



**MASTER DE
FORMACIÓN DE PROFESORADO
EN EDUCACIÓN SECUNDARIA**



Facultad de Educación

Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria

Trabajo Fin de Máster

**EL PAPEL DEL ÁLGEBRA LINEAL EN EL BACHILLERATO Y
EN LA UNIVERSIDAD**

Alumna:

Ana María Prieto Sierra

Directores:

Claudia Lázaro del Pozo

Tomás Recio Muñiz

Especialidad Matemáticas
Curso académico 2013-2014
En Santander, a 18 de marzo de 2014

ÍNDICE

CAPÍTULO I: RESUMEN.....	1
---------------------------------	----------

CAPÍTULO II: MOTIVACIÓN Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN.....	4
---	----------

II.1 Motivación

II.2 Definición de objetivos

II.3 Interrogantes específicos

II.4 Enfoque metodológico

CAPÍTULO III: ÁLGEBRA LINEAL: CONTENIDO Y ENSEÑANZA.....	10
---	-----------

III.1 Introducción a la enseñanza del Álgebra Lineal

III.2 Geometría y Álgebra Lineal

III.3 El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del Álgebra Lineal

III.4 Las pruebas de acceso a la Universidad

CAPÍTULO IV: EL ÁLGEBRA LINEAL EN EL CONTEXTO DE CANTABRIA.....	18
--	-----------

IV.1 Álgebra Lineal en el Currículo de Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Cantabria

IV.2 Álgebra Lineal en la Universidad de Cantabria

IV.3 Álgebra Lineal en la Prueba de Acceso a la Universidad de Cantabria

IV.4 Álgebra Lineal en la programación didáctica del Instituto de Prácticum (curso 2012-2013)

CAPÍTULO V: DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA.....	28
---	-----------

V.1 Planteamiento

V.2 Obtención de datos, análisis e interpretación

CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....43

VI.1. Enfoque competencial en la enseñanza del Álgebra Lineal en el Bachillerato

VI.2. Relación del Álgebra Lineal con la Geometría en el Bachillerato

VI.3. Influencia de la Prueba de Acceso a la Universidad en la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato

VI.4. Empleo de herramientas tecnológicas en la enseñanza del Álgebra Lineal

VI.5. La motivación del alumnado en el estudio del Álgebra Lineal. Utilidad y selección de estudios universitarios

CAPÍTULO VII: REFERENCIAS.....53

CAPÍTULO VIII: ANEXOS.....58

VIII.1 Guías docentes Grado en Físicas, Matemáticas e Ingeniería Civil 2012-2013

VIII.2 Programación didáctica IES de Prácticum 2012-2013

VIII.3 Esquema de entrevista a profesorado

VIII.4 Encuestas al alumnado

VIII.5 Selección de actividades libro de texto S.M.

VIII.6 Selección de exámenes Álgebra Lineal y Geometría. PAU y Grado en Físicas y Matemáticas

AGRADECIMIENTOS.....94

CAPÍTULO I: RESUMEN

A pesar de la gran utilidad de las matemáticas, su complejidad y su carácter dinámico plantean numerosos problemas en su aprendizaje. Estas dificultades se hacen especialmente notables en el paso del Bachillerato a la Universidad, donde se produce un cambio de cultura educativa y se exige un mayor nivel de abstracción y formalismo, evidenciando la necesidad de la coordinación entre ambos niveles y la conveniencia de un análisis comparativo de su enseñanza, como el que pretendemos abordar en este trabajo.

De la variedad de áreas de conocimiento que configuran las matemáticas, hemos optado por centrar nuestra investigación en la enseñanza del Álgebra Lineal, área de especial interés por tres razones fundamentales: por su presencia en el Bachillerato y en los primeros cursos de casi todas las Ingenierías y Licenciaturas de Ciencias, por su relación con la visualización geométrica, y porque posibilita la introducción de herramientas tecnológicas en su enseñanza.

En suma, la importancia de esta materia y la necesidad de coordinación entre Bachillerato y Universidad han sido los principales motivos para dedicar este Trabajo Fin de Máster a dar un paso inicial y a realizar un estudio comparativo de la enseñanza del Álgebra Lineal en Bachiller y en el primer curso de la Universidad. Nuestro proyecto se plantea desde una perspectiva general que luego se concreta mediante una experiencia docente en el Instituto donde realicé mi Prácticum.

La memoria se estructura de la siguiente forma. En el capítulo II se describe la motivación y el planteamiento de la investigación que se va llevar a cabo en este proyecto. En un tercer capítulo se enmarca el problema de investigación a través de una revisión bibliográfica, identificando las mayores dificultades asociadas al aprendizaje del Álgebra Lineal, como son su grado de abstracción, la utilización de símbolos o la falta de ejemplos – en la enseñanza de esta materia - de la utilidad práctica de la misma. El cuarto capítulo aborda el contexto de la enseñanza del Álgebra Lineal en la Comunidad Autónoma de Cantabria a través de una serie de documentos tales como el Currículo del Bachillerato, la Prueba de Acceso a la Universidad, y las guías del primer curso

de Grado en Ingeniería Civil, de Matemáticas y de Físicas. El quinto capítulo se dedica al análisis de los datos obtenidos en la experiencia desarrollada en el Instituto de prácticas, que permitirán particularizar la problemática global detectada en un caso concreto y cercano. Para ello se realizaron encuestas a los alumnos de segundo de Bachillerato, una entrevista a su profesor, se analizaron los libros de texto empleados, y se compararon los exámenes de Álgebra Lineal en la Prueba de Acceso a la Universidad de la modalidad de Ciencias y Tecnología y en el primer curso del Grado en Físicas y Matemáticas.

El trabajo concluye con una serie de reflexiones sobre las diversas cuestiones puestas en relieve a lo largo de la investigación, como el enfoque competencial en la enseñanza del Álgebra Lineal en el Bachillerato, su relación con la Geometría, el empleo de herramientas tecnológicas para su enseñanza o la motivación del alumnado en el estudio del Álgebra Lineal.

Entre otros resultados se detecta que muchos de los contenidos de la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría en la Universidad ya se han tratado con anterioridad en Bachiller. Sin embargo, su aproximación es bien diferente, pasando de una matemática “mostrativa” a una “demostrativa”. Ha de tenerse en cuenta, además, que el modo de aprendizaje en Bachillerato ha sido en muchos casos superficial, por favorecer la preparación para la Prueba de Acceso a la Universidad, restando tiempo a la profundización y el aprendizaje significativo de la materia. Por último, en la Universidad se produce el gran salto a la abstracción, de modo que se complica la visualización geométrica y se incrementa la notación científica, valorando su rigurosidad (véase Conclusión 1).

Es bien sabido que la enseñanza en la Educación Secundaria y el Bachillerato ha estado y está sometida a recurrentes cambios legislativos. Es posible que las consiguientes modificaciones curriculares no supongan la existencia de adaptaciones simultáneas en el Currículo universitario, pudiendo ocurrir que éste no considere la desaparición de ciertos contenidos en los cursos preuniversitarios y la aparición de otros nuevos. Esto no quiere decir que los alumnos accedan a la Universidad con menos conocimientos, sino que habrán aprendido otras cosas distintas a las previstas en algunas Licenciaturas e

Ingenierías. Se puede producir, de este modo un importante desfase entre ambos niveles (véase Conclusión 1).

En cuanto a la relación del Álgebra Lineal con la Geometría se concluye que, aunque la visualización geométrica se haya introducido en etapas anteriores, la Universidad debe recuperar el uso de representaciones en R^2 o R^3 , como preparación para llegar a un nivel elevado de abstracción (véase Conclusión 2).

Con relación a la PAU se razona que su superación no asegura, necesariamente, la preparación del alumnado para cursar los estudios de grado (véase Conclusión 3).

Finalmente, a nivel de Bachillerato se identifica el empleo generalizado de una metodología tradicional en la enseñanza de las matemáticas, minimizándose el uso de herramientas tecnológicas. A este respecto parece interesante investigar en las necesidades matemáticas de la sociedad de la información y analizar los resultados obtenidos por los alumnos donde la enseñanza se apoya en estas técnicas (véase Conclusión 4).

El presente Trabajo Fin de Máster es, obviamente, sólo una aproximación parcial e incipiente a la problemática mencionada entre Instituto y Universidad, que podría extenderse a otras asignaturas de matemáticas y a la interacción con otros niveles educativos, como la Educación Secundaria Obligatoria.

CAPÍTULO II: MOTIVACIÓN Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

II.1 MOTIVACIÓN

Las matemáticas son una parte muy importante del Currículo, ya que son un pilar para la integración social en un mundo cada vez más evolucionado, que preparan al sujeto para afrontar con éxito el reto tecnológico y científico de nuestra época. Además, el estudio de las matemáticas es un medio para desarrollar en el individuo hábitos de razonamiento preciso y crítico (López Varona y Moreno Martínez, 1997).

Sin embargo, tanto los informes más rigurosos como la percepción popular señalan que las asignaturas de matemáticas suelen ser unas de las más problemáticas para los alumnos. Esto se debe a las propias características de las materias, que requieren de un esfuerzo continuado por parte del estudiante, al tratarse de conocimientos acumulativos, y de una coordinación efectiva por parte del profesorado, para conseguir un aprendizaje significativo para los alumnos (Alfageme González, Guil Asensio, Guil Asensio, Estrada Domínguez y Díaz Toca, 2010).

Esta dificultad se hace especialmente visible en el paso del Bachillerato a la Universidad, donde se precipitan algunos de los factores contextuales que inciden negativamente en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Así, se detectan déficits en los conocimientos esperados en el primer curso universitario, ya sea de articulación y comprensión de contenidos o un débil manejo de las técnicas (Giménez Abad y Serrano Rey, 2007). Asimismo, estudios recientes revelan datos preocupantes sobre la opinión negativa que los propios estudiantes de carreras universitarias de Ciencias tienen sobre su preparación en matemáticas al llegar a la Universidad (Alfageme González et al., 2010).

Diversas investigaciones actuales señalan como una posible causa de dichas dificultades el nivel de abstracción y formalismo característicos del Pensamiento Matemático Avanzado (Artigue, Batanero y Kent, 2007; Tall, 1991) y apuntan, también, a la existencia de nuevas fuentes de problemas asociados al cambio de cultura entre dos instituciones educativas, el Instituto y

la Universidad (Huidobro Rojo, Méndez García y Serrano Ortega, 2010; Clark y Lovric, 2008; Gascón, 1997; Gueudet-Chartier, 2008).

Se pone en evidencia, por tanto, la importancia de la coordinación a los distintos niveles y, en concreto, entre el Bachillerato y los primeros cursos Universitarios, para conseguir un útil y eficaz aprendizaje de la asignatura. Como señala De León (2007), *“Las Matemáticas españolas se enfrentan, pues, a una triple encrucijada: investigación, reformas universitarias, secundaria. No son independientes unas de otras, al contrario, forman un círculo que no puede ser roto”*.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, a lo largo del presente trabajo se analizará el efecto del cambio del Bachillerato/Universidad en el contrato didáctico, desde la triple vertiente del análisis de los objetivos, contenidos y métodos, incluyendo herramientas tecnológicas y de visualización, y todo ello particularizado al caso del Álgebra Lineal.

Dentro de las matemáticas, el Álgebra Lineal es una materia presente en los primeros cursos de casi todas las Ingenierías y de las Licenciaturas de Ciencias y, por tanto, muy adecuada para poner de manifiesto la problemática anteriormente referida. Se trata, también, de una asignatura donde se puede poner de relevancia la importancia de la visualización geométrica en los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como analizar la introducción de diversas herramientas tecnológicas. Esta riqueza de la materia ha sido la principal razón que ha motivado la elección del Álgebra Lineal como materia de conocimiento en la que centrar el presente Trabajo Fin de Máster.

II.2 DEFINICIÓN DE OBJETIVOS

Nuestro trabajo se ha planteado como una pequeña investigación cuya metodología se basa en lo aprendido en la asignatura “La Investigación Educativa para la Mejora de la Enseñanza y el Desarrollo Profesional”, y está destinada a abordar una serie de objetivos que, si bien son generales, también se pueden particularizar para el caso concreto del Instituto de Educación Secundaria donde realicé mi Prácticum (en adelante IES).

Objetivo principal: Análisis comparativo de la enseñanza del Álgebra Lineal en Bachiller y en el primer curso de la Universidad.

Objetivos específicos:

- 1.-Conocer en qué forma la enseñanza del Álgebra Lineal en Bachillerato/Universidad se relaciona con la Geometría.
- 2.-Conocer cuál es el enfoque competencial en la enseñanza del Álgebra Lineal en Bachillerato/Universidad.
- 3.-Conocer el peso de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza del Álgebra Lineal en el Bachillerato/Universidad.

II.3 INTERROGANTES ESPECÍFICOS

Para avanzar hacia los objetivos anteriormente enumerados, se plantean una serie de interrogantes específicos que, en particular, se contemplan a lo largo de una experiencia en el IES donde realicé mi Prácticum en el curso escolar 2012-2013.

Estas cuestiones se agrupan en cuatro dimensiones:

Materia Álgebra Lineal (contenidos y competencias)

1. ¿En qué medida los contenidos/competencias de Bachillerato en Álgebra Lineal están enfocados a la posterior formación universitaria?
2. ¿En qué medida los libros de texto orientan sus contenidos en Álgebra Lineal a la adquisición de competencias para la posterior formación universitaria?
3. ¿En qué modo los libros de texto están orientados a la prueba de la PAU?

Enseñanza (profesorado de segundo de Bachillerato)

1. ¿En qué medida el profesorado relaciona la enseñanza del Álgebra Lineal con posteriores estudios universitarios?
2. ¿En qué medida el profesorado relaciona la enseñanza del Álgebra Lineal con la prueba de la PAU?

3. ¿De qué modo el profesorado relaciona, en su práctica de enseñanza, el Álgebra Lineal y la Geometría?
4. ¿Qué demandas/excesos encuentra el profesorado en los conocimientos propuestos por el Currículo de Bachillerato en lo referido al Álgebra Lineal?

Aprendizaje (alumnado de segundo de Bachillerato)

1. ¿Qué aceptación tiene el aprendizaje del Álgebra Lineal en el alumnado, frente a otros campos matemáticos?
2. ¿Cuáles son los conceptos más complicados para el alumno?
3. ¿En qué medida el alumno es capaz de interpretar, en términos geométricos, operaciones con ecuaciones lineales y viceversa?
4. ¿El alumno tiene presente la relación entre la asignatura del Álgebra Lineal en Bachillerato y la carrera universitaria que seleccione?
5. ¿Cuáles son los resultados medios obtenidos por los estudiantes en la PAU?

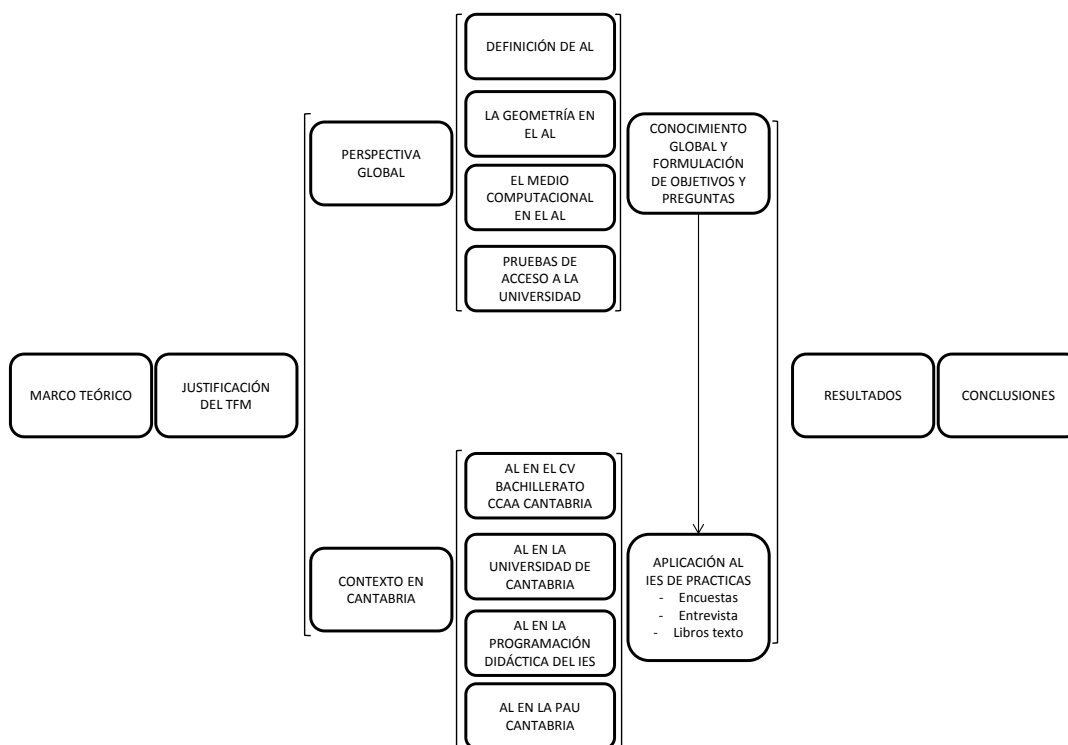
Recursos (materiales empleados en la enseñanza en segundo de Bachillerato)

1. ¿Qué recursos emplea el profesorado en la enseñanza del Álgebra Lineal?
2. ¿Cómo afecta el empleo de los programas de cálculo simbólico en la forma de trabajar, motivar e interactuar al alumnado en el aula?
3. ¿Qué opinión y actitud muestran los profesores en el empleo de programas de cálculo simbólico?
4. ¿Qué opinión y actitud muestran los alumnos en el empleo de programas de cálculo simbólico?

