

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica

E.T.S. de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación

MODELO PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DE TRANSMISIONES PLANETARIAS

TESIS DOCTORAL

Autor: D. Miguel Iglesias Santamaría

Directores: Dr. D. Alfonso Fernández del Rincón

Dr. D. Fernando Viadero Rueda

Santander, noviembre 2013

A Arturo, Conchita, Pedro y Trini
A Conchi, José, Marta, María y Daniel

Agradecimientos

A Fernando Viadero, por fijar el rumbo y capitanear;

a Alfonso Fernández, por su afinada visión y trabajo en la cofa;

a José Luis, por lobo de mar;

a Pablo, por mantener la bodega llena de víveres;

a Alberto y Rubén, porque remar solo es más duro;

a Ana, por mantener el faro encendido.

Al resto de compañeros del Área de Ingeniería Mecánica, y a mis familiares y amigos que han tenido que soportar mis males de mar.

Inoltre, vorrei esprimere la mia sincera gratitudine al professore Dalpiaz ed Emiliano Mucchi, per la loro amichevole accoglienza, grande disponibilità e gentile cortesia dimostratemi nel periodo fatto all'Università degli Studi di Ferrara.

Abstract

Gear transmissions can be found in the majority of power transformation machinery. Despite the high degree of evolution in this field, the demand for increasingly efficient and reliable designs and the need for condition maintenance tools requires a better knowledge of these systems. In response to this need for knowledge on gear transmissions, the computational modeling has emerged as a major research line.

Among the variety of existing transmissions, planetary gears stand out for their compactness and lightness and a number of additional features such as coaxiality, variable gear ratio and symmetry of forces in the central members. Being widely used in all kinds of applications, planetary transmissions have been given special attention in the modeling research line.

In this Thesis a dynamic model of spur gear planetary transmission is developed, with some enhanced capabilities over the existing models. The model can be used with any geometry of involute gear, including corrected wheels or profiles with tip or bottom relief. Moreover, the model manages multiple contacts in both directions, in and out of the line of action.

The algorithm used for the calculation of contact forces is based on a hybrid method that combines finite element models and analytical formulations, the latter used for calculation of local deformation. The model takes into account the coupling of the deformation through the flexibility of the wheel bodies, solving all the individual meshes in the planetary transmission jointly. It is also presented a model for the calculation of bearings contact forces, which includes the ability to use ball and roller elements.

All modeling elements have been integrated into a complete planetary transmission model of lumped parameters with dynamic capabilities. The

introduction of dissipative forces is also considered, friction as well as damping due to the lubricant and body deformation.

The usefulness of the developed model is validated through the static and dynamic simulation of a transmission example. Positioning and eccentricity errors in the planets have been also implemented in the model, and different configurations with fixed or floating central bodies has been considered, in order to evaluate their impact in terms of load sharing ratio between the different paths.

Resumen

Los sistemas de transmisión de potencia mediante engranajes forman parte de la gran mayoría de máquinas en las que se realiza una transformación de energía. Pese al alto grado de evolución que presentan las transmisiones mediante engranajes, la demanda de diseños cada vez más eficientes y fiables, así como la necesidad de disponer de herramientas de mantenimiento en condición, exigen una mejora del conocimiento de dichos sistemas. Como respuesta a esta necesidad, una vía de investigación en auge es el modelizado computacional de las mismas.

Entre la gran variedad de transmisiones existentes, los engranajes planetarios destacan como el tipo que presenta una mayor compacidad y ligereza, con una serie de características adicionales como la coaxialidad, variabilidad de la relación de transmisión y simetría de fuerzas en los miembros centrales. Además, las transmisiones planetarias, por ser de uso extendido en multitud de aplicaciones, han sido objeto de especial atención en el mencionado campo de modelizado computacional.

En esta Tesis se ha desarrollado un modelo dinámico plano de transmisión planetaria de dientes rectos, con algunas capacidades mejoradas sobre los modelos actualmente existentes. El modelo desarrollado permite el empleo de cualquier tipo de engranajes con perfil de evolvente, incluyendo ruedas corregidas, tanto en profundidad de tallado como de perfil. Además, el modelo gestiona contactos múltiples, en contraflanco y fuera de la línea de acción.

El algoritmo empleado para el cálculo de las fuerzas de contacto en los engranes se apoya en un método híbrido, que utiliza la superposición de modelos de elementos finitos y formulaciones analíticas. El modelo considera el acoplamiento de las deformaciones a través de la flexibilidad de los cuerpos de las ruedas, resolviendo el problema del engrane planetario en su conjunto,

mediante una matriz de rigidez no diagonal. Se presenta asimismo un modelo de cálculo de fuerzas de contacto en rodamientos, que incluye la posibilidad de uso de rodamientos con elementos rodantes tanto esféricos como cilíndricos.

Todos los elementos de modelizado se han integrado en un modelo completo de transmisión planetaria de parámetros concentrados, con capacidades dinámicas. Se incluye en el mismo el cálculo de fuerzas disipativas, tanto las debidas al rozamiento como aquellas propias del amortiguamiento introducido por el lubricante y la deformación de los dientes.

La utilidad del modelo desarrollado se ha validado mediante la simulación del comportamiento de una transmisión ejemplo, tanto en régimen estático como dinámico. También se han implementado en el modelo de transmisión planetaria errores de posicionamiento y de excentricidad en los planetas, así como la utilización de configuraciones con cuerpos centrales fijos o flotantes, evaluando sus efectos con especial atención al reparto de carga entre los distintos planetas.

Índice

Agradecimientos	I
Abstract	III
Resumen	V
Índice	VII

PARTE I

1. Introducción.....	3
1.1. Motivación.....	3
1.2. Objetivos	5
1.3. Estructura de la memoria.....	6
2. Antecedentes.....	9
2.1. Introducción	9
2.2. Interés de la investigación sobre transmisiones planetarias: Tendencia al modelizado	12
2.3. Estado del arte en modelización de transmisiones mediante engranajes.....	15
2.3.1 Descripción de la geometría de las ruedas y determinación de los puntos o áreas de contacto.....	15

2.3.2	Definición de los esfuerzos de contacto	18
2.4.	Estado del arte en modelización de transmisiones planetarias	27
2.5.	Selección de la alternativa de modelizado	32

PARTE II

3.	Geometría del problema de una transmisión mediante engranajes.....	37
3.1.	Introducción	37
3.2.	Definición geométrica de los perfiles de las ruedas.....	37
3.2.1	Herramientas de tallado	38
3.2.2	Envolvente y condición de engrane	40
3.2.3	Perfil de las ruedas.....	43
3.2.4	Socavamiento y sobrecorte	46
3.2.5	Redondeo en la punta de los dientes.....	47
3.3.	Localización de puntos potenciales de contacto y cálculo de los solapamientos geométricos	49
3.3.1	Contacto entre flancos de diente con perfil de evolvente.....	50
3.3.2	Contacto entre flancos de diente con redondeo de punta	53
3.3.3	Selección del tipo de contacto	60
3.3.4	Múltiples perfiles en contacto y contacto inverso	62
3.3.5	Modificaciones de perfil.....	66
4.	Procedimiento para el cálculo de las fuerzas de contacto en engranaje y rodamientos	71
4.1.	Introducción	71
4.2.	Cálculo de las deformaciones estructurales.....	73
4.2.1	Acoplamiento de deformaciones entre dientes adyacentes	74
4.2.2	Modelo de elementos finitos para el cálculo de la deformación estructural.....	75
4.2.3	Deformación estructural: matrices de flexibilidad.....	80
4.3.	Cálculo de las deformaciones locales	84

4.4. Composición de deformaciones y obtención de los esfuerzos de contacto.....	86
4.4.1 Acoplamiento de deformaciones entre engranes.....	88
4.4.2 Resolución del problema de contacto.....	92
4.5. Formulación del rodamiento.....	98
4.5.1 Antecedentes de modelizado y planteamiento.....	99
4.5.2 Relaciones cinemáticas.....	101
4.5.3 Obtención de la rigidez de contacto.....	103
4.5.4 Esfuerzos de contacto.....	106

PARTE III

5. Modelo de transmisión planetaria: validación e integración.....	111
5.1. Introducción.....	111
5.2. Transmisión tipo.....	112
5.2.1 Capacidad de carga de los engranajes utilizados.....	112
5.3. Validación de los esfuerzos de contacto.....	114
5.3.1 Error de transmisión y rigidez de engrane.....	116
5.3.2 Efecto del acoplamiento de las deformaciones entre dientes..	121
5.3.3 Reparto de fuerzas entre dientes.....	122
5.3.4 Comparativa hipótesis fuerzas de contacto.....	123
5.3.5 Conjunto sol-planeta-corona.....	130
5.4. Integración del modelo de engrane en la transmisión planetaria.....	136
5.4.1 Reparto de carga.....	137
5.4.2 Configuraciones empleadas.....	139
5.4.3 Efecto del acoplamiento de deformaciones.....	147
6. Modelo de transmisión planetaria: comportamiento en presencia de defectos.....	149
6.1. Introducción.....	149
6.2. Errores en transmisiones planetarias.....	150
6.2.1 Errores de posicionamiento de planetas.....	150

6.2.2	Errores de excentricidad en los planetas	153
6.3.	Comportamiento de la transmisión planetaria en presencia de errores de posicionamiento	154
6.3.1	Error de posicionamiento tangencial con configuración fija...	154
6.3.2	Error de posicionamiento radial con configuración fija.....	159
6.3.3	Error de posicionamiento con configuración flotante	160
6.4.	Comportamiento de la transmisión planetaria en presencia de errores de excentricidad	163
6.4.1	Error de excentricidad con configuración fija.....	164
6.4.2	Error de excentricidad con configuración flotante	166

PARTE IV

7.	Modelo dinámico de transmisión planetaria.....	171
7.1.	Introducción	171
7.2.	Fenómenos disipativos.....	172
7.2.1	Velocidades relativas	172
7.2.2	Fricción	174
7.2.3	Amortiguamiento	177
7.3.	Formulación de las ecuaciones dinámicas.....	182
7.4.	Implementación del modelo en el entorno SIMULINK	186
7.5.	comportamiento dinámico de la transmisión planetaria.....	188
7.5.1	Descripción de los distintos casos simulados	188
7.5.2	Linealización del modelo. Modos y frecuencias	189
7.5.3	Sol flotante vs sol rodamientos	194
7.5.4	Influencia del nivel de carga.....	198
7.5.5	Errores en los planetas	201
7.5.6	Influencia de la fricción	205
7.5.7	Influencia de las correcciones de perfil	208

PARTE V

8. Contributions, conclusions and future work.....	213
8.1. Contributions.....	213
8.2. Conclusions.....	215
8.3. Future work.....	218
8. Contribuciones, conclusiones y trabajo futuro	219
8.1. Contribuciones.....	219
8.2. Conclusiones	221
8.3. Trabajo futuro.....	224
Bibliografía.....	227

Parte I

Capítulo 1

Introducción

1.1. MOTIVACIÓN

Los sistemas de transmisión de potencia mediante engranajes forman parte de la gran mayoría de máquinas en las que se realiza una transformación de energía. Como consecuencia, las sucesivas innovaciones y evoluciones introducidas en estos sistemas han tenido un enorme impacto a lo largo de la historia, mejorando el funcionamiento de innumerables dispositivos. Por todo ello, las transmisiones mediante engranajes forman parte de un grupo de sistemas mecánicos altamente desarrollados.

Sin embargo, la incesante exigencia en la mejora de prestaciones, en términos de par, velocidad, compactidad y coste de producción, supone una demanda constante de rediseño y estudio en profundidad de las transmisiones. Además, a estos componentes se pueden imputar el mayor número de averías y fallos inesperados en muchas máquinas, lo cual añade un componente económico de gran impacto. En consecuencia, el mercado de transmisiones actúa en dos direcciones: por un lado exigiendo transmisiones más duraderas y fiables, y por otro lado demandando herramientas que faciliten el mantenimiento basado en la condición de las instalaciones, minimizando las paradas y aumentando la disponibilidad y productividad.

Se plantea por lo tanto, pese al alto grado de evolución de las transmisiones, la necesidad permanente de mejora en el conocimiento de las mismas, enfocado hacia la obtención de diseños cada vez más eficientes y fiables, así

como hacia el desarrollo de herramientas de mantenimiento, capaces de describir el estado de la maquinaria y proporcionar previsiones de fallo.

Como respuesta a esta demanda, dos líneas paralelas han liderado la investigación en este campo. En primer lugar las transmisiones mecánicas han sido sometidas a exhaustivos controles y campañas de medida, con el objeto de obtener relaciones entre diseño y comportamiento. Como consecuencia, han aparecido valiosas herramientas de mantenimiento, apoyadas en este conocimiento y en el tratamiento de la señal vibratoria de las transmisiones. En cuanto a la segunda línea de investigación para la mejora del conocimiento de transmisiones, se encuentra el modelizado de las mismas, tanto analítico como computacional o híbrido.

Mientras que el primero de los planteamientos (campañas experimentales y mediciones) se apoya únicamente en las consecuencias de un diseño sobre el comportamiento, el segundo (modelizado) trata de dar respuesta a las causas que provocan el comportamiento de la transmisión, simulando el mismo e intentando reproducir los fenómenos subyacentes. Por lo tanto, parece razonable afirmar que, si bien ambos procederes son valiosos y aportan información complementaria, el modelizado de transmisiones responde de manera más adecuada al por qué de su comportamiento. De manera adicional, la mejora en la capacidad computacional de las herramientas a disposición de los investigadores ha contribuido a potenciar el interés reciente en el modelizado, al hacer posible la construcción de modelos cada vez más complejos y con un mayor número de características.

Este trabajo de Tesis Doctoral se enmarca dentro de una línea de investigación desarrollada en los últimos años por el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria sobre modelizado de transmisiones, con resultados publicados en [Fernández, 2010], [Fernández, 2013a] y [Fernández, 2013b]. Dentro de las líneas futuras de trabajo propuestas en la Tesis Doctoral de Fernández del Rincón, precursora de la investigación que se presenta en esta memoria, figuran entre otras la extensión del procedimiento de modelizado a ruedas interiores, así como la implementación de transmisiones mediante engranajes de tipo no ordinario, como los trenes planetarios. Asumiendo dicha propuesta, la presente Tesis aborda tales cuestiones, con los objetivos parciales que se detallan a continuación.

1.2. OBJETIVOS

Como objetivo primero y esencial, resumen de la propuesta de investigación inicial sobre la que se fundamentó este trabajo de Tesis, figura la mejora del conocimiento en transmisiones planetarias por medio del modelizado de las mismas. El desarrollo del modelo constituye además un objetivo en sí mismo, dado que la generación de nuevo conocimiento vendrá ligada no sólo al proceso razonado de planteamiento del modelo, sino también al futuro uso que se haga del mismo como herramienta de diseño y simulación.

Como posibles tareas a acometer durante el proceso se plantearon los siguientes objetivos parciales:

- Confección de una herramienta para la generación de perfiles de engranajes interiores, con capacidad de trazado de la trocoide de enlace del diente. Dicha herramienta ha de presentar la posibilidad de introducir correcciones de tallado, a fin de dotar al modelo de la máxima flexibilidad de simulación en cuanto a las ruedas a emplear.
- Elaboración de una herramienta de análisis del problema geométrico de contacto en engranes interiores, con la posibilidad de identificación de puntos potenciales y cálculo de las distancias de contacto simultáneamente en un número indeterminado de parejas, tanto en contacto directo como inverso.
- Integración de las herramientas geométricas anteriores en un modelo de cálculo de las fuerzas de contacto en engranajes, introduciendo la capacidad de acoplamiento entre deformaciones de la transmisión planetaria y resolviendo un único sistema de ecuaciones interdependientes para todos los engranes, tanto exteriores como interiores.
- Ampliación y mejora del modelo de cálculo de fuerzas de contacto de rodamientos presentado en [Fernández, 2010], incluyendo elementos con contacto lineal.
- Formulación de un modelo de transmisión planetaria con capacidades dinámicas, que recoja e integre las herramientas anteriores junto con dos modelos de cálculo de fuerzas de rozamiento y amortiguamiento, ampliados y extendidos para su uso en ruedas interiores.

- Incorporación de defectos propios de las transmisiones planetarias: errores de posicionamiento de planetas y excentricidad, así como la inclusión de correcciones de perfil.

Además de los objetivos anteriores, de carácter meramente constructivo, se plantearon también como posibles metas la verificación y validación del funcionamiento del modelo por dos vías diferentes:

- Análisis razonado de resultados del modelo de transmisión. Simulaciones en régimen estático y dinámico. Comparativa con bibliografía.
- Verificación experimental mediante banco de ensayos.

Tal como se presenta a lo largo de esta memoria, una inmensa mayoría de los objetivos propuestos fueron cumplimentados satisfactoriamente. En cuanto al último de los mismos (la verificación experimental), si bien sus fases iniciales se han comenzado en paralelo con la etapa final de este trabajo, quedó definitivamente fuera del alcance de la Tesis y se incluye como propuesta de trabajo futuro con la que continuar la línea de investigación.

1.3. ESTRUCTURA DE LA MEMORIA

Esta memoria de Tesis se estructura en 5 partes, la primera y última de las cuales contextualizan el trabajo y resumen los resultados y aportaciones, siendo el bloque central formado por las partes II, III y IV el que configura el grueso de la labor desarrollada.

La Parte I se subdivide en dos capítulos en los que se explica el fundamento del trabajo. En el presente *Capítulo I: Introducción*, se describe la motivación, los objetivos y la estructura de la memoria. En el *Capítulo II: Antecedentes* se presentan las transmisiones planetarias, objeto de la investigación, justificando el interés que despierta su investigación. Posteriormente se presenta a modo de contexto un resumen detallado del estado de conocimiento actual en modelizado de transmisiones mediante engranajes, tanto desde un punto de vista inespecífico como desde la concreción del modelizado de trenes planetarios. Como conclusión del *Capítulo II*, se justifica la metodología de modelizado adoptada en este

trabajo, mediante un apoyo razonado en el estado del arte expuesto anteriormente.

La Parte II expone y desarrolla los distintos elementos de modelizado empleados. En el *Capítulo III: Geometría del problema de una transmisión mediante engranajes*, tal como su título sugiere, se aborda la geometría del contacto entre perfiles de diente. Sirve como base fundamental para lo expuesto en el *Capítulo IV: Procedimiento para el cálculo de las fuerzas de contacto en engranaje y rodamientos*, donde se detalla el modelo adoptado para la formulación de los esfuerzos de contacto, tanto para el caso de engranajes como de rodamientos.

Los capítulos *V Validación e integración* y *VI Comportamiento en presencia de defectos* conforman la Parte III, en la que se realiza una validación del modelo por medio de análisis cuasiestáticos, para posteriormente presentar el efecto sobre el reparto de carga de los dos tipos más comunes de error en transmisiones planetarias.

La Parte IV incluye el *Capítulo VII, Modelo dinámico de transmisión planetaria*, en el que se integran todos los elementos de modelizado para conformar un modelo dinámico de transmisión, introduciendo las consideraciones adicionales necesarias (amortiguamiento y rozamiento). Para finalizar, se presentan una serie de resultados dinámicos escogidos como más representativos de la capacidad de simulación del modelo desarrollado.

Como cierre de la memoria de Tesis, en la Parte V se incluye el capítulo de conclusiones, con la relación de las aportaciones más significativas realizadas en el transcurso del trabajo de investigación, así como un último capítulo en el que se recoge la bibliografía referenciada a lo largo de todo el documento.

NOTA ACLARATORIA: La Universidad de Cantabria, en la cual se deposita esta Tesis Doctoral, recoge en los artículos 37 y 38 (CG 26/9/11) de su Normativa de Estudios de Doctorado los Requisitos para la Mención Internacional en doctorados regidos por reales decretos anteriores al RD 99/2011. Dicta como requisito que “*parte de la tesis doctoral, al menos el resumen y las conclusiones, se haya redactado y sea presentado en una de las lenguas habituales para la comunicación científica en su campo de conocimiento, distinta a cualquiera de las lenguas oficiales en España*”. Por ello, tanto el resumen como las conclusiones presentadas en esta Tesis se encuentran escritos en inglés, con su correspondiente traducción al español.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. INTRODUCCIÓN

Los engranajes planetarios, también llamados engranajes epicicloidales, son un tipo de transmisiones mecánicas de uso muy extendido, consistente en un cierto número de engranajes externos que rotan engranando alrededor de otro engranaje externo central. A esta rueda central se la denomina sol, estableciendo una analogía en la que las ruedas que rotan alrededor de la primera reciben el nombre de planetas. Los planetas se encuentran por lo general unidos entre sí mediante un bastidor común denominado portaplanetas, que tiene la capacidad de rotar a su vez respecto al centro del sistema, permitiendo a los planetas realizar una órbita. En su configuración habitual, las transmisiones planetarias incluyen una tercera rueda, que engrana internamente con los planetas y envuelve al conjunto. A lo largo de la memoria, al portaplanetas se le denominará de manera indistinta como porta, portaplanetas o portasatélites.

Una de las ventajas fundamentales que las transmisiones planetarias presentan frente a las alternativas más convencionales es su compacidad. Para elevados niveles de par, una posibilidad de diseño de transmisión mecánica mediante engranajes es el aumento del tamaño de las ruedas, ensanchándolas y ampliando por lo tanto su capacidad de carga. Esto no siempre es práctico o posible, y una mejor solución plantea la posibilidad de dividir la carga en un cierto número de ramas o vías, repartiendo así la potencia entre varios piñones. De esta manera, la carga por unidad de ancho

de diente permanece constante, mientras que el par total transmitido se multiplica. Las transmisiones planetarias (Figura 1) surgen de este planteamiento, logrando ser uno de los tipos de transmisión más compactos y ligeros de transmisiones mediante engranajes [Smith, 1999].



Figura 1. Montaje de componentes de una transmisión planetaria

Los engranajes planetarios, por su configuración, permiten además que la entrada y salida de la potencia se realice de manera coaxial, lo que aporta aún mayor grado de compacidad, especialmente cuando es necesario conectar varias etapas de reducción o multiplicación sucesivas. Otra de las ventajas que presentan los engranajes planetarios es que se pueden obtener diferentes relaciones de transmisión de la misma caja, simplemente intercambiando los elementos de entrada, salida y elemento fijo.

Por otra parte, los engranajes planetarios se diseñan con simetría axial, con planetas equiespaciados angularmente. Esta combinación de factores resulta en que las componentes radiales de las fuerzas de engrane sobre los elementos centrales (portasatélites, sol y anillo) se anulan entre sí, teniendo como consecuencia final que los esfuerzos sobre los apoyos son teóricamente

inexistentes, y en cualquier caso mucho menores que en una transmisión ordinaria. Esto permite además que dichos elementos centrales puedan prescindir de soporte radial, flotando libremente alrededor de su posición de montaje y absorbiendo con este desplazamiento parte de las consecuencias que los errores y defectos en la fabricación y montaje pueden tener sobre la transmisión.

Debido a las ventajas mencionadas, pueden encontrarse aplicaciones de engranajes planetarios en todo el espectro tecnológico. Como campo de aplicación de más impacto, se encuentra la industria automovilística, donde los engranajes planetarios están presentes en todas las tipologías de vehículos con caja de cambio automática. Cualquiera de estos vehículos puede contener de 2 a 4 transmisiones planetarias, simples o compuestas. Con la introducción en los últimos años de la electricidad como fuente de energía en muchos vehículos, las modificaciones introducidas en la mecánica de los automóviles no han supuesto la eliminación del engranaje planetario, sino que le han proporcionado un papel si cabe aún más importante, al emplearse como dispositivo repartidor de potencia en los vehículos híbridos [Meisel, 2006].

Fuera del ámbito automovilístico, los engranajes planetarios se emplean de manera habitual como elemento de reducción final de la transmisión en tractores y maquinaria agrícola. En la campo aeroespacial, las naves con motor de tipo turbohélice incluyen también reductoras planetarias, así como la inmensa mayoría de helicópteros (turboejes).

Con el auge de la generación de energía eólica durante las últimas décadas, las cajas de engranajes planetarios han tenido un papel muy relevante como elemento crítico de los aerogeneradores (en este caso como elemento multiplicador). Los engranajes planetarios se encuentran también regularmente en equipamiento minero así como en otras aplicaciones industriales.

En vista de todo lo anterior, parece lógico que las transmisiones planetarias hayan despertado un especial interés durante las últimas décadas. Como consecuencia, una fracción importante de la investigación en transmisiones mediante engranajes se ha dedicado al estudio y mejora del conocimiento de las transmisiones planetarias.

2.2. INTERÉS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE TRANSMISIONES PLANETARIAS: TENDENCIA AL MODELIZADO

A pesar de todas sus ventajas, las transmisiones planetarias no son ajenas a las dificultades propias del funcionamiento de estos sistemas mecánicos. Presentan comportamientos de fallo similares al resto de transmisiones mediante engranajes, pero incluyen además problemas singulares debidos a su especial configuración.

Los fallos en engranajes planetarios suelen estar asociados a fatiga de los dientes por flexión y fatiga en la corona (especialmente cuando ésta se diseña con baja rigidez). También presentan fallos por picaduras debido a la fatiga superficial de contacto y diversos problemas relacionados con los rodamientos de los planetas [Ligata, 2007]. Estos problemas en ocasiones se ven agravados debido a que los engranajes montados en transmisiones planetarias a menudo han sido diseñados utilizando criterios propios de engranajes externos de transmisiones ordinarias, obviando las condiciones especiales de funcionamiento de los planetarios. Las transmisiones planetarias presentan un comportamiento dinámico distinto del asociado a las transmisiones ordinarias. De esta manera, las tensiones y los factores de amplificación dinámica a utilizar en el diseño de los engranajes para transmisiones planetarias han de diferir de aquellos empleados en el diseño de transmisiones ordinarias.

La investigación en engranajes planetarios se ha centrado desde sus orígenes en las acciones experimentales de medida de las señales vibratorias [Hidaka, 1979], así como en el desarrollo de modelos que sean capaces de proporcionar información sobre el comportamiento sin necesidad de medición. La existencia y mejora progresiva de herramientas capaces de modelar y simular el comportamiento dinámico de dichas transmisiones [Özgüven, 1988a], tiene el potencial de permitir un proceso de diseño más rápido y seguro, ahorrando en costes de prototipado y ensayo, llegando a la solución óptima en un menor número de etapas.

Como el resto de subsistemas mecánicos, una transmisión planetaria ha de alcanzar unos umbrales de fiabilidad y durabilidad satisfactorios, más o menos críticos en función del tipo de aplicación. La consecución de estos umbrales de fiabilidad y durabilidad viene determinada tanto por los procesos de diseño y fabricación empleados, como por las acciones de

mantenimiento ejecutadas durante el funcionamiento en servicio [Jardine, 2005]. En el caso de las transmisiones por engranajes, las distintas estrategias de mantenimiento han evolucionado desde el mantenimiento correctivo al mantenimiento enfocado a la predicción, hasta llegar en la actualidad al cada vez más extendido uso del mantenimiento en condición [Heng, 2009].

Como se ha presentado anteriormente, varias de las aplicaciones de los engranajes planetarios son críticas dentro del sistema en el que se encuentran. Críticas desde el punto de vista de la seguridad de las personas, en el caso de las aeronaves y helicópteros, y críticas desde un punto de vista económico, en aplicaciones tales como la aerogeneración eléctrica. En el primer caso, se ha constatado que aproximadamente un 15% de los accidentes de helicóptero tiene su origen en algún tipo de fallo mecánico vinculado con la transmisión [Liptak, 2005]. Este hecho ha motivado la implantación de sistemas de monitorizado de la señal vibratoria que diagnostiquen y pronostiquen el estado en condición de los engranajes en las flotas de helicópteros [Antolick, 2010], detectando por ejemplo grietas en los dientes o en los portaplanetas [Blunt, 2006]. En el caso de las turbinas eólicas, la caja multiplicadora (con una o varias etapas planetarias) es responsable del 25% del tiempo de parada por mantenimiento [Ribrant, 2005]. La magnitud de las pérdidas ha llevado a las entidades aseguradoras de este tipo de instalaciones a exigir la implementación de sistemas de mantenimiento en condición, que deben ser certificados por alguna entidad externa. Este aspecto relativo a la importancia de la fiabilidad en las aplicaciones más críticas de las transmisiones planetarias ha supuesto un aumento en la presión sobre la investigación y desarrollo del conocimiento de las mismas.

Dentro de las técnicas de mantenimiento en condición se encuentra el análisis de la señal vibratoria [Meltzer, 2003a; Barszcz, 2009], particularmente interesante en el caso de las transmisiones mediante engranajes planetarios. La aplicación de estas herramientas de mantenimiento en condición suponen la ejecución de tres fases diferenciadas: detección, diagnóstico y pronóstico. El primer cometido de un sistema de mantenimiento en condición consiste en detectar la existencia de un problema. Esta detección suele producirse de forma automática mediante el establecimiento de unos niveles de alarma en los indicadores vinculados con el funcionamiento de la transmisión. Una vez detectada la posible presencia de un defecto, la siguiente fase requiere la

identificación del tipo de fallo y el elemento afectado, cuantificando la importancia desde el punto de vista de la seguridad y de las consecuencias que el fallo puede tener en la integridad de la máquina. Por último, es preciso decidir cuáles son las acciones a adoptar para corregir el defecto, y para ello es preciso disponer de una estimación del tiempo de funcionamiento que resta antes de que la evolución del defecto dé lugar a un fallo no deseado del sistema, cuyo coste en términos económicos o de seguridad no pueda ser asumido.

Las tareas de detección/diagnóstico en transmisiones planetarias han recibido atención por parte de un gran número de investigadores [Zhi-Ling, 2012; Bartelmus, 2009; Meltzer, 2003b; Chen, 2012], habiéndose desarrollado diversos procedimientos y técnicas de diagnóstico automatizadas basadas en aplicaciones de diverso tipo (sistemas expertos, lógica fuzzy, redes neuronales, etc.). Sin embargo, la capacidad de estos métodos para reconocer, localizar y cuantificar el defecto, queda en ocasiones supeditada a la existencia de datos previos, puesto que esta tarea no es posible si no se dispone de un patrón del comportamiento de dicho defecto, proporcionado por un significativo número de observaciones experimentales previas. Se supedita por lo tanto el conocimiento de la transmisión a la existencia de información previa, por carecer de modelos físicos lo suficientemente fiables como para prescindir de la experiencia real.

Con respecto a la fase de pronóstico, habitualmente se emplean métodos estadísticos de predicción, también apoyados en datos previos [Heng, 2009; Heyns, 2012]. El sistema trata de generar modelos de predicción basados en observaciones previas, aplicando posteriormente métodos de redes neuronales o lógica difusa [Fagang, 2009]. Al igual que sucede con el diagnóstico, estos métodos de prognosis tienen el inconveniente de requerir un gran volumen de datos de sistemas reales en funcionamiento para poder comenzar a realizar pronósticos fiables, con la incertidumbre añadida ante cambios o modificaciones para las que el sistema no está entrenado.

Bien sea empujados por la necesidad de mejorar la etapa de diseño de las transmisiones planetarias en búsqueda de una reducción de costes y una mejora del producto, o bien con el fin de disponer de herramientas de mantenimiento en condición más precisas, el grueso de investigaciones en transmisiones planetarias coinciden en el desarrollo y utilización de modelos físicos, con los que profundizar y ampliar el conocimiento existente. Así, la

tendencia investigadora trata de evitar en la medida de lo posible que el conocimiento sobre transmisiones planetarias se base únicamente en mediciones. Si bien continúan realizándose trabajos de medida experimental, el tratamiento de “caja negra” de las transmisiones planetarias va quedando atrás, debido a la escalada en la capacidad de computación de los equipos, que permite una progresiva mejora en la complejidad y fidelidad de los modelos físicos. Los trabajos experimentales en medida se van enfocando por tanto cada vez más hacia la validación de estos modelos, por encima de su empleo directo en el desarrollo de herramientas puramente estadísticas, no fundamentadas en el comportamiento real de la transmisión.

2.3. ESTADO DEL ARTE EN MODELIZACIÓN DE TRANSMISIONES MEDIANTE ENGRANAJES

En este punto no tendría sentido presentar un estudio del estado del arte en modelización de transmisiones planetarias obviando la investigación en modelos generales de transmisiones mediante engranajes. Dado que todos los modelos de transmisiones planetarias se construyen incorporando las características singulares de este tipo de trenes de engranajes a modelos ya existentes de transmisiones ordinarias, a continuación se va a presentar un resumen de las distintas alternativas y técnicas de modelización más extendidas, atendiendo a dos aspectos fundamentales: la descripción geométrica de las ruedas y la determinación de los esfuerzos de contacto.

2.3.1 Descripción de la geometría de las ruedas y determinación de los puntos o áreas de contacto

El primer problema que se plantea en el modelizado de transmisiones por engranajes es la adecuada descripción de la forma de las ruedas, tanto en cuanto a los flancos teóricos de contacto (perfiles de evolvente) de los dientes, como del resto del cuerpo de la rueda: redondeos de punta, raíz del diente (trocoide), orificio del eje, etc. Esta descripción de la geometría de los elementos tiene una importancia crítica en la determinación de la flexibilidad de los dientes, teniendo como consecuencia un gran impacto sobre cualquier resultado que se quiera reproducir con el modelo: fuerzas de contacto, error de transmisión, etc.

Tanto la descripción geométrica de las ruedas como la localización de los puntos o áreas de contacto podrían enmarcarse dentro de la disciplina comúnmente conocida como teoría de engrane [Litvin, 2004], entendiendo ésta como la rama de la ciencia relacionada con la geometría diferencial, la fabricación, diseño y metrología de engranajes.

En definitiva se trata de determinar la geometría de los perfiles de los dientes, así como la elaboración de las herramientas y los procedimientos para su fabricación y verificación. Actualmente el procedimiento de construcción de los perfiles de los dientes empleado por la mayoría de los investigadores se basa en la propuesta de Litvin [2004]. Este procedimiento se basa en la definición de la geometría de la herramienta de corte del engranaje, que mediante transformaciones matemáticas posteriores (transformaciones de coordenadas e imposición de condiciones de engrane) se emplea para simular el proceso de tallado, obteniendo como resultado la geometría de las ruedas. Una de las ventajas de este método es la definición directa de la trocoide de enlace entre el perfil de evolvente y la circunferencia de fondo, que mediante otros enfoques no siempre es posible determinar. Este procedimiento permite además una gran versatilidad, pudiendo definirse engranajes con correcciones, además de contemplar de manera natural cuestiones como el socavamiento o las interferencias de tallado en general. Se añade además un redondeo en la punta de los dientes, para evitar la singularidad de un contacto en arista. Se han publicado propuestas que tratan de evitar la utilización de las operaciones de transformación de coordenadas [di Puccio, 2005, 2006], pero el enfoque de Litvin continúa siendo de uso mayoritario en los modelos con una mejor definición geométrica.

La determinación de los puntos o áreas de contacto entre perfiles ha sido un problema también abordado por Litvin para engranajes tanto cilíndricos como cónicos [Litvin, 1987]. Siguiendo de nuevo un planteamiento geométrico se impone la condición de tangencia entre perfiles, y teniendo en cuenta la curvatura de las superficies (conocidas a partir del proceso de generación), se determinan las elipses de contacto mediante la aplicación de la teoría de Hertz. Esta metodología se ha aplicado de forma extensa por distintos investigadores con el objetivo de analizar el camino o trayectoria de contacto, y para definir ajustes de fabricación que proporcionen transmisiones con bajo nivel de ruido y vibración, conociéndose bajo la

denominación de análisis de contacto del diente (o bien TCA del inglés *tooth contact analysis*).

Inicialmente los procedimientos de determinación de las áreas de contacto entre dientes de engranajes se limitaban al análisis de la transmisión sin considerar el efecto de la carga, centrándose el interés en el diseño cinemático de los perfiles para minimizar los efectos del ruido y la vibración. Estos planteamientos de análisis del contacto se centran en el desarrollo de herramientas de diseño o síntesis, de forma que sea posible establecer los ajustes en el procedimiento de tallado que permitan conseguir una secuencia de contacto determinada. Este enfoque ha sido abordado en el caso de engranajes cónicos espirales [Argyris, 2002], hipoidales [Zhang, 2007] y engranajes de tornillo sin fin [Seol, 1996]. En estos casos el principal objetivo es conseguir un contacto de tipo puntual, evitando las aristas. La aplicación de esta metodología conduce a la obtención de un sistema de ecuaciones no lineales que requiere un procedimiento de resolución de tipo numérico. De esta forma se obtienen las coordenadas paramétricas de los puntos de contacto correspondientes a cada rueda, así como el giro que una de las ruedas debe experimentar para garantizar el mismo. Algunos autores recurren a otras alternativas, como la obtención de la mínima distancia entre una rejilla de puntos localizados en la superficie de cada diente [Sheveleva, 2007; MacLennan, 2002], de modo que sea posible incorporar el efecto que los errores de construcción del perfil tienen en la ubicación de los contactos [Wink, 2005, 2007]. La influencia en el perfil teórico del diente como consecuencia del desgaste también ha sido considerada proponiendo un procedimiento geométrico específico para el caso de los engranajes cilíndricos de dientes rectos [Wojnarowski, 2003].

La elección del procedimiento para la localización de los puntos de contacto en cada modelo está fuertemente condicionada por el propósito final de dicho modelo. Cuando el objetivo es la realización de simulaciones dinámicas, muchos de los métodos descritos para el análisis del contacto implican un coste computacional inasumible dentro del conjunto del modelo, por lo que es necesario recurrir a simplificaciones apoyadas en la cinemática ideal de la transmisión, que limitan la existencia de los contactos a la línea o plano de engrane [Valex, 1996a; Blankenship, 1995a, 1995b]. En otros casos, se utiliza un análisis de contacto previo para conocer la posición y orientación de los esfuerzos resultantes. Un ejemplo de este tipo de enfoque es la aplicación

desarrollada por Cheng [2001] en el caso de engranajes cónicos hipoidales. Otra posibilidad de simplificación consiste en discretizar los perfiles de los dientes y definir un algoritmo de búsqueda de la mínima distancia [Kasuba, 1981; Vijayakar, 1991].

2.3.2 Definición de los esfuerzos de contacto

De manera análoga a lo presentado para los algoritmos de búsqueda de los puntos y zonas de contacto, el uso final que se vaya a dar al modelo condiciona la elección del proceso de determinación de los esfuerzos de contacto. En algunos casos con el modelo se pretende estudiar de manera detallada los fenómenos locales a nivel del contacto: distribuciones de carga, influencia de la forma de los dientes en dicha distribución, nivel tensional, etc. Cuando se requiere este alto nivel de grado de detalle en el campo local, el planteamiento de definición de los esfuerzos de contacto obliga al mantenimiento de un régimen cuasiestático. Por otra parte, hay modelos que se plantean con el objetivo de conocer la interacción entre los distintos elementos de la transmisión: engranajes, rodamientos, ejes, soportes, lubricación, etc., estudiando el comportamiento dinámico del sistema en su conjunto. En estos casos es preciso alcanzar un compromiso entre la precisión y el esfuerzo computacional, para que la resolución dinámica sea abordable de forma práctica, obligando en definitiva a la adopción de enfoques más globales y con menor grado de precisión acerca del contacto.

A continuación se van a describir los enfoques más habituales dentro de cada una de las dos categorías, prestando especial atención a la estimación de las fuerzas de contacto en el caso de modelos de tipo dinámico, que son los que se ajustan al objetivo de este trabajo de Tesis Doctoral.

2.3.2.1 Esfuerzos de contacto en modelos cuasiestáticos

Dentro del primer grupo de modelos enfocados a la extracción de resultados en condiciones cuasiestáticas, con especial atención en los fenómenos locales y aspectos relacionados con la distribución de la carga, se encuentran aquellos trabajos basados en la aplicación del Método de los Elementos Finitos. Estos modelos contemplan la construcción completa de una malla que represente cada una de las ruedas. Aspectos como los nodos de interés del mallado y las diferentes posiciones de las zonas de contacto se

determinan en función de un análisis previo del proceso de contacto (TCA). El modelo de elementos finitos resultante se puede resolver mediante un programa de propósito general, empleando las herramientas disponibles para abordar el problema de contacto. Argyris [2002] propuso la construcción de únicamente una porción de los dientes de la rueda y el piñón, considerando empotrado el contorno de la rueda mientras que los dientes del piñón se situaban en superficies rígidas indeformables. Dicho planteamiento fue aplicado inicialmente al caso de engranajes cónicos espirales y posteriormente extendido a otros tipos de engranajes como cilíndricos helicoidales con perfil de evolvente [Litvin, 2003], ruedas de cara con piñón de dientes rectos [Litvin, 2002] o transmisiones mediante tornillo sin fin [Litvin, 2006].

Otros autores han descrito con mayor detalle el proceso de construcción del modelo de elementos finitos, prestando especial atención a la resolución del problema de contacto mediante la utilización de un mallado más denso en las zonas de contacto. Li [2007] presenta un modelo 3D en el que elabora un mallado con mayor densidad en las proximidades a los puntos de contacto. Describe también cómo aborda el problema de contacto mediante la utilización de un algoritmo basado en el método Simplex. Una propuesta similar pero en este caso empleando una aplicación comercial se puede encontrar en los trabajos de Sirichai [1999], exclusivamente para 2D, y de Wang [2003] para 2D y 3D. En ambos casos los autores recurren a la utilización de herramientas automáticas de refinado de la malla mediante el denominado método P para mejorar los resultados.

Brauer presenta en una serie de artículos el procedimiento de construcción de un modelo MEF de rueda cónica [Brauer 2002, 2004], así como su aplicación en el análisis de transmisiones con contacto en ambos flancos. El modelo desarrollado presenta una mayor densidad en las zonas de contacto, de forma que al menos dos elementos se encuentren involucrados. Dicho modelo ha sido extendido por el propio autor a tres dimensiones empleando un procedimiento similar [Brauer, 2005].

En todos estos casos se recurre a la simulación conjunta de la pareja de ruedas que constituyen la transmisión. Este planteamiento exige la resolución de un sistema de ecuaciones de gran tamaño en presencia de no linealidades, requiriendo un elevado esfuerzo computacional. Es por este motivo que la aplicabilidad de dicho enfoque en modelos sea muy limitada por el momento,

especialmente en los casos en los que se busca estudiar la transmisión en su conjunto o la realización de simulaciones dinámicas.

2.3.2.2 Esfuerzos de contacto normal en modelos dinámicos (rigidez de contacto)

El coste adicional que supone la integración de las ecuaciones dinámicas conlleva por lo tanto una necesaria simplificación de los modelos de contacto. Este afán por reducir el peso computacional de los modelos ha derivado en la construcción de modelos de parámetros concentrados con un limitado número de grados de libertad, o bien de tipo multicuerpo [Viadero, 2013], con un mayor o menor nivel de flexibilidad en los distintos elementos. En estos casos, los esfuerzos de contacto se obtienen a partir de la profundidad de penetración, calculada mediante procedimientos geométricos a partir de las posiciones de las ruedas y las propiedades de los perfiles, multiplicada por la correspondiente rigidez de engrane. El valor de esta rigidez se obtiene a partir de un análisis (siempre con un cierto grado de precálculo) de la deformación del diente como consecuencia de la aplicación de una carga. Existen diversas propuestas de tipo analítico, semi-analítico y numérico.

El modelo de rigidez más simple únicamente considera un valor constante igual al valor promedio de la rigidez en un ciclo de engrane [Kharaman, 1993]. Esta alternativa ha sido adoptada en numerosos modelos dinámicos, especialmente cuando el objetivo de los mismos es la estimación de los modos y frecuencias naturales de la transmisión. En otros casos se tiene en cuenta la forma cíclica que adoptará la rigidez como consecuencia de la variación en el número de parejas en contacto, asimilando la rigidez a una onda cuadrada en el caso de engranajes rectos [Lin, 2002a, b], o al sumatorio de una serie de funciones armónicas, tanto en engranajes rectos como en helicoidales [Kasuba, 1981; Theodossiades, 2001]. Aunque este enfoque puede ser de utilidad en determinados casos (análisis de modos y frecuencias), resulta demasiado inespecífico si lo que se desea es profundizar en el conocimiento del comportamiento dinámico de la transmisión.

Fue Lewis en 1892 quién aportó la primera formulación de tipo analítico para la obtención de los esfuerzos de contacto en engranajes, relacionando la carga en un diente con la tensión en la base del mismo. Para ello, consideró el diente como una viga empotrada en un extremo, dando lugar a la conocida

fórmula de Lewis, que con diversas correcciones continúa siendo una herramienta de diseño en la que se fundamentan diversas normas todavía vigentes. A partir de este planteamiento y reduciendo el problema al caso bidimensional, se han desarrollado diversas propuestas de tipo analítico. Weber [1949] obtuvo la deformación en un punto del diente mediante el cálculo de la energía de deformación, considerando los esfuerzos de flexión, axiales y de cortante, así como las deformaciones locales de tipo Hertziano. El modelo de Weber fue ampliado por Attia [1959] mediante la inclusión de la deformación debida al cuerpo del engranaje y el efecto de los dientes adyacentes. Cornell incorporó diversas formas de acuerdo en el entronque del diente con el cuerpo de la rueda [Pintz, 1983].

Yang [1985] por su parte sólo consideró la rigidez de contacto de carácter Hertziano, que posteriormente amplió incluyendo los esfuerzos de flexión y axiales [Yang, 1987]. Umezawa [1984] prestó especial atención a la transición en la rigidez cuando se produce un cambio en el número de parejas de dientes en contacto, planteando diversas funciones para representarlo. En estas propuestas la deformación debida a los esfuerzos de flexión, cortante y axil se obtiene dividiendo el diente en diversas secciones axiales (rebanadas), de forma que la deformación correspondiente a un determinado corte se obtiene sumando las deformaciones de las secciones anteriores. A esta deformación hay que añadir la debida al contacto, la correspondiente a la rotación del cuerpo de la rueda y el efecto del entronque diente-llanta [Pintz, 1983; Lin, 1988]. Sainsot [2004] propuso un modelo para la inclusión de la deformación del cuerpo de la rueda, indicando la obtención de resultados próximos a los obtenidos mediante la aplicación del MEF.

A partir de los planteamientos anteriores, diversos autores han tratado de conseguir expresiones en forma cerrada que permitan su implementación en modelos dinámicos. Cai [1994] aproximó la rigidez de cada pareja de dientes mediante una parábola, empleando como parámetro un valor promedio K_m , cuya determinación puede llevarse a cabo a partir de la rigidez máxima proporcionada por la norma ISO/DIS 6336-1.2-1990, recientemente actualizada por ISO 6336-2006. Esta expresión solamente proporciona la rigidez de una pareja de dientes, por lo que en el caso de múltiples parejas en contacto éstas serán combinadas como resortes en paralelo, obteniendo la rigidez del conjunto. Esta combinación se lleva a cabo a partir de

planteamientos estrictamente cinemáticos, por lo que las zonas de transición presentan fuertes discontinuidades.

Otros autores han abordado el problema desde el punto de vista numérico, ajustando los valores resultantes mediante expresiones relativamente simples para su implementación directa en ordenador. Un ejemplo de aplicación de esta alternativa es el caso de Kuang [1992], quien a partir de diversos análisis empleando un modelo plano de elementos finitos, propone una formulación simplificada para el caso de engranajes de dientes rectos. Su modelo tiene en cuenta el módulo, el número de dientes y las posibles correcciones en el tallado de las ruedas.

Por lo general, este tipo de formulaciones (Cai o Kuang) no tiene en cuenta las deformaciones acopladas entre dientes adyacentes al de carga cuando éste se ve sometido a esfuerzos de contacto. Este fenómeno tiene consecuencias en el reparto de carga entre las distintas parejas de dientes en contacto, así como en la relación de contacto real efectiva, y resulta en una rigidez de engrane menor. Ebrahimi [2006] trató de definir un modelo simple que incorporase este aspecto, de forma que pudiera ser implementado en aplicaciones de análisis de sistemas multicuerpo de propósito general. Para ello partieron de un módulo específico desarrollado para el código SIMPACK, implementando la rigidez variable de contacto a partir de una función de tipo parabólico obtenida a partir de la norma DIN 3990. Dicho modelo se modificó considerando que cada diente está unido al cuerpo de la rueda mediante un resorte que permite su desplazamiento en dirección tangencial. El principal inconveniente de este enfoque, apuntado por los propios autores, es la determinación del valor de rigidez de dicho resorte, para lo cual proponen la utilización de un modelo de elementos finitos.

Todas estas dificultades que los investigadores se han ido encontrando a la hora de desarrollar procedimientos analíticos que proporcionen una relación lo suficientemente aproximada entre las deformaciones y los esfuerzos de contacto, ha derivado en la cada vez más extendida utilización de un análisis previo mediante elementos finitos. En la mayor parte de estos casos se obtiene la rigidez de engrane a lo largo del contacto entre una pareja de dientes. Algunos ejemplos de esta forma de proceder pueden encontrarse en los trabajos de Howard [2001] para transmisiones ordinarias de engranajes cilíndricos de dientes rectos, o de Chung [2007] para engranajes de tornillo sin fin.

Además de la utilización de modelos de elementos finitos para calcular los valores de la rigidez de engrane, otro enfoque habitual es la consideración de dos fenómenos a distintas escalas en la deformación de los engranajes. Por un lado se encuentra la distribución de carga sobre la superficie de los dientes, y por otro el comportamiento del conjunto de la transmisión que, además de la flexibilidad de los propios dientes y la interacción entre las distintas parejas, puede incorporar los efectos de otros componentes como ejes, elementos de apoyo y la propia carcasa. Considerando esta distinción, lo deseable es disponer de un modelo con buena precisión en cuanto al comportamiento local en la zona de contacto, pero que simultáneamente sea capaz de incorporar los fenómenos más globales. El esfuerzo computacional necesario para proporcionar una buena resolución con respecto a la distribución local de la carga requiere alcanzar un compromiso entre la precisión del modelo local adoptado y los fenómenos globales que se quieran reproducir.

El primer intento de alcanzar este compromiso se debe a Blankenship [1995a], quien propuso un modelo que permite la incorporación de momentos aplicados en la dirección perpendicular al plano de la transmisión en un modelo tridimensional con 6 grados de libertad por rueda. En el modelo de Blankenship la rigidez de engrane es una función dependiente de dos variables: la posición a lo largo de la línea de contacto y el tiempo, que se puede obtener mediante un análisis cuasiestático o bien a través de una medida experimental. Blankenship y Singh asumieron la hipótesis de que el valor de la rigidez era uniforme a lo largo de la línea de contacto, y por lo tanto dependía únicamente del instante (o posición angular) considerado.

Velex [1996a] formuló un modelo válido para engranajes cilíndricos de dientes rectos o helicoidales, en el que cada rueda dentada se asimilaba a un cilindro rígido con 6 GDL. Dichos cilindros se conectan entre sí mediante una serie de resortes asociados a los puntos de contacto potencial y dispuestos en el plano de engrane. De esta forma, cada línea de contacto se discretiza en una serie de celdas donde se pueden incorporar los posibles errores de perfil, paso, excentricidades y desalineamientos. Una vez conocidos los desplazamientos, se obtienen los esfuerzos de cada una de las celdas en que se dividen las líneas de contacto multiplicando dichos desplazamientos por su correspondiente rigidez, considerada uniforme para todas las celdas y posiciones de contacto. Sin embargo, como en el caso de los modelos más simplificados, se presenta de nuevo el problema de la definición del valor

correspondiente a la rigidez de contacto de cada celda. En relación con este aspecto, Vexlex y Maatar indicaron que la rigidez considerada sólo tiene en cuenta la deformación del diente, no incorporando la deformación propia del cuerpo de la rueda, pero en este trabajo no aportaron información alguna relativa al procedimiento de obtención de dicho valor.

Un modelo similar fue propuesto por Eritenel [2005], en el que la rigidez se divide en dos componentes: una que engloba la debida al cuerpo del engranaje, la flexión y la cortadura del diente, y otra debida al contacto, asignada a cada una de las celdas consideradas. La estimación de ambas rigideces se obtiene a partir de un análisis cuasiestático previo, llevado a cabo con una aplicación de elementos finitos desarrollada expresamente para el análisis del contacto entre engranajes.

Un camino similar siguió Ajmi [2005], pero en este caso distinguiendo entre la deformación debida al cuerpo del engranaje, la deformación del diente y la deformación de contacto. La deformación del cuerpo del engranaje se describe mediante un modelo de elementos finitos de tipo viga que considera flexión, torsión y tracción. La deformación del diente se formula como una fundación elástica de acuerdo con la teoría de Pasternak. A pesar de que los autores proponen algunas expresiones simplificadas, la modificación de los parámetros de tallado de las ruedas fuera de los rangos indicados por los citados autores invalidaría su utilización.

Pimsarn [2002, 2003] presentó un método para la estimación de la fuerza de contacto a partir de la interferencia geométrica entre los cuerpos en contacto. Dicho método fue denominado por los propios autores como “*Pseudo-Interference Stiffness Estimation*”, y se conoce con las siglas PISE. El procedimiento consiste en determinar la interferencia geométrica de los cuerpos en contacto. Dicha interferencia se discretiza en una serie de celdas, de forma que la magnitud de interferencia asignada a cada celda se denomina pseudo-interferencia, la cual está a su vez compuesta por dos términos debidos a cada uno de los cuerpos involucrados en el contacto. El método parte de la hipótesis de que la fuerza de contacto correspondiente a cada celda será proporcional a la magnitud de la pseudo-interferencia asignada a dicha celda. Esta relación de proporcionalidad se define mediante dos resortes en serie (uno para cada cuerpo en contacto). La definición de esta rigidez se lleva a cabo mediante un análisis de elementos finitos previo. Es evidente que la precisión del método depende de la calidad de dicho análisis

y de su capacidad para registrar los efectos combinados de deformación local y global. Para ello se parte de una estimación del tamaño de la zona de contacto a partir de la teoría de Hertz, definiéndose un mallado cuyos elementos en la zona situada bajo el punto de aplicación de la carga verifiquen una determinada relación de aspecto, de forma que quede incorporado el efecto de la deformación Hertziana [Pimsarn, 2005a].

La determinación de las pseudo-interferencias se lleva a cabo mediante un algoritmo numérico, basado en la discretización de los perfiles de las ruedas en una serie de puntos. Según los autores el procedimiento requiere un esfuerzo computacional considerablemente inferior a la utilización de un modelo de elementos finitos convencional, estimando una reducción de hasta 2000 veces en el tiempo de cálculo, lo que propicia su aplicación en análisis dinámicos [Pimsarn, 2005a, 2005b]. Hedlund [2007] ha extendido este procedimiento al caso de engranajes helicoidales con el propósito de desarrollar modelos para la predicción del desgaste.

En la línea de incorporar la potencia y fiabilidad de cálculo del MEF a la rigidez de engrane, pero de manera lo suficientemente simplificada como para permitir la realización de simulaciones dinámicas, algunos autores han tratado de elaborar modelos híbridos que combinen las prestaciones del MEF con formulaciones simplificadas para el problema de contacto. En la práctica lo que se propone es distinguir entre deformaciones globales (de carácter lineal) y locales (de naturaleza no-lineal). Así, las deformaciones globales se abordan mediante el modelo de elementos finitos, mientras que las locales se describen mediante una formulación de tipo analítico.

Vijayakar [1991] hizo una propuesta en este sentido, utilizando una formulación basada en la combinación de la solución de Bousinesq para una carga puntual actuando en un espacio semiinfinito y un análisis de elementos finitos tradicional. El modelo parte de la determinación de los puntos de contacto potencial utilizando un método de discretización de los perfiles. Una vez determinados estos puntos, se estiman las dimensiones del área de contacto a partir de la teoría de Hertz, y se obtienen los términos de rigidez que definen el contacto entre dichos puntos, utilizando la descomposición mencionada de la deformación en dos términos: considerar el diente dividido en dos zonas, una interior y otra exterior. La solución de Bousinesq se integra sobre la superficie de contacto y proporciona una descripción de los desplazamientos relativos de la región interior del diente con respecto a la

superficie del mismo. Por otro lado, del análisis mediante elementos finitos se obtiene la deformación elástica del conjunto de la rueda o zona exterior. Por último, el problema de contacto finalmente resultante se resuelve aplicando un procedimiento basado en el método Simplex [Vijayakar, 1988], herramienta utilizada habitualmente en problemas de programación lineal.

Parker [2000a] aplicó la metodología anterior al caso de una transmisión simple mediante engranajes de dientes rectos. Considerando que las deformaciones elásticas se superponen al movimiento de sólido rígido, propusieron la elaboración de un modelo de elementos finitos en un sistema de coordenadas solidario con cada una de las ruedas. La dimensión del sistema de ecuaciones dinámicas resultante se ve por lo tanto incrementada, con el objetivo de incorporar los grados de libertad de sólido rígido. Finalmente, se ensamblan las ecuaciones correspondientes a cada una de las ruedas en contacto, obteniendo un único sistema de ecuaciones. La integración de dicho sistema se lleva a cabo mediante el método de Newmark, transformando de este modo el problema dinámico en uno estático equivalente. De esta forma, la resolución de los problemas estático y dinámico se lleva a cabo empleando un procedimiento idéntico.

Vedmar [1998, 2003] consideró que la masa de cada rueda se encuentra concentrada en su centro geométrico, y aplicaron un procedimiento similar al descrito por Vijayakar, [1991] para la formulación de los esfuerzos de contacto. Siguiendo el trabajo previo de Vedmar [1981] para el caso estático, las deformaciones de los puntos en contacto se dividen en dos términos, uno local y otro global. El término global se refiere a las deformaciones globales del piñón y la rueda, obtenidas a partir de los coeficientes de flexibilidad que relacionan el desplazamiento en un punto de los perfiles de interés cuando se aplica una fuerza en un punto determinado del diente de carga. De este modo se puede tener en cuenta el acoplamiento entre las deformaciones de dientes adyacentes, en función del número de puntos de interés que se hayan seleccionado a la hora de calcular los coeficientes de flexibilidad, que se calculan empleando un modelo de elementos finitos. Por otra parte, el término local de la deformación se obtiene con respecto a un punto situado a una determinada profundidad, empleando la formulación derivada por Weber [1949] para el caso de deformación plana. Frente al modelo de Vijayakar, el modelo de Vedmar evita la obtención de la presión actuante en la zona de contacto. Para ello, se sustituye la discretización del área de contacto y la

integración de la solución de Bousinesq por una formulación analítica en forma cerrada, derivada a partir de la teoría de Hertz. De esta manera, se asume que tanto el área de contacto como la distribución de presiones adoptan una forma predeterminada. Esta consideración, junto con la hipótesis de masas concentradas en lugar de distribuidas, simplifica el problema, a pesar de que en este caso la formulación para la obtención de la deformación local es una función no-lineal dependiente de la fuerza aplicada.

Andersson [2003], extendió el método anterior al caso de transmisiones con engranajes cilíndricos de dientes helicoidales. Para ello consideraron que la línea de contacto se encontraba discretizada en una serie de puntos. Siguiendo un procedimiento similar al descrito anteriormente obtuvieron los esfuerzos de contacto correspondientes a partir de los cuales se calcula la presión de contacto de acuerdo con la teoría de Hertz. El principal inconveniente de esta alternativa es que la formulación analítica adoptada exige que los ejes de giro de las ruedas sean siempre paralelos, pues en caso contrario no sería aplicable. Este hecho limita la aplicación del procedimiento al caso de movimiento plano.

En 2010 Fernández del Rincón [2010], apoyado en un planteamiento similar al de Vedmar, propone un modelo para el cálculo de las fuerzas de contacto en el que se incorpora la posibilidad de contacto en el contraflanco, así como la consideración del acoplamiento de deformaciones entre parejas de dientes adyacentes.

2.4. ESTADO DEL ARTE EN MODELIZACIÓN DE TRANSMISIONES PLANETARIAS

A continuación se presenta, de manera detallada y apoyada en el anterior estudio sobre el modelizado de transmisiones con engranajes ordinarias, la evolución del modelizado dinámico de trenes de engranajes planetarios.

En la década de 1970 el interés en el modelizado dinámico de transmisiones planetarias comenzó a proporcionar los primeros resultados relevantes, con el trabajo de Cunliffe [1974], quien construyó un modelo rotacional con diferentes tipos de elementos de engrane. El más sencillo de todos consistía en una rigidez lineal constante que se empleó para determinar las frecuencias y modos naturales del sistema. Un elemento de engrane más complejo, que incluía una rigidez variable (permitiendo además considerar no linealidades tales como la separación de los dientes causada por la vibración) fue

empleado para obtener mediante integración la respuesta temporal de la transmisión. Una contribución de este trabajo fue la clasificación de los modos de vibración de una transmisión planetaria, en función de su forma y los elementos afectados. Cunliffe subrayó la necesidad de introducir la flexibilidad del anillo, que podía incorporar distintas resonancias. Botman [1976] estudió el contenido modal de un tren planetario de una etapa, empleando un modelo plano de rigidez de engrane constante, encontrando que los modos axisimétricos podían ser especialmente problemáticos, en tanto en cuanto eran susceptibles de ser suprimidos por la rotación del carrier. Hidaka [1979] realizó un estudio muy intensivo tanto desde el punto de vista de modelizado numérico como experimental. Tal y como había anticipado Cunliffe, Hidaka encontró que las deformaciones experimentadas por el engranaje interior tenían un efecto muy importante tanto en las cargas de los dientes como en el reparto de las mismas entre los distintos planetas. Los autores subrayaron también la posibilidad de que el exceso de flexibilidad del engranaje interior pudiera reducir la distancia entre dientes adyacentes, teniendo como consecuencia un aumento de la relación de contacto y la posible ocurrencia de interferencias de funcionamiento. Botman [1979] estudió la influencia del espaciado angular de los planetas sobre las cargas dinámicas inducidas por los errores de excentricidad. Se encontraron diferencias significativas en cuanto a la sensibilidad de la transmisión a este tipo de errores de fabricación, según se emplearan unas u otras configuraciones. En esta línea de investigación sobre el espaciado de los planetas Hidaka [1979] encontró que dicho espaciado también afectaba de manera importante la forma de la órbita del sol. Seager [1975] empleó su modelo con el fin de determinar aquellas condiciones de desfase entre engranes que permitieran la neutralización de ciertos modos de vibración.

A partir de 1980 la investigación en dinámica de transmisiones planetarias se reforzó, continuando varias de las líneas abiertas. Ma [1984] introdujo en un modelo plano errores tanto de excentricidad como de perfil, con el fin de estudiar el reparto de cargas entre planetas. August [1986] encontró que para bajas velocidades las trayectorias del sol eran fundamentalmente de carácter traslacional debido a la rigidez de engrane variable, mientras que para velocidades mayores esas trayectorias se convertían en órbitas de forma mucho más circular. Los resultados dinámicos simulados mostraron que la ausencia de apoyos en el sol (sol flotante) podría no ser una buena solución

de cara a la variación de cargas en los dientes, salvo para rangos muy determinados de velocidad. Macfadden [1985] modelizó y contrastó experimentalmente la asimetría de las bandas laterales alrededor de las frecuencias de engrane, como consecuencia del movimiento relativo entre los planetas y el anillo.

Ha sido en las últimas dos décadas cuando se han realizado los mayores avances en modelizado de transmisiones planetarias, intrínsecamente ligados con la paralela mejoría de modelos de transmisiones mediante engranajes, tal y como se presentó en el apartado anterior. En 1994 Kahraman publica una serie de artículos, que a la postre tendrían un gran impacto en los trabajos posteriores realizados en el ámbito de los engranajes planetarios. En [1994a] introduce la metodología de trabajo de engrane múltiple, empleando una rueda helicoidal que engrana con otras dos. El modelo dinámico es tridimensional, incluyendo desplazamientos en otros tantos planos de acción, y se emplea para estudiar el efecto de los desfases de engrane con diversas condiciones de carga. En [1994d] aborda directamente un modelo de planetario de parámetros concentrados torsional/transversal, que le permite extraer de manera analítica los modos de vibración asociados con las frecuencias naturales más bajas del sistema. La complejidad aumenta en [1994b] con la introducción de un modelo de transmisión planetaria de tipo no-lineal con rigidez variable en el tiempo, si bien limitado a dos dimensiones. Este modelo es excitado mediante un error de transmisión que se expresa en series de Fourier, y se utiliza para estudiar el reparto de carga entre los planetas cuando se introducen determinados errores en los engranajes. Dicho estudio es paramétrico y no tiene en cuenta la variación interdependiente de dichos parámetros. El mismo enfoque es ampliado a las tres dimensiones en [1994c], si bien con un gran número de simplificaciones entre las que se encuentra la linealidad de la rigidez de engrane, la falta del efecto de la variación del número de dientes, así como la ausencia de holguras u otros tipos de no linealidades. El error de transmisión o excitación interna que Kahraman emplea en la mayor parte de los modelos mencionados se obtienen mediante un cálculo estático previo.

En una línea de trabajo diferente, acorde con sus modelos de engrane, Vex y otros autores modelizaron transmisiones planetarias sin hacer uso del error de transmisión como fuente de excitación interna. Por ejemplo Saada [1995] propone un modelo torsional/transversal, definido en un sistema de

coordinadas solidario con el portaplanetas. El contacto se formuló como una versión simplificada del planteamiento descrito en [Velex, 1996a], apoyado en elementos finitos pero con rigideces de engrane constantes, en dientes rectos y helicoidales. En este modelo no se permite la variación de la longitud de contacto (por lo que tampoco permite considerar choques, pérdidas de contacto u otro tipo de no linealidades similares). El modelo fue mejorado en [Velex, 1996b] con la introducción de una rigidez de engrane variable con el tiempo, de manera que se tuviera en cuenta la excitación paramétrica típica de las transmisiones mediante engranajes. Al presentar este modelo mayor complejidad, con un alto número de grados de libertad, se propuso la aplicación de un algoritmo de reducción de tipo Ritz.

Lin [1999b] propone un modelo analítico de parámetros concentrados plano de etapa planetaria, con el que estudiar las propiedades dinámicas de los modos de vibración, catalogándolos en rotacionales, traslacionales o modos de planeta. Utilizando estos resultados, en [Lin, 1999a] se calculan las derivadas de las frecuencias naturales con respecto a variaciones en sus parámetros: rigideces de engrane, masas y momentos de inercia de los distintos elementos. Se obtiene de esta manera la sensibilidad del comportamiento del tren planetario ante la variación de estos parámetros modales. De manera más reciente en [Guo, 2010] un estudio más avanzado pero con el mismo objetivo se llevaría a cabo. De nuevo Lin [2002b] emplea su modelo analítico de transmisión planetaria para hallar las regiones de inestabilidad causadas por la variación de la rigidez de engrane. Parker [2000b] prueba la efectividad de las técnicas de supresión de ciertos armónicos de los modos de vibración en transmisiones planetarias, mediante el adecuado diseño de los desfases de engrane. En esta contribución Parker no se apoya en ningún modelo ni trata de modelizar las fuerzas de engrane o de cuantificar sus magnitudes: directamente se centra en explotar las propiedades de simetría del planetario en lo relativo a las fuerzas de engrane y su posible anulación entre sí. Ambarisha [2006] extiende este trabajo de cara a derivar reglas de diseño sencillas, que permitan la supresión de las resonancias de tipo planeta. En la misma línea, profundizando en el campo de los desfases y relaciones entre los distintos engranes de un tren planetario, Parker [2004] proporciona una completa descripción analítica de los mismos.

Con la mejora de las herramientas y de la capacidad de computación, el interés en utilizar cuerpos deformables en los modelos de transmisiones

planetarias aumenta, generalizándose de manera progresiva su utilización durante la última década y relegando a un segundo plano los modelos analíticos más antiguos. Es Parker [2000c] quien implementa por vez primera una versión del engrane híbrido (elementos finitos e integral de superficie para el problema de contacto) propuesto por Vijayakar [1991] en un modelo dinámico de transmisión planetaria. En Kahraman [2001] utiliza la misma base de modelizado para examinar el efecto de la flexibilidad del engranaje interior en la respuesta estática de una transmisión. Más tarde llegaría un estudio dinámico más completo a este mismo respecto por parte de Kahraman [2003]. También Yuksel [2004] utiliza este modelo para estudiar el impacto del desgaste de los dientes en el comportamiento dinámico de la transmisión planetaria. Con el trabajo de Ambarisha [2007], el modelo de parámetros concentrados [Lin, 1999b] y el híbrido [Parker, 2000c] son contrastados, encontrando una fuerte correlación entre los resultados proporcionados por ambos en un amplio rango de condiciones de trabajo, incluyendo no linealidades. La mayoría de trabajos surgidos a partir de la investigación de Vijayakar [1991], hace uso directo de una herramienta comercial de dinámica de engranajes (Calix) que incorpora dicho enfoque.

Por su parte, y en la misma línea de mejorar los modelos con cuerpos rígidos, en Abousleiman [2006] amplía el modelo presentado en [Velex, 1996b], incluyendo la posibilidad de deformación del engranaje interior. Consiguen implementar este fenómeno mediante el uso de elementos finitos para modelar la corona. Más tarde, Abousleiman [2007] también incluye la flexibilidad del portaplanetas, pero concluyendo que tiene una importancia menor, comparada con el efecto de la flexibilidad de la corona interior así como con el de los rodamientos de los planetas.

En los últimos años la modelización de transmisiones planetarias no ha sufrido grandes cambios, salvo aquellos asociados con una mejora en la capacidad computacional: modelos más complejos con un mayor número de elementos, posibilidades de deformación incrementadas, eliminación progresiva de precálculos, etc. En esta línea Wu [2008] describe las propiedades modales de una transmisión con una corona elástica continua.

Esta evolución de los modelos ha permitido además la sucesiva incorporación de distintos defectos en las transmisiones planetarias. El estudio del impacto de estos defectos se realiza a menudo apoyado en el reparto de carga entre planetas, como el realizado por Ligata [2008]. Por ejemplo Singh [2011]

propone un mapa de reparto de carga en función de distintos defectos de posicionamiento. Montestruc [2011] realiza un estudio de la influencia de la rigidez de los apoyos de los planetas en el reparto de carga. Por su parte, Gu también emplea sus modelos dinámicos de planetario para estudiar el efecto en el reparto de cargas de errores de posicionamiento de planetas [2012a] y de excentricidad [2012b]. La producción actual de publicaciones de estudios apoyados en el modelizado de transmisiones planetarias es cada vez más elevado [Chaari, 2013]. Sin embargo, la evolución de los planteamientos de modelizado se encuentra prácticamente detenida, respetándose las filosofías de trabajo presentadas en esta sección.

2.5. SELECCIÓN DE LA ALTERNATIVA DE MODELIZADO

En las secciones anteriores se ha tratado de proporcionar una visión general acerca de las distintas alternativas de modelización de transmisiones mediante engranajes, con especial atención a los aspectos geométricos y de cálculo de esfuerzos de contacto. Se ha aportado además una evolución cronológica del modelizado específico en transmisiones planetarias, con el objeto de centrar el estudio presentado en este trabajo de Tesis Doctoral. Dado que se pretende abordar el desarrollo de un modelo conjunto, teniendo en cuenta los distintos elementos, es preciso alcanzar un compromiso entre el nivel de detalle asignado a cada elemento y el esfuerzo computacional necesario para resolver las correspondientes ecuaciones dinámicas.

Esta Tesis se plantea como continuación de la línea de investigación iniciada por el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria en modelizado de engranajes [Viadero, 2007], y de manera consecutiva a la Tesis Doctoral de Fernández del Rincón [2010], con resultados publicados en [Fernández, 2012, 2013a, 2013b].

El modelo de cálculo de fuerzas de contacto planteado por Fernández incluye la consideración de contactos en el contraflanco, o los acoplamientos de deformaciones entre parejas de dientes adyacentes, con un buen equilibrio entre coste computacional y capacidades de modelizado.

En cuanto al resto de facetas, el modelo de transmisión de Fernández incluye la definición de la geometría de los perfiles mediante una formulación vectorial, que permite la generación de ruedas corregidas. El modelo está preparado además para la implementación de defectos de diverso tipo con

relativa facilidad, e incorpora un modelo propio de cálculo de fuerzas en los rodamientos.

Por todos estos motivos, y por el fácil acceso que se tiene al mismo, el modelo de Fernández ha sido el escogido para su extensión y aplicación en el modelizado de transmisiones planetarias en este trabajo de Tesis Doctoral.

Parte II

Capítulo 3

Geometría del problema de una transmisión mediante engranajes

3.1. INTRODUCCIÓN

El primer problema que se ha de abordar a la hora de construir un modelo de mecanismo es la adecuada descripción de la geometría del mismo. Esta definición ha de ser lo suficientemente consistente como para poder representar con flexibilidad y robustez el mayor rango posible de variaciones paramétricas del mecanismo.

En este capítulo se presentan las distintas fases de modelizado relacionadas con la geometría del problema de una transmisión mediante engranajes, desde la definición de perfiles hasta el planteamiento del algoritmo para obtener los puntos potenciales de contacto, así como las distancias de separación entre dientes. Los desarrollos se aplican directamente como ejemplo al modelizado de engranes interiores, pudiendo encontrarse en [Fernández, 2010] la variación de estos procedimientos para el cálculo de engranes exteriores.

3.2. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LOS PERFILES DE LAS RUEDAS

En este modelo la generación del perfil de los engranajes externos se hace mediante el uso de herramientas de tallado, a partir del enfoque vectorial propuesto por Litvin [2004]. Este procedimiento aporta un elevado grado de

realismo al modelo, al definir los engranajes analíticamente de manera análoga al proceso industrial por el que son fabricados. Además, la definición mediante tallado de las ruedas proporciona una gran versatilidad, siendo posible la generación de engranajes corregidos, y permitiendo también contemplar cuestiones como el socavamiento y el sobrecorte. Con el fin de evitar la singularidad de contactos en aristas se añade un redondeo en la punta de los dientes según el planteamiento de Vedmar [1981].

3.2.1 Herramientas de tallado

Para el modelizado de una transmisión planetaria como la que ocupa este estudio es necesaria la utilización de engranajes tanto externos como internos. Para los primeros, el proceso de tallado escogido ha sido la generación por cremallera, mientras que los segundos son construidos mediante piñón tallador. En [Fernández, 2010] se describe con detalle el procedimiento de generación de ruedas externas, por lo que a continuación se centra el desarrollo en la definición de la rueda interna o corona del planetario, con un planteamiento análogo.

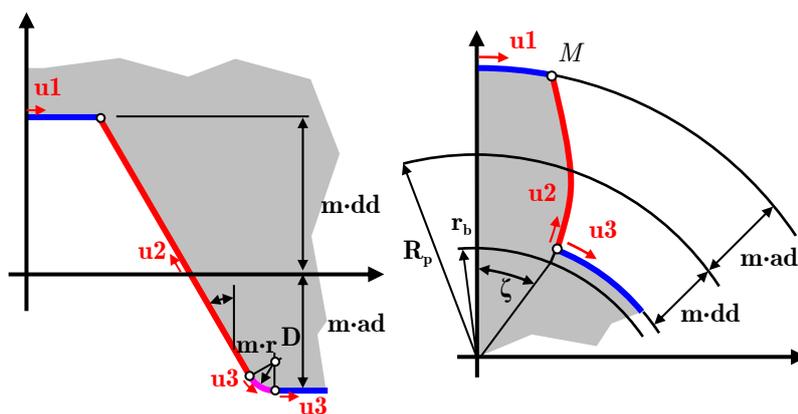


Figura 2. Herramientas utilizadas en el proceso de tallado: cremallera y piñón tallador

En la Figura 2 se pueden observar las dos herramientas utilizadas, con los parámetros empleados en la definición de cada uno de sus tramos. Para la cremallera se han empleado cuatro tramos, uno superior y otro inferior, que generan las circunferencias de cabeza y fondo de la rueda respectivamente, y un tramo recto central que se encarga de tallar el perfil de evolvente del

flanco de los dientes externos, que se encuentra unido al tramo inferior por un cuarto tramo en arco de circunferencia. El piñón tallador se define mediante tres tramos, dos correspondientes a los arcos exterior e interno de cabeza y fondo y uno correspondiente al perfil de evolvente del flanco de diente de la herramienta, prescindiendo por simplicidad del redondeo de punta.

Los sistemas de coordenadas que se emplean para el proceso de tallado analítico son los que se muestran en la Figura 2, y que en el caso del piñón tallador coincide con el centro de la rueda. El resto de parámetros que definirán las herramientas son el módulo m , el addendum ad , el dedendum dd , así como el radio de acuerdo de la punta r en el caso de la cremallera y los radios base r_b y primitivo R_p nominales para el caso del piñón. El módulo se encuentra expresado en mm, y el resto de parámetros referidos en tanto por uno del valor del módulo. A continuación se muestran cada uno de los tramos del piñón tallador en coordenadas paramétricas según el sistema de referencia definido para el mismo.

$$\vec{r}_1^{hta}(u_1, v_1) = \begin{pmatrix} (R_p + mad) \sin(u_1) \\ (R_p + mad) \cos(u_1) \\ v_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$0 \leq u_1 \leq u_{1max}$$

$$\vec{r}_2^{hta}(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{r_b}{\cos(u_2)} \sin(\zeta - \tan(u_2) + u_2) \\ \frac{r_b}{\cos(u_2)} \cos(\zeta - \tan(u_2) + u_2) \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\arccos\left(\frac{r_b}{R_p - mdd}\right) \leq u_2 \leq \arccos\left(\frac{r_b}{R_p + mad}\right)$$

$$\vec{r}_3^{hta}(u_3, v_3) = \begin{pmatrix} (R_p - mdd) \sin(u_3) \\ (R_p - mdd) \cos(u_3) \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$u_{3min} \leq u_3 \leq \frac{\pi}{z}$$

Los parámetros u_i y v_i determinarán por lo tanto la posición de un punto sobre cada uno de los tramos considerados de la herramienta. Mientras que el parámetro u_i presentará distintos rangos de variación en función del tramo considerado, el parámetro v_i oscilará entre $-b/2$ y $b/2$ (siendo b el ancho de

la rueda expresado en mm). Los valores límite de variación de u_1 y u_3 vendrán dados por:

$$u_{1max} = \frac{\pi}{2z} + Ev\left(\arccos\left(\frac{r_b}{R_p}\right)\right) - Ev\left(\arccos\left(\frac{r_b}{R_p + mad}\right)\right) \quad (3.4)$$

$$u_{3min} = \frac{\pi}{2z} + Ev\left(\arccos\left(\frac{r_b}{R_p}\right)\right) \quad (3.5)$$

Donde la función de evolvente de círculo es: $Ev(\varphi) = tg(\varphi) - \varphi$.

3.2.2 Envolvente y condición de engrane

Con la fabricación de engranajes mediante tallado por herramienta lo que se obtiene finalmente es un vaciado de material de la rueda hasta un cierto límite, que viene marcado por la envolvente de cada una de las posiciones del perfil de la herramienta sobre la rueda tallada. Analíticamente esto equivale a hallar la envolvente de una familia de curvas. Aplicando el planteamiento clásico de la geometría diferencial se obtiene la condición necesaria para la existencia de dicha envolvente. Si se simplifica dicha condición aprovechando las propiedades de la velocidad relativa entre perfiles, deriva en la siguiente ecuación de engrane [Litvin, 2004]:

$$\vec{n}_{perfil}^S \cdot \vec{v}_{relativa}^S = 0 \quad (3.6)$$

Una vez satisfecha, esta ecuación indica qué puntos en el perfil de la herramienta poseen una velocidad relativa perpendicular a la normal a la superficie que, por lo tanto, son susceptibles de estar tallando en una posición determinada.

En el caso particular del tallado empleado para los engranajes interiores, el movimiento relativo de los puntos del piñón tallador respecto a la corona que se está generando, viene dado por la rodadura pura de la curva polar asociada al piñón tallador sobre la curva polar asociada a la corona. De esta manera se definen estas dos curvas como las circunferencias primitivas de tallado del piñón y de la corona, de respectivos radios R_p y R_c . El movimiento se describe en la Figura 2, donde se aprecian los tres sistemas de referencia utilizados: el asociado a la corona (en rojo), el correspondiente al piñón tallador o herramienta (en azul), y el sistema fijo (en negro). Durante

el tallado la herramienta puede sufrir un desplazamiento respecto a su posición nominal, que viene definido por el parámetro \mathbf{x} , que estará expresado en tanto por uno del valor del módulo. Este desplazamiento será positivo cuando la posición de la herramienta se aleje del centro de la corona, y negativo en caso contrario.

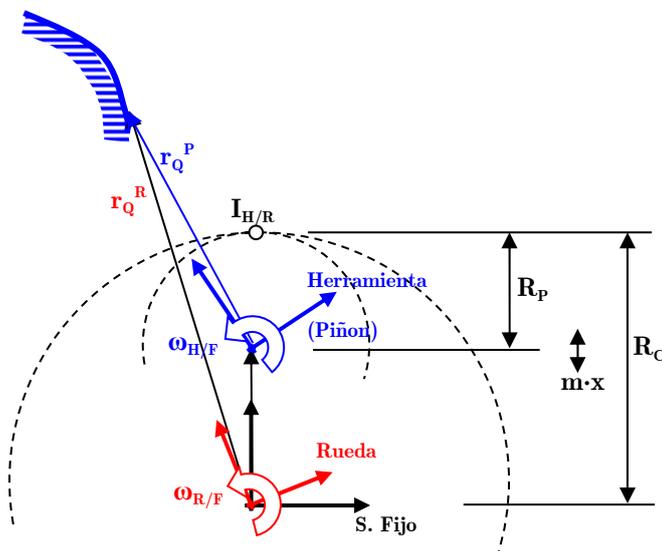


Figura 3. Construcción de la corona con piñón tallador

El movimiento relativo entre el piñón tallador y la rueda estará caracterizado por las superficies de sus correspondientes axoides. De este modo es posible obtener la velocidad relativa de un punto cualquiera Q del perfil de la herramienta mediante la expresión:

$$\vec{v}_{Q(C/F)}^F = \vec{v}_{Q(C/P)}^F + \vec{v}_{Q(P/F)}^F \rightarrow \vec{v}_{Q(C/P)}^F = \vec{v}_{Q(C/F)}^F - \vec{v}_{Q(P/F)}^F \quad (3.7)$$

Ecuación vectorial que expresa la velocidad del punto Q solidario con el sistema de referencia de la corona (C) respecto al sistema de referencia del piñón (P), todo ello expresado en el sistema de referencia (F). Teniendo en cuenta que los movimientos respecto al sistema fijo del punto Q son rotaciones, tanto si se considera a éste como perteneciente a la corona como

si se le considera perteneciente al piñón, y conociendo asimismo la distancia de separación de centros d , se obtiene de (3.7) que:

$$\vec{v}_{Q(C/P)}^F = \dot{\theta}_c \begin{Bmatrix} \left(1 - \frac{z_c}{z_p}\right) (r_x^p \sin(-\theta_p) - r_y^p \cos(\theta_p)) + d \\ \left(1 - \frac{z_c}{z_p}\right) (r_x^p \cos(\theta_p) + r_y^p \sin(-\theta_p)) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Con lo que sólo resta calcular las normales a los perfiles de la herramienta expresadas en el sistema fijo para plantear la ecuación de engrane (3.6). Para el caso de curvas definidas en forma paramétrica, se puede determinar dicha normal mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{n}_{perfil}^{hta} = \vec{t} \times \vec{k} = \frac{d\vec{n}_{perfil}^{hta}(u)}{du} \times \vec{k} \quad (3.9)$$

Aplicando esta expresión a cada uno de los tramos definidos para el perfil de la herramienta es posible obtener las correspondientes normales a dichos tramos. Una vez hecho esto, es necesario cambiar el sistema de referencia de las normales resultantes, del asociado a la herramienta al fijo, que es para el cual se ha obtenido la velocidad relativa. Aplicando la matriz de transformación correspondiente, queda:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1^F &= \begin{Bmatrix} -\sin(u_1 - \theta_p) \\ -\cos(u_1 - \theta_p) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vec{n}_2^F &= \begin{Bmatrix} \cos(\tan(u_2) - \xi + \theta_p) \\ \sin(\tan(u_2) - \xi + \theta_p) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vec{n}_3^F &= \begin{Bmatrix} -\sin(u_3 - \theta_p) \\ -\cos(u_3 - \theta_p) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finalmente se puede particularizar la ecuación (3.6) para cada uno de los tramos del piñón tallador, sustituyendo con (3.8) y (3.10). De esta manera se obtienen las tres ecuaciones de engrane que relacionan los parámetros $u_{1,2,3}$ con las posiciones angulares del piñón y la corona:

$$tramo1 \rightarrow d \sin(u_1 - \theta_p) = 0 \quad (3.11)$$

$$\text{tramo2} \rightarrow -r_b \left(1 - \frac{z_c}{z_p}\right) + d \cos(\tan(u_2) - \xi + \theta_p) = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{tramo3} \rightarrow d \sin(u_3 - \theta_p) = 0 \quad (3.13)$$

3.2.3 Perfil de las ruedas

El perfil de las ruedas se obtiene expresando cada uno de los tramos identificados en la definición de las herramientas en el sistema de coordenadas de las ruedas, considerando que simultáneamente deben verificarse las ecuaciones de engrane para cada tramo. En el caso que se está describiendo en este capítulo, que se corresponde con el tallado de ruedas interiores, la transformación del sistema de coordenadas de la herramienta al sistema de coordenadas de la rueda tiene lugar en dos fases. La primera es una rotación y traslación del sistema de referencia del piñón tallador al sistema de coordenadas considerado fijo, y la segunda fase consiste en otra rotación para alcanzar el sistema de referencia asociado a la corona. Cada una de estas operaciones puede expresarse mediante la correspondiente matriz de transformación homogénea, que se muestran a continuación:

$$\mathbf{M}_{P \rightarrow F} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta_p) & \sin(-\theta_p) & 0 & 0 \\ -\sin(-\theta_p) & \cos(-\theta_p) & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_{F \rightarrow C} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_c) & \sin(\theta_c) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Multiplicando en orden inverso las matrices de transformación parciales se obtiene la matriz de transformación homogénea final:

$$\mathbf{M}_{P \rightarrow C} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_c - \theta_p) & \sin(\theta_c - \theta_p) & 0 & d \sin(\theta_c) \\ -\sin(\theta_c - \theta_p) & \cos(\theta_c - \theta_p) & 0 & d \cos(\theta_c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Que aplicada a cada uno de los tramos de la herramienta definidos en (3.1), (3.2) y (3.3) proporciona:

$$\vec{r}_i^C(u_i, v_i, \theta_C) = \begin{cases} \cos(\theta_C - \theta_P) r_{ix}^P + \sin(\theta_C - \theta_P) r_{iy}^P + \sin(\theta_C) d \\ -\sin(\theta_C - \theta_P) r_{ix}^P + \cos(\theta_C - \theta_P) r_{iy}^P + \cos(\theta_C) d \end{cases} \quad (3.17)$$

De las ecuaciones de engrane para el primer y tercer tramo se obtienen las relaciones entre los parámetros u_1 y θ_P , de manera que desarrollando y sustituyendo en (3.17) se llega a:

$$u_1 = \theta_P \Rightarrow \vec{r}_1^C = \begin{cases} \left(\frac{z_C}{z_P} R_P + mad + mx \right) \sin(\theta_C) \\ \left(\frac{z_C}{z_P} R_P + mad + mx \right) \cos(\theta_C) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$u_3 = \theta_P \Rightarrow \vec{r}_3^C = \begin{cases} \left(\frac{z_C}{z_P} R_P - mdd + mx \right) \sin(\theta_C) \\ \left(\frac{z_C}{z_P} R_P - mdd + mx \right) \cos(\theta_C) \end{cases} \quad (3.19)$$

Es fácil observar que estas ecuaciones describen el perfil de la rueda en las circunferencias de fondo y de cabeza de la corona interior, respectivamente. En el caso de la circunferencia de cabeza estas ecuaciones tienen una utilidad relativa, dado que el proceso real de fabricación conlleva un conformado inicial que marca el diámetro interior de la corona, por lo que dicho tramo circunferencial no se obtendrá mediante tallado.

De la ecuación de engrane para el tramo 2 se tiene que el parámetro u_2 como función de θ_C es:

$$u_2 = \arctan \left(\arccos \left(\frac{r_b}{d} \left(\frac{z_C}{z_P} - 1 \right) \right) + \xi - \frac{z_C}{z_P} \theta_C \right) \quad (3.20)$$

Que se utiliza para su sustitución en:

$$\vec{r}_2^C = \begin{cases} \frac{r_b}{\cos(u_2)} \sin \left(\xi - \tan(u_2) + u_2 + \theta_C \left(1 - \frac{z_C}{z_P} \right) \right) + d \sin(\theta_C) \\ \frac{r_b}{\cos(u_2)} \cos \left(\xi - \tan(u_2) + u_2 + \theta_C \left(1 - \frac{z_C}{z_P} \right) \right) + d \cos(\theta_C) \end{cases} \quad (3.21)$$

Y que se corresponde con el perfil de evolvente del diente de la corona. El tramo de enlace entre el arco de fondo y el perfil de evolvente vendrá tallado

por el punto del piñón tallador señalado como M en la Figura 2, que se corresponderá con una hipotrocoide. Para su definición se puede tomar cualquiera de los dos tramos que confluyen en M , estableciendo el parámetro u al efecto de que defina dicho punto M .

$$\vec{r}_{troc}^c = \left\{ \begin{array}{l} (R_p + mad) \sin\left(\theta_c \left(1 - \frac{z_c}{z_p}\right) + u_{1max}\right) + d \sin(\theta_c) \\ (R_p + mad) \cos\left(\theta_c \left(1 - \frac{z_c}{z_p}\right) + u_{1max}\right) + d \cos(\theta_c) \end{array} \right\} \quad (3.22)$$

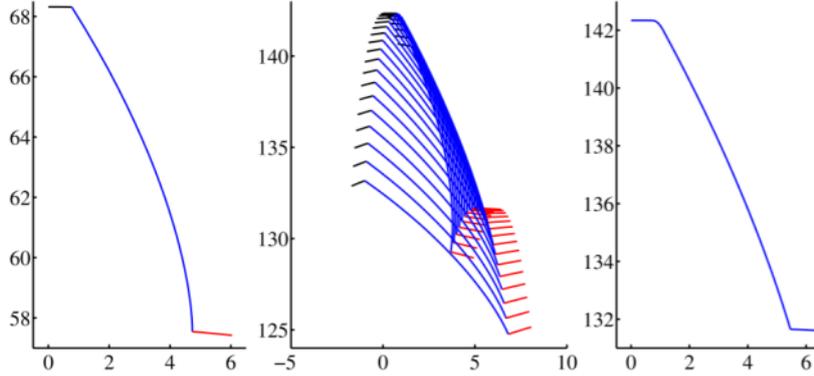


Figura 4. a) Perfil de la herramienta b) Proceso de generación c) Perfil tallado

De todas estas ecuaciones sólo quedan por determinar los intervalos de variación de θ_c y u_i durante los que se tallan los perfiles, al no coincidir con aquellos establecidos en las ecuaciones (3.1)-(3.5) (el límite de tallado de un tramo viene limitado en ocasiones por el inicio del tramo siguiente), para lo cual se atenderá a las siguientes condiciones:

- Para el límite del tramo de evolvente en la punta del diente se tallará sólo hasta que el radio de los puntos de dicho tramo se iguale con el radio de cabeza de la corona. El radio de la evolvente viene dado por:

$$R_{evol} = \sqrt{(r_{2x}^c)^2 + (r_{2y}^c)^2} \quad (3.23)$$

Quedando como ecuación que proporciona los parámetros límite:

$$(R_{min})^2 - (r_{2x}^c)^2 - (r_{2y}^c)^2 = 0 \rightarrow u_{2min}, \theta_{c2min} \quad (3.24)$$

- Para el tramo correspondiente al arco de cabeza de los dientes, que limita con el anterior, se puede formular de la siguiente manera:

$$r_{2xmin}^c - r_{3x}^c = 0 \rightarrow \theta_{c3min} \quad (3.25)$$

- Para el tramo de enlace o de la hipotrocoide, una vez fijado el parámetro u , se varía el θ_c entre los valores máximo y mínimo para los que el punto M está tallando, que se corresponden con:

$$\theta_{c2min} \leq \theta_{ctroc} \leq \theta_{c1min} \quad (3.26)$$

3.2.4 Socavamiento y sobrecorte

El planteamiento desarrollado en los apartados anteriores contempla la posibilidad de socavamiento y sobrecorte durante el tallado de ruedas exteriores e interiores. Cuando el socavamiento se produce en las ruedas exteriores (talladas mediante cremallera), es preciso determinar numéricamente la intersección entre la trocoide y el perfil de evolvente, afectando este hecho a los intervalos de variación de los parámetros. Este procedimiento, así como las condiciones de socavamiento empleadas, vienen descritas en [Fernández, 2010].

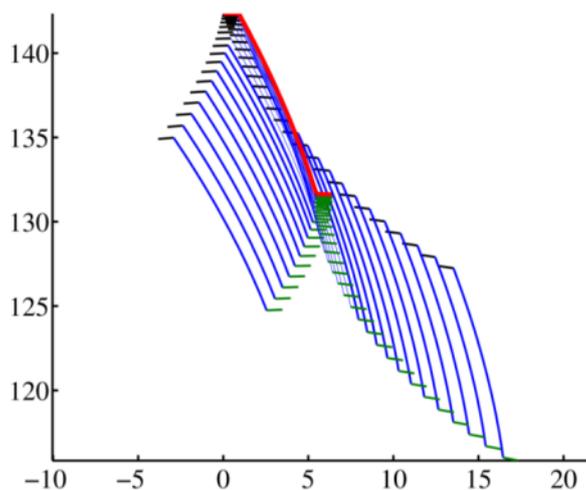


Figura 5. Sobrecorte producido por el piñón sobre el perfil del diente (en rojo)

Para el caso del tallado de ruedas interiores, en el que se centra este capítulo, se puede producir un sobrecorte de la punta de los dientes de la corona, en función del número de dientes que se empleen en el piñón herramienta. En la Figura 5 se muestra el sobrecorte producido por un piñón tallador con un número de dientes superior al límite para el cual se garantiza la inexistencia de sobrecorte, y que según Litvin [2004] se corresponde con

$$z_p \leq z_c - 4.42 \quad (3.27)$$

para un ángulo de presión de 30° y aplicando el método de generación axial.

3.2.5 Redondeo en la punta de los dientes

De acuerdo con el procedimiento de tallado descrito en el apartado previo, se puede observar que la intersección de la circunferencia de cabeza de los dientes con el tramo de evolvente da lugar a una arista. Cuando el contacto entre dientes se produzca coincidiendo con dicha singularidad de los perfiles, surgirán problemas en el proceso de determinación de los esfuerzos de contacto. Con el fin de evitar esta singularidad se ha introducido un redondeo en la punta de los dientes que enlaza los dos tramos secantes, tanto en los engranajes exteriores como en los interiores, según el proceso que se describe a continuación.

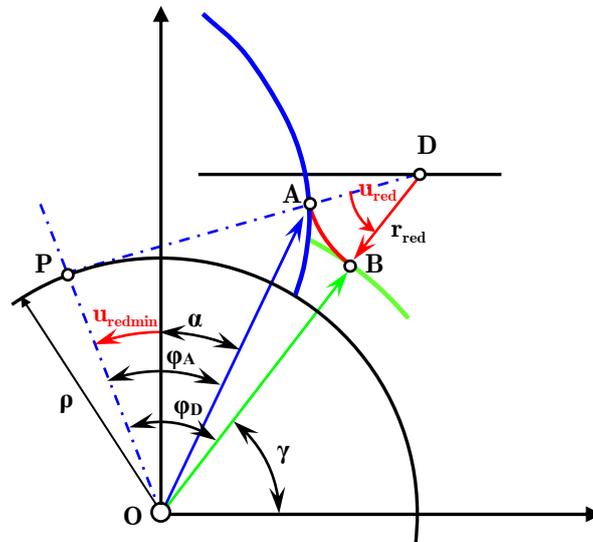


Figura 6. Redondeo en la punta de diente de la corona

El nuevo tramo de corona correspondiente al redondeo se definirá como un arco de circunferencia de la siguiente forma:

$$\tilde{r}_{red}^C = \begin{cases} D_x - r_{red} \cos(u_{red}) \\ D_y - r_{red} \sin(u_{red}) \\ v_{red} \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\varphi_A - \alpha \leq u_{red} \leq \gamma$$

Donde:

$$D_x = \overline{OD} \cos(\gamma), D_y = \overline{OD} \sin(\gamma) \quad (3.29)$$

$$\overline{OD} = \overline{OB} + r_{red} = R_{min} + r_{red} \quad (3.30)$$

Quedaría por definir el ángulo γ , que de acuerdo con la Figura 6 será:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - (\varphi_D - \varphi_A) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OD}}\right) + \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OA}}\right) \quad (3.31)$$

$$PA = \sqrt{\overline{OD}^2 - \rho^2} - r_{red} \rightarrow OA = \sqrt{PA^2 + \rho^2} \quad (3.32)$$

De esta manera se redefinen los límites de variación de los parámetros que describen el tramo de evolvente, produciéndose un cambio en la ecuación (3.24). El radio mínimo del perfil de evolvente no corresponderá ahora con el radio de punta de diente una vez introducido el redondeo de la punta, sino que coincidirá con la longitud definida por \overline{OA} :

$$(\overline{OA})^2 - (r_{2x}^C)^2 - (r_{2y}^C)^2 = 0 \rightarrow u_{2min}, \theta_{C2min} \quad (3.33)$$

Una vez conocidos estos parámetros, queda definido α para su introducción en la ecuación (3.31) como

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_{2x}^C(u_{2min})}{r_{2y}^C(u_{2min})}\right) \quad (3.34)$$

Como sucede con el tramo de perfil de evolvente, los límites de variación del parámetro θ_{C3} también se ven afectados tras la introducción del redondeo de la punta, reformulándose la ecuación (3.25) como:

$$r_{2x}^C(u_{2min}) - r_{3x}^C = 0 \rightarrow \theta_{C3min} \quad (3.35)$$

Este redondeo se tiene en cuenta posteriormente en la determinación de los puntos de contacto, así como en la dirección de las fuerzas resultantes.

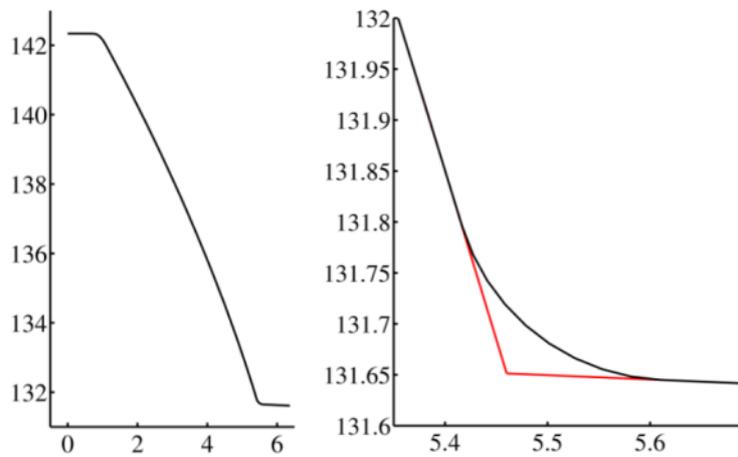


Figura 7. Perfil de diente de corona con redondeo de punta y detalle del mismo

3.3. LOCALIZACIÓN DE PUNTOS POTENCIALES DE CONTACTO Y CÁLCULO DE LOS SOLAPAMIENTOS GEOMÉTRICOS

El siguiente hito a alcanzar en el modelizado de engranajes, una vez definida la geometría de las ruedas, es la localización de los puntos de contacto. Tal como se presentó en el capítulo 2, es habitual encontrar trabajos que recurren a procedimientos numéricos, que localizan los puntos entre perfiles con menor distancia de separación, determinando posteriormente en cuáles de ellos se produce un contacto real. En el presente modelo, al estar los perfiles definidos de forma puramente analítica, es posible definir un procedimiento también analítico, que proporcione de manera exacta tanto la localización de los puntos potenciales de contacto como la separación entre dichos perfiles. Para ello se define el contacto en la línea de transmisión, sobre la cual se medirán dichas distancias de separación, y que se denominarán “solapamientos geométricos” en lo sucesivo. Se evita así la introducción de procesos numéricos en el algoritmo, que sin duda incrementarían el esfuerzo computacional dedicado a simular el proceso de engrane, además de mejorar en precisión.

El engrane entre dos ruedas perfectamente talladas e indeformables tendrá lugar siempre a lo largo de la línea de engrane tangente a ambas circunferencias base implicadas. En el caso real de ruedas deformables con perfil de evolvente, el contacto con el redondeo de la punta es posible en las fases de entrada y salida de cada pareja de dientes (si bien indeseable desde el punto de vista del funcionamiento) y de igual manera ha de ser tenido en cuenta si el modelo lo permite. Cuando el engrane de las ruedas tiene lugar entre un perfil de evolvente y el arco de redondeo de la punta del diente contrario, el contacto se dice fuera