujo de la figura 17, en el que intenta dibujar de forma realista el cilindro, pero comete errores en el uso de las líneas ocultas, representadas como discontinuas.



Figura 17. Representación plana del cilindro por un alumno de 11 años

En relación a estos errores, hemos podido observar algún caso en el que dibuja la línea continua y discontinua al mismo tiempo, lo que puede darnos a entender que una vez que ha realizado el dibujo completamente es consciente de que este no es correcto y lo corrige sin hacer uso de la goma, como podemos ver en la figura 18.

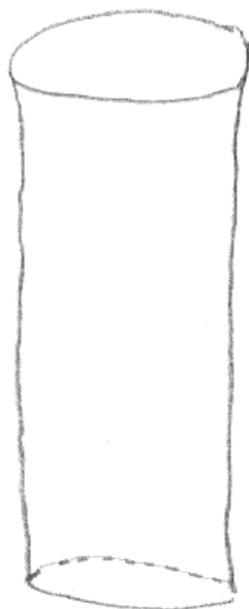


Figura 18. Representación del cilindro realizada por un alumno de 11 años

Sobre la consciencia de errores al dibujar representaciones planas, hemos observado también que en algunas ocasiones los alumnos perciben su dibujo como incorrecto y lo borran para tratar de mejorarlo o realizarlo con corrección, pero siguen dibujando casi de la misma manera. Como señala Gutiérrez en su estudio (1998) no se puede concluir que los alumnos visualizan los sólidos como los representan, sino que su representación puede ser más pobre debido a que carecen de habilidades de dibujo..

También hemos observado que un mismo alumno puede presentar representaciones correspondientes a diferentes etapas. Esto puede significar, por un lado, que se encuentre en proceso de transición entre una etapa y otra, y por otro lado, que haya figuras que resulten más fáciles de representar que otras.

Cabe destacar que se han observado resultados muy parecidos en las representaciones del cono y el cilindro sobre todo entre los 9 y los 12 años que distan de los resultados obtenidos en el resto de figuras. Esto puede deberse a que ambas figuras son cuerpos de revolución, por lo que pueden tener dificultades similares a la hora de representarse.

Respecto a las representaciones del cubo, se repiten con frecuencia dos en los dos últimos grupos de edad (figura 19). En ambas representaciones se dibujan todas las aristas del cubo, aunque no sean visibles, o parte de estas.

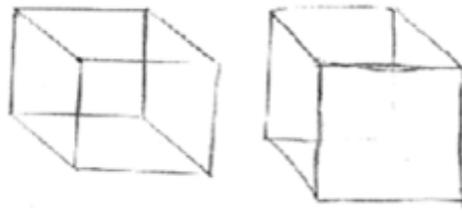


Figura 19. Ejemplo de representación del cubo

Esto puede deberse a que en muchos casos, para facilitar el dibujo en perspectiva, algunos profesores enseñan a sus alumnos a dibujar un cubo dibujando dos cuadrados superpuestos y uniendo cada vértice de cada cuadrado con su análogo del otro. Es después de esto cuando borran intentan borrar, en algunos casos, las aristas ocultas, no borrándolas correctamente.

7. CONCLUSIÓN

Numerosos estudios destacan la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría y otras áreas de las matemáticas. En particular, la visualización interviene a la hora de realizar cualquier representación plana de un objeto tridimensional. En el caso de las representaciones planas en perspectiva, se ha visto que los alumnos siguen distintas etapas. El conocimiento por parte del docente de las etapas que siguen los estudiantes es crucial a la hora de plantear problemas adecuados a su nivel y de estimular el paso de un nivel a otro para así fomentar sus habilidades de visualización

Este estudio ha tenido como objetivo observar de qué forma se manifiestan las etapas de representación en perspectiva de cuerpos tridimensionales en alumnos de 7 a 12 años en Cantabria. Además, se pretendía estudiar de qué forma evoluciona la representación en perspectiva a medida que avanza la edad de los alumnos. La revisión de la literatura nos reveló que los estudiantes pasan por diferentes etapas en el desarrollo de la habilidad para dibujar figuras tridimensionales y que esta habilidad se puede desarrollar a través de la práctica

Para realizar representaciones planas de objetos tridimensionales se requieren habilidades de visualización por la dificultad que supone pasar del

espacio tridimensional al plano. Se ha pretendido observar en este estudio la evolución de las representaciones en perspectiva con el fin de entender mejor el proceso de visualización que siguen los alumnos y poder así estimular sus habilidades a través de la enseñanza específica.