II.4 ENFOQUE METODOLÓGICO

El presente trabajo plantea una investigación encuadrada en el paradigma cualitativo (Cohen y Manion, 1990), centrado en aspectos descriptivos a través del análisis de textos, contenidos y exámenes. En la fase final de esta

Investigación se aplica también un cuestionario y una entrevista, como las que se han llevado a cabo en el IES de prácticas.



Proceso de trabajo. Lectura de textos y aplicación al aula

Comenzaremos seleccionando la literatura de mayor relevancia en cuestiones de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en los primeros cursos universitarios (véase Capítulo III), lo que permitirá detectar las principales diferencias y puntos de fricción con respecto a los objetivos, contenidos, metodologías, y técnicas empleadas para su enseñanza en el Bachillerato. Se analizarán, en segundo lugar, diversos textos relacionados con la realización de la Prueba de Acceso a la Universidad (en adelante PAU) y su influencia en la enseñanza. El estudio de estos libros y documentos nos aportará una perspectiva global que nos permitirá precisar una serie de objetivos y cuestiones para nuestra investigación (véase Capítulo II).

A continuación se procederá con el análisis del Álgebra Lineal en el propio Bachillerato en el contexto de Cantabria, examinando determinados documentos reguladores (véase Capítulo IV). Finalmente, aprovechando mis prácticas en el IES de Prácticum se desarrollarán y analizarán una entrevista y una serie de encuestas, que permitirán la obtención de respuestas concretas y particularizadas a los interrogantes específicos anteriormente indicados (véase

Capítulo V). Este último nivel de concreción permitirá confirmar o refutar algunas de las afirmaciones derivadas del estudio de la literatura, para este caso concreto. Además nos ayudará a entender, con una perspectiva próxima, la problemática del Álgebra Lineal en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el Bachillerato (véase Capítulo VI).

CAPÍTULO III: ÁLGEBRA LINEAL: CONTENIDO Y ENSEÑANZA

III. 1. INTRODUCCIÓN A LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

“El álgebra no es otra cosa que la geometría escrita en símbolos, y la geometría es sencillamente álgebra expresada en figuras” (Sofía Germain, siglo XIX).

El Álgebra se puede definir como *“parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita”* (Real Academia de la Lengua Española, 2001).

Una de las ramas más importantes del álgebra moderna y que más aplicaciones encuentra en otras parcelas de la ciencia como la física, la estadística, la ingeniería, el análisis numérico computacional, o las ciencias sociales es el Álgebra Lineal, que se centra en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales y multilineales entre espacios vectoriales.

Además, los avances en el campo del software le conceden aún más importancia, ya que permite resolver problemas cuyos órdenes de magnitud exceden los que ni tan siquiera se podían soñar hace unos pocos años. *“En la actualidad, el Álgebra Lineal tiene para los estudiantes universitarios un mayor valor potencial en muchos campos científicos y tecnológicos que cualquier otra materia de matemáticas”* (Lay, 2007).

A pesar de su gran utilidad, el lenguaje algebraico proporciona una de las mayores dificultades en la enseñanza de las matemáticas debido fundamentalmente a su grado de abstracción, a la utilización de símbolos para su representación, sus características sintácticas, sus reglas de utilización, sus diferencias con el lenguaje aritmético y al desconocimiento por parte de muchos alumnos de su aplicación práctica.

Esta problemática se hace más evidente en el paso a la Universidad donde:

... se pasa de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa"... "se pasa de una fuerte preponderancia de los "problemas por resolver" a una importante presencia de los "problemas por demostrar" en la universidad.... el estudiante pasa de ser un alumno con escasa autonomía, a ser un estudiante (co)responsable de su proceso de estudio (Gascón, 1997).

Además, en este período. Álgebra y Geometría se consolidan en una única asignatura, y se comienza a trabajar simultáneamente con ayuda del ordenador.

Es frecuente culpar a la formación durante el Bachillerato de estas dificultades. Así, en opinión de algunos profesores universitarios, *"La formación que traen los estudiantes de secundaria es atomizada y rígida"* (Giménez Abad y Serrano Rey, 2007). Además parece que se comienza a detectar una respuesta poco entusiasta por el alumno frente al empleo de programas de cálculo¹, volviendo a revivir lo que ocurría hace años cuando se afirmaba que *"la influencia del ordenador no se siente en la clase"* (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993).

Asimismo, los propios alumnos universitarios revelan, en relación con su formación en Álgebra Lineal en el Bachillerato, el desconocimiento de la utilidad de estos contenidos matemáticos (Alfageme González et al., 2010), lo que favorece su desmotivación y, consecuentemente, una falta de atención en la materia que provoca errores asociados a las actitudes afectivas y emocionales (Paralea Medina, 1999).

Estas deficiencias en Álgebra Lineal se extrapolan a la enseñanza de la Geometría analítica, de tal modo que los problemas más frecuentes *"vienen derivados, en la mayor parte de los casos, de la falta de visualización de los problemas geométricos que, generalmente, se plantean desde una perspectiva algebraica"* (Brihuega Nieto, 1997).

¹ Comunicación personal del Profesor D. Tomás Recio en la asignatura "Las Matemáticas en el Currículum de Secundaria".

Así, por una parte, la formación universitaria ha de alcanzar determinadas cotas correspondientes a la enseñanza superior, pero el diseño de sus planes de estudios debe partir de la formación adquirida en el Bachillerato. Es conveniente, por lo tanto, que los profesores de los primeros cursos universitarios conozcan detalladamente el trabajo realizado durante la educación secundaria, para establecer una relación coherente entre lo que los alumnos saben y los nuevos conocimientos que deben conseguir (Macnab y Cummine, 1986; Jiménez & Arzeizaga, 2001).

Por otro lado, la formación en el Bachillerato debe dar respuesta a los requerimientos de su Currículo, por lo que éste es una buena fuente de información para conocer el nivel que se puede esperar del alumnado.

La conexión entre ambas etapas se establece a través de las pruebas de acceso a la universidad, de modo que su superación supone poseer las competencias para cursar los estudios superiores.

Para comprender mejor esta problemática, recogemos, en las próximas páginas, algunos aspectos en torno a la enseñanza del Álgebra Lineal en el Bachillerato y el primer curso universitario, desde la perspectiva general que proporcionan diversas lecturas de libros de texto y textos normativos.

III.2 GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL

Existe un gran debate en torno a la cuestión de si se debe, o no, enseñar Álgebra Lineal a través de la Geometría. En efecto, se considera – según los autores, como veremos a continuación - que esta última materia puede ser tanto una ayuda como un obstáculo para aprendizaje del Álgebra Lineal por parte de los estudiantes.

Con carácter general observamos que los programas – en todos los niveles- de las materias de matemáticas prestan poca atención a los aspectos visuales y se centran casi exclusivamente en su componente analítica. Así, para los alumnos no universitarios, el Álgebra se suele reducir a la manipulación de símbolos con reglas preestablecidas como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de polinomios aplicando el algoritmo correspondiente; la resolución

de ecuaciones de primer grado con una incógnita, la resolución de inecuaciones, etc.

Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, este enfoque presenta algunas deficiencias, ya que los estudiantes pueden no llegar a entender bien el significado y utilidad de lo que están aprendiendo. Esta dificultad de encontrar sentido a los contenidos puede hacer que tiendan a rechazar la materia.

Por el contrario, algunos autores piensan que un enfoque visual, a través de la Geometría, ayudaría a dar más sentido a la sintaxis y los contenidos del Álgebra de la ESO y el Bachillerato, y podría contribuir a su aprendizaje significativo, al facilitar la comprensión, adquisición y relación de conceptos y procedimientos (Meavilla Seguí, 2013).

Así, diversos autores apuntan al uso de la Geometría como respuesta a los problemas de abstracción y generalización característicos del Álgebra Lineal (Souto, 2013), diseñando una entrada geométrica a esta materia. De esta manera tratan de evitar el obstáculo del formalismo, consolidando conocimientos mediante el uso de figuras geométricas como metáforas de situaciones más generales en espacios vectoriales más elaborados.

En sus estudios sobre las dificultades de los estudiantes en la comprensión de los sistemas algebraicos, Harel (1989) descubre que éstas aumentan cuando no existe la posibilidad de un fácil acceso a representaciones concretas o visuales, lo que le lleva a diseñar un curso en el que las nociones principales se construyen desde una base visual y las abstracciones se introducen de forma gradual. A pesar de lo anterior, advierte de que este modelo puede ser problemático, concluyendo que la Geometría no se debe introducir demasiado pronto, debido, fundamentalmente, a que profesor y alumno no comparten la misma visión inicial en la relación entre Álgebra y Geometría.

En este sentido, el profesor ve que la situación geométrica es isomorfa a la algebraica, mientras que el estudiante no; la sencillez de los conceptos geométricos hace que los alumnos los comprendan y los utilicen para formar conceptos-imágenes fuertes y duraderos, pero que no siempre resultan adecuados para razonamientos generales por las limitaciones del contexto

geométrico que se reduce a dos y tres dimensiones; el profesor entiende que las ilustraciones geométricas son sólo ideas introductorias a los conceptos abstractos, sin embargo el estudiante corriente no tiene esta comprensión básica para abstraer los conceptos de las ideas matemáticas (Souto, 2013).

En esta misma línea, el análisis realizado por Souto (2013) en su tesis sobre la visualización en los Espacios Vectoriales Cociente, concluye que:

la Geometría, a pesar de comenzar siendo un pilar fundamental de búsqueda de inspiración y credibilidad, no conduce de forma natural a la consolidación de la teoría formal de los Espacios Vectoriales. Sin embargo, la coordinación de lenguajes y modos de pensamiento (algebraico y geométrico) y el desarrollo de una notación adecuada son claves en este proceso (Souto, 2013).

Así, a pesar de la dicotomía detectada, existe amplia coincidencia en la opinión de que la visualización geométrica es necesaria para la comprensión y es inherente en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, las discrepancias se centran en el “cuándo” y “cómo” introducir la Geometría en la enseñanza del Álgebra Lineal.

Considerando lo anterior, en el presente Trabajo Fin de Máster analizaremos la introducción de la Geometría en la enseñanza del Álgebra Lineal en el IES de Secundaria donde realicé mi Prácticum.

III.3 EL USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

Estamos viviendo una revolución en matemáticas tan profunda como ocurrió con la introducción de la numeración arábiga en Europa o la invención del cálculo. Estas revoluciones tuvieron características comunes: problemas que se volvieron fáciles y accesibles no sólo para la élite intelectual sino para multitud de personas sin talento matemático (Young, 1986).

Los sistemas de cálculo algebraico hacen referencia tanto a las calculadoras como a los ordenadores personales que llevan integradas tres capacidades

manipulativas fundamentales: la capacidad numérica, la capacidad gráfica, y la capacidad simbólica (Hodgson y Muller, 1992). Estos sistemas de cálculo, (como MACSYMA, MAPLE, DERIVE, MATHEMATICA, MATHLAB, etc.) tienen la posibilidad de mejorar la aritmética decimal sustituyéndola por una aritmética racional, llamada también aritmética exacta. Además, permiten realizar cálculos más complejos, como derivadas, primitivas, límites, factorización de polinomios, etc.

La introducción de estas nuevas herramientas en el contexto educativo ofrece, al estudiante, la posibilidad de representar los conceptos matemáticos de múltiples modos (numérico, gráfico y simbólico), otorgando diferentes visiones de una misma abstracción, lo que ayuda al aprendizaje y comprensión de los conceptos abstractos. Para el profesor, el empleo de estos programas presenta nuevas posibilidades para la enseñanza de las matemáticas. Así, mediante su uso se puede conseguir que problemas complejos se vuelvan fáciles y accesibles para multitud de personas que no tienen grandes dotes matemáticas. Por otro lado estos sistemas facilitan los cálculos y, por tanto, permiten el desarrollo de ejemplos y conceptos complejos, estimulando la experimentación autónoma del alumno y la búsqueda de patrones y generalizaciones.

En conclusión, este tipo de herramientas presenta grandes posibilidades didácticas, tanto por su aptitud para realizar representaciones gráficas en el plano y en el espacio, como por su capacidad de simplificar las rutinas de cálculo, y por su disponibilidad como herramientas para un aprendizaje basado en el descubrimiento y la investigación autónoma por parte del alumno. De este modo, algunas manipulaciones matemáticas comunes y rutinarias pueden perder su razón de ser o tratarse de forma distinta, ampliando las posibilidades aplicativas de una disciplina tan abstracta.

Estos sistemas de cálculo simbólico tienen, por tanto, cada vez más difusión y pueden llevar a un debate curricular en torno al replanteamiento de la enseñanza, tanto en contenidos como en metodologías (García, 1999, citado en Ortega Pulido, 2002); y tanto en los niveles de Secundaria como en los primeros cursos de Universidad (Hodgson y Muller, 1992).

Considerando lo anterior, en el presente Trabajo Fin de Máster, analizaremos el uso de los programas de cálculo simbólico en el último curso de Bachillerato en el IES donde realicé mi Prácticum.

III.4 PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

La finalidad de la PAU es valorar, con carácter objetivo, la madurez académica del estudiante, así como los conocimientos y capacidades adquiridas durante el Bachillerato, y su capacidad para seguir con éxito las enseñanzas universitarias de Grado (Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre).

La estructura de estas pruebas se conoce con antelación, y evalúan los conocimientos de los alumnos sobre un núcleo de conceptos en los que se insiste con reiteración; y también las destrezas en la resolución de problemas que no varían sustancialmente de un año a otro. Es frecuente, por lo tanto, utilizar exámenes de la PAU de años previos para preparar los de los cursos siguientes. En resumen, en opinión de varios autores se detecta

Un análisis superficial del aprendizaje de las matemáticas del Bachillerato: aprender a reproducir información para cumplir con los requisitos de la PAU. Esto conduce a tratar el curso como partes aisladas, sin relación, a memorizar conceptos y procedimientos de manera rutinaria, etc. (Boal Sanchez, Bueno García, Leris López y Sein-Echaluce Lacleta, 2008).

Parece, por tanto, que esta prueba propicia el aprendizaje mecánico, restando importancia a la comprensión de conceptos y procedimientos, de modo que los alumnos no desarrollan su capacidad de aplicar lo aprendido a otras situaciones (Huidobro Rojo et al., 2010).

Se revela, asimismo, que en la evaluación de la PAU se pasan por alto errores, como la correcta utilización del lenguaje matemático, la adecuación de los métodos de aplicación, la justificación de razonamientos, la operativa o despistes de cálculo. Errores que se verán arrastrados a los primeros cursos universitarios, donde sí se penalizarán estas incorrecciones.

Además, la orientación del último curso de Bachillerato hacia la preparación de la PAU hace que los profesores de primer curso de Universidad se encuentren frecuentemente en las aulas con alumnos cuya formación en ciertos temas del Currículo de Bachillerato, es prácticamente nula, debido a que ha sido postergada en aras a la preparación de los exámenes de acceso.

Analizando por otra parte, la visión de los profesores de Matemáticas en el Bachillerato en relación a la PAU, una reciente investigación en el País Vasco (Ruiz de Gauna, Dávila, Eteberría y Sarasua, 2013) muestra, en primer lugar, que “los centros tienen como objetivo prioritario el aprendizaje de las Matemáticas y este objetivo se relaciona con la obtención de buenos resultados” y, en segundo lugar, que *“los centros con buenos resultados utilizan una metodología tradicional”*.

Desgranando este estudio se detecta que los resultados más positivos de estas pruebas dependen del peso de factores asociados a la enseñanza de la asignatura tales como la menor utilización de los libros de texto y la mayor presencia de material específico para preparar las PAU, la utilización de las TIC de manera residual, el peso de un estilo metodológico tradicional y el rechazo a novedades tales como el aprendizaje basado en proyectos.

Teniendo en cuenta estas reflexiones, en el presente Trabajo Fin de Máster se analizará la influencia de la PAU en la enseñanza del Álgebra Lineal en el IES de Secundaria donde realicé mi Prácticum.

CAPÍTULO IV: EL ÁLGEBRA LINEAL EN EL CONTEXTO DE CANTABRIA

Considerado lo anteriormente expuesto a nivel general, en el presente Trabajo Fin de Máster se formulan preguntas relativas al modo en el que se aborda la relación entre el Álgebra Lineal y la Geometría en el Bachillerato, la orientación competencial del Álgebra Lineal en este nivel y en el primero de la Universidad, y el peso de herramientas tecnológicas en su enseñanza.

Con el fin de elaborar un marco local en el que fundamentar las respuestas a estas preguntas, a continuación se realiza un análisis del Currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, del programa de las asignaturas de Álgebra y Geometría en el primer curso de Grado en Físicas/Matemáticas e Ingeniería Civil en la Universidad de Cantabria, del examen de la PAU en Cantabria en el año escolar 2012-2013, así como de la programación didáctica de la asignatura de Matemáticas en el IES donde realicé mi Prácticum.

Es preciso mencionar que, aunque en la actualidad ya está aprobada la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), en el presente Trabajo Fin de Máster me referiré a la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, ya que estaba en vigor en el momento de elaboración del mencionado Trabajo y en el período de Prácticum.

IV.1 ÁLGEBRA LINEAL EN EL CURRÍCULO DEL BACHILLERATO DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE CANTABRIA

Las matemáticas son una parte importante en el Currículo de Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Y dentro de ellas, el Álgebra se presenta como uno de los grandes bloques.

En la **Educación Primaria** se comienza el proceso de construcción del conocimiento matemático y éste se basa en experiencias cotidianas de los niños. Así se señala que *“En la Educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica”*, y también que *“El sentido de esta área en la Educación primaria es eminentemente experiencial, reflexivo y comunicativo”* (Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre).

