



Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

La visualización en geometría: un estudio en 3º ESO

Visualization in geometry: a study in 3º ESO

Alumno: Olga Sainz López

Especialidad: Matemáticas

Director: M^a José González

Curso: 2013/2014

Fecha: Junio 2014

Índice

1.	INTRODUCCIÓN	3
2.	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	5
2.1.	INVESTIGACIONES PREVIAS.....	6
2.2.	NOCIÓN DE VISUALIZACIÓN	7
2.2.1.	PERSPECTIVA COGNITIVA.....	7
2.2.2.	PERSPECTIVA TECNOLÓGICA.....	10
2.2.3.	PERSPECTIVA COMUNICATIVA	10
2.3.	DIMENSIONES DE LA VISUALIZACIÓN	11
2.3.1.	PRODUCTOS: IMÁGENES MENTALES	12
2.3.2.	PROCESOS PARA MANIPULAR IMÁGENES MENTALES.....	12
2.3.3.	HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN.....	13
2.4.	EVALUACIÓN DE LA VISUALIZACIÓN	14
3.	PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	16
4.	MARCO TEÓRICO.....	17
5.	METODOLOGÍA.....	21
5.1.	MUESTRA.....	21
5.2.	CONTEXTO.....	21
5.3.	INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS Y FORMA DE TRABAJO EN EL AULA.....	22
6.	RESULTADOS E INTERPRETACIÓN	26
6.1.	RESULTADOS GLOBALES.....	26
6.2.	RESULTADOS POR EJERCICIO	28
6.3.	GRUPO DE MAYOR ATENCIÓN (GMA).....	33
6.4.	GRUPO DE MEJOR RENDIMIENTO (GMR)	35
7.	CONCLUSIONES	39
8.	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	41
	ANEXO.....	44

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas tratan con objetos y entidades bastante diferentes de los fenómenos físicos, y dependen en gran medida de la visualización en sus diferentes formas y niveles. Las numerosas investigaciones de las que ha sido objeto dentro del campo de la Educación Matemática han puesto de manifiesto el importante papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático, en general, y en el de la geometría en particular.

La visualización espacial figura en los objetivos curriculares de la Educación Secundaria Obligatoria, ya que el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera una competencia valiosa y necesaria para cualquier ciudadano.

No obstante, su enseñanza no es una tarea fácil para los docentes, como revelan las investigaciones didácticas sobre el tema. Se observa que frecuentemente en las clases de matemáticas el tema de la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales es poco tratado o planteado como actividad recreativa. Las tareas que se encuentran en los libros de texto reflejan este escaso interés: se trabaja únicamente con representaciones planas de objetos sin hacer una referencia al objeto real que representan, no se trabaja en espacios conocidos sino con representaciones de espacios ficticios y personajes imaginarios (Godino et al, 2011).

El objetivo principal de esta investigación será evaluar ciertas habilidades de visualización en un grupo de alumnos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria y realizar una propuesta docente para potenciarlas. El trabajo comienza por una revisión bibliográfica sobre el problema abordado, que incluye una justificación de la importancia de la visualización, su definición y dimensiones, y los instrumentos de medida disponibles, junto con un resumen de investigaciones y conclusiones sobre el tema. Seguidamente se concreta el tema y se detallan los objetivos de la investigación. A continuación, se describe el marco teórico en el que se recoge la definición de visualización adoptada, las habilidades sujetas a medida y el instrumento de medición elegido. A partir de esta fundamentación, se presenta la metodología seguida, donde se describe

la muestra estudiada, el contexto de trabajo y los instrumentos de recogida de datos. A continuación se realiza la presentación e interpretación de los resultados obtenidos, para terminar con unas conclusiones finales que incluyen propuestas de mejora.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

La mayor parte de los investigadores y educadores matemáticos coinciden en la importancia de la visualización porque mejora la visión global e intuitiva y la comprensión en muchas de las áreas de las matemáticas, desde la geometría y el cálculo, hasta el álgebra o la estadística (Gutiérrez, 1998).

En contextos matemáticos en los que hay un importante soporte gráfico y visual, los procesos de aprendizaje están muy condicionados por el uso de objetos físicos, diagramas, figuras, etc. Por tanto, dado que la geometría tiene un soporte muy fuerte en elementos visuales, esta ha sido una de las áreas en las que más se ha investigado la visualización, sobre todo su influencia en la comprensión y aprendizaje de conceptos geométricos.

Incluso las orientaciones curriculares españolas hacen referencia al tema de la orientación y la representación espacial, tanto en primaria como en secundaria:

Un criterio de evaluación del primer ciclo de primaria es el siguiente: “Describir la situación de un objeto del espacio próximo, y de un desplazamiento en relación a sí mismo, utilizando los conceptos de izquierda-derecha, delante-detrás, arriba-abajo, cerca-lejos y próximo-lejano” (BOE, 2006, p.43098). Este criterio pretende evaluar las capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado en la descripción como la representación en el plano de objetos y situaciones.

La normativa vigente de Secundaria en la fecha en la que se realiza este trabajo también contiene alusiones a la visualización: “...Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación” (BOE, 2007, p. 31791).

Esto justificaría, por tanto, que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización y orientación espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática y de los docentes de secundaria.

2.1. INVESTIGACIONES PREVIAS

Desde el punto de vista histórico, se observa que el status de la visualización se ha ido devaluando. Según Galileo (1981): “El libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de la Matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos, y otra figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra suya” (p.63). A pesar de la importancia que la visualización siempre ha tenido (para los griegos era connatural a las Matemáticas), para Davis (1993) su declive comenzó con el desarrollo de la Geometría Analítica en el siglo XVII y continuo con la Proyectiva y las no Elucídicas en el siglo XIX, lo que derivó en la independencia de la Geometría respecto del espacio, convirtiéndose en el estudio de sistemas abstractos de axiomas.

La investigación en visualización tiene como punto de partida la década de los 70 y los 80. En esta época emerge la investigación en imágenes desde su base psicológica, con metodologías sobre todo cualitativas. Aparecen los primeros estudios sobre pensamiento geométrico espacial y sobre representación de funciones con ordenadores.

En los 90 la visualización se reconoce como un campo específico de investigación de la Educación Matemática: se incorporan estudios sobre el desarrollo curricular y de materiales sobre áreas particulares de las Matemáticas como el pensamiento geométrico y la visión espacial. Aparecen investigaciones sobre qué tipo de enseñanza y qué prácticas en clase promueven una visualización matemática efectiva y se estudia la influencia de las nuevas tecnologías en la misma. Se estudian las diferencias individuales, de género y entre expertos o novatos en el uso de la visualización, junto con el rechazo a visualizar en matemáticas que se observa entre los alumnos.

A partir del 2000 se amplía la visión de la visualización. Se estudia su aspecto semiótico: la conexión que existe entre lo visual y lo simbólico o la coordinación entre diferentes registros matemáticos, y se investiga la relación que existe entre las imágenes personales y los aspectos emocionales del aprendizaje. Se reconoce la necesidad de solidificar teorías que puedan

unificar todo el campo de la visualización en el ámbito de la Educación Matemática.

2.2. NOCIÓN DE VISUALIZACIÓN

La visualización o percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no solo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría, con lo que su estudio ha sido abordado por diversos grupos de investigadores con objetivos y contextos también diversos. Una consecuencia de este hecho es que no existe consenso sobre la terminología usada en la visualización espacial, y por eso este campo ha recibido multitud de nombres distintos, entre los que destacan: “percepción espacial”, “imaginación espacial”, “visión espacial”, “visualización” o “pensamiento espacial”. En este apartado veremos cómo, en la literatura específica, autores diferentes han desarrollado distintos significados para los mismos términos, o bien que atribuyen el mismo significado a términos distintos. El término elegido por una persona suele dar indicios de la posición concreta que ha adoptado y del significado que le da a ese término.

Los temas y enfoques que abordan el fenómeno de la visualización son diversos y complejos, pero Débora Torres (2009) distingue tres grandes perspectivas en las que se pueden encuadrar la variedad de enfoques teóricos adoptados. Estas distintas perspectivas no pretenden ser una clasificación exhaustiva ni una categorización excluyente, sino un reflejo de la riqueza y de la complejidad de la noción de visualización:

2.2.1. PERSPECTIVA COGNITIVA

Bajo esta perspectiva, la visualización consiste en la creación de representaciones visuales con la finalidad de comprender las relaciones que se dan en un contexto particular, puesto que a partir del pensamiento y el razonamiento se comprende mejor el mundo externo. A continuación, veremos los tres tipos de interpretaciones del término incluidos en esta perspectiva:

2.2.1.1. Visualizar es explorar a través de los diagramas

Hay una estrecha relación entre la manipulación de diagramas y la visualización, entendiendo esta como la habilidad de percibir las

propiedades gráficas y visuales de cualquier expresión (Dörfler, 2004). La visualización es un proceso relacionado con la observación de patrones, la deducción y la dotación de significado.

Como ejemplo podemos considerar la obtención del determinante de una matriz (Blanca Souto, 2013). Se puede aplicar la regla de Sarrus o bien observar si existe algún tipo de dependencia entre filas o columnas. Este segundo método requiere tomar en consideración la estructura espacial de un diagrama, es más difícil que la simple mecanización de un procedimiento utilizada en el primer método, pero proporciona una mayor comprensión del significado.

Este ejemplo también pone de manifiesto que el razonamiento y la creación de significado se da, no sólo con imágenes, sino también con diagramas algebraicos. La visualización tiene, por tanto, un importante papel en la creación de significado de los símbolos, permitiendo ver a través de ellos, conductas que Arcavi (1994) denomina “sentido del símbolo”. Comprenderían las ideas, estrategias y formas de “leer” y de crear representaciones que van más allá de la habilidad procedimental y que por lo tanto evitan los errores que se derivan de un aprendizaje mecánico.

2.2.1.2. Visualizar es aprehender y conectar representaciones

Duval (1999) afirma que no hay comprensión sin visualización. En Matemáticas, cuando tratamos de comprender por ejemplo una configuración geométrica, donde las unidades de representación serían formas de una o dos dimensiones, necesitamos coordinar representaciones para aprehender globalmente, y eso se consigue a través de la visualización.

Deben diferenciarse los procesos de visión y de visualización. La primera es la percepción directa de un objeto, y necesita exploración mediante movimientos físicos, porque nunca da un aprehensión completa. El modo de ver relevante para el aprendizaje de las matemáticas solo nos lo daría, por lo tanto, la visualización, lo que lleva a

Duval a afirmar que “la visualización hace visible todo lo que no es accesible a la visión” (Duval, 1999, p.13).

Desde un punto de vista didáctico, varias características de la visualización suponen un gran desafío, y lejos de ayudar a superar estas dificultades, las prácticas de enseñanza en torno a la visualización son diversas y a menudo contradictorias. Los registros visuales a veces se usan para dar sentido a procesos matemáticos más mecánicos, mientras que otras se evitan para evitar más dificultades a los estudiantes (Duval, 2006, p.127).

2.2.1.3. Visualizar es imaginar

Presmeg (2006) argumenta que cuando una persona realiza una representación espacial de objetos físicos lo hace a través de imágenes visuales mentales, y a esto es a lo que denomina visualización. Lo novedoso de esta definición es la “imagería mental”, una expresión que pertenece al contexto psicológico y que obviamente no se puede percibir directamente con la vista. Son representaciones mentales que no son necesariamente consecuencia de un estímulo externo, pueden ser recuerdos de experiencias del pasado.

En esta misma línea, para Gutiérrez (1996, p. 9) la visualización “es el tipo de actividad de razonamiento que se basa en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos”. Este autor también sintetiza las habilidades necesarias para este tipo de procesamiento mental de imágenes, que se describirán en apartados sucesivos.

Desde el punto de vista didáctico, en las investigaciones se indica que la enseñanza debe proporcionar herramientas para enriquecer las imágenes mentales de los estudiantes, haciendo especial énfasis en las visuales.

2.2.2. PERSPECTIVA TECNOLÓGICA

A finales del siglo XX, con la aparición de los ordenadores, aparece una nueva noción de visualización relacionada con las herramientas para interpretar datos de imágenes y para generar imágenes a partir de datos multidimensionales. Las visualizaciones externas pueden amplificar o reforzar la cognición.

2.2.2.1. Visualizar es traducir, interpretar geométricamente

Para Zimmermann y Cunningham (1991) el término visualización describe el proceso de crear o usar representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, tanto manualmente como con la ayuda de ordenadores. Entienden que si las matemáticas son la ciencia de los patrones, es natural tratar de encontrar maneras efectivas de visualizar estos patrones.

Esta postura se aleja radicalmente de la anterior, centrada mas en el proceso psicológico, puesto que para estos autores las representaciones se deben percibir con los ojos, esto es, deben ser externas.

Diversos ejemplos en los que la visualización puede llevar a engaños (dibujos incorrectos o engañosos, generalizaciones, etc.) hicieron dudar a la comunidad científica de la fiabilidad de los argumentos y demostraciones visuales, provocando desconfianza hacia lo visual e instaurando un modelo formalista que empezó en la Universidad pero caló rápidamente a Secundaria (Blanca Souto, 2013). A finales del siglo XX comenzó a haber indicios de cambio hacia un resurgir de la visualización en la actividad matemática. Desde el punto de vista didáctico, Stylianou (2001) señala que en la Universidad existe una aceptación y reconocimiento de los métodos visuales, aunque su tratamiento es una muy superficial.

2.2.3. PERSPECTIVA COMUNICATIVA

La visualización puede considerarse una tarea del proceso comunicativo, porque a través de ella se transforman datos abstractos y fenómenos

complejos en mensajes visibles. Por lo tanto, supone una nueva vía de descubrimiento de conocimiento.

2.2.3.1. Visualizar es visibilizar, intuir lo abstracto

Según diversos autores la visualización está estrechamente relacionada con la adquisición de la intuición de lo abstracto. Miguel de Guzmán (1996, p.17) afirma que: “los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndoles adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre objetos”.

Ya hemos visto en anteriores definiciones algunos de los mecanismos a través de los que la visualización puede favorecer esta intuición, como son el uso de diagramas, la coordinación de registros o el desarrollo de imágenes visuales. Aparecen ahora otro tipo de mecanismos: la intuición, el uso de metáforas y ejemplos y la conversión de información en imágenes.

2.3. DIMENSIONES DE LA VISUALIZACIÓN

“Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools” (Arcavi, 2003, p. 217).

Esta definición recoge tres dimensiones de la visualización: la visualización como producto, la visualización como proceso y la visualización como habilidad. Así, se pueden distinguir tres elementos básicos en todas las concepciones de la visualización:

- Los productos: las imágenes mentales.
- Los procesos para manipular esas imágenes.
- Las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes.

2.3.1. PRODUCTOS: IMÁGENES MENTALES

En relación a la visualización como producto han aparecido diversidad de términos: diagramas, imágenes visuales, gráficos, dibujos, ilustraciones, esquemas, representaciones icónicas y visuales, imágenes mentales, gestos, movimientos, figuras geométricas, animaciones, applets interactivos...

Para referirnos a todos ellos de manera general utilizaremos el término: imagen mental: *“Una imagen mental será: cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos espaciales o visuales”* (Gutiérrez, 1996).

En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

- Imágenes concretas pictóricas: se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.
- Imágenes de fórmulas: consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.
- Imágenes de patrones: son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.
- Imágenes cinéticas: se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas cumple un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etcétera.
- Imágenes dinámicas: son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

2.3.2. PROCESOS PARA MANIPULAR IMÁGENES MENTALES

Llamaremos proceso de visualización a una *“acción física o mental en la cual las imágenes mentales están involucradas”* (Gutiérrez, 1996).

De acuerdo con la distinción que hace Bishop, las imágenes mentales son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, y esta manipulación se realiza mediante dos tipos de procesos: Interpretación visual

de la información (VP) para crear imágenes mentales, e interpretación de imágenes mentales para generar información (IFI) (Bishop, 1983):

- Procesamiento visual (VP): es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.
- Interpretación de información figurativa (IFI): es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

2.3.3. HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN

El tercer componente diferenciado de la visualización son las habilidades de visualización utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Aunque Bishop no diferencia claramente entre procesos y habilidades, otros investigadores sí han hecho esa distinción.

Una relación bastante detallada de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo es el modelo unificado propuesto por Gutiérrez (1996), obtenida uniendo las propuestas de diversos autores (Del Grande, 1987; McGee, 1979):

- Coordinación motriz de los ojos: es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- Identificación visual: es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.
- Conservación de la percepción: es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo, porque haya girado o se haya ocultado.
- Reconocimiento de posiciones en el espacio: es la habilidad del observador para relacionar su propia posición (o la de un objeto que actúa como punto de referencia) con la de otro objeto.
- Reconocimiento de las relaciones espaciales: es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre

diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etcétera.

- Discriminación visual: es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
- Memoria visual: es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

En estas clasificaciones podemos observar algunas capacidades que hacen referencia a habilidades generales y otras que son más específicas para su utilización en contextos matemáticos, en particular para el campo de la geometría. Se pueden definir otras habilidades interesantes pero casi siempre se trata de combinaciones o de interpretaciones de las habilidades indicadas antes.

2.4. EVALUACIÓN DE LA VISUALIZACIÓN

Para analizar de forma operativa el tema de la visualización en el contexto de la geometría espacial, existen multitud de tareas presentadas en diferentes investigaciones en el campo de la Educación Matemática y de la Psicología.

Estas investigaciones presentan diferentes tipos de actividades para medir habilidades de visualización y orientación espacial, y a pesar de ser numerosas, pocas presentan una clasificación detallada de las tareas y de las habilidades que se pretenden medir con ellas.

En las últimas décadas, investigadores y educadores han desarrollado diversos test para evaluar las habilidades espaciales de los estudiantes. En los 70, dentro del campo de la psicología, la visualización espacial se estudió en profundidad desde la perspectiva de la percepción y la cognición. Shepard and Metzler (1971) diseñaron un test para investigar el tiempo de reacción para la visualización de objetos tridimensionales rotados. Más tarde, Vandenberg and Kuse (1978) desarrollaron un test, basado en el modelo de Shepard and conocido como Mental Rotation test (MRT). Ekstrom, French, and Harman (1976) también incluyeron la visualización especial en una serie de test de

cognición, que fueron incluidos en el catálogo de test estandarizados del Educational Testing Service (ETS). Profesores de ingeniería y tecnología también investigaron la relación entre habilidades de visualización espacial y habilidades de diseño técnico. Entre ellos, Guay (1976) desarrollo el Purdue Spatial Visualization Test (PSVT) con tres categorías: desarrollos, rotaciones y vistas isométricas; el apartado de rotaciones fue posteriormente ampliado con otro test de 30 preguntas llamado el Purdue Spatial Visualization Test - Visualization of Rotations (PSVT-R).

3. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La adquisición de habilidades de visualización y representación espacial es un objetivo incluido en los currículos de los distintos ciclos de educación, por sus aplicaciones prácticas e implicaciones en el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

En esta investigación trataremos de medir las habilidades de visualización iniciales que presentan los alumnos de una clase de 3º de ESO de un centro urbano de Santander. Tendremos que evaluar los procesos y capacidades de los alumnos para realizar ciertas tareas que requieren ver o imaginar mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionarlos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos. Durante la impartición de la Unidad Didáctica de Geometría, trataremos de desarrollar estas habilidades por medio de la realización de cierto tipo de actividades. Cuando esta Unidad llegue a su término, se medirán de nuevo las habilidades de visualización y se analizará el resultado.

Por lo tanto, los objetivos de esta investigación son dos:

- Explorar las habilidades de visualización que poseen los alumnos de secundaria sin haber sido éstas trabajadas explícitamente.
- Averiguar si con cierto trabajo didáctico se mejoran o no dichas habilidades.

4. MARCO TEÓRICO

Como hemos señalado anteriormente, en las investigaciones analizadas en el campo de la Educación Matemática se proponen diferentes definiciones de visualización, tanto en el contexto de la geometría como en otras disciplinas. Algunas de estas definiciones pueden incluso resultar de difícil aplicación directa en la enseñanza.

En esta investigación vamos a adoptar la definición de visualización en matemáticas aportada por Gutiérrez (1996): el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos espaciales o visuales, ambos desarrollados física o mentalmente para resolver problemas o comprobar propiedades, basándonos en la descripción del término.

Como hemos visto en la sección 2.3, visualizar un objeto geométrico incluye una variedad de habilidades: los estudiantes han de ser capaces de reflexionar sobre el objeto y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes o su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones. En este trabajo, vamos a tratar de medir tres de las habilidades de visualización que recogen estos aspectos. Estas habilidades se han escogido porque corresponden bien al nivel de la geometría de 3º ESO, y porque su descripción parece más evidente que la de otras habilidades presentes en las clasificaciones.

Las habilidades sujetas a medición en esta investigación serán:

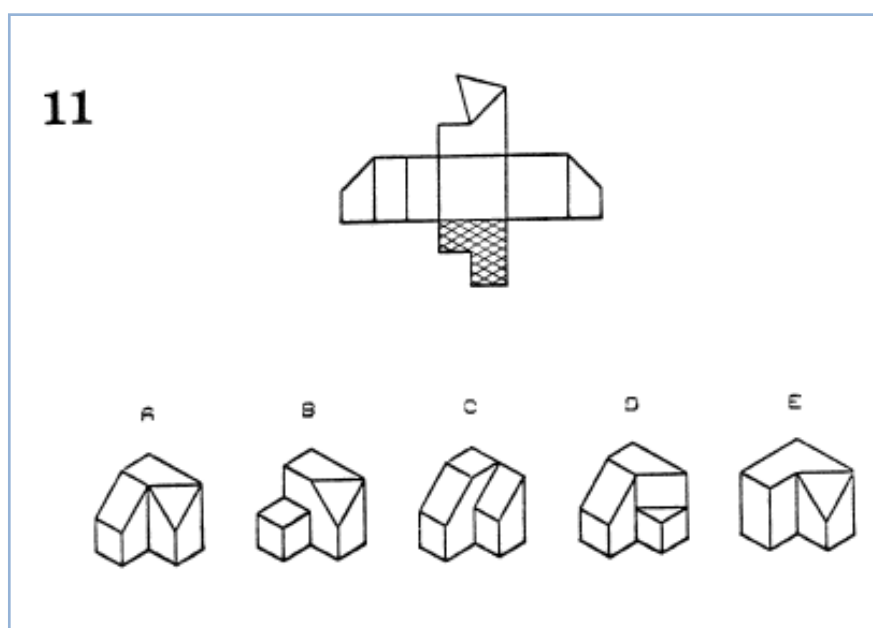
- Rotación: Rotar el objeto o partes del objeto. En la resolución tareas de rotación que miden esta habilidad se tiene que leer una representación plana de un cuerpo tridimensional y se ponen en juego los siguientes conocimientos: eje de rotación, rotación de un cuerpo alrededor de un eje y las propiedades derivadas de la rotación como isometría. Se pueden formular diferentes tareas para medir la habilidad de rotación de un individuo variando la estructura del cuerpo y su tipo de representación o combinando varios ejes de rotación
- Desarrollos: Plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado) o desplegar el objeto para obtener

uno de sus desarrollos. Para manifestar esta habilidad es necesario conocer qué es un desarrollo y las propiedades que conserva con respecto al objeto geométrico, por ejemplo, el paralelismo de las aristas de las caras, la forma y el tamaño de las caras. Una de las dificultades para resolver tareas de desarrollo proviene del hecho que, a diferencia de las proyecciones, en estas representaciones se produce una duplicidad de algunos elementos del cuerpo tridimensional. Por ejemplo, una arista del cubo puede ser representada por dos aristas en el desarrollo

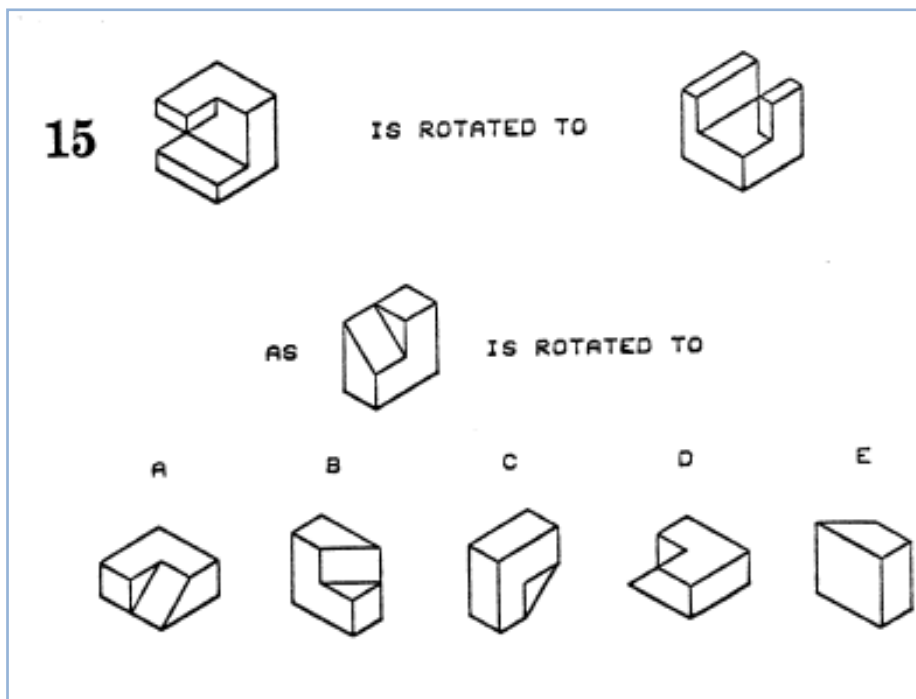
- Vistas: Cambiar mentalmente de perspectiva, es decir, imaginarse en otra posición con respecto al objeto. La manifestación de esta habilidad implica leer y reconocer una vista isométrica y viceversa, convertir una imagen mental en una vista isométrica.

Para la medida de estas tres habilidades utilizaremos el Purdue Spatial Visualization Test PSTV que consiste en 36 cuestiones divididas equitativamente en tres categorías: desarrollos, rotaciones y vistas isométricas, desarrollado por Guay (1976). Branoff (2000, p. 14) considera que este test, junto con el Mental Rotations Test (Shepard y Metzler, 1971) son los test que mejor miden las habilidades de visualización.

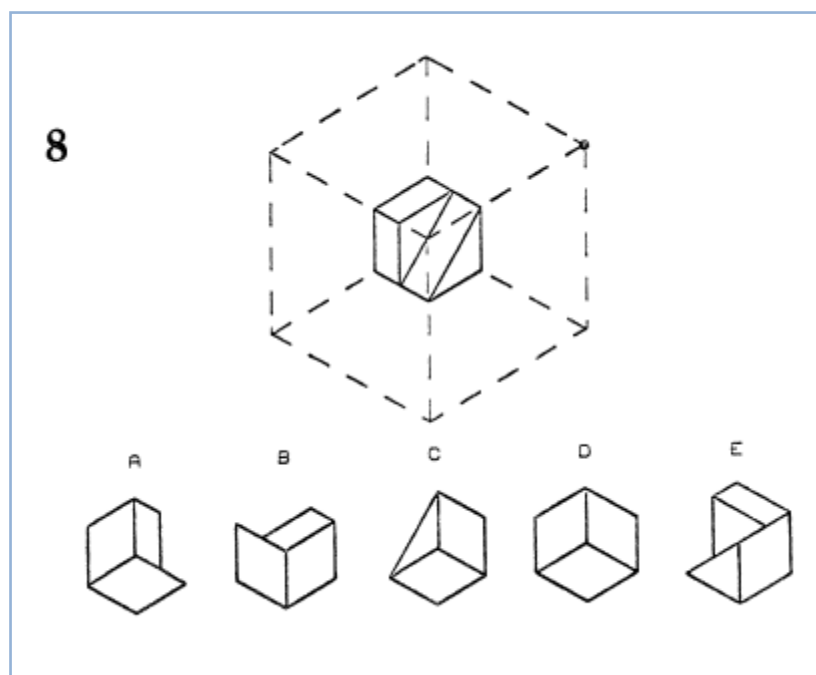
A continuación veremos tres ejemplos de los tres ítems medidos:



- **Desarrollos:** están diseñados para medir cómo los sujetos visualizan el plegado de los desarrollos para convertirlos en objetos en tres dimensiones. Muestran al sujeto el desarrollo plano de una figura espacial con la base rayada y cinco opciones para determinar qué figura tiene el desarrollo plano mostrado.



- **Rotación:** evalúan la visualización de la rotación de un objeto en tres dimensiones. Muestran al sujeto un objeto y su correspondiente rotado; luego se le propone un segundo objeto y cinco opciones para determinar cuál de ellas corresponde al objeto primitivo al que se le ha efectuado la misma rotación que el primer objeto.



- **Vistas isométricas:** pretenden medir cómo los sujetos visualizan objetos tridimensionales desde diversos puntos de vista. Muestran al sujeto un cubo de cristal con una figura dentro, y un punto en uno de los vértices que determina el punto de vista desde el que la figura debe ser observada. Se proponen cinco opciones para determinar cómo es la figura observada desde el punto de vista señalado.

5. METODOLOGÍA

5.1. MUESTRA

La muestra está formada por 19 alumnos de 3º de la ESO de un instituto urbano de Santander. Es un grupo frecuentemente tratado en reuniones de tutores y juntas de evaluación por sus problemas de disciplina. Todos los profesores excepto dos les atribuyen mal comportamiento y falta de atención generalizada. La jefatura de estudios argumenta que, a pesar de las frecuentes quejas, es un grupo al que apenas se le ponen partes, con lo que no se cuenta con el respaldo suficiente para tomar otro tipo de medidas. Preguntada al respecto, la orientadora del centro manifiesta que deberían establecerse normas claras de comportamiento que de no cumplirse tuvieran consecuencias inmediatas, pero que este último aspecto es el que no se lleva a cabo.

5.2. CONTEXTO

La experiencia se lleva a cabo durante la impartición de la Unidad Didáctica de: Figuras en el espacio, del área de geometría.

Dicha Unidad ha sido impartida por la autora de la presente investigación, es decir, una estudiante en prácticas, mientras que la profesora habitual del grupo ha supervisado las clases y ayudado en momentos puntuales durante la realización de los ejercicios propuestos en el aula.

La Unidad, que no está directamente relacionada con la visualización, se ha realizado durante siete sesiones de 50 minutos, incluyendo una sesión de evaluación y otra de huelga de estudiantes, con lo que la impartición de la Unidad para algunos alumnos ha supuesto solamente cinco sesiones. Las clases se han desarrollado combinando exposiciones en grupo con trabajo individual, en una dinámica similar a la adoptada por la profesora habitual.

La incidencia que ha podido tener el desarrollo de la Unidad Didáctica en el desarrollo de habilidades de visualización es mínima, dado que no se trabajan específicamente ninguna de estas habilidades. Se ha optado por una enseñanza de la geometría más tradicional y ceñida al currículo debido a las restricciones temporales. Por tanto, la única incidencia en el desarrollo de habilidades son las actividades específicas incluidas con ese objetivo.

La metodología seguida es la siguiente: se han realizado dos sesiones de recogida de datos, al inicio y al final de la Unidad, para medir las habilidades de visualización iniciales de los alumnos. Durante el desarrollo de la misma se han realizado actividades con el fin de proporcionar a los estudiantes técnicas para la mejora de las habilidades de visualización que posean.

5.3. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS Y FORMA DE TRABAJO EN EL AULA

TEST MOMENTO INICIAL:

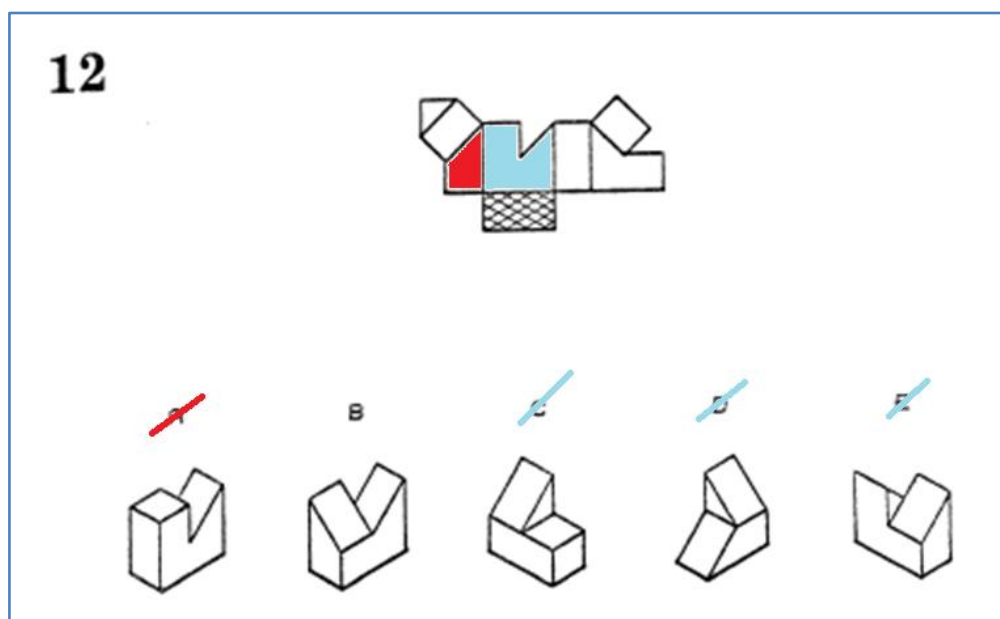
El test consta de seis ejercicios pertenecientes al Purdue Spatial Visualizations Test (ver test en Anexo 1), dos para cada una de las habilidades que se pretenden medir: rotación, desarrollos y vistas isométricas.

DESARROLLO DE LA UNIDAD:

Como ya se ha comentado, la impartición de la unidad didáctica se realiza de manera tradicional, pero al final de cada sesión se dedica un tiempo a intentar desarrollar las habilidades de visualización objeto de medida, proporcionándoles a los estudiantes ciertas técnicas que describimos a continuación:

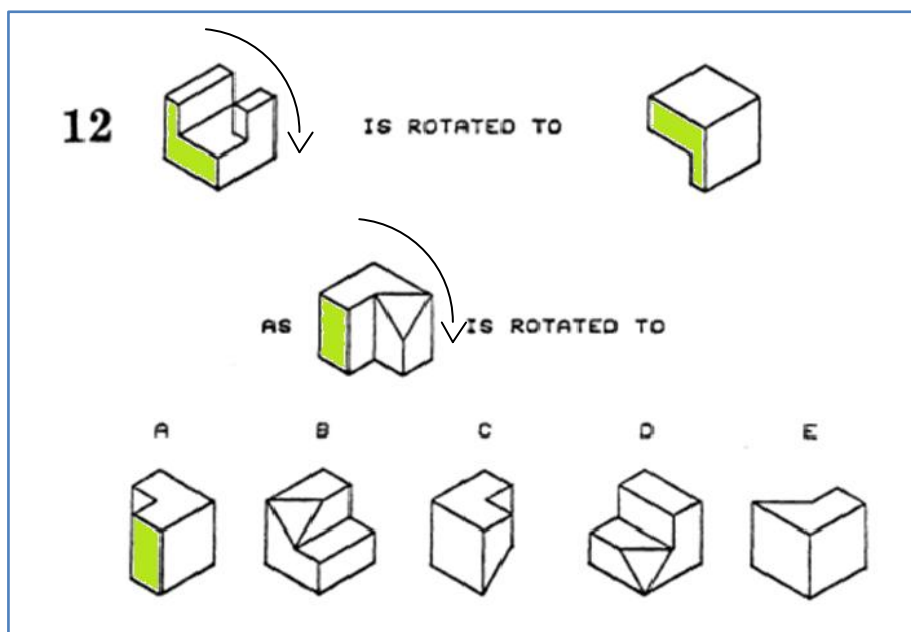
- Para trabajar la habilidad relacionada con los desarrollos planos, se les sugiere a los alumnos que elijan una cara, lo más compleja posible, del desarrollo proporcionado. A continuación, que busquen en las cinco opciones proporcionadas la cara elegida, descartando aquellas en las que no aparezca. Seguidamente se les indica que se fijen en alguna cara adyacente a la elegida en primer lugar contigua a la primera, descartando las opciones en las que la segunda cara no aparezca o no sea contigua a la primera (ver Figura 5.3.1).

Figura 5.3.1. Ejemplo explicativo de técnica para visualizar desarrollos planos



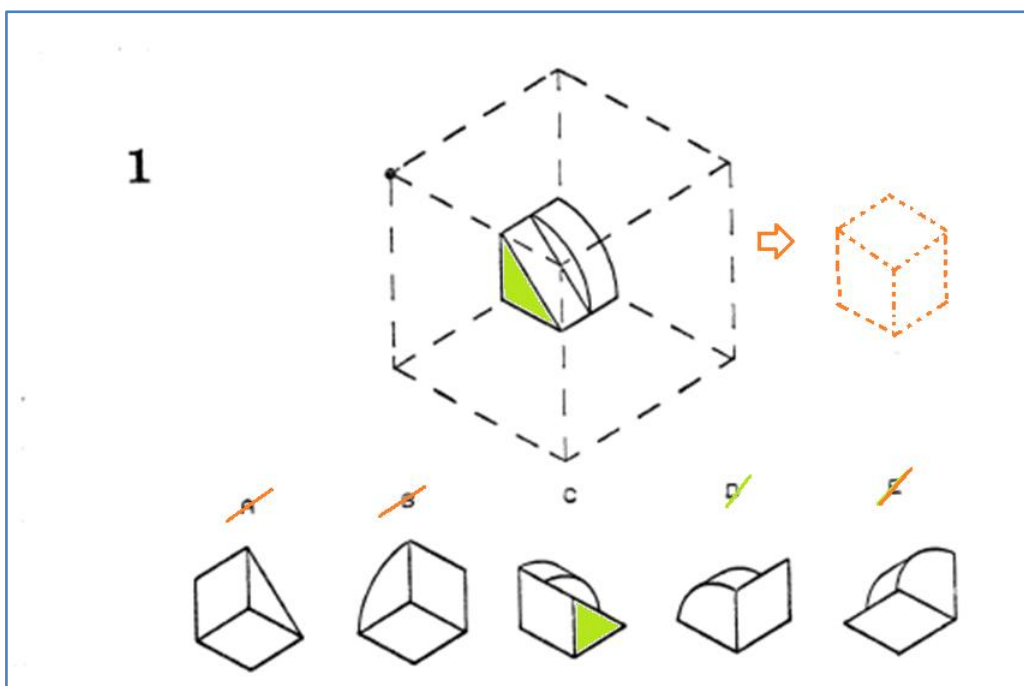
○ Para trabajar la habilidad de rotación, se les sugiere a los alumnos que coloreen la figura que forme una de las caras visibles en el segundo objeto, aquel que hay que averiguar cómo rota. A continuación, deben colorear la figura que esté en la cara elegida en el primer objeto, y ver en qué cara se coloca tras la rotación. Entre las opciones propuestas, se busca la figura elegida en el segundo objeto colocada en la cara en la que se haya deducido que queda tras la rotación (ver Figura 5.3.2).

Figura 5.3.2. Ejemplo explicativo de técnica para visualizar rotaciones



- Para trabajar la habilidad relacionada con las vistas, se les indica a los alumnos que dibujen cómo se vería, desde el punto de vista indicado, un cubo situado en el lugar del objeto propuesto. A continuación, deben descartar entre las opciones propuestas, aquellas que no estén en esa posición. En segundo lugar, entre las opciones restantes, se les sugiere que busquen alguna de las figuras planas que están seguros verían desde ese punto de vista (ver Figura 5.3.3).

Figura 5.3.3. Ejemplo explicativo de técnica para visualizar vistas



A continuación se les proporciona a los alumnos un par de ejercicios pertenecientes al Purdue Spatial Visualization Test para que los hagan en casa y los entreguen en la próxima sesión. En ésta se corrigen los ejercicios propuestos para ese día.

TEST MOMENTO FINAL:

Después de finalizada la unidad didáctica, incluida la evaluación, los alumnos vuelven a realizar el test inicial.

6. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

En este apartado se incluirán los resultados obtenidos junto a su interpretación desde un punto de vista cualitativo. El realizado es un estudio con ciertas limitaciones que pueden estar teniendo gran influencia en los resultados, con lo que consideramos que no tiene sentido hacer una correlación estadística formal.

6.1. RESULTADOS GLOBALES

Los resultados obtenidos tras la realización de los test de visualización se incluyen en la Tabla 6.1.1. Cada ítem se ha evaluado en forma dicotómica, 1 o 0. La tabla detalla los aciertos (1) y los fallos (0) obtenidos por cada alumno en cada uno de los seis ejercicios que conforman el test, señalando el resultado obtenido en el momento inicial (TMI) y en el final (TMF).

Tabla 6.1.1: Resultados obtenidos en test de visualización.

	DESARROLLOS				ROTACIÓN				VISTAS			
	Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2	
	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF
Alumno 1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
Alumno 2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Alumno 3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Alumno 4	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
Alumno 5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Alumno 6	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
Alumno 7	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
Alumno 8	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
Alumno 9	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Alumno 10	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
Alumno 11	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
Alumno 12	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
Alumno 13	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Alumno 14	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
Alumno 15	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
Alumno 16	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Alumno 17	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Alumno 18	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
Alumno 19	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1

*TMI= Test momento inicial TMF= Test momento final

La Tabla 6.1.2 resume los resultados obtenidos por alumno, indicando el número de aciertos totales en el test realizado al inicio y en el realizado al final. La última columna indica la variación que se ha producido entre inicio y final: los valores positivos, en verde, indican que se ha producido una mejoría, y los negativos, en rojo, indican que se ha producido un empeoramiento. Por último, se incluye el porcentaje global de aciertos del grupo de alumnos en el momento inicial y final: 53.5% y 57.9% respectivamente, lo que supone un incremento del 4.4%.

Tabla 6.1.2: Resumen global de resultados

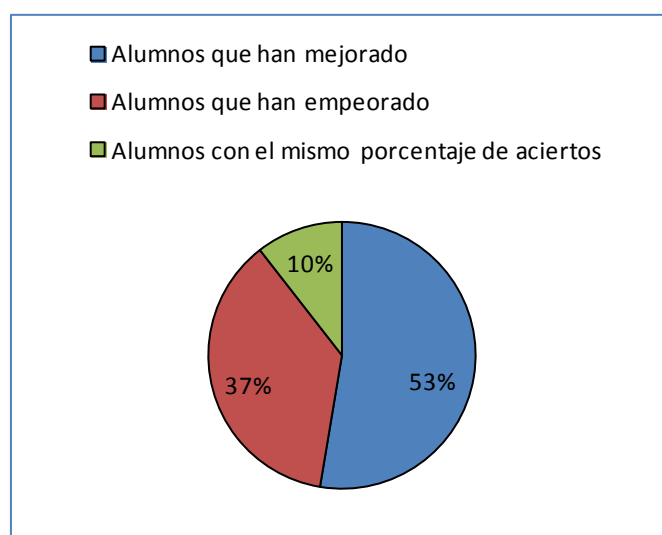
	Total aciertos TMI	Total aciertos TMF	Mejora
Alumno 1	1	2	1
Alumno 2	1	1	0
Alumno 3	1	1	0
Alumno 4	2	4	2
Alumno 5	2	0	-2
Alumno 6	2	4	2
Alumno 7	3	2	-1
Alumno 8	3	4	1
Alumno 9	3	2	-1
Alumno 10	4	3	-1
Alumno 11	4	3	-1
Alumno 12	4	6	2
Alumno 13	4	5	1
Alumno 14	4	5	1
Alumno 15	4	5	1
Alumno 16	4	5	1
Alumno 17	5	4	-1
Alumno 18	5	6	1
Alumno 19	5	4	-1
TOTAL	61	66	5
PORCENTAJE DE ACIERTOS	53,5%	57,9%	4,4%

Esto pone de manifiesto que el incremento neto de aciertos ha sido de 5, lo que supone prácticamente el 5% de mejora global que se ha señalado con anterioridad. Este porcentaje de mejora es muy pequeño, lo que a priori parece

indicar que las técnicas de desarrollo de habilidades de visualización no han conseguido el resultado deseado.

Los resultados obtenidos en la Tabla 6.1.2 se ilustran en la Figura 6.1.1, en la que se observa que aproximadamente la mitad de los alumnos han mejorado sus resultados mientras que la otra mitad o han empeorado o no han manifestado variación alguna. La ligera mejoría experimentada por el 50% de la clase se ve contrarrestada con el empeoramiento o ausencia de resultado manifestado por la otra mitad.

Figura 6.1.1: Resumen global



6.2. RESULTADOS POR EJERCICIO

Tras este análisis global, incluimos a continuación el estudio de los resultados obtenidos por bloques de ejercicios, según la habilidad medida en cada uno: desarrollos, rotaciones o vistas isométricas. La Tabla 6.2.1 resume los resultados obtenidos en cada ejercicio por el total de los alumnos, resultados que se ilustran en la Figura 6.2.1.

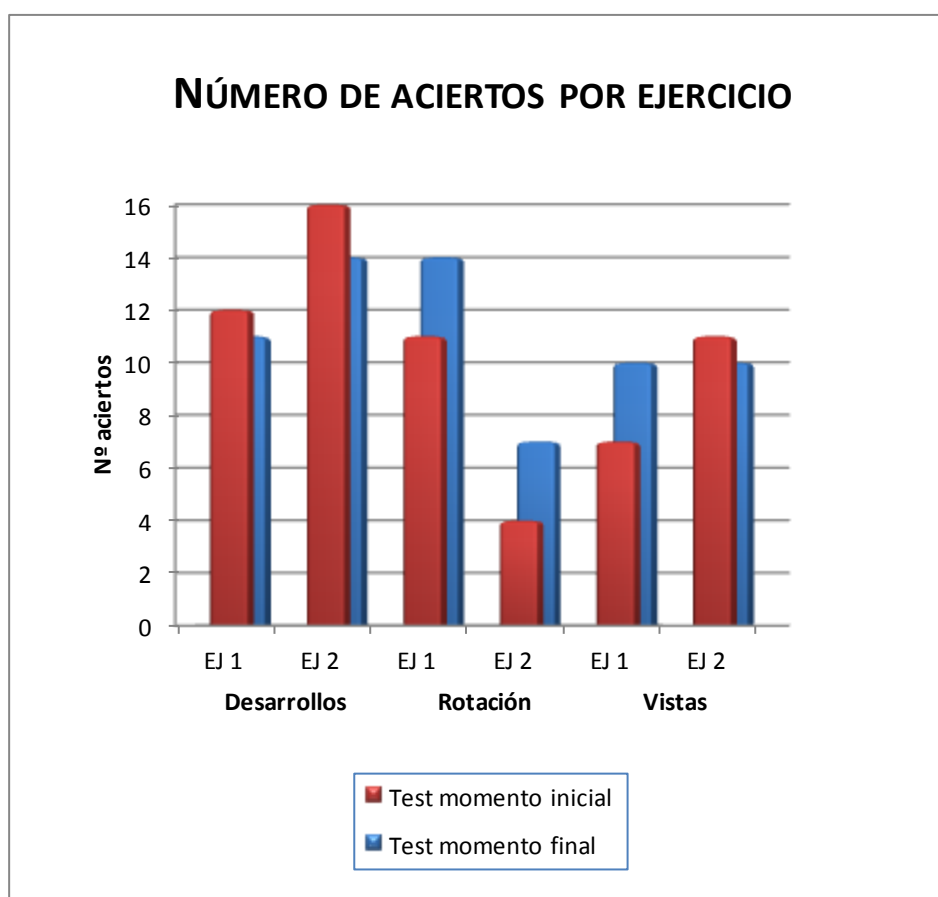
Tabla 6.2.1: Resumen de resultados por bloques.

Nº aciertos desarrollos				Nº aciertos rotación				Nº aciertos vistas			
Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2	
TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF
12	11	16	14	11	14	4	7	7	10	11	10

*TMI= Test momento inicial TMF= Test momento final

La Figura 6.2.1 es un gráfico de barras que ilustra la mejoría o empeoramiento por ejercicio.

Figura 6.2.1: Resumen de resultados por bloques.

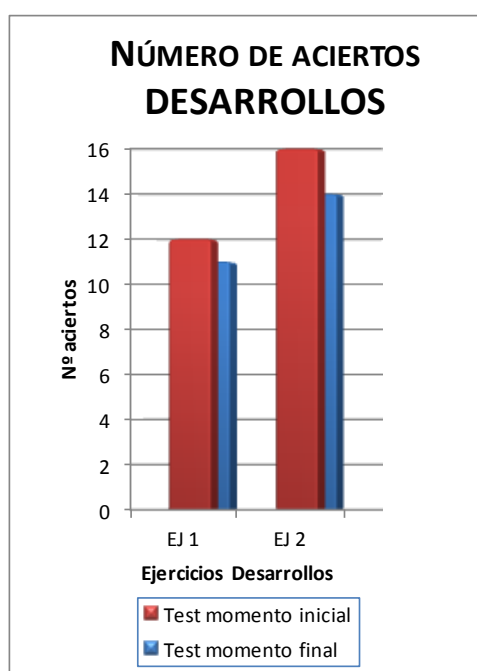


De su observación se deduce que:

- Los ejercicios de desarrollos planos han sido los que les han resultado más sencillos, seguidos de los de vistas y por último de los de rotación, según lo que indican los resultados del test inicial.
- Hay una notable diferencia entre la dificultad de algunos ejercicios: mientras que el Ejercicio 2 ha sido resuelto más del 60% del grupo en el momento inicial, el Ejercicio 4 sólo por un 20%.
- En tres de los ejercicios se ha producido una mejoría mientras que en otros tres ha habido empeoramiento. Aunque la mejoría neta es mayor que el empeoramiento, la diferencia es poco significativa, como ya habíamos observado con anterioridad. Esto puede indicar que, aunque parte de los empeoramientos pueden ser explicados por la intervención del azar, la mejora, cuando se ha producido, no ha sido lo suficientemente relevante para conseguir un resultado positivo notable.

A continuación efectuaremos un análisis individual de cada uno de los bloques según la habilidad de visualización que se pretenda medir en cada uno, a través de las Figuras 6.2.2, 6.2.3 y 6.2.4.

Figura 6.2.2: Resumen de resultados (desarrollos)

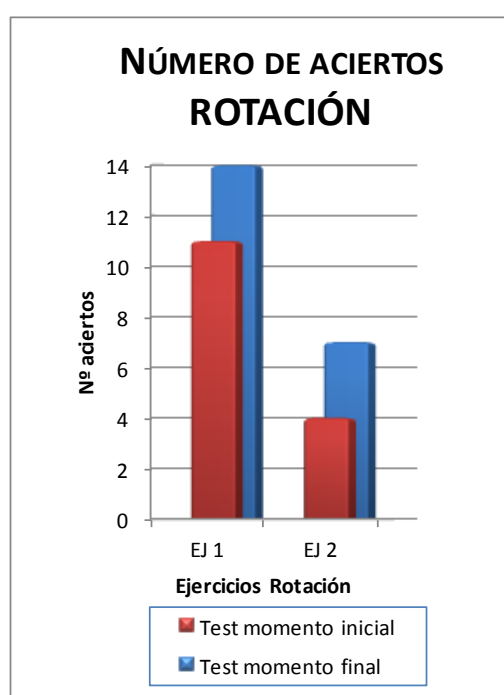


Los desarrollos planos han sido el bloque de ejercicios en el que los alumnos han demostrado mayor habilidad, siendo el segundo ejercicio acertado por el 85% de la clase. En este tipo de ejercicios no se observa ninguna mejora, es más, el número de aciertos final es inferior al inicial en ambos ejercicios.

Este hecho puede ser explicado por la intervención del azar: un porcentaje de alumnos eligieron la opción correcta al azar en el momento inicial y otra distinta en el final. Este argumento puede verse reforzado porque todos aquellos que han empeorado en este bloque son alumnos que han experimentado un empeoramiento global en el test.

En cualquier caso, aunque no se puede atribuir este empeoramiento a las técnicas propuestas, parece claro que éstas no han ayudado a los alumnos a mejorar su habilidad de visualización en cuanto a los desarrollos se refiere.

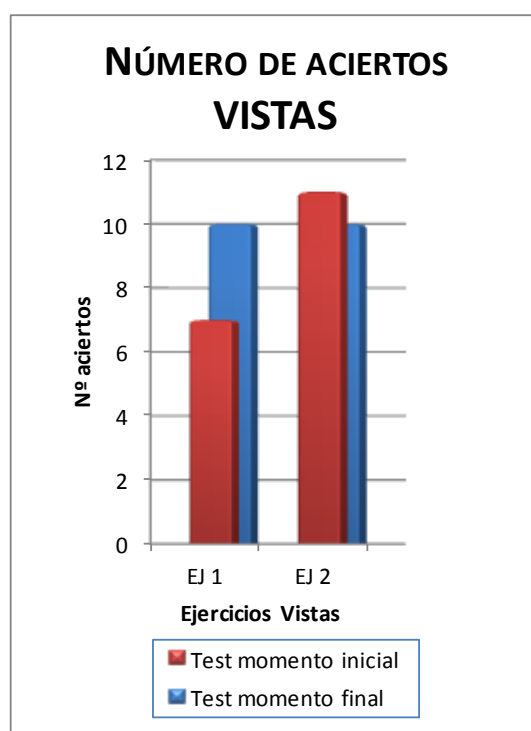
Figura 6.2.3: Resumen de resultados (rotación)



Los ejercicios de rotaciones han sido aquellos en los que más dificultades han manifestado los alumnos, siendo el segundo de ellos acertado por sólo un 20% de ellos. En cambio, han sido en los que más mejoría se ha manifestado, incrementándose en 3 aciertos el total de cada ejercicio.

Por tanto, parece que en este caso las técnicas aportadas han tenido cierta influencia en los resultados, hipótesis que se ve apoyada por el hecho de que algunos estudiantes colorearon las caras de los sólidos, como se proponía en la técnica impartida para este tipo de ejercicios.

Figura 6.2.4: Resumen de resultados (vistas)



Los ejercicios de vistas han sido acertados por prácticamente la mitad de los alumnos, lo que indica que era un ejercicio asequible. En el primer ejercicio se aprecia cierta mejoría, incrementándose en tres los aciertos desde el momento inicial al final. Por el contrario, en el segundo ejercicio se aprecia en general un empeoramiento: aunque han habido tres alumnos que lo han acertado al final no habiéndolo hecho al inicio, han sido cuatro en los que se ha dado la situación inversa, con lo que globalmente el resultado es negativo.

Aunque el empeoramiento en este segundo caso puede también haberse visto influenciado por el azar, en líneas generales se puede concluir que la influencia de las técnicas para el desarrollo de la habilidad de visualización relacionada con las vistas isométricas ha sido moderada.

En los apartados siguientes se harán dos agrupamientos de alumnos para estudiarlos de manera independiente.

6.3. GRUPO DE MAYOR ATENCIÓN (GMA)

Este grupo lo integran doce alumnos de los 19 totales, es decir, se ha prescindido de siete alumnos con peor comportamiento y mayor falta de atención, según lo que se ha observado durante el transcurso de las clases. Se ha seleccionado este grupo porque creemos que puede existir cierta relación entre ambas variables (grado de atención y resultados del test), puesto que los malos resultados presentados por algunos alumnos pueden ser debidos a falta de interés y atención.

La Tabla 6.3.1 resume los resultados obtenidos en cada ejercicio por el grupo de alumnos llamado GMA, resultados que se ilustran en la Figura 6.3.1.

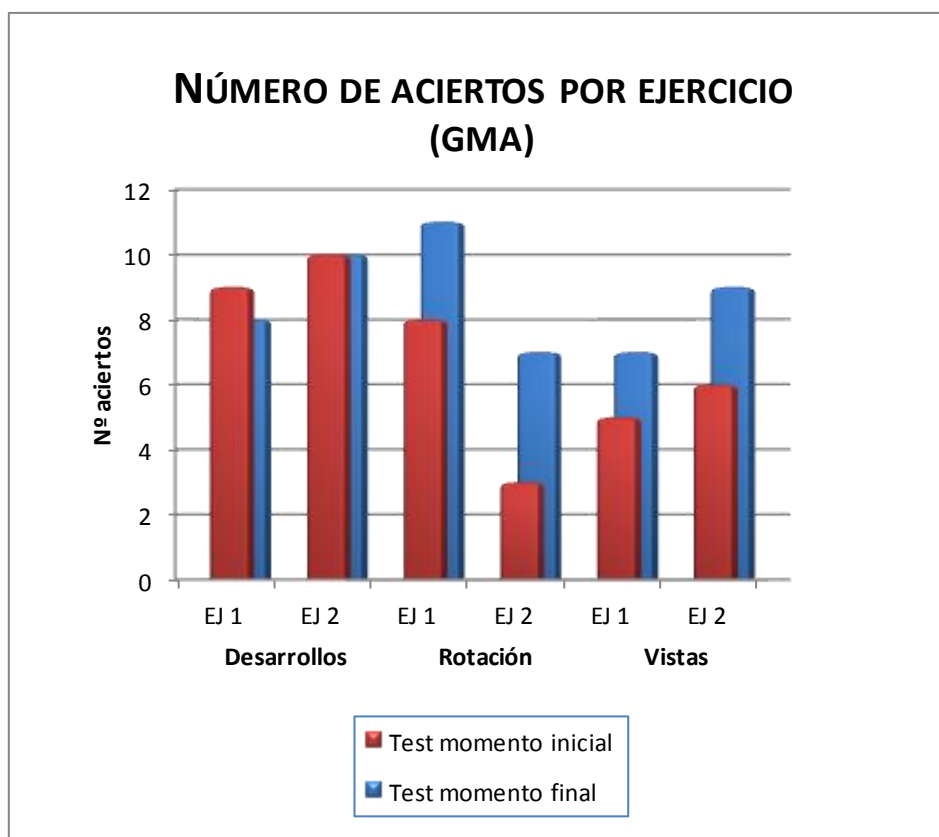
Tabla 6.3.1: Resumen de resultados por bloques (GMA).

GRUPO DE MAYOR ATENCIÓN											
Nº aciertos desarrollos				Nº aciertos rotación				Nº aciertos vistas			
Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2	
TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF
9	8	10	10	8	11	3	7	5	7	6	9

*TMI= Test momento inicial TMF= Test momento final

La Figura 6.3.1 es un gráfico de barras que ilustra la mejoría o empeoramiento por ejercicio:

Figura 6.3.1: Resumen de resultados por bloques (GMA).



De su observación se deduce que:

- En las tres categorías se obtienen mejores resultados que los del grupo total, con lo que sí que parece haber influido esta falta de atención en los resultados de los test de visualización. A pesar de todo, la diferencia no es demasiado notable, con lo que también se deduce que el tipo de instrucción no ha generado una mejora destacada.
- Los resultados de los ejercicios de desarrollos planos en este grupo no guardan diferencias apreciables con los del grupo en general, lo que confirma la hipótesis planteada en el apartado anterior sobre la escasa influencia de las técnicas de desarrollo de habilidades para la realización de este tipo de ejercicios.
- La diferencia más apreciable con los resultados genéricos se da en los ejercicios 3, 4 y 6, donde la mejora es mayor que en este grupo inicial. El empeoramiento de algunos alumnos, al no estar incluidos en el grupo

estudiado, no contrarresta la mejora de otros estudiantes, con lo que los resultados del grupo GMA son mejores. En particular, el ejercicio final de vistas isométricas, ha pasado de sufrir un empeoramiento cuando se consideraba el grupo total a mejorar moderadamente cuando se considera sólo el grupo GMA.

6.4. GRUPO DE MEJOR RENDIMIENTO (GMR)

Este grupo lo integran ocho alumnos de los 19 totales, es decir, se ha prescindido de once alumnos con peores calificaciones en el área de geometría. Se ha seleccionado este grupo porque aventuramos que puede existir cierta relación entre ambos resultados, dado que los alumnos con mejores calificaciones en la Unidad Didáctica impartida durante el transcurso de esta experiencia, pueden ser también los que más han atendido y se han esforzado durante la explicación de las técnicas de visualización y la realización de ejercicios propuestos para tal fin.

La Tabla 6.4.1, de manera similar a la 7.2, resume los resultados obtenidos por alumno, indicando el número de aciertos totales en el test realizado al inicio y en el realizado al final. La última columna indica la variación que se ha producido entre inicio y final. Además, se recoge la nota de la evaluación de la Unidad Didáctica de geometría. Por último, se incluye el porcentaje global de aciertos del grupo GMR en el momento inicial y final: 56% y 73% respectivamente, lo que supone un incremento del 17%.

Tabla 6.4.1: Resumen global de resultados

	CALIFICACIÓN GEOMETRÍA	Total aciertos TMI	Total aciertos TMF	Mejora	
Alumno 18	8	5	6	1	GMR
Alumno 3	6,75	1	1	0	
Alumno 15	6,25	4	5	1	
Alumno 4	5,25	2	4	2	
Alumno 12	4,25	4	6	2	
Alumno 19	4	5	4	-1	
Alumno 16	3,5	4	5	1	
Alumno 6	3,5	2	4	2	
Alumno 9	3,25	3	2	-1	
Alumno 11	3,25	4	3	-1	
Alumno 5	3	2	0	-2	
Alumno 1	2,75	1	2	1	
Alumno 7	2,75	3	2	-1	
Alumno 10	2,6	4	3	-1	
Alumno 13	1,5	4	5	1	
Alumno 17	1,5	5	4	-1	
Alumno 14	1,25	4	5	1	
Alumno 2	0,75	1	1	0	
Alumno 8	0,25	3	4	1	
	TOTAL (GMR)	27	35	8	
	PORCENTAJE DE ACIERTOS	56%	73%	17%	

Esto pone de manifiesto que el incremento neto de aciertos ha sido de 8, lo que supone prácticamente un 20%. Cada alumno de este grupo ha tenido una media de mejora de un acierto de un total de seis posibles. Este porcentaje de mejora es significativamente superior al 4% del grupo general, lo que parece indicar que efectivamente la falta de esfuerzo y atención manifestada por un grupo de alumnos ha tenido influencia en el resultado final.

Prácticamente todos los alumnos del GMR han mejorado sus resultados entre el momento inicial y el final; sólo se ha producido un empeoramiento y una ausencia de resultado.

La Tabla 6.4.2 resume los resultados obtenidos en cada ejercicio por el grupo de alumnos llamado GMR, resultados que se ilustran en la Figura 6.4.1.

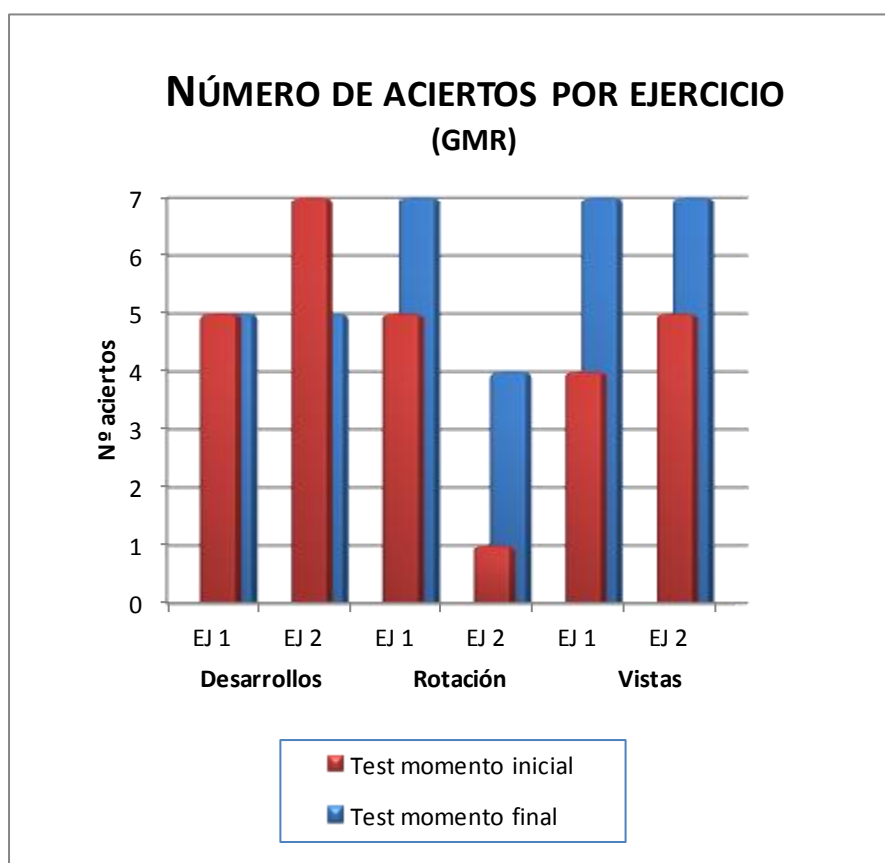
Tabla 6.4.2: Resumen de resultados por bloques (GMR).

GRUPO DE MEJOR RENDIMIENTO											
Nº aciertos desarrollos				Nº aciertos rotación				Nº aciertos vistas			
Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2		Ej 1		Ej 2	
TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF	TMI	TMF
5	5	7	5	5	7	1	4	4	7	5	7

*TMI= Test momento inicial TMF= Test momento final

La Figura 6.4.1 es un gráfico de barras que ilustra la mejoría o empeoramiento por ejercicio:

Figura 6.4.1: Resumen de resultados por bloques (GMR).



De su observación se deduce que:

- En las tres categorías se obtienen mejores resultados que los del grupo total y que los del grupo GMA, con lo que de nuevo, podemos aventurar

que la falta de atención y de esfuerzo por parte de algunos alumnos ha influido en los resultados de los test de visualización. La diferencia entre el test inicial y el final es más acentuada que en el grupo total y en el subgrupo estudiado.

- Los resultados de los ejercicios de desarrollos planos en este grupo no guardan diferencias apreciables con los del grupo en general, de nuevo el resultado obtenido es igual o incluso peor que el inicial, hecho que reafirma la ausencia de impartido de las técnicas impartidas aplicadas a este tipo de ejercicios.
- En los ejercicios de rotación se aprecia una mejora notable en el grupo GMR. Los seis aciertos iniciales se transforman en once al final, lo que supone una mejora del 45%, con lo que podríamos afirmar que las técnicas de desarrollo de habilidades proporcionadas en este bloque han tenido cierto impacto.
- Los resultados de los ejercicios de vistas isométricas también han experimentado una mejora apreciable, aunque inferior a la del bloque anterior. De nueve aciertos iniciales se consiguen catorce al final, lo que indica una mejora del 35%. De igual manera que con la rotación, se puede inferir que las técnicas desarrolladas en este bloque han tenido repercusión en las habilidades de visualización medidas al finalizar la experiencia.

7. CONCLUSIONES

Podemos concluir tras el análisis, que los alumnos el grupo de 3º de la ESO estudiado poseen habilidades de visualización que no han sido trabajadas específicamente durante su instrucción reglada. En cuanto al segundo objetivo, referido al desarrollo de estas habilidades, los resultados no son concluyentes pero se puede inferir que pueden de hecho mejorarse, aunque no resulte evidente tras esta investigación que realmente sepamos hacer una propuesta de mejora.

Los resultados obtenidos acerca de desarrollo de habilidades no han tenido el impacto esperado principalmente por dos limitaciones. La primera de ellas es que el grupo de alumnos objeto de estudio manifiestan importantes problemas de disciplina que entorpecen el estudio. Por otro lado, el marco temporal en el que se ha desarrollado la experiencia ha sido muy limitado, y podemos concluir que ha condicionado el resultado.

Hemos observado durante la experiencia que la manera de abordar el conocimiento geométrico en las aulas de secundaria es procedimental, probablemente porque de esta manera los alumnos en su mayoría adquieren un nivel de conocimiento mínimo. A este respecto, la intención inicial de la investigación fue tratar de coordinar el desarrollo de habilidades de visualización con la impartición del currículo programado, ya que las limitaciones curriculares impuestas, tanto por el contexto como por el tipo de conocimiento geométrico que se promueve en la enseñanza tradicional de la geometría, no favorecen el desarrollo de habilidades de visualización, pero esta iniciativa no pudo llevarse a cabo por falta de tiempo.

Aún con todo, los resultados finales, sobre todo los manifestados por los subgrupos estudiados (GMR y GMA), nos sugieren que hay indicios de que trabajando en este tipo de habilidades puede conseguirse una mejora de las mismas, lo que podría ser objeto de un análisis más exhaustivo en el futuro.

Con las hipótesis anteriores, podemos plantear las siguientes propuestas de mejora:

- Para alumnos aventajados, desarrollar habilidades básicas de descomposición de figuras espaciales.
- Para alumnos más desmotivados, plantear actividades más interactivas, puesto que el formato inicialmente les resultaba atractivo.
- Dedicar más tiempo en general a la instrucción. Durante la misma:
 - Obligar a pintar desarrollos planos de todas las figuras espaciales que aparezcan en la Unidad.
 - Durante la impartición de técnicas, obligar a que pinten las caras del sólido y a que sigan las indicaciones.
 - Corregir los ejercicios individualmente y poner notas para incentivar al alumnado.
 - Utilizar el aprendizaje cooperativo, hacerles trabajar por parejas.
- Tratar, en definitiva, el tema de la visualización de manera interdisciplinar. Las situaciones de visualización pueden ser abordadas no sólo en el campo matemático, sino en otras asignaturas como la geografía (elaboración de materiales cartográficos), el dibujo técnico (tipos de proyecciones) y la educación física (actividades motrices de orientación).

8. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

ARCAVI, A. 1994. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, 14(3) pp. 24-35. ISSN 0228-0671.

ARCAVI, A. 2003. The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), pp. 215-224. ISSN: 0013-1954.

BISHOP, A.J. 1983. Spatial abilities and mathematical thinking, En ZWENG, M. et al.(eds.) *Proceedings of the IV I.C.M.E.* Boston, USA: Birkhäuser, pp. 176-178.

BRANOFF, T. J. 2000. Spatial Visualization Measurement: A Modification of the Purdue Spatial Visualization Test-Visualization of Rotations. *Engineering Design Graphics Journal*, 64(2), 14-22. ISSN: 1949-9167.

DAVIS, R. B., & MAHER, C. A. (eds.) 1993. *School, mathematics, and the world of reality*. Boston, USA: Allyn & Bacon.

DEL GRANDE, J.J. 1987. Spatial perception and primary geometry. en Montgomery, M.SHULTE, A. (eds.), *Learning and Teaching geometry, K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DÖRFLER, W. 2004. Diagrammatic Thinking: Affordance and Constraints. En: HOFFMANN M. et al (eds.), *Activity and Sign-Grounding Mathematics Education*. New York: Springer, pp. 57-66.

DUVAL, R. 1999. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. En HITT F. & SANTOS M. (eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, pp. 3-26.

DUVAL, R. 2006. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), pp.103-131. ISSN-0013-1954.

ESPAÑA. 2006. Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 7 de Diciembre de 2006, 293, pp. 43053-43102.

ESPAÑA. 2007. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5 de Enero de 2007, 5, pp. 677-773.

FERNÁNDEZ BLANCO, M.T. 2011. *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. GODINO, J.D., director. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

GONZATO, M., BLANCO, M. T. F., & GODINO, J. D. 2011. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, (77), pp. 99-117. ISSN: 1887-1984.

GUAY, R. 1977. *Purdue spatial visualization test*. Indiana, USA: Purdue University.

GUTIÉRREZ, A. 1991. Procesos y habilidades en visualización espacial. En GUTIERREZ, A (eds.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría*. México D.F.: CINVESTAV, pp. 44-59.

GUTIÉRREZ, A. 1996. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En PUIG L. & GUTIÉRREZ A. (eds.). *Proceedings of the 20th PME International Conference*. 1, pp. 3-19.

GUZMÁN, M. DE. 1996. *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

MCGEE, M.G. 1979. Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), pp. 889-918. ISSN: 1303-6521.

PRESMEG, N. C. 1986. Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), pp. 297-311. ISSN: 0013-1954.

PRESMEG, N. C. 2006. Research on visualization in learning and teaching mathematics. En GUTIÉRREZ, A. & BOERO, P. (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, pp. 205-235.

SORBY, S. A. 2009. Developing 3-D spatial visualization skills. *Engineering Design Graphics Journal*, 63(2). ISSN-0046-2012.

SOUTO, B. 2013. *La enseñanza de la visualización en álgebra lineal: El caso de los espacios vectoriales cociente*. GÓMEZ-CHACÓN, I., director. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

STYLIANOU, D. 2001. On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (eds.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 4, pp. 225-232.

TORRES, D. 2009. Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED*, 20 (6), pp.161-174. ISSN 1024-9435.

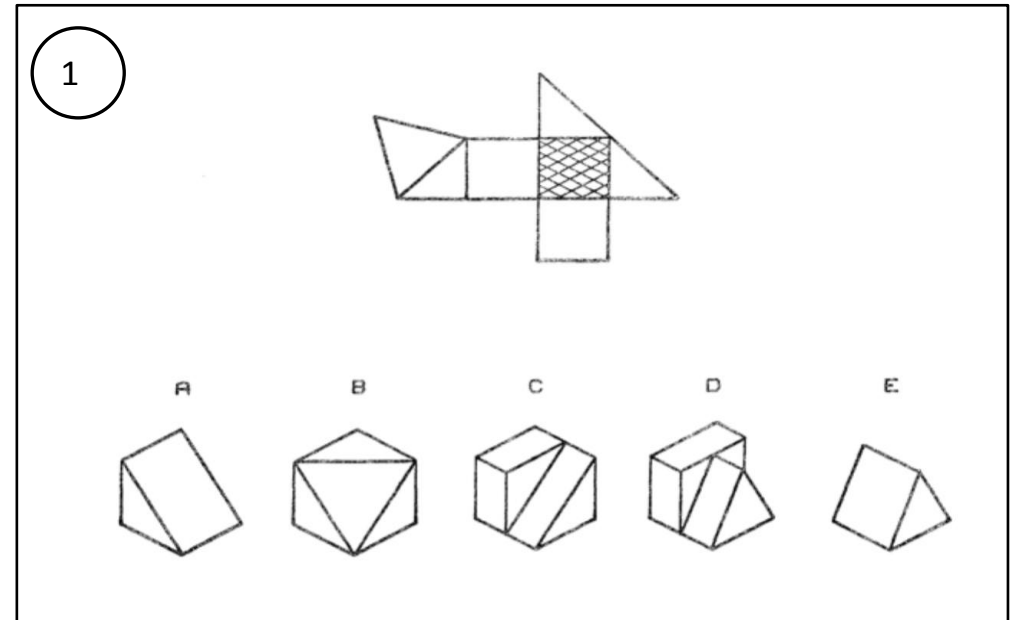
YUE, J. 2009. Spatial visualization by realistic 3D views. *Engineering Design Graphics Journal*, 72(1). ISSN-0046-2012.

ZIMMERMANN, W. & CUNNINGHAM, S. (eds.) 1991. *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 19. Washington, USA: Mathematical Association of America.

ANEXO

TEST DE VISUALIZACIÓN

Rodea con un círculo la opción correcta:



FECHA:.....

NOMBRE DEL ALUMNO:.....