A lo largo del estudio hemos podido observar que pocas representaciones se encuentran en la etapa realista, ni siquiera las realizadas por los alumnos de edades más avanzadas, de lo que se deriva que es necesario un trabajo más específico, proponiendo actividades y dando a conocer las claves sobre el dibujo en perspectiva, para poder desarrollar habilidades de visualización.

De cara a nuestra labor como docentes, debemos ser conscientes de las dificultades que comporta realizar representaciones planas para los alumnos en general, y de primaria, en particular, y combatir estas dificultades a través de la enseñanza específica, lo que permitirá desarrollar la capacidad de visualización y facilitará el aprendizaje de la geometría y de otras áreas de las matemáticas.

8. AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a Irene Polo Blanco por su ayuda en la realización de este trabajo fin de grado, a los alumnos que participaron en la investigación y a los profesores que me prestaron tiempo de sus clases para poder llevar a cabo este estudio.

9. BIBLIOGRAFÍA

BATTISTA, M.T., Y CLEMENTS, D.H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.

BEN-CHAIM, D., LAPPAN, G., y HOUANG, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 121-146.

BISHOP, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education—A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.

BISHOP, A. J. (1989). A review of research on visualisation in mathematics education. *Document resume*, 170-176.

BLANCO, H. (2010). Análisis del papel de las imágenes en actividades matemáticas. *Premisa (SOAREM)*, 12(46), 39-47.

CLEMENTS, D.H. y BATTISTA, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.

CRESWELL, J.W. (2002): *Educational Research: Planning, Conducting and Evaluating Quantitative and Qualitative Research*. New Jersey, Pearson Education, Inc.

DICKSON, L.; BROWN, M. y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor: Ministerio de Educación y Ciencia.

ERICKAN K., y ROTH W. M. (2006). What good is polarizing research into qualitative and quantitative. *Educational Researcher*. 35(5), 14-23.

FERNÁNDEZ, T., PEGITO, J. A. C., y GODINO, J. D. (2008). Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007* (pp. 189-198). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

FOUZ, F. (2006) *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Berritzegune de Donosti.

GUILLÉN, G., GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. y CÁCERES, M. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Memoria final de un proyecto de investigación subvencionado por la Institución Valenciana de Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, Valencia, España.

GUILLÉN, G. (2004) El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 3, pp. 103-125, Grupo Santillana México. México

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1990) Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele, *Práctica en Educación Matemática*: Capítulo 6o, pág. 295-384. Ediciones Alfar, Sevilla, 1990.

GUTIÉRREZ, A. (1992): Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría*, pp. 44-59

GUTIÉRREZ, A. (1996): Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th PME Conference 1*, pp. 3-19

GUTIÉRREZ, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la Geometría espacial. *Revista Ema*. Vol. 3, N° 3, 193-220.

GUTIÉRREZ, Á., y JAIME, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 55-70.

HOYOS, E., Y ARISTIZÁBAL, J. (2012). Representación de objetos tridimensionales utilizando multicubos: software de multicubos, geoespacio, explorando el espacio 3D.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Magisterio, Bogotá.

MITCHELMORE, M.C. (1976). Cross-cultural research on concepts of space and geometry. En J.L. Martin y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 143-184.

PIAGET, J. E INHELDER, B. (1948). *La representación del espacio en el niño*. Madrid: Morata.

PRESMEG, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 42-46.

VINNER, S.; HERSHKOWITZ, R. (1983): On concept formation in geometry. *Zentrablatt für Didaktik der Mathematik*, 83 (1), 20-25

VAN HIELE, P.M. (1986): *Structure and Insight. A theory of mathematics education*. Academic Press: Londres.

WOODROW, D. (1991). Children drawing cubes. *Mathematics Teaching*, 136, 30-33.