Por esta razón no existen contenidos específicos en el Álgebra Lineal en este nivel educativo. Sin embargo el bloque dedicado a los números introduce indirectamente este campo de las matemáticas a través de sistemas de representación simbólica y algoritmos, que serán punto de partida para los procesos de abstracción y sistematización.

En la **Educación Secundaria**, se continúa con el desarrollo del conocimiento matemático iniciado en Primaria. En especial en estos años el desarrollo cognitivo de los alumnos les va conduciendo a la posibilidad de realizar razonamientos de tipo formal, lo cual va asegurando niveles intermedios de abstracción, simbolización y formalización, que permitirá pasar de la aproximación intuitiva de Primaria al conocimiento estructurado. En esta etapa, el objetivo fundamental es que todos los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje, ciertos aspectos matemáticos, conocimientos que se consideran imprescindibles para satisfacer las necesidades matemáticas habituales de un ciudadano adulto en la sociedad actual y futura. Dentro de estos conocimientos, el lenguaje algebraico cobra gran importancia. En este sentido, el Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria define la competencia Matemática como *“la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático”* (Decreto 57/2007, de 10 de mayo).

De este modo, el Decreto remarca su importancia, al dotarla de un bloque específico “Álgebra”, así como la conveniencia de relacionarlo con el resto de bloques para facilitar su comprensión: *“No se trata de crear compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan estructuras numéricas y algebraicas y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística”*, y menciona la importancia de *“la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información”* (Decreto 57/2007, de 10 de mayo).

Centrando la atención en el Álgebra Lineal, se observa cómo uno de sus objetivos generales de la competencia matemática es la construcción de unas bases sólidas para los principales conceptos de éste área de conocimiento, en particular en lo relativo a la incorporación al lenguaje de las formas de expresión matemáticas: *“aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático”* (Decreto 57/2007, de 10 de mayo).

En cuanto a los contenidos y procedimientos relacionados con el Álgebra Lineal en la etapa de la ESO destacan tanto el empleo del lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas, simbolizar relaciones y para resolver problemas a través de ecuaciones y sistemas, como el resolver otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

Las enseñanzas de **Bachillerato**, por su parte, tienen como finalidad *“proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y destrezas que les permitan progresar en su desarrollo personal y social e incorporarse a la vida activa y a la educación superior”* (Decreto 74/2008, de 31 de julio). Durante esta etapa se profundiza en los conocimientos y capacidades desarrollados durante la Educación Secundaria Obligatoria. Así, el alumno se especializa en materias concretas con el objetivo de orientarse y prepararse para su posterior acceso a estudios superiores universitarios o de formación profesional, o para su inserción en la vida laboral. En este sentido, los estudios se dividen en tres modalidades: Artes, Ciencias y Tecnología, Humanidades y Ciencias Sociales. De ellas, las dos últimas contemplan las Matemáticas como asignatura, aunque de forma diferenciada en cuanto a contenidos y profundidad.

Los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato incluyen el desarrollo de capacidades dirigidas a la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, a su aplicación a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias (en el caso del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología), así

como analizar, interpretar y valorar aspectos sociales y económicos fundamentalmente (en el caso del Bachillerato de Ciencias Sociales), empleando las herramientas matemáticas más adecuadas, especialmente los recursos aportados por las tecnologías actuales.

i) Estructura

En la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se oferta la asignatura “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I”, y en segundo curso “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II”. En el Bachillerato de Ciencias y Tecnología, por su parte, se oferta la asignatura “Matemáticas I” en primer curso y la asignatura “Matemáticas II” en segundo curso.

ii) Contenidos

Los contenidos de Matemáticas, como materia del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, no se circunscriben exclusivamente al campo de la economía o de la sociología, dado el amplio espectro de estudios a los que esta modalidad da acceso. Así, la materia, dividida en dos cursos, se estructura en torno a tres ejes²: Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística. En lo que al Álgebra se refiere, entre los objetivos de las asignaturas de Matemáticas para esta modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se destaca el siguiente: *“7. Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente”* (Decreto 74/2008, de 31 de julio).

En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, los contenidos del Álgebra Lineal se ubican en el bloque del mismo nombre: *“Aritmética y Álgebra”*, que contempla la resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado, y los sistemas de ecuaciones lineales, en la resolución de problemas. Destacar que, aunque Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I no contempla un bloque específico de “Geometría”, estos conceptos se recogen indirectamente en el bloque *“Aritmética y Álgebra”*:

² En primer curso los bloques de Matemáticas son: Aritmética y Álgebra, Análisis, y Probabilidad y Estadística. En segundo curso los bloques de Matemáticas son: Aritmética, Análisis y Probabilidad y Estadística.

“Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación según soluciones. Interpretación gráfica. [...]” (Decreto 74/2008, de 31 de julio).

En Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, los contenidos del Álgebra Lineal se ubican en el bloque: *“Álgebra”*, dedicado, fundamentalmente, a la introducción de las matrices y su empleo en la resolución de problemas.

Con respecto a los criterios específicos del planteamiento de contenidos de Álgebra Lineal en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se pretende que el alumno sea capaz de seleccionar las estrategias y herramientas algebraicas adecuadas para el planteamiento y resolución de problemas, así como que sea capaz de interpretar críticamente las soluciones obtenidas. También se plantea desarrollar, entre otras destrezas, el empleo de matrices, como instrumento de tratamiento de datos estructurados, tanto para organizar la información como para transformarla a través de determinadas operaciones entre ellas.

En la modalidad de Ciencias y Tecnología, los contenidos de Matemáticas, *“giran sobre dos ejes fundamentales: la geometría y el análisis. Estos cuentan con el necesario apoyo instrumental de la aritmética, el álgebra y las estrategias propias de la resolución de problemas”* (Decreto 74/2008, de 31 de julio).

En Matemáticas I, los contenidos del Álgebra Lineal se ubican en el bloque denominado *“Aritmética y Álgebra”*, que contempla la resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado, los sistemas de ecuaciones lineales, y la utilización de estas herramientas algebraicas en la resolución de problemas. También aparecen conceptos del Álgebra Lineal en el bloque *“Geometría”*, en lo referente a vectores y ecuaciones de la recta.

En Matemáticas II, los contenidos del Álgebra Lineal se ubican en el bloque del mismo nombre: *“Álgebra lineal”*, dedicado, fundamentalmente, a la introducción de las matrices y su empleo en la resolución de problemas. También aparecen conceptos del Álgebra Lineal en el bloque *“Geometría”*, donde se repasan y

amplían los conocimientos de Matemáticas I y se introducen las ecuaciones del plano en el espacio.

Con respecto a los criterios específicos del planteamiento de contenidos de Álgebra Lineal en el segundo curso del Bachillerato de Ciencias y Tecnología, además de los anteriormente indicados para la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, se pretende que el alumno sea capaz de utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la resolución e interpretación de fenómenos geométricos diversos. Y viceversa, poder *“Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizando conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto”* (Decreto 74/2008, de 31 de julio).

iii) Herramientas tecnológicas

En cuanto al uso de herramientas tecnológicas en Bachillerato, el Currículo de Bachillerato en Matemáticas I y Matemáticas II establece la necesidad de su incorporación:

...(calculadoras, aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, Internet,...) que pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados o en la resolución práctica de numerosas situaciones problemáticas relacionadas con la naturaleza, la tecnología o, simplemente, con la vida cotidiana (Decreto 74/2008, de 31 de julio),

y reconoce también su utilidad en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, ya que

Ofrecen la posibilidad de evitar tediosos cálculos que poco o nada aportan al tratamiento de la información, permitiendo abordar con rapidez y fiabilidad los cambiantes procesos sociales mediante la modificación de determinados parámetros y condiciones iniciales (Decreto 74/2008, de 31 de julio).

En todo caso, no por ello se debe dejar de trabajar en el cálculo manual sencillo, *“donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducir a confusión en sus conclusiones”* (Decreto 74/2008, de 31 de julio). Al contrario, el empleo de estas herramientas debe conceder gran importancia al sentido numérico, que permite apreciar diversos niveles de exactitud, localizar errores y elaborar estimaciones razonables.

IV.2 ÁLGEBRA LINEAL EN LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

A continuación se analizan los programas, para el curso 2013-2014, de las asignaturas de “Matemáticas I: Álgebra Lineal y Geometría” del Grado en Físicas, “Álgebra Lineal I” del Grado de Matemáticas (programa conjunto para ambos Grados), así como “Álgebra y Geometría” del Grado en Ingeniería Civil (véase Anexo VIII.1).

Además de estas asignaturas es interesante indicar que, en primer curso de varias de estas carreras, existen también otras materias relacionadas con la Geometría, como “Geometría, arte y naturaleza” en el Grado de Matemáticas, o “Dibujo Técnico” del Grado en Ingeniería Civil.

En cuanto a las asignaturas examinadas se observa que, en términos generales, su contenido es similar, focalizándose en el estudio de espacios vectoriales, matrices, determinantes y espacios euclídeos, si bien en Físicas y Matemáticas parece que se profundiza algo más en la teoría del endomorfismo, mientras que en Ingeniería Civil esto ocurre en el campo de la geometría en dos y tres dimensiones.

Respecto al enfoque competencial, se destaca lo siguiente:

En cuanto al conocimiento, las tres titulaciones hacen referencia a la aptitud para comprender los conocimientos adquiridos en sus relativos campos. En los casos de Grados en Físicas y Matemáticas, se incluye el conocer, comprender, aplicar y formular los fenómenos físicos en el lenguaje matemático.

En cuanto a la aplicación de la asignatura, los Grados en Físicas y Matemáticas lo abordan desde una perspectiva más experimental y deductiva

que el Grado en Ingeniería Civil, que no menciona estos aspectos. En este sentido, los primeros incluyen, además de la descripción del mundo físico, la elaboración de teorías y modelos y el planteamiento de medidas experimentales.

En cuanto al empleo de la tecnología, mencionar que una de las competencias específicas de estas asignaturas en los Grados de Físicas y Matemáticas es *“dominar el uso de las técnicas de computación necesarias en la aplicación de los modelos”* (Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias, 2012). Asimismo, uno de los objetivos específicos en estas titulaciones es *“Resolver problemas de Álgebra Lineal y Geometría a través de programas de software matemático, como Sage”* (Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias, 2012) y *“saber utilizar el programa MATLAB a un nivel que permita resolver numérica o gráficamente problemas elementales relativos a la materia impartida de Álgebra y Geometría”*, para el Grado en Ingeniería Civil (Universidad de Cantabria, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, 2012).

IV.3 ÁLGEBRA LINEAL EN LA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

En el año escolar 2012-2013, el examen de Matemáticas II en la PAU en Cantabria presentó dos opciones diferentes entre las que el estudiante debía elegir una (Pola Menéndez, 2012).

Cada una de las opciones del examen de Matemáticas II tuvo tres bloques, correspondientes a cada una de las partes en que está dividida la asignatura: Análisis, Álgebra Lineal y Geometría. La valoración máxima de los ejercicios propuestos para los bloques de Álgebra y de Geometría fue de 3,25 puntos cada uno, mientras que para el bloque de Análisis fue de 3,50 puntos.

Los temas a examinar correspondieron con el contenido establecido en el Currículo. Así, los correspondientes al Álgebra Lineal fueron tres: I Vectores. Matrices; II Determinantes; III Sistemas de ecuaciones lineales. Los temas correspondientes a Geometría fueron tres: I. Vectores en el espacio

tridimensional; II. Puntos, rectas y planos en el espacio; III. Problemas métricos en el espacio.

En relación a las orientaciones metodológicas recogidas por la guía de la Universidad de Cantabria (Pola Menéndez, 2012), cabe destacar la mención específica a la relación del bloque de “Geometría” con el Álgebra Lineal a través de la interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales: *“se considerará la interpretación geométrica de sistemas con dos incógnitas”,* así como a la *“interpretación geométrica de operaciones con vectores”*.

En cuanto a los medios tecnológicos permitidos para la realización del examen, se redujeron a una calculadora científica básica aunque, según se indicó en las bases, “en absoluto es imprescindible”. No se permitió el uso de calculadoras gráficas o programables, ni de dispositivos con acceso a Internet.

IV.4 ÁLGEBRA LINEAL EN LA PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DEL INSTITUTO DE PRÁCTICUM (CURSO 2012-2013)

A partir del análisis de la programación didáctica del IES de Prácticas (véase resumen de contenidos y temporalización en Anexo VIII.2), se identifican los contenidos de Álgebra Lineal en cada uno de los bloques de la asignatura de Matemáticas, así como su planificación temporal.

Asignatura	1er Trimestre	2º Trimestre	3er Trimestre
Matemáticas I	Aritmética y Álgebra	Geometría	Análisis Estadística y Probabilidad
Matemáticas II	Álgebra Lineal Geometría	Análisis	Análisis
Matemáticas CCSS I	Aritmética y Álgebra	Análisis	Probabilidad y Estadística
Matemáticas CCSS II	Álgebra	Análisis	Probabilidad y Estadística

Tabla 1. Temporalización de los bloques de la asignatura de Matemáticas en Bachillerato, en la Programación Didáctica del IES de Prácticum. Fuente: elaboración propia a partir de la Programación Didáctica del instituto.

En la asignatura de Matemáticas I, se observa que los contenidos de Álgebra Lineal correspondientes a polinomios y fracciones algebraicas, ecuaciones, sistemas, inecuaciones, vectores, geometría analítica plana y cónicas, abarcan un total de 8 semanas, de las 31 de las que consta el curso, lo que representa un 26%.

En Matemáticas II se incrementa la dedicación al Álgebra Lineal y su representación geométrica, llegando a representar el 46% de la materia (12 semanas de las 26 del curso).

En esta asignatura se detecta una peculiaridad del IES de Prácticas, ya que planifica los contenidos de Álgebra Lineal en el primer trimestre, a diferencia de lo que viene siendo habitual en la mayoría de los Institutos, e incluso de la recomendación de la coordinación de Matemáticas II de la PAU sobre impartir esta materia después del bloque de “Análisis”.

En cuanto a la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, las proporciones anteriores se ven reducidas. Así, en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, se observa que los contenidos de expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones y sistemas de inecuaciones abarcan un total de 7 semanas, de las 31 de las que consta el curso, lo que representa un 23%. Al igual que sucede en la modalidad de Ciencias y Tecnología, en el segundo curso se incrementa este porcentaje, elevándose hasta el 37%.

Asignatura	Nº Semanas	% Asignatura
Matemáticas I	8	26%
Matemáticas II	12	46%
Matemáticas CCSS I	7	23%
Matemáticas CCSS II	10	37%

Tabla 2. Temporalización de los contenidos de Álgebra Lineal en la Programación Didáctica del IES de Prácticum
Fuente: elaboración propia a partir de la Programación Didáctica del instituto.

CAPÍTULO V: DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Tal y como hemos indicado en el apartado II.2 de la presente Memoria, a continuación vamos a describir el estudio realizado en el Instituto donde realicé mi Prácticum y que se puede estructurar en cuatro bloques: una entrevista al Profesor de las asignaturas de Matemáticas de segundo de Bachillerato, encuestas al alumnado de estas materias, análisis de los libros de texto empleados en el Instituto y comparación de exámenes de la PAU – Primer curso de Grado en Físicas – Instituto de Prácticum.

Cada una de estas actividades está encaminada a extraer información para dar respuesta a los interrogantes específicos formulados para cada dimensión (véase apartado II.3): Materia Álgebra Lineal, Enseñanza, Aprendizaje y Recursos.

La entrevista al Profesor de segundo de Bachillerato incluye una serie de cuestiones en torno a la consideración, durante sus clases de Matemáticas, de los futuros estudios de sus alumnos, el modo en el que trata el examen de la PAU en el aula, la identificación de los conceptos más difíciles/sencillos para el estudiante y los errores más frecuentes de los alumnos. Se trata, asimismo, el momento en el que se introduce la Geometría en la enseñanza del Álgebra Lineal, así como el empleo de recursos tecnológicos (véase Anexo VIII.3).

A los alumnos por su parte, se les realizan preguntas sobre las preferencias en las asignaturas de segundo de Bachillerato y los estudios deseados para el próximo año. Dentro de la asignatura de Matemáticas, se les pregunta por los bloques preferidos y por sus calificaciones en los distintos trimestres. En el bloque de “Álgebra Lineal”, en particular, los estudiantes gradúan los temas en función de sus preferencias y su facilidad de comprensión. Finalmente se les consulta sobre las herramientas empleadas para la enseñanza y el estudio de Matemáticas, así como su opinión sobre el empleo de programas de cálculo simbólico (véase Anexo VIII.4).

El análisis del bloque de “Álgebra Lineal” en los libros de texto incluye, entre otros aspectos, la revisión de la estructura general, los contenidos, el modo en el que los libros contextualizan cada tema y muestran su aplicación, la

aproximación visual al Álgebra Lineal, así como el fomento del uso de herramientas tecnológicas.

Este capítulo finaliza con el análisis comparativo de varios exámenes de Matemáticas de la PAU y de la asignatura Matemáticas I del primer curso del Grado en Físicas, y con la descripción de los análisis de Geometría del IES de Prácticum.

V.1 PLANTEAMIENTO

Muestra. Contexto

La experiencia fue puesta en práctica en el Instituto de Enseñanza Secundaria donde realice mi Prácticum, en los grupos de segundo de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, y de Ciencias Sociales.

Este instituto se encuentra enclavado en una zona periférica de la ciudad, con una fuerte implantación industrial, pero cuyo perfil socioeconómico está cambiando debido a la mejora de comunicaciones y la construcción de nuevas viviendas.

En cuanto a la oferta educativa, se trata de un instituto tradicionalmente de Formación Profesional, de manera que los alumnos matriculados en Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato únicamente representan un tercio del total. Por estas razones, los grupos de Bachillerato presentan un reducido número de alumnos, mucho menor a lo habitual en otros institutos.

Así, el grupo de segundo de Bachillerato de Ciencias y Tecnología del año 2012-2013 estaba compuesto por un total de 5 alumnos cursando la asignatura de Matemáticas II. Todos ellos habían resuelto satisfactoriamente la asignatura de Matemáticas en 4º de la ESO. Asistía también a clase un sexto alumno que acudía como oyente. En cuanto al alumnado del Bachillerato de Ciencias Sociales, el número de matriculados en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II fue de 7. El profesor de Matemáticas era el mismo para ambos grupos. Se trataba de un profesional de gran experiencia que impartía por primera vez en el curso 2012-2013 clases en este instituto.

Respecto a los resultados en el examen de Matemáticas II de la PAU, los alumnos de Ciencias y Tecnología obtuvieron las siguientes notas: 8.5, 8, 6.75, 6.5 y 3.55. Ninguno de los alumnos de Ciencias Sociales se presentó a ninguna asignatura de Matemáticas en el examen de la PAU.

Materiales y medios

Como se ha indicado en la sección IV.4, los contenidos de Álgebra Lineal se impartieron en el primer trimestre del curso 2012-2013. Sin embargo, el período de prácticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria se desarrolló en el segundo trimestre, por lo que fue posible mi asistencia a las clases de este bloque.

Así, teniendo en cuenta este hecho procedí a la selección de los siguientes materiales y métodos para la obtención de datos significativos en el estudio que quería desarrollar para mi Trabajo Fin de Máster:

1.- Materia Álgebra Lineal (contenidos y competencias):

- Lectura del Currículo de Bachillerato, libros de texto de Bachillerato empleados en el IES de prácticas, y guías de asignaturas de Álgebra Lineal y Geometría en carreras universitarias
- Entrevista con profesorado del IES

2.- Enseñanza (profesorado de segundo de Bachillerato)

- Análisis de exámenes
- Entrevista con el profesorado

3.- Aprendizaje (alumnado de segundo de Bachillerato)

- Entrevista con el profesorado
- Encuesta alumnos

4.- Recursos (materiales empleados en la enseñanza en segundo de Bachillerato)

- Entrevista con el profesorado

- Encuesta alumnos

Se debe mencionar finalmente que el tamaño de la muestra empleada para el estudio es inferior al exigido para poder extraer conclusiones generalizables y extrapolables, por lo que los resultados y conclusiones aquí obtenidas se deben circunscribir al IES de prácticas y a los cursos encuestados.

V.2 OBTENCIÓN DE DATOS, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

A) ENTREVISTA AL PROFESORADO

Como resumen de la entrevista realizada el Profesor de 2º de Bachillerato, se destaca lo siguiente (véase Anexo VIII.3):

1. El profesor suele preguntar en la clase qué estudios pretenden cursar en el futuro a fin de considerar este dato para hacer hincapié en aquellos aspectos de las matemáticas que pudiera tener más interés para los alumnos en función de sus estudios. Debe, no obstante aclararse que esta consideración no modifica en ningún sentido los contenidos y metodología de la asignatura.
2. En opinión del docente, el programa y el enfoque de esta asignatura no debe orientarse a la PAU, sino que debe seguir principalmente el Currículo establecido. No obstante, el profesor pone a disposición de los estudiantes exámenes de las últimas convocatorias de la PAU en una plataforma Moodle del Centro.
3. En cuanto a las habilidades y dificultades que tienen los alumnos en la materia de Álgebra Lineal, el profesor destaca la mayor facilidad que tienen éstos para realizar cálculos de tipo mecánico, como operaciones con matrices y desarrollo de determinantes, frente a una mayor dificultad en la discusión de sistemas con parámetros.
4. En lo que se refiere al Álgebra Lineal y la Geometría en la docencia, el profesor pone de manifiesto que estos dos aspectos se estructuran en bloques separados. Su interconexión se produce a lo largo del segundo bloque, “Geometría”, donde se vuelven a repetir conceptos del Álgebra Lineal, mejorando su comprensión a través de la representación gráfica.

5. En cuanto a los recursos empleados, el profesor, en términos generales, recurre a la típica pizarra y al libro de texto. También se dispone de una suerte de aula virtual, donde deposita ejercicios de curso así como ejercicios resueltos del examen de Matemáticas de la PAU.

Puntualmente utiliza GeoGebra y programas de cálculo simbólico como WIRIS, principalmente para la comprobación visual de los ejercicios propuestos. El profesor conoce bien estos recursos y selecciona uno u otro en función de su idoneidad para ilustrar un ejercicio concreto. Es el propio profesor quien maneja el programa correspondiente como una metodología expositiva ante los alumnos, de tal modo que el ordenador únicamente lo manipula el docente. Así, siguiendo la estructura de Drijvers (2009), la metodología empleada a por este profesor podría asociarse a las categorías “Explain the screen” o “Link-screen-board”, principalmente. La utilidad de esta aproximación es un asunto comentado en clase, entre profesor y alumnos.

B) ENCUESTA AL ALUMNADO

Se ha encuestado a seis alumnos de segundo de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y cinco de segundo de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Como resumen de las encuestas se destaca lo siguiente:

1. En cuanto a la elección de estudios posteriores, la práctica totalidad de los alumnos de Ciencias y Tecnología se decantan por estudios universitarios fundamentalmente asociados a la ingeniería y, en particular aquellos relacionados con la construcción.

Estudios seleccionados por los alumnos de la asignatura de Matemáticas II	Número de alumnos
Medicina	1
Ingeniería civil/industrial	3
Arquitectura	1
Desarrollo y aplicación de proyectos de construcción	1

Tabla nº3. Estudios superiores preferidos por los alumnos de la asignatura de Matemáticas II del IES de Prácticum (número de alumnos). Fuente: elaboración propia a partir de las encuestas al alumnado.

Por otra parte, los estudios deseados por los alumnos de Ciencias Sociales se reparten entre la formación profesional y las carreras universitarias. De estos últimos, varios no tienen decidida la carrera que solicitarán.

2. En relación a las asignaturas favoritas únicamente uno de los alumnos recoge las Matemáticas junto con la Física, como una de las preferidas. Los restantes alumnos del Bachillerato de Ciencia y Tecnología seleccionan asignaturas muy diversas, desde el Inglés o la Historia, hasta la Biología o el Dibujo Técnico, siendo esta última la más repetida.

3. En cuanto a las asignaturas que menos gustan, se puede mencionar que en ningún caso se seleccionaron las Matemáticas, ya sea en el caso de los alumnos del Bachillerato de Ciencias y Tecnología o en el de Ciencias Sociales y Humanidades.

4. Dentro de la asignatura de Matemáticas, los resultados obtenidos en las encuestas revelan que el alumnado de Ciencias y Tecnología muestra un comportamiento radicalizado hacia el bloque de “Álgebra Lineal” ya que sus respuestas son extremas. No obstante, en términos generales, este bloque de es uno de los preferidos.

Bloques de la asignatura de Matemáticas II	Me gusta mucho	Me gusta bastante	Ni me gusta ni me disgusta	Me disgusta algo	Me disgusta bastante
Álgebra Lineal	1	2	-	1	1
Geometría	1	1	2	2	-
Análisis	-	2	3	1	-

Tabla nº 4. Bloques preferidos por los alumnos de la asignatura de Matemáticas II del IES de Prácticum (número de alumnos). Fuente: encuestas alumnado.

5. Dentro del bloque de “Álgebra Lineal”, los alumnos de Ciencias y Tecnología no muestran diferencias reseñables entre sus preferencias por matrices, determinantes o sistemas de ecuaciones, resultando una media global ligeramente positiva y homogénea hacia los todos ellos.

6. Lo mismo ocurre con la dificultad de comprensión de los temas de Álgebra Lineal, donde la media de los distintos temas es similar para todos los alumnos de Ciencia y Tecnología. Tanto las matrices como los determinantes y

los sistemas de ecuaciones se aproximan a la consideración de “bastante fácil” si bien dos de los alumnos opinan más asequible la manipulación con matrices. Se debe indicar, asimismo, que únicamente uno de los alumnos ha señalado la casilla “muy difícil” en el conjunto de todas las encuestas, y esto ha ocurrido en el caso de los “sistemas de ecuaciones lineales”.

7. En cuanto a los recursos utilizados en el área, la gran mayoría de los estudiantes de Ciencias y Tecnología reconocen haber usado WIRIS en clase, sin embargo en su casa únicamente emplean la calculadora, a excepción de dos alumnos que utilizan hojas de cálculo y WIRIS, respectivamente. Asimismo, se puede remarcar que los estudiantes de esta modalidad muestran una actitud ligeramente positiva al hablar del interés del uso de recursos tecnológicos como ayuda para para prestar más atención a la clase de Matemáticas y para facilitar el estudio de la materia.

Todos ellos, excepto uno, están de acuerdo en que el profesor utilice los programas de cálculo simbólico en clase. Las razones son diversas: *“ayudan al alumno a saber comparar sus resultados con los que son correctos”, “hace la clase más amena”, “ayudan a visualizar mejor los ejercicios”, “ahorro de tiempo. Más facilidad para saber usarlas en el futuro”, “otro modo de aprendizaje”*.

Los alumnos de Ciencias Sociales, por su parte, reconocen no emplear este tipo de técnicas ni en el aula ni en casa. Las opiniones hacia su uso son variadas, así algunos comentarios negativos son los siguientes: *“Se pierde tiempo. Los exámenes no se hacen con ordenador”, “Si no lo utiliza vemos todo el procedimiento”,* y otros positivos: *“Sería más amena [la clase] e incluso más comprensible”* y las recomiendan *“Para no perder tiempo”*.

8. Los mejores resultados para los alumnos de Ciencias y Tecnología, en los que a notas se refiere, se corresponden en general con el segundo trimestre dedicado fundamentalmente al Análisis (teniendo en cuenta de que no se habían examinado del tercer trimestre, a la fecha de realización de esta encuesta).

En el caso de los alumnos de Ciencias Sociales hay un equilibrio entre el primer trimestre dedicado al Álgebra Lineal (matrices, determinantes, y sistemas de ecuaciones, programación lineal) y el segundo dedicado al Análisis (límites, derivadas, e integrales).

C) ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

El análisis de los textos de Bachillerato utilizados para la enseñanza del Álgebra Lineal en el IES de Prácticum me ha permitido no sólo comprender en la práctica los objetivos y contenidos del Currículo escolar y la praxis educativa, sino aproximarme al método de enseñanza del profesor en el aula, ya que no pude asistir a sus clases.

He analizado estos libros de texto, principalmente, a través del índice de contenidos y de las primeras páginas donde habitualmente los autores explicitan sus intenciones y la estructuración del texto, así como a través de la lectura de la introducción de cada bloque y tema, donde normalmente se enfocan los principales conceptos. He revisado, asimismo, las imágenes y diagramas presentes a lo largo del texto, así como las llamadas concretas al empleo de la calculadora o de otros recursos tecnológicos.

Por último debo hacer notar que, en mi lectura de los libros de texto, me he detenido especialmente en aspectos de carácter geométrico.

Libros de texto

Se han analizado los cuatro libros de texto de la asignatura de Matemáticas, utilizados en el IES objeto de estudio, para los cursos de primero y segundo de Bachillerato: Matemáticas 1, Matemáticas 2, Matemáticas 1 aplicadas a las Ciencias Sociales, Matemáticas 2 aplicadas a las Ciencias Sociales, todos ellos de la Editorial SM.

Contenidos y estructura general

Los contenidos de los libros de texto coinciden, en su práctica totalidad, con lo establecido en el Currículo de Bachillerato.

Aunque según la normativa existente los contenidos en esta materia en las dos modalidades son muy similares, los libros las abordan de manera ligeramente distinta. Así mientras en Ciencias y Tecnología se hace más énfasis en el dominio de las destrezas de cálculo, en Humanidades y Ciencias Sociales los temas se desarrollan con un mayor enfoque hacia las aplicaciones.

Se aprecian, además, diferencias en la estructura de los textos de primer y segundo curso, en especial en la modalidad de Ciencias y Tecnología, de tal modo que los libros de primer curso tienden a fomentar más la reflexión e investigación autónoma.

Aplicación y contextualización

En los cuatro libros el bloque de Álgebra comienza con un resumen cronológico de su evolución histórica, y con la mención de su importancia en la física cuántica y en la computación. A continuación los temas que componen cada bloque contienen una breve introducción, donde esbozan su utilidad de forma genérica antes de proceder a su exposición detallada.

Así, el texto de Matemáticas 1, en el tema “ecuaciones, sistemas e inecuaciones”, comienza mencionando su relación con el funcionamiento de dispositivos tecnológicos o con las teorías que explican fenómenos naturales como la gravitación universal. Este mismo tema finaliza aludiendo a la utilidad del Álgebra en la “programación lineal” para la resolución de problemas económicos, industriales o de transportes entre otros.

En el caso de Matemáticas 2 el tema “matrices” comienza mencionando su aplicación a la manipulación de datos, tales como las tablas horarias de las estaciones de autobuses, la clasificación de los equipos de Liga o las calificaciones de grupos de alumnos. Se indica, además, su interés en los ámbitos de la geometría, la estadística o la economía, y su importancia en la programación por ordenador. En este mismo tema se proponen ejercicios donde se descubre la relación existente entre matrices y grafos.

El tema “determinantes” se relaciona con el análisis de un gran número de datos, tales como los que surgen en la arquitectura o en los procesos de fabricación, así como la importancia de este concepto en diversas áreas de

investigación. En cuanto al tema “sistemas de ecuaciones lineales”, podemos señalar que los libros de texto se reducen a poner de relevancia su importancia en el diseño tecnológico, como en el caso de teléfonos móviles y aviación.

Los textos de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales en ambos cursos incluyen, además de la introducción a cada tema, una serie de páginas dedicadas a la aplicación en la vida diaria y en la práctica profesional, mediante programas resueltos, de los principales conceptos algebraicos. Así, en el primer curso las “expresiones algebraicas” se vinculan con el cálculo de áreas y volúmenes, la construcción de indicadores económicos y sociales y los cálculos de beneficios. Las “ecuaciones”, por su parte, se aplican a la determinación de puntos de equilibrio en el mercado, a las mezclas y aleaciones o a la logística. Las “inecuaciones”, a la demografía o a la producción de bienes. En el segundo curso se propone la aplicación de las “matrices” a la representación de información o a los procesos estocásticos; y los “sistemas de ecuaciones” a la economía, al comercio y la bolsa, entre otros asuntos de gran interés.

Visualización y Álgebra Lineal en los libros de texto

En términos generales el bloque de “Álgebra Lineal” hace una pequeña referencia a los aspectos visuales en la propia explicación de los temas (Matemáticas 2) o en los problemas propuestos al finalizar la unidad (Matemáticas 1). Sin embargo es en el bloque de “Geometría” (Matemáticas 2) donde se ahonda en la relación Álgebra-Geometría en particular, en el caso 3-dimensional.

Así, en Matemáticas 1, el tema “sistemas de ecuaciones” del bloque de “Álgebra Lineal” se estructura en torno a la enseñanza de conceptos y procedimientos, como la regla de Ruffini o el método de Gauss. Sin embargo, se hace referencia a la Geometría en cuatro de los problemas propuestos al final del tema, para la obtención de dimensiones de figuras geométricas y para el cálculo de distancias.

En Matemáticas 2 se incrementan las referencias a aspectos geométricos. Así, el tema “matrices” incorpora esquemas que representan las ecuaciones matriciales asociadas a cada movimiento en el plano (traslación, simetría, giro y

homotecia). De manera parecida, en el tema “sistema de ecuaciones lineales” se utiliza el teorema de Rouché-Frobenius para caracterizar el tipo de sistema y, consecuentemente, su interpretación geométrica (rectas secantes, paralelas o coincidentes). Esta misma unidad incluye dos ejercicios y un problema de profundización que introducen la visualización geométrica en su resolución (véase Anexo VIII. 5).

El bloque “Geometría”, en Matemáticas 2, da el salto a las tres dimensiones. Para minimizar esta nueva dificultad el libro de texto suele comenzar cada unidad de este bloque recordando las propiedades geométricas en dos dimensiones. Además, en este bloque “Geometría” tiene lugar el núcleo de la interrelación Álgebra-Geometría. Así, en el mismo, a la explicación de cada concepto le acompaña su interpretación geométrica, y su expresión analítica algebraica. También se introduce un nuevo léxico (espacio vectorial euclídeo, base ortonormal, ortogonal, canónica, grados de libertad, etc.), siempre acompañado por una visualización explicativa.

Finalmente podemos señalar que en los distintos libros de texto manejados, los aspectos visuales y geométricos son contextualizados en las páginas introductorias, recurriendo, en términos generales, a la física (vectores), a la construcción (métrica para edificios, puentes, urbanismo, etc) o las telecomunicaciones (lugares geométricos).

Referencias a programas informáticos

Los cuatro libros contienen referencias concretas al uso de programas informáticos y, a lo largo del cuerpo de cada tema, se indican unos pocos ejercicios donde se recomienda su aplicación.

De este modo, al final de cada bloque hay un apartado denominado problemÁTICA, con actividades para cuya resolución se utilizan herramientas informáticas como WIRIS y los programas Excel, Derive y Cabri en Matemáticas 1; y sólo las dos primeras, en Matemáticas 2.

En el caso concreto del tema “ecuaciones, sistemas e inecuaciones”, en Matemáticas 1 se dedican dos páginas a la promoción e instrucción en el

empleo de WIRIS para la resolución de polinomios y de Derive para la resolución de ecuaciones y sistemas.

El texto de Matemáticas 2, por su parte, dedica cuatro páginas a la aplicación de WIRIS en el álgebra matricial y la discusión y resolución de ecuaciones lineales con un parámetro. El libro destaca, asimismo, la utilidad de este programa para la representación gráfica de los casos de 2 o 3 incógnitas. Dedicar, asimismo, otras cuatro páginas a la aplicación de WIRIS en el estudio de la geometría en el espacio.

Preparación para la Prueba de Acceso a la Universidad

Los libros de texto del segundo curso de Bachillerato proporcionan un buen número de problemas propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad para que los alumnos puedan ejercitarse en la resolución de ejercicios de ese tipo.

Esos repertorios de problemas se estructuran en torno a dos secciones: “Hacia la Universidad”, y “Actividades finales”. “Hacia la Universidad” se ubica al final de cada bloque, con ejercicios modelo para la preparación para la PAU, mientras que la sección “Actividades finales” aparece al final de cada tema, e incluye actividades que han aparecido en la PAU. Finalmente, en las últimas páginas del libro hay cuatro propuestas de prueba global de la PAU, que cubren todo el temario. Asimismo, el libro incluye un “CD Demo” con exámenes resueltos, ordenados por contenidos.

Relación con estudios universitarios

Tal y como se identifica en la Sinopsis de la ficha técnica de los libros de texto de ambas modalidades y de los dos cursos de Bachillerato, el objetivo fundamental de estos textos es la preparación para los estudios universitarios. Tras el análisis de los libros de texto se detecta que las referencias explícitas a tales estudios se encuentran en las primeras páginas de cada tema.

D) ANÁLISIS DE EXÁMENES

Se han analizado y comparado exámenes del bloque de “Álgebra Lineal” en la PAU correspondientes a la asignatura de Matemáticas II (junio de 2009 y 2012,

y septiembre de 2009 y 2012) y de la asignatura conjunta del primer curso de Grado de Físicas y del Grado de Matemáticas sobre Álgebra Lineal y Geometría (febrero de 2012, septiembre de 2011 y 2012) (véase Anexo VIII.6). Finalmente se han estudiado los exámenes de la segunda evaluación del IES donde realicé el Prácticum, correspondientes al bloque de “Geometría”. Cabe mencionar que, dada la limitación de la extensión establecida para el Trabajo Fin de Máster, el análisis de los exámenes de Grado se ha reducido al de Físicas y Matemáticas.

Léxico

A pesar de que en la asignatura Matemáticas II se amplía el lenguaje algebraico, en el examen de la PAU se suele utilizar un lenguaje sencillo, donde el empleo de símbolos y parámetros es reducido.

En la Universidad, sin embargo, el nivel de abstracción y complejidad se incrementa con preguntas de tipo teórico, con la ampliación de vocabulario matemático (espacios vectoriales, subespacios, bases, aplicación inyectiva, suparmorfismo, endomorfismo, isomorfismo, etc.) y con un mayor empleo de símbolos y notaciones algebraicas y geométricas en los enunciados ($\text{Im}(f)$, $\perp$, $\ker(f)$, p_u , $\cap$, $\subset$, $\oplus$, $\mathbb{R}^3$...).

Tipos de preguntas

En el primer curso de Grado varias de las preguntas constan de un gran número de cuestiones cortas (cuatro o cinco), mientras que en la PAU se reducen a dos o tres cuestiones a desarrollar.

En ningún caso se plantean problemas de tipo aplicativo o práctico, lo que asume un cierto grado de abstracción, tanto en Bachillerato como en Universidad.

En cuanto a los contenidos concretos de “Álgebra Lineal”, en ambos niveles giran en torno a matrices y ecuaciones y en la Universidad se amplían hacia las aplicaciones lineales y la teoría del endomorfismo.

En la PAU, habitualmente las preguntas de este bloque constan de dos o tres cuestiones de carácter operativo, centradas en la discusión de un sistema de

ecuaciones, o en la operativa de matrices para su caracterización (rango, inversa, igualdad de matrices,...).

En cuanto al bloque de “Geometría” de la PAU, éste suele constar de dos preguntas de tipo operativo (hallar la ecuación de la recta o la del plano, longitudes, módulos, calcular el valor de un parámetro para cumplir una condición, etc.) o con un enunciado más elemental (definición de vértices en triángulos, rectángulos, ecuaciones generales de rectas que definan figuras, etc).

En la Universidad, por su parte, el examen de la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría suele consistir en cuestiones cortas con gran carga conceptual. Esto incluye, en ocasiones, demostraciones, cálculos sencillos, o preguntas de tipo verdadero o falso, generalmente en un contexto abstracto y todas ellas requieren una argumentación detallada, lo que exige un elevado conocimiento de los contenidos de la asignatura.

Ninguno de los enunciados de Geometría analizados, ya sean de la PAU o en la Universidad, incluye representaciones gráficas o esquemas. Tampoco se pide elaborarlos para su resolución. Sin embargo, al menos en los exámenes de la PAU, creemos que facilitan enormemente su resolución.

En cuanto a la relación de ambos bloques (Álgebra Lineal y Geometría), en general la PAU los trata como bloques estancos. Los exámenes de primer curso de Universidad, sin embargo, no hacen tal delimitación y en ocasiones establecen vinculación a través de cuestiones del tipo “significado geométrico” de una aplicación lineal respecto de una base o mediante demostraciones algebraicas de propiedades geométricas.

Exámenes de Geometría del IES de Prácticum

Se han analizado tres exámenes de Geometría del año 2013 (examen parcial sobre rectas y planos en el espacio, examen final, examen de recuperación). Cada uno de ellos consta de 4 ó 5 preguntas, con una duración total de 50 minutos. Por esta razón es importante resolverlas ágilmente. Los enunciados cubren todo el Currículo de este bloque y resultan – en mi opinión- más difíciles que los exámenes de la PAU.

En ningún caso se requiere esquematizar. Sin embargo todos los alumnos lo hacen para uno de los enunciados, donde hay que calcular los vértices de una pirámide y la ecuación del plano que contiene la mencionada base.

En cuanto a los errores más frecuentes cometidos por los alumnos, distinguiremos aquellos debidos a obstáculos de cálculo, a la complejidad de los objetos matemáticos o a dificultades encontradas en el pensamiento matemático. Fallos comunes son una operativa errónea, incorrecta interpretación de los enunciados, o respuestas con ausencia de significado, por ejemplo distancias negativas.

VI. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En general el análisis de resultados y las conclusiones tratan de ensamblar los principales elementos detectados a lo largo del proceso de investigación, para construir un todo estructurado y significativo que dé respuesta a los objetivos formulados.

De este modo, las siguientes conclusiones tratan de ofrecer una visión general que permita comparar la enseñanza del Álgebra Lineal en Bachiller y en el primer curso de la Universidad, así como particularizar algunos de los aspectos analizados en el IES donde realicé mi Prácticum.

VI.1. ENFOQUE COMPETENCIAL EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL EN EL BACHILLERATO

Una de las principales finalidades de las enseñanzas de Bachillerato es proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y destrezas que les permitan incorporarse a la educación superior.

En el caso concreto de la enseñanza del Álgebra Lineal, el Currículo de Cantabria define claramente su alcance como instrumento que permita utilizar un vocabulario matemático para la resolución de problemas y como apoyo a la interpretación gráfica o geométrica (véase Capítulo IV.1).

Sin embargo, de la lectura de textos y de la entrevista al profesor de Bachillerato del IES (véase Capítulo V.2) se deduce que la docencia de esta materia en el aula se ajusta exclusivamente al contenido del Currículo de segundo de Bachillerato con una orientación a la PAU, sin considerar los planes de estudios correspondientes a las carreras que cursarán sus alumnos al año siguiente.

Por otra parte, algunos profesores universitarios detectan importantes diferencias en las expectativas, la visión y objetivos de esta materia en el Bachiller y en la Universidad, además de la dificultad para adaptarse al nuevo entorno (Huidobro Rojo et al., 2010; Gascón, 1997). Asimismo, dicen identificar

carencias o errores significativos por parte de los alumnos que llegan a sus aulas (Huidobro Rojo et al., 2010; Jiménez y Areizaga, 2001).

Parece, por tanto, que existe algún tipo de desajuste entre el enfoque competencial del Álgebra Lineal en el Bachillerato y en las carreras universitarias. Tras la lectura de textos de referencia y la experiencia docente se detectan algunas posibles causas fundamentadas en contenidos y actitudes:

- De la entrevista al profesor del IES de Prácticum y del análisis de las guías docentes para las asignaturas de Álgebra Lineal y Geometría de los Grados en Físicas, Matemáticas e Ingeniería Civil, se deduce que contenidos de los bloques de Álgebra y Geometría en Bachillerato se parecen más a los de primer curso del Grado en Ingeniería Civil que a los de Grado en Físicas y Matemáticas, debido fundamentalmente a la mayor carga visual del primero.
- Del análisis de los exámenes y de las guías docentes anteriormente mencionadas, se deduce que las Licenciaturas de Ciencias otorgan gran importancia a la experimentación, la deducción, así como a la elaboración de teorías y de modelos. Se trata de una nueva perspectiva de las matemáticas para los alumnos procedentes del Bachillerato.
- Tal y como manifiesta Boal (2008), es posible que en el segundo curso de Bachillerato se produzca un enfoque superficial del aprendizaje de las matemáticas del Currículo, posiblemente favorecido por la existencia de la PAU, de modo que la enseñanza tienda a reproducir la información para cumplir con los requisitos de este examen, restando tiempo a la preparación del alumnado para su nueva etapa universitaria.
- El Currículo de Bachillerato se ha modificado recurrentemente a lo largo de los últimos años para adaptarse a las reformas educativas, por lo que también ha cambiado el contenido y la profundización de las materias de Álgebra y Geometría. Así, se incrementan temas como probabilidad y estadística, y se reducen otros. En este sentido, partiendo de lo indicado por Jiménez (2001), es posible pensar que los programas universitarios no se hayan adecuado de forma simultánea a las condiciones de los

alumnos que ingresan en la Universidad y que, por tanto no estén en sintonía con la nueva realidad.

Se hace patente, por tanto, la necesidad de un mayor conocimiento y diálogo entre Universidad e Instituto, y entre las distintas carreras universitarias que ofrecen la asignatura de Álgebra Lineal y Geometría, para reflexionar sobre el modo en que los alumnos de Bachillerato aprenden las matemáticas, las habilidades y actitudes que requieren los estudios de Grado, y sobre el papel de la PAU como conexión entre Instituto y Universidad.

Este conocimiento permitirá la toma de decisiones coordinadas en el reparto de contenidos ente Bachillerato y Universidad, y el nivel de profundidad de los mismos, así como en el modo de evaluación de la materia.

Es conveniente, por tanto, revisar la temporalidad y los programas para que sean asimilados por los alumnos, y asegurar que no hay lagunas ni recurrencia entre etapas; planteando, entre otras opciones, la oferta de cursos de adaptación intermedios, asignaturas donde se profundice para anticiparse a lo que ocurrirá en la Universidad; así como posibles intervenciones en la PAU para adecuarla a los nuevos criterios consensuados.

Asimismo, el Bachillerato y la Universidad no deben ser bloques estancos, por lo que se aconseja que esta investigación se extrapole, al menos, a la ESO, de tal modo que los tres niveles se analicen conjuntamente, como fases de una misma estructura educativa.

VI.2. RELACIÓN DEL ÁLGEBRA LINEAL CON LA GEOMETRÍA, EN EL BACHILLERATO

Una de las principales dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra Lineal está relacionada con la abstracción, lo que tiene que ver con la complejidad para interpretar el lenguaje algebraico. De acuerdo con algunos profesores universitarios como Meavilla (2013), el empleo de representaciones geométricas y figuras puede ayudar a los estudiantes a la comprensión y aprendizaje del Álgebra Lineal.

A lo largo del presente trabajo se ha identificado el momento en el que se introduce la Geometría en la enseñanza del Álgebra Lineal en segundo de Bachillerato en el IES donde realicé mi Prácticum. Se concluye que ambos bloques no se explican conjuntamente, sino que su vinculación se realiza en el de Geometría, donde se repasan también conceptos del Álgebra Lineal.

Así, en el primer trimestre la interpretación geométrica del Álgebra Lineal se reduce prácticamente a la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales.

En el segundo trimestre se procede con la docencia de Geometría, donde se realiza la verdadera vinculación entre los dos bloques. Se trata de un aprendizaje constructivo que, partiendo de las dos dimensiones ya conocidas, incorpora una tercera dimensión. De esta forma, la Geometría dota de gran utilidad al Álgebra Lineal estudiado con anterioridad, para definir rectas y planos en el espacio, hallar sus propiedades métricas, y determinar lugares geométricos en tres dimensiones.

En cuanto a la evaluación del bloque de “Geometría”, se observa que los exámenes del el Instituto y la PAU no puntúan la resolución gráfica o el planteamiento de esquemas, y los enunciados apenas suelen incluir dibujos. Sin embargo, varios de los alumnos del IES de prácticas sí los emplean.

En la Universidad se reproduce el mismo orden que en el Bachillerato, enseñando en primer lugar la operativa algebraica para finalizar con el bloque de “Geometría Euclidea”. En este nivel acontece, sin embargo, un gran salto hacia la abstracción, incrementando el nivel de simbolización, y ampliando el léxico algebraico. Se superan las tres dimensiones implementadas en segundo de Bachillerato y, aunque muchos de los conceptos ya se han introducido en el Instituto, los enunciados de los exámenes se vuelven genéricos, de tal modo que la visualización se complica aún más. Asimismo, la penalización por errores relacionados con el mal uso de símbolos matemáticos es más rigurosa que en la PAU.

Se detecta, por lo tanto, la necesidad de una transición más suave para salvar esta brecha entre Instituto y Universidad. **Parece conveniente elaborar materiales específicos para favorecer la transferencia de unos estudios a**

otros. Así, aunque la visualización geométrica ya se haya introducido en etapas anteriores, **la Universidad debe recuperar el uso de representaciones en R^2 o R^3 antes de producir la ruptura con el Álgebra Lineal, como preparación para llegar a un nivel elevado de abstracción, como la resolución de problemas en R^n .**

VI.3. INFLUENCIA DE LA PAU EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO

Según Ruiz de Gauna (2013) los Institutos analizados en su texto determinan que el objetivo último de la enseñanza en el Bachillerato es el aprendizaje de las matemáticas, y este fin está relacionado con la obtención de buenos resultados. Sin embargo conocen y emplean metodologías y herramientas que favorecen el éxito en esta prueba, y no renuncian a los ejercicios preparatorios. El IES de prácticas es un claro ejemplo. Se confirma, por tanto, que la PAU, como cualquier examen externo, condiciona la metodología de la enseñanza en el Bachillerato.

De este modo se favorece un modelo de enseñanza de corte clásico, donde la obtención de buenas notas en esta prueba está relacionada con la ejercitación de preguntas específicas, la utilización de las TICs en pequeña proporción y el rechazo del estilo basado en trabajos, entre otras variables.

Se trata de un planteamiento bien diferente a las actitudes demandadas en los estudios universitarios, donde se insta a la investigación, la experimentación, o al empleo de las nuevas tecnologías.

En definitiva, **la actual estructura de la PAU cumple con lo establecido en el Currículo, pero parece enfocarse principalmente a resolver el problema del acceso a carreras con límites de plaza.** Según lo analizado se constata que **su superación no asegura, necesariamente, la preparación del alumnado para cursar los estudios de grado.**

VI.4. EMPLEO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

Ortega Pulido (2002) manifiesta que los sistemas de cálculo algebraico son una herramienta didáctica que puede facilitar la comprensión de los conceptos y métodos del Álgebra Lineal, ya que permite modificar algunas pautas educativas para integrar capacidades manipulativas, como la numérica, la gráfica y la simbólica, que contribuyen al aprendizaje significativo por parte del alumno.

El empleo de la tecnología en la enseñanza forma parte de los objetivos específicos del Grado en Físicas (Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 2012) y del Grado en Ingeniería Civil (Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de Cantabria, 2012), mediante el empleo de software matemático, como Sage y MATLAB, respectivamente.

El interés por estas herramientas tecnológicas ya se contempla en el Currículo de Bachillerato de Cantabria, donde se menciona la necesidad de incorporarlas en la asignatura de Geometría (calculadoras, aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, Internet, etc.). Sin embargo no forma parte de los criterios de evaluación, y el Currículo no especifica contenidos ni software concreto, de modo que otorga libertad al docente en la selección del programa específico.

La Prueba de Acceso a la Universidad, por su parte, tampoco califica el empleo de herramientas tecnológicas para la resolución de problemas, es más, prohíbe el uso de calculadoras científicas.

Se produce, por tanto, una contradicción entre el interés mostrado en el Currículo de Bachillerato por estos sistemas, y la escasa motivación por parte de la PAU.

Para conocer cómo se aborda esta dicotomía en el Instituto de prácticas y la opinión de los estudiantes sobre el uso de estas herramientas, se entrevistó al profesor de Segundo de Bachillerato, se analizaron los libros de texto y se encuestó a los alumnos del mismo curso (véase Capítulo V.2).

Como resultado de esta experiencia se puede afirmar que el Instituto dispone de profesorado suficientemente instruido en estas aplicaciones informáticas, las domina y tiene capacidad crítica para su elección. En general, emplea este tipo de herramientas a modo de clase magistral, de forma puntual y auxiliar para facilitar la comprensión y las comprobaciones, lejos de un uso continuado, individualizado y experimental por parte del alumnado. Esta prudencia se debe, en parte, a lo apretado del tiempo para completar el Currículo y a la existencia de una prueba posterior donde no se valora el empleo de estas tecnologías. Todo ello a pesar de que una parte representativa de los alumnos encuestados en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología muestran el interés por estos sistemas, y optarán por cursar estudios en ingeniería donde sí se requerirá el empleo de estas herramientas.

Los libros de texto, por su parte, incluyen referencias explícitas al empleo de esta tecnología, aconsejando su empleo y dando pautas para su uso.

Se concluye por tanto que, en términos generales, se sigue empleando la metodología tradicional de enseñanza, de modo que el uso de estas herramientas tecnológicas se ajusta estrictamente a los mínimos establecidos en el Currículo, a pesar de su interés en la formación superior, la disponibilidad de profesorado preparado en este tipo de sistemas, y de que su incorporación en la didáctica del Álgebra Lineal propicia la participación activa del alumnado, evita un aprendizaje principalmente memorístico, flexibiliza el formalismo intrínseco a la disciplina, y dota de utilidad y aplicación al Álgebra Lineal.

Por estas razones parece interesante:

- **Analizar las necesidades matemáticas básicas de la sociedad de la información.**
- **Estimular al profesorado en su formación.**
- **Analizar los resultados obtenidos por alumnos donde la enseñanza del Álgebra Lineal se apoye en herramientas tecnológicas, y se comparen con los obtenidos empleando el método tradicional.**

Todo ello permitirá crear un conocimiento en el que basarse para una posterior toma de decisiones sobre las adaptaciones de contenido y metodología en los planes de estudio correspondientes.

VI.5. LA MOTIVACIÓN DEL ALUMNADO EN EL ESTUDIO DEL ÁLGEBRA LINEAL. UTILIDAD Y SELECCIÓN DE ESTUDIOS UNIVERSITARIOS

Motivación del alumnado de Bachillerato

Según Paralea Medina (1999), algunas de las dificultades detectadas en el aprendizaje de las Matemáticas y el Álgebra están asociadas a las actitudes emocionales y afectivas hacia esta materia.

En el caso particular del IES de prácticas, las encuestas realizadas revelan que, si bien ninguno de los estudiantes analizados selecciona las Matemáticas como la asignatura que menos les agrada, tampoco la mencionan decididamente como la preferida (véase Capítulo V.2). Asimismo, ninguno de los alumnos encuestados tiene previsto seleccionar una carrera de Licenciatura en Ciencias, lo que llama la atención a la vista de las elevadas calificaciones obtenidas en la prueba de Matemáticas de la PAU.

Todo ello conduce a meditar sobre la motivación del alumnado, ya que influye positivamente en el aprendizaje.

Aplicación del Álgebra Lineal, y vinculación con los estudios universitarios

Se puede distinguir entre una motivación interna, relacionada con la necesidad personal de dar sentido al Álgebra Lineal en el mundo en el que vive, y una motivación externa con una perspectiva hacia su futuro profesional. Teniendo en cuenta lo anterior, el presente trabajo ha tratado de identificar el modo en que se contextualiza esta materia y como se muestra al alumno de Bachillerato su aplicabilidad en los cursos universitarios.

A este respecto, los libros de texto dedican sus primeras páginas a la contextualización de los contenidos de cada tema. Sin embargo, existen diferencias importantes entre las dos modalidades de Bachillerato en el

planteamiento práctico de la asignatura de Matemáticas. Así, los ejercicios de la modalidad de Ciencias Sociales y Humanidades son, en gran proporción, problemas aplicados a las Ciencias Sociales. Sin embargo, en el libro de Matemáticas 2, se detecta una ausencia de este tipo de ejercicios, para centrarse en los aspectos más abstractos de la matemática.

Del estudio de artículos recientes (Alfageme González et al., 2010) se deduce, asimismo, que los alumnos de la modalidad de Ciencias y Tecnología reciben limitada información sobre las matemáticas que van a recibir en la Universidad. Se trata de una queja recurrente, vinculada a la dificultad de los estudiantes para encontrar utilidad a las matemáticas de este período. Esto se puede deber, en parte, a la limitación temporal del curso para la preparación de la PAU, y a la diversidad de estudios universitarios ofertados.

A pesar de las anteriores conclusiones de carácter general, en el caso concreto del IES donde realicé mi Prácticum, el profesor sí realiza el esfuerzo de interesarse por las carreras elegidas y de buscar los puntos de referencia entre los contenidos de Álgebra Lineal que explica en Matemáticas II y los futuros estudios universitarios de sus estudiantes (véase Capítulo V.2). Concretamente los alumnos de Ciencias y Tecnología de este curso se decantan fundamentalmente por ingenierías y por temáticas relacionadas con la construcción, y ninguno de ellos mencionó entre sus opciones el grado en Físicas o Matemáticas. Sin embargo, los estudiantes han tomado esta decisión antes del comienzo del segundo curso, por lo que su experiencia a lo largo de este año y, en particular, el atisbar el papel en los estudios universitarios de los contenidos de Álgebra Lineal que estudian en el Bachillerato, podría influir en la ratificación de esta selección.

Se concluye, por tanto, que la figura del profesor puede ser relevante a lo largo del proceso de selección de la carrera universitaria, por parte del alumno. Entendemos que la labor del docente, anticipando algunos de los contenidos matemáticos que se van a encontrar en los estudios de Grado, y mostrar ejemplos concretos, puede mejorar la toma de tan importante decisión por parte del alumno.

Sería, por tanto deseable que otros institutos reprodujeran y ampliaran el comportamiento del profesor del IES donde realicé las prácticas. Para lo cual es conveniente, no sólo fomentar esta actitud por parte del profesorado, sino reservar tiempo para la preparación y el desempeño de esta labor.

CAPÍTULO VII. REFERENCIAS

- Alfageme González, M.B., Guil Asensio, P.A., Guil Asensio, F., Estrada Domínguez, S., y Díaz Toca, M.G. (2010). Valoraciones de alumnos universitarios sobre los conceptos matemáticos. En: *II Congrés Internacional de Didàctiques 2010*. Disponible en: <http://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/2961>
- Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En: *NCTM Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1011–1049). Charlotte NC: Information age.
- Brihuega Nieto, J. (1997). Las matemáticas en el bachillerato. *SUMA*, 25, 113-122.
- Boal Sánchez, N., Bueno García, C., Lerís López, M.D., Sein-Echaluce Lacleta, M.L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la Universidad. Un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa*, 26 (1), 11-23. Disponible en: <http://revistas.um.es/rie/article/view/94081/90711>
- Carlson D., Johnson C.R., Lay D.C., Porter A.D. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46. Disponible en: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2686430?uid=3737952&uid=2&uid=4&sid=21103388585413>
- Clark, M. y Lovric, M. (2008). Suggestion for a Theoretical Model for secondary-tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 25-37. Disponible en: http://www.merga.net.au/documents/MERJ_20_2_Clark.pdf
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el Currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria* núm 101, de 29 de mayo.

Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria* núm 156, de 12 de agosto.

De León, M. (2007). Las Matemáticas españolas en su encrucijada. *ARBOR. Ciencia, Pensamiento y Cultura*, 725, 341-346.

García, A. (1999). Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática. *Curso de verano UNED: la Matemática: su naturaleza, evolución y tratamiento de su didáctica*.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *SUMA*, 26, 11-22. Disponible en: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/26/011-021.pdf>

Giménez Abad, M.J. y Serrano Rey, A. (2007). Propuesta de una ingeniería didáctica: curso de Matemáticas-0. En: *XV Jornadas de ASEPUMA (Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa.) y III Encuentro Internacional*. Disponible en: <http://www.uv.es/asepuma/XV/comunica/617.pdf>

Gueudet-Chartier, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254. Disponible en: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9100-6>

Hodgson, B. R., y Muller, E. R. (1992). The impact of symbolic mathematical systems on mathematics education. En Cornu, B. y Ralston, A. (eds.). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. Science and technology education* (pp.93-107). Paris: UNESCO.

Huidobro Rojo, J.A., Méndez García, M.A., Serrano Ortega, M.L. (2010). Del Bachillerato a la Universidad: las matemáticas en las carreras de

ciencias y tecnología. *Aula abierta*, 38 (1), 78-80. Disponible en:
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3214241>

Jiménez, M. y Areizaga, A. (2001). Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la universidad. *IX Jornadas para de la Asociación Española de profesores universitarios de matemáticas para la economía y la empresa*. Las Palmas de Gran Canaria. Disponible en:
http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/linea_investigacion/Analisis_de_Contenido_IAC/IAC_106.pdf

Lay, D.C. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Mexico: Pearson.

López Varona, J.A. y Moreno Martínez, M.L. (coord.). (1997). *Resultados de matemáticas: tercer estudio internacional de matemáticas y ciencias (TIMSS)*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Macnab, D.S. y Cummine, J.A. (1986). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16*. Visor: Madrid.

Meavilla Seguí (2013). Álgebra geométrica: Notas históricas. *Centro virtual de divulgación de las Matemáticas: divulgaMAT*. Recuperado el 09/12/2013, 2013, de
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3384%3Algebra-geomica-notas-histas&catid=38%3Atemas-matemcos&directory=67&showall=1

Ortega Pulido, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. (Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid). Disponible en:
<http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=10596>

Paralea Medina, M.M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números: revista didáctica de las matemáticas*, 40, 3-28. Disponible en:
<http://www.sinewton.org/numeros/numeros/40/Articulo01.pdf>

- Pola Menéndez, C. (coord). (2012). *Pruebas de acceso a la Universidad: bachillerato LOE, ciclos formativos de Grado superior 2012-2013*. Disponible en: <http://catalogo.unican.es/cgi-bin/abnetopac/O7140/IDa6e0cfe4?MLKOB=10092651717&screenw=1600&screenh=900>
- Real Academia de la Lengua Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.a ed.). Recuperado de <http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%A1lgebra>
- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado* núm 293, de 8 de diciembre.
- Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas. *Boletín Oficial del Estado* núm 283, de 24 de noviembre.
- Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberria, J., Sarasua, J.M. (2013). Pruebas de selectividad en matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones del profesorado. *Revista de educación*, 362, 217-246. Disponible en: <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4477643>
- Souto Rubio, B. (2013). *La enseñanza de la visualización en el álgebra lineal: el caso de los espacios vectoriales cociente*. (Tesis doctoral inédita). Universidad Complutense de Madrid.
- Tall, D. (ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Universidad de Cantabria, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. (2012). *Guía docente de la asignatura álgebra y geometría: Grado en Ingeniería Civil, curso académico 2013-2014*. Disponible en: <http://www.unican.es/programas/guias/2012/G329.pdf>
- Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias. (2012). *Guía docente de la asignatura matemáticas I: álgebra lineal y geometría: Grado en Física*,

curso académico 2013-2014. Disponible en:
<https://www.unican.es/programas/guias/2012/G35.pdf>

Vizmanos, J.R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2008).
Matemáticas 1: bachillerato. Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2009).
Matemáticas 2: bachillerato. Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2010).
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1: bachillerato. Madrid:
Ediciones SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2010).
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2: bachillerato. Madrid:
Ediciones SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M., Serrano, E. (2009).
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 2: bachillerato. Madrid:
Ediciones SM.

Young, G. (1986). Epilogue. En Ewing, R., Gross, K. y Martin, C. (eds.), *The merging of disciplines: new directions in pure, applied, and computational mathematics* (pp.213-214). New York: Springer-Verlag.

CAPÍTULO VIII. ANEXOS

VIII.1 GUÍAS DOCENTES GRADO EN FÍSICAS, MATEMÁTICAS E INGENIERÍA CIVIL 2012-2013

Grado en Físicas y Matemáticas. Matemáticas I. Álgebra lineal y geometría. Contenidos:	Grado en Ingeniería Civil. Álgebra y geometría. Contenidos:
ESPACIOS VECTORIALES 1.1 Definición de Espacio Vectorial. Primeros ejemplos. 1.2 Subespacios Vectoriales. Combinaciones lineales. 1.3 Independencia lineal. Bases. 1.4 Suma e intersección de subespacios. Suma directa	MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 1.0.- Ideas previas: Conjuntos, correspondencias y aplicaciones. 1.1.- Matrices: Definición y operaciones. 1.2.- Matrices elementales y de entes organizados. Rango. Matrices equivalentes. 1.3.- Determinantes: Definición, propiedades y conceptos relacionados. 1.4.- Sistemas de ecuaciones lineales: Definición, tipos, condiciones de compatibilidad y resolución.
APLICACIONES LINEALES Y MATRICES 2.1 Definición de Aplicación Lineal. Ejemplos. 2.2 Núcleo e imagen. Fórmula de las dimensiones. 2.3 Tipos de Aplicaciones Lineales. Isomorfismos. 2.4 Matriz asociada a una aplicación lineal. 2.5 Cambios de base y matrices equivalentes	ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES 2.1.- Espacios vectoriales: Definición, ejemplos y propiedades. 2.2.- Dependencia lineal, dimensión, base y representación matricial. 2.3.- Subespacios: Ecuaciones cartesianas, suma, intersección y suma directa. 2.4.- Aplicaciones lineales: Conceptos y representación matricial. 2.5.- Subespacios invariantes asociados a un endomorfismo. 2.6.- Matrices semejantes: Diagonalización.
TEORÍA DEL ENDOMORFISMO 3.1 Autovalores y autovectores 3.2 El polinomio mínimo de un endomorfismo. 3.3 Subespacios invariantes. 3.- La Teoría del Endomorfismo. 3.4 Endomorfismos nilpotentes. Forma canónica de Jordan.	CONEXIÓN EN ESPACIOS VECTORIALES. ESPACIOS PUNTUALES AFINES 3.1.- Forma bilineal: Concepto y representación matricial. Tipos de formas cuadráticas. 3.2.- Canonización de matrices simétricas. Matrices congruentes. 3.3.- Espacios puntuales afines: Definición, afinidad e isometrías. Uso de coordenadas homogéneas. 3.4.- Movimientos en el plano. 3.5.- Movimientos en el espacio.
GEOMETRÍA EUCLIDEA 4.1 Producto escalar y ortogonalidad 4.2 Proyección ortogonal y aplicaciones : Aproximación por mínimos cuadrados y Resolución de sistemas de ecuaciones lineales sobredimensionados. 4.4 Isometrías en espacios vectoriales 4.5. Transformaciones ortogonales en un espacio de dimensión 2 y 3 4.6 Espacio Afín.	GEOMETRÍA AFÍN Y EUCLÍDEA. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 4.1.- Problemas elementales en el plano geométrico ordinario (EGO-2). 4.2.- Problemas elementales en el espacio geométrico ordinario (EGO-3). 4.3.- La circunferencia: Potencia, eje y centro radical. 4.4.- Cónicas: Definición, ecuaciones, invariantes y clasificación métrica. 4.5.- Elementos principales de las cónicas.
	ANÁLISIS DE CURVAS PLANAS. GEOMETRÍA ELEMENTAL EN 3D 5.1.- Curvas en el plano: Recta tangente, crecimiento, extremos relativos e inflexiones. 5.2.- Puntos singulares, simetrías, cuadros regionales y direcciones asintóticas. 5.3.- Curvas alabeadas: Ecuación, curvatura, torsión y elementos del triedro de Frenet. 5.4.- Superficies: Expresión analítica, plano tangente y 0 vector normal. Tipos de superficies.

Fuente: elaboración propia a partir de las Guías Docentes de las asignaturas relacionadas directamente con Álgebra lineal y Geometría, en los Grados de Físicas y de Ingeniería Civil de la Universidad de Cantabria (Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos Universidad de Cantabria, 2013; Facultad de Ciencias Universidad de Cantabria, 2013)

VIII.2 PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA BACHILLERATO IES DE PRÁCTICUM 2012-2013

Contenidos de Matemáticas. Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología

Matemáticas I	Matemáticas II
1.- Áritmética y Álgebra - Números reales: necesidad de su estudio para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias en la recta real. Intervalos y entornos. Logaritmos decimales y neperianos. - Números complejos. Introducción de los complejos como ampliación de $\mathbb{R}$. Números complejos en forma binómica, polar y trigonométrica. Representación gráfica. Operaciones elementales con números complejos. Resolución de ecuaciones polinómicas con raíces reales y complejas. - Sucesiones numéricas. Límite de una sucesión. El número "e". - Polinomios; factorización. Fracciones algebraicas. - Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado. - Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas. - Sistemas de ecuaciones lineales. Solución de un sistema. Tipos de sistemas lineales: Compatible determinado e indeterminado, incompatible. Resolución e interpretación de un sistema sencillo de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss. - Sistemas de Inecuaciones lineales con una incógnita. - Utilización de las herramientas algebraicas, como ecuaciones, inecuaciones y sistemas, en la resolución de problemas.	1.- Álgebra lineal - Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Dimensión y orden de una matriz. Tipos de matrices. - Operaciones con matrices: Suma, producto y producto por un n° real. Propiedades. - Rango de una matriz. Cálculo del rango de una matriz utilizando el método de Gauss. Matriz inversa de una matriz cuadrada. Matriz regular y singular. - Aplicación de las operaciones de las matrices y sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. - Determinante de una matriz cuadrada. Aplicación a las matrices de orden dos y tres (Regla de Sarrus). Propiedades elementales de los determinantes. - Desarrollo del determinante de una matriz cuadrada por los adjuntos de los elementos de una fila o columna. Cálculo de determinantes de orden "n" utilizando las propiedades de los determinantes (Método de Gauss, triangulación). - Cálculo de la inversa de una matriz de órdenes dos y tres. Matriz Adjunta. Cálculo del rango de una matriz utilizando los determinantes. - Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales con un parámetro. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales. El método de Gauss y la regla de Cramer. - Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales a la resolución de problemas.
2.- Geometría - Ampliación del concepto de ángulo. Medida de ángulos: radianes y grados. - Razones trigonométricas de un ángulo. Identidades trigonométricas. Fórmulas y transformaciones trigonométricas. Teorema del seno y del coseno. Ecuaciones trigonométricas. - Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos. - Números complejos. Introducción de los complejos como ampliación de $\mathbb{R}$. Números complejos en forma binómica, polar y trigonométrica. Representación gráfica. Operaciones elementales con números complejos. Resolución de ecuaciones polinómicas con raíces reales y complejas. - Vectores libres y fijos en el plano. Definición. Dirección	2.- Geometría - Vectores en el espacio tridimensional. Operaciones: propiedades. Combinación lineal de vectores. Dependencia e independencia lineal. - Producto escalar, vectorial y mixto de dos vectores. Definición, propiedades y expresión analítica. Significado geométrico. - Ángulo formado por dos vectores. - Sistemas de referencia en el espacio. Coordenadas de un punto. Coordenadas de un vector. - Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Obtención e interpretación de las ecuaciones de rectas y planos. Posiciones relativas entre rectas y planos. - Resolución de problemas de posiciones relativas: incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.

y sentido. Módulo de un vector. Operaciones con vectores. Coordenadas o componentes de un vector. - Combinación lineal de vectores. Vectores linealmente independientes y dependientes. Base. - Producto escalar de vectores. Definición e interpretación geométrica. Propiedades. Expresión analítica. - Ángulo formado por dos vectores. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales. - Plano afín: Sistemas de referencia en el plano(Coordenadas de un punto). - Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. - Plano métrico: Paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Distancias entre puntos, puntos y rectas y dos rectas. Ángulo formado por dos rectas. - Resolución de problemas métricos. - Lugares geométricos del plano. Mediatriz de un segmento. Bisectriz de un ángulo. - Cónicas. Ecuaciones y elementos de la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.	- Ángulo entre dos rectas, entre dos planos y entre una recta y un plano. - Distancias entre: punto-punto, punto-plano, punto-recta, recta-recta, plano-plano y recta-plano. Perpendicular común a dos rectas. - Superficies y volúmenes. - Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
--	--

Leyenda: **Contenidos de Álgebra Lineal**

Contenidos de Matemáticas. Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales

Matemáticas aplicadas a las CCSS I	Matemáticas aplicadas a las CCSS II
1.- Aritmética y Álgebra - Caracterización de los números racionales e irracionales. El número e. - La recta real. El orden en R. Conjuntos en la recta real: semirrectas, intervalos, conjuntos acotados. - Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores. - Potencias y raíces. Operaciones con radicales. - Logaritmos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales. - Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y números índice. Parámetros económicos y sociales. - Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Factorización de polinomios sencillos. - Ecuaciones de segundo grado. Interpretación gráfica. Ecuaciones de grado superior a dos. Factorización como recurso para resolver ecuaciones. - Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación según soluciones. Interpretación gráfica. Sistemas equivalentes. Transformaciones elementales de equivalencia. Método de Gauss. - Inecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita: Resolución e interpretación gráfica. Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas. Resolución gráfica. Región factible. - Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales.	1.- Álgebra - Las matrices como expresión de tablas y grafos. Dimensión y orden de una matriz. - Suma y producto de matrices. Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales. - Rango de una matriz. Definición de matriz inversa de una matriz cuadrada. Matriz regular y singular. - Resolución de ecuaciones y sistemas matriciales utilizando las propiedades de las matrices. - Determinantes. Cálculo del determinante de una matriz de orden dos y tres. Propiedades de los determinantes. Desarrollo del determinante de una matriz cuadrada por los adjuntos de los elementos de una fila o columna. - Aplicación de los determinantes al cálculo de la inversa de una matriz de orden tres. - Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Tipos de sistemas lineales. Sistemas equivalentes. - Discusión de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y con un parámetro, utilizando el método de Gauss. - Resolución de un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss y la regla de Cramer. - Aplicación a la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales. - Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Solución de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas: Región factible. - Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.

Temporalización de la asignatura de Matemáticas. Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y Tecnología

Matemáticas I:

CONTENIDOS (Matemáticas I)	Tiempo (semanas)	Tiempo acumulado	Tema del libro	Evaluación
Números reales.	4	4	T1	1
Polinomios y fracciones algebraicas	2	6	T2	
Ecuaciones. Sistemas. Inecuaciones.	3	9	T2	
Trigonometría	3	12	T3	
Números complejos	2	14	T7	2
Vectores	1	15	T4	
Geometría analítica plana	2	17	T5	
Cónicas	2	19	T6	
Funciones, límites y continuidad	3	22	T8	
Funciones elementales	2	24	T9	3
Derivadas	2	26	T10	
Representación gráfica de funciones	2	28	T11	
Distribuciones bidimensionales	2	30	T13	
Probabilidad	1	31	T15	

Matemáticas II:

CONTENIDOS (Matemáticas II)	Tiempo (semanas)	Tiempo acumulado	Tema del libro	Evaluación
Matrices.	2	2	T1	1
Determinantes.	2	4	T2	
Sistemas de ecuaciones lineales.	2	6	T3	
Vectores en el espacio.	2	8	T4	
Planos y rectas en el espacio.	2	10	T5	

Posiciones de rectas y planos.	2	12	T6	2
Límites de sucesiones y de funciones.	2	14	T8	
Continuidad.	2	16	T9	
Derivadas.	2	18	T10	
Funciones derivables.	2	20	T11	3
Representación de funciones.	2	22	T12	
Cálculo de primitivas.	2	24	T13	
Integral definida.	2	26	T14	

Temporalización de la asignatura de Matemáticas. Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales

Matemáticas aplicadas a las CCSS I

CONTENIDOS (Mat Aplic CCSS I)	Tiempo (semanas)	Tiempo acumulado	Tema del libro	Evaluación
El número real	2	2	T1	1
Matemática financiera	2	4	T2	
Expresiones algebraicas	2	6	T3	
Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	2,5	8,5	T4	
Inecuaciones y sistemas de inecuaciones	2,5	11	T5	
Funciones	2	13	T6	2
Interpolación	1	14	T7	
Límites y continuidad	2,5	16,5	T8	
Funciones elementales	2	18,5	T9	
Derivadas	3	21,5	T10	
Estadística unidimensional	2	23,5	T11	3
Distribuciones bidimensionales	2	25,5	T12	
Cálculo de probabilidades	1,5	27	T13	
Distribuciones discretas. La binomial	2	29	T14	
Distribuciones continuas. La Normal	2	31	T15	

Matemáticas aplicadas a las CCSS II

CONTENIDOS (Mat Aplic CCSS II)	Tiempo (semanas)	Tiempo acumulado	Tema del libro	Evaluación
Matrices. Inversa.	2	2	T1	1
Determinantes	2	4	T2	
Sistemas de ecuaciones. Problemas.	3	7	T3	
Programación lineal	3	10	T4	
Límites de funciones. Continuidad.	2	12	T5	2
Derivadas.	2	14	T6	
Aplicaciones de las derivadas.	1	15	T7	
Representación gráfica.	2	17	T8	
Integral indefinida.	2	19	T9	
Integral definida.	1	20	T9	
Probabilidad simple.	2	22	T11	3
Prob. Condicionada y compuesta.	1	23	T11	
Inferencia estadística. Muestreo.	2	25	T13	
Intervalos de confianza.	1	26	T14	
Contrastes de hipótesis.	1	27	T15	

VIII.3 ESQUEMA DE ENTREVISTA A PROFESORADO

1.- Tratamiento en el aula de los estudios universitarios seleccionados por los alumnos. Relación con los contenidos.
1.1. ¿Se habla de la carrera que van a hacer?
1.2. ¿Se les indica la importancia de las matemáticas y del álgebra lineal y su relación con 1º de carrera?
2.- Tratamiento en el aula del examen de la PAU. Relación de contenidos. Resultados obtenidos.
2.1. ¿Están las clases orientadas al examen de la PAU?
2.2. Resultados de la PAU
2.3. Participación del álgebra lineal en la PAU
3.- Identificación de conceptos de mayor facilidad/dificultad por parte del alumnado, en el álgebra lineal.
3.1. ¿Matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, geometría, vectores?
4.- Identificación de los principales errores.
4.1. ¿Dónde comenten los alumnos los principales errores en el álgebra lineal?
5.- Facilidad de relación por parte del alumnado, de representa gráficamente ecuaciones algebraicas. Método empleado por el profesor para relacionarlo en el aula.
5.1. ¿Se explican el Álgebra y la Geometría simultáneamente o en bloques separados?. Si lo refuerza en clase a través de ejercicios,...
6.- Propuestas, por parte del profesorado, de adaptación del Curriculum para una mejor adecuación a los estudiantes de Bachillerato.
6.1. ¿Añadiría o eliminaría contenidos en el Curriculum por duplicidad, por poco interés, o por adecuar al nivel que solicita el alumno?
7.- Recursos empleados por el profesorado en la enseñanza del álgebra lineal
<i>¿Suele emplear material didáctico alternativo al libro de texto? ¿Cuál? (libros de texto, pizarra, ejercicios adicionales, geogebra, calculadoras simbólicas, etc.)</i>
8.- Actitud del profesorado hacia el empleo de calculadoras simbólicas.
8.1. Cuáles utiliza (DERIVE, wolframalpha, SAGE, WIRIS, etc.), cómo y cuándo las emplea.

VIII.4 ENCUESTAS AL ALUMNADO

2º Bachillerato Ciencias y Tecnología

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es? <i>Arquitectura</i>					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? <i>Dibujo Técnico</i>					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? <i>Lengua</i>					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal		☒			
- Geometría		☒			
- Análisis				☒	
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices		☒			
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒			
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy fácil 1	Bastante fácil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices		☒			
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒			

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO										
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☐	☒										
Indicar cuáles												
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>	☒	☐										
Indicar cuál/es <i>WIRIS</i>												
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO										
- Calculadora	☒	☐										
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒										
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>	☐	☒										
- Otros	☐	☒										
Indicar cuál/es												
11.- El uso de calculadoras simbólicas	<table border="1"> <tr> <td>Mucho</td> <td>Bastante</td> <td>No hay diferencia con no utilizarlas</td> <td>Dificulta /desagrada un poco</td> <td>Dificulta/desagrada mucho</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> </table>	Mucho	Bastante	No hay diferencia con no utilizarlas	Dificulta /desagrada un poco	Dificulta/desagrada mucho	1	2	3	4	5	
Mucho	Bastante	No hay diferencia con no utilizarlas	Dificulta /desagrada un poco	Dificulta/desagrada mucho								
1	2	3	4	5								
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?	☐	☒	☐	☐	☐							
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?	☐	☐	☒	☐	☐							
12.- En tu opinión	SI	NO										
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☐	☒										
¿por qué?												
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º									
	☐	☒	☐									

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es? Medicina					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? Biología					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? Lengua					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal		X			
- Geometría				X	
- Análisis		X			
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices		X			
- Determinantes		X			
- Sistemas de ecuaciones lineales		X			
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy fácil 1	Bastante fácil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices		X			
- Determinantes		X			
- Sistemas de ecuaciones lineales		X			

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☐	☒			
Indicar cuáles					
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE; etc.)	☒	☐			
Indicar cuál/es					
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.)	☒	☐			
- Otros	☐	☒			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarlas 3	Difícil / desagrada un poco 4	Difícil / desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?		☒			
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?		☒			
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☒	☐			
¿por qué? Ayudan a visualizar mejor los ejercicios					
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º		
		☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es?	Ingeniería Civil				
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato?	Historia				
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato?	Filosofía				
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal		☒			
- Geometría			☒		
- Análisis				☒	
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices			☒		
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒			
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy fácil 1	Fácil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices		☒			
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales			☒		

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☒	☐			
Indicar cuáles					
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) WIRIS	☒ WIRIS	☐			
Indicar cuál/es					
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) WIRIS	☒	☐			
- Otros	☐	☒			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarlas 3	Difícil / desagrada un poco 4	Difícil / desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			☒		
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?		☒			
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☒	☐			
¿por qué?	Ahorra de tiempo Más facilidades para saber usarlas en el futuro				
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º		
		☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es? <i>Grado en Ingeniería electrónica industrial y automática</i>					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? <i>Inglés</i>					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? <i>Lengua</i>					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal					☒
- Geometría				☒	
- Análisis			☒		
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices					☒
- Determinantes				☒	
- Sistemas de ecuaciones lineales					☒
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy fácil 1	Bastante fácil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices			☒		
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales			☒		

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☒	☐			
Indicar cuáles <i>WIRIS</i>					
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>	☒	☐			
Indicar cuál/es <i>WIRIS</i>					
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>	☐	☒			
- Otros	☐	☒			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarías 3	Dificulta / desagrada un poco 4	Dificulta / desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			☒		
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?			☒		
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☒	☐			
¿por qué? <i>Hace la clase más amena.</i>					
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º		
		☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es?					
INGENIERÍA MECÁNICA O CIVIL					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato?					
MATEMÁTICAS Y FÍSICA					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato?					
HISTORIA Y FILOSOFÍA					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal	☒				
- Geometría	☒				
- Análisis			☒		
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices			☒		
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales	☒				
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1	Bastante difícil 2	Dificultad media 3	Bastante fácil 4	Muy fácil 5
- Matrices	☒				
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒			

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:		SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)		☐	☒			
Indicar cuáles						
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☒	☐			
Indicar cuál/es						
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)		SI	NO			
- Calculadora		☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)		☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☐	☒			
- Otros		☐	☒			
Indicar cuál/es						
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho	1	2	3	4	5
	Bastante No hay diferencia con no utilizarías Dificulta /desagrada un poco Dificulta/desagrada mucho					
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?				☒		
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?				☒		
12.- En tu opinión		SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?		☒	☐			
¿por qué? <i>Otro medio de aprendizaje</i>						
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas		1°	2°	3°		
			☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☒	UNIV ☐			
3.- ¿Cuáles? Desarrollo y aplicación de proyectos de investigación					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? Dibujo Técnico					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? Filosofía y lengua					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal				☒	
- Geometría				☒	
- Análisis		☒			
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices		☒			
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales					☒
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1	Bastante difícil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices		☒			
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales					☒

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☒	☐			
Indicar cuáles <i>WPS</i>					
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>Wolfram</i>	☐	☒			
Indicar cuál/es					
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>Wolfram</i>	☐	☒			
- Otros	☐	☒			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarlas 3	Difícil / desagrada un poco 4	Difícil / desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?		☒			
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?		☒			
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☒	☐			
¿por qué? <i>Porque ayudan al alumno a saber comparar sus resultados con los que son correctos</i>					
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º		
	☒				

2º Bachillerato Humanidades y Ciencias Sociales

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☒	UNIV ☐			
3.- ¿Cuál/es?	Empresariales, Administrativo				
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato?	Economía				
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato?	Historia, Inglés				
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal					☒
- Geometría				☒	
- Análisis		☒			
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices			☒		
- Determinantes				☒	
- Sistemas de ecuaciones lineales				☒	
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1	Bastante difícil 2	Dificultad media 3	Bastante fácil 4	Muy fácil 5
- Matrices	☒				
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒			

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☒	☐			
Indicar cuáles <i>Pizarrón</i>					
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>Wolfram</i>	☒	☐			
Indicar cuál/es <i>Calculadora</i>					
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☒			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>Wolfram</i>	☐	☒			
- Otros	☐	☒			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarías 3	Difícil/desagrada un poco 4	Difícil/desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			☒		
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?			☒		
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?	☐	☒			
¿por qué? <i>Porque si no lo utilizas vemos todo el procedimiento</i>					
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1°	2°	3°		
		☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?.	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es?.					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? <i>geografía</i>					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? <i>lengua</i>					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal					☒
- Geometría					☒
- Análisis					☒
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices					☒
- Determinantes					☒
- Sistemas de ecuaciones lineales					☒
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1 <i>posibil</i>	Bastante difícil 2 <i>facil</i>	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices					☒
- Determinantes					☒
- Sistemas de ecuaciones lineales					☒

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:		SI	NO
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)		☒	☐
Indicar cuáles <i>pizarras, tizas, folios</i>			
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☐	☒
Indicar cuál/es			
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)		SI	NO
- Calculadora		☒	☐
- Hojas de cálculo (Excel o similar)		☐	☒
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☐	☒
- Otros		☐	☒
Indicar cuál/es			
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho		
	Bastante		
	No hay diferencia con no utilizarlas		
	Dificulta / desagrada un poco		
	Dificulta / desagrada mucho		
	1	2	3
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?			
12.- En tu opinión	SI	NO	
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?	☐	☒	
¿por qué? <i>porque se pierde tiempo. los exámenes no se hacen con ordenador</i>			
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☒	UNIV ☐			
3.- ¿Cuál/es? <i>Oposiciones</i>					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? <i>Historia</i>					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? <i>Inglés</i>					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal				☒	
- Geometría		☒	☒		
- Análisis				☒	
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices		☒			
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales	☒				
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1	Bastante difícil 2	Dificultad media 3	Bastante fácil 4	Muy fácil 5
- Matrices		☒		☒	
- Determinantes		☒		☒	
- Sistemas de ecuaciones lineales		☒		☒	

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:	SI	NO			
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)	☒	☐			
Indicar cuáles	pizarra				
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.)	☒	☐			
Indicar cuál/es	calculadora				
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)	SI	NO			
- Calculadora	☒	☐			
- Hojas de cálculo (Excel o similar)	☐	☐			
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.)	☐	☐			
- Otros	☐	☐			
Indicar cuál/es					
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho 1	Bastante 2	No hay diferencia con no utilizarías 3	Dificulta /desagrada un poco 4	Dificulta/desagrada mucho 5
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?		☒			
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?		☒			
12.- En tu opinión	SI	NO			
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.	☐	☒			
¿por qué?	nunca las hemos utilizado en clase				
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas	1º	2º	3º		
		☒			

1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es?	TURISMO				
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato?	RELIGIÓN				
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato?	HISTORIA				
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal			☒		
- Geometría			☒		
- Análisis			☒		
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices			☒		
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales			☒		
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy difícil 1	Bastante difícil 2	Dificultad media 3	Bastante fácil 4	Muy fácil 5
- Matrices			☒		
- Determinantes			☒		
- Sistemas de ecuaciones lineales			☒		

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:		SI	NO
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)		☐	☒
Indicar cuáles PIZARRA			
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) (Wolfram)		☐	☒
Indicar cuál/es			
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)		SI	NO
- Calculadora		☒	☐
- Hojas de cálculo (Excel o similar)		☐	☒
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) (Wolfram)		☐	☒
- Otros		☐	☐
Indicar cuál/es			
11.- El uso de calculadoras simbólicas (NO UTILIZAMOS)	Mucho		
	Bastante		
	No hay diferencia con no utilizarías		
	Dificulta /desagrada un poco		
	Dificulta/desagrada mucho		
	1	2	3
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?			
12.- En tu opinión		SI	NO
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?		☒	☐
¿por qué? PARA NO PERDER TIEMPO			
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas		1º	2º
		☒	
			3º

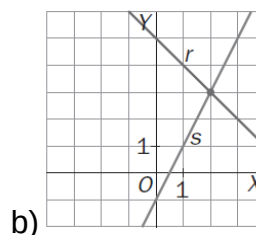
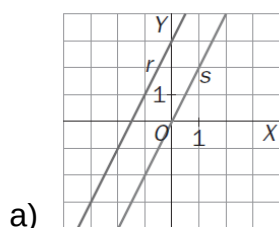
1.- ¿Tienes previsto continuar estudiando cuando finalices el Bachillerato?	SI ☒	NO ☐			
2.- En caso afirmativo de pregunta 1, ¿tienes previsto estudiar un grado universitario o un ciclo de formación profesional?	FP ☐	UNIV ☒			
3.- ¿Cuál/es?					
4.- ¿Cuál es tu asignatura favorita de 2º de Bachillerato? <i>Historia</i>					
5.- ¿Cuál es la asignatura que menos te guste de 2º de Bachillerato? <i>Inglés</i>					
6.- Dentro de la asignatura de Matemáticas, indica tus bloques preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Álgebra lineal				☒	
- Geometría					☒
- Análisis				☒	
7.- Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica los temas preferidos:	Me gusta mucho 1	Me gusta bastante 2	Ni me gusta ni me disgusta 3	Me disgusta algo 4	Me disgusta bastante 5
- Matrices				☒	
- Determinantes					☒
- Sistemas de ecuaciones lineales			☒		
8.-Dentro del bloque de "álgebra lineal", indica la dificultad de comprensión de los distintos temas:	Muy Fácil 1	Bastante fácil 2	Dificultad media 3	Bastante difícil 4	Muy difícil 5
- Matrices			☒		
- Determinantes		☒			
- Sistemas de ecuaciones lineales				☒	

9.- Indicar qué recurso/s se utilizan en el aula para el estudio del álgebra lineal:		SI	NO
- Recursos gráficos (GeoGebra, otros)		☒	☒
Indicar cuáles <i>Pizarra</i>			
- Recursos para cálculo (hojas de cálculo excel o similar, DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☐	☒
Indicar cuál/es			
10.- Indicar qué recurso/s de cálculo utilizas para tu estudio individual (en casa)		SI	NO
- Calculadora		☒	☐
- Hojas de cálculo (Excel o similar)		☐	☒
- Calculadora simbólica (DERIVE, wolframalpha, SAGE, etc.) <i>WIRIS</i>		☐	☒
- Otros		☐	☒
Indicar cuál/es			
11.- El uso de calculadoras simbólicas	Mucho		
	Bastante		
	No hay diferencia con no utilizarías		
	Dificulta /desagrada un poco		
	Dificulta/desagrada mucho		
	1	2	3
¿Te hace prestar más atención a la clase de Matemáticas y la hace más agradable?			☒
¿Te ayuda en el estudio de las Matemáticas?		☒	
12.- En tu opinión		SI	NO
¿Debería el profesor utilizar calculadoras simbólicas en clase?.		☒	☐
¿por qué? <i>Porque sería más ameno e incluso más comprensible</i>			
Indicar en qué trimestre sacaste mejores notas en Matemáticas		1º	2º
		☒	

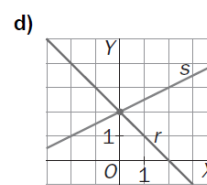
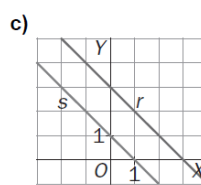
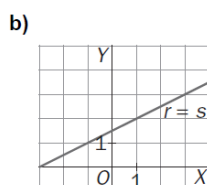
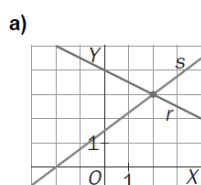
VIII.5 SELECCIÓN DE ACTIVIDADES LIBRO S.M.

A continuación se recogen algunos ejercicios del libro Matemáticas 2, editorial S.M., del bloque Álgebra Lineal, donde se introduce la interpretación geométrica.

3.19. Escribe los sistemas de ecuaciones correspondientes a las situaciones y las rectas representadas en las siguientes figuras:



3.37. En cada caso, escribe un sistema de ecuaciones lineales que se corresponda con las situaciones descritas en las figuras.



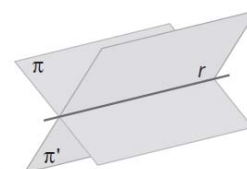
3.74. Una recta en el espacio tridimensional se puede definir como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos planos, tal y como se ilustra en la figura.

De esta forma se observa que, en tres dimensiones, son necesarias dos ecuaciones independientes para determinar una recta.

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta definida por la intersección de los planos:

$$\pi: x + y - z - 3 = 0, \quad \pi': 2x + 3z + 1 = 0$$

(Indicación: resuelve el sistema indeterminado que forman las ecuaciones de los dos planos).



VIII.6 SELECCIÓN DE EXÁMENES ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA. PAU y GRADO EN FÍSICAS Y MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOE – JUNIO 2012

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1. [3,25 PUNTOS] Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 0 \\ x + ay + 3z &= 1, \quad a \in \mathbb{R}. \\ x + y + (2-a)z &= a \end{cases}$$

Estúdialo para los distintos valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

2. Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- a) [1,75 PUNTOS] Encuentra los valores de a , b y c de forma que la gráfica de la función f pase por el punto $(0,1)$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean ambas paralelas a la recta $y=3x+5$.
- b) [1,75 PUNTOS] Para $a>0$, $b=0$ y $c=0$, determina la función f tal que el área de la región limitada por su gráfica, el eje OX (recta $y=0$) y las rectas $x=0$ y $x=1$ sea igual a 3 unidades de superficie.

3. Considera el punto $P=(1,0,4)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 0$.

- a) [0,75 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el punto P .
- b) [1,5 PUNTOS] Determina el punto Q simétrico del punto P respecto del plano π .
- c) [1 PUNTO] Calcula la distancia del punto Q al plano π .

Examen de Algebra Lineal

2 de febrero, 2012

Los alumnos que deseen realizar el examen de octubre deben contestar la pregunta 1. La parte correspondiente al segundo parcial corresponde a las preguntas 2 y 3. La materia del último bloque de la asignatura corresponde a las preguntas 4 y 5.

1. Se considera el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $V = \mathbb{R}^5$ y el siguiente subespacio $U \subset V$:

$$U = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \text{ tales que } x + y + z = 0, \quad t = 0\}$$

Razona cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas.

- (a) Si $W_1 = \langle (1, 0, -2, 1, 0), (0, 1, 0, 3, -4) \rangle$, entonces $\dim(U + W_1) = 5$.
- (b) Si $W_2 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \text{ tales que } x + y + z + t + w = 0\}$, entonces $U \cap W_2 = U$.
- (c) Si $W_3 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \text{ tales que } x + 2y = 0, z = 0, w = 0\}$, entonces $U \oplus W_3 = \mathbb{R}^5$.
- (d) Si $W_4 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \text{ tales que } x + 2y = 0, z = 0, t = 0\}$, entonces la unión de tres vectores cualesquiera de U que sean linealmente independientes y dos vectores cualesquiera de W_4 que sean linealmente independientes nos da una base de $\mathbb{R}^5$.

0,5 $\times$ 4 = 2 puntos

2. Se considera la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por la matriz :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, tanto en el espacio origen como final. Encontrar la matriz que representa dicha aplicación respecto de la base $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$ en ambos espacios. ¿Cuál es el significado geométrico de dicha aplicación? Halla la imagen por dicha aplicación del subespacio cuya ecuación implícita respecto de la base canónica es $\{x + y = 0\}$.

1 $\times$ 2 = 2 puntos

3. Da un ejemplo, en cada uno de los casos siguientes, de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, verificando:

- (a) $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{\vec{0}\}$
- (b) $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$
- (c) $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$
- (d) $\operatorname{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^3$

Observa que las inclusiones son estrictas.

0,5 $\times$ 4 = 2 puntos

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe: $\langle e_2 + e_4 \rangle \subseteq \ker(f)$, $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$.

- Demuestra que $e_1 - e_2$ y $e_1 + e_2$ son vectores propios.
- Si 2 fuese raíz del polinomio característico de f , ¿podríamos asegurar que f es diagonalizable?
- Supongamos que $f(0, 0, 1, 1) = (1, -1, 0, 1)$. Escribe la matriz asociada a f respecto de la base canónica. ¿Es f diagonalizable en este caso?
- Supongamos que $\langle e_2 + e_4, e_3 + e_4 \rangle = \ker(f)$. Escribe la matriz asociada a f respecto de la base canónica. ¿Es f diagonalizable en este caso?

0,5 $\times$ 4 = 2 puntos

5. Contesta a las siguientes cuestiones:

- Demuestra que si u, v son dos vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$ provisto con el producto escalar estándar, entonces la norma de $u - v$ es $\sqrt{2}$.
- Demuestra que si S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, provisto con el producto escalar estándar, entonces $(S^\perp)^\perp = S$.
- Calcula, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar estándar, la imagen de $(1, -1, 1)$ en la proyección ortogonal sobre U , esto es $p_U(1, -1, 1)$, donde U es el plano $x + y + z = 0$.
- Sea r la rotación de 60 grados y centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$. Sea $u = (-1, 1)$ y sea s la simetría de eje la recta $\langle u \rangle$. Determina la matriz (en la base canónica) de otra simetría s' tal que $r = s \circ s'$.

0,5 $\times$ 4 = 2 puntos.

Examen de Algebra Lineal

11 de septiembre, 2012

Los alumnos que deseen recuperar el primer parcial deben contestar la pregunta 1. La parte correspondiente al segundo parcial corresponde a las preguntas 2 y 3. La materia del último bloque de la asignatura corresponde a las preguntas 4 y 5.

1. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) Una ecuación paramétrica del subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^4$, $S = \langle \{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 2)\} \rangle$ es $\{x_1 = 0, x_2 = \lambda + \mu, x_3 = \mu, x_4 = 2\mu\}$.
- b) Una base del subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por $\{x_2 = x_3\}$ es $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$.
- c) $\mathbb{R}_3[X]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión tres.
- d) La suma de dos subespacios distintos es, a veces, lo mismo que la unión de los mismos.

0,5 × 4 = 2 puntos

2. Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si A representa la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en las bases canónicas (tanto en el espacio de llegada como de salida), encuentra bases B_1 y B_2 de modo que la matriz de la misma aplicación $M_{B_1, B_2}(f)$ en dichas bases sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ¿Son únicas dichas bases? Razona la respuesta.

1 × 2 = 2 puntos

3. Construye (especificando con respecto a qué bases estás escribiendo la matriz que representa tu aplicación), si es posible, una aplicación lineal con las condiciones pedidas en cada uno de los casos siguientes:

- (a) una aplicación lineal inyectiva de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}(f)$ sea el eje x .
- (b) una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que cualquier vector de la forma (x, x, y, y) se transforme en el vector $(1, 1, 1, 1)$, es decir $f(x, x, y, y) = (1, 1, 1, 1)$ para cualquier valor de x, y .
- (c) un isomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (1, 1), f(1, 2) = (2, 2)$
- (d) una aplicación lineal suprayectiva $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = (1, 1)$.

0,5 × 4 = 2 puntos

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe

- $f(e_1) = e_1 + e_3$
- $\ker(f) = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_4 \rangle$
- $e_2 + e_3$ es un vector propio
- los únicos autovalores son 0 y 2

Se pide:

- (a) Determina la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
(b) ¿Es f diagonalizable? ¿Cuál es el polinomio característico de f ?

$2 \times 1 = 2$ puntos

5. Contesta a las siguientes cuestiones:

- Demuestra que si u, v son dos vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$ provisto con el producto escalar estándar, entonces la norma de $u + 2v$ es $\sqrt{5}$.
- Demuestra que si S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, provisto con el producto escalar estándar, entonces $(S^\perp)^\perp = S$.
- Calcula, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar estándar, la imagen de $(1, -1, 1)$ en la proyección ortogonal sobre U , esto es $p_U(1, -1, 1)$, donde U es la recta $\{x - y + z = 0, x + y + z = 0\}$.
- Sea $u = (2, 1) \in \mathbb{R}^2$ y sea s la simetría de eje la recta $\langle u \rangle$. Halla la imagen del vector $(1, 1)$ por dicha simetría.

$0,5 \times 4 = 2$ puntos.

Examen de Algebra Lineal

8 de septiembre, 2011

Los alumnos que deban repetir el examen de octubre pasado deben contestar la pregunta 1. La parte correspondiente al segundo parcial corresponde a las preguntas 2 y 3. La materia del último bloque de la asignatura corresponde a las preguntas 4 y 5.

1. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- La ecuación paramétrica del subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^4$, $S = \langle \{(0, 1, 1, 0), (0, 2, 2, 2)\} \rangle$ es $\{x_1 = 0, x_2 = \lambda + \mu, x_3 = \mu, x_4 = \mu\}$.
- Una base del subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ definido por $\{x_1 = x_4\}$ es $\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}$.
- En $\mathbb{R}_3[X]$ hay sólo un subespacio de dimensión uno.
- La unión de dos subespacios distintos es, a veces, otro subespacio.

0,5 × 4 = 2 puntos

2. Sean $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ los $\mathbb{R}$ -espacio vectoriales de dimensión 2 y 3, respectivamente; $B_1 = \{e_1, e_2\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sus correspondientes bases canónicas; y sea f un homomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(v_1) = e_1 + e_2$, $f(v_2) = e_1 + e_2$. También se sabe que $\ker(f)$ contiene al vector $v_1 + v_2 + v_3$. Se pide

- calcular, respecto de las bases canónicas dadas, las coordenadas de los vectores de una base de $\text{Im}(f)$ y de $\ker(f)$.
- hallar la matriz de f respecto de las bases $B'_1 = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_3\}$ en el espacio de salida y $B'_2 = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ en el de llegada. Se pueden dejar indicadas las operaciones matriciales que correspondan.

1 × 2 = 2 puntos.

3. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- Ninguna aplicación lineal de $M_{2,2}$ en $\mathbb{R}^3$ puede ser inyectiva.
- La derivada segunda $p(X) \rightarrow p''(X)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$.
- La imagen de la aplicación lineal $(x, y) \rightarrow (x + y, x + y, y)$ de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el subespacio $\{x + y = 0, x + y = 0, y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
- La composición de aplicaciones lineales $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de cualquier base tiene siempre determinante cero.

0,5 × 4 = 2 puntos

Continúa por detrás

4. Dí razonadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

- a) Si $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ y su polinomio característico $p_A(x) = x^2(x-1)(x-3)$ entonces A tiene rango 2.
- b) Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ y $(A - I_n) * (A + 2I_n) * (A + I_n) = 0_n$, entonces A es diagonalizable.
- c) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$, del que se sabe que $\dim(\ker(f-I)) > 1$ y que $\text{mcd}\{m_f(x), (x-2)(x-3)^2\}$ tiene dos raíces distintas, donde $m_f(x)$ es el polinomio mínimo de f . Entonces f es diagonalizable.
- d) Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ y su polinomio mínimo es $x(x-2)$ entonces $\mathbb{R}^3$ es la suma directa de $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$.

0,5 × 4 = 2 puntos

5. Dí razonadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

- a) Si u y v son dos vectores de $\mathbb{R}^n$ ortogonales, entonces $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$.
- b) Si $U \subset \mathbb{R}^3$ es el plano $x-y+z=0$ y v es el vector $(3,1,4)$, entonces la proyección ortogonal sobre U de v , $p_U(v)$ es el vector $(2,3,1)$.
- c) Si f es una isometría del plano $\mathbb{R}^2$ que no tiene un vector propio, entonces es necesariamente una rotación.
- d) Si s es la simetría del plano $\mathbb{R}^2$ de eje la recta $x-2y=0$, y s' es la simetría de eje la recta $2x+y=0$, entonces $s' \circ s$ tiene como matriz en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0,5 × 4 = 2 puntos

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mis directores del Trabajo Fin de Máster, D. Tomás Recio y Dña. Claudia Lázaro su apoyo, sus recomendaciones, críticas y sugerencias basadas en su profundo conocimiento del tema, sin los cuáles no habría sido posible la realización de este proyecto.

Igualmente, quiero expresar mi agradecimiento al Departamento de Matemáticas del IES y a la dirección del mismo. Especialmente a Dña. Anabel Fernandez, mi tutora durante el Prácticum, por su gran ayuda e interés. Y a D. Jose Luis da Vila, profesor de segundo curso de Bachillerato, por su colaboración en el presente TFM.

A todos ellos, muchas gracias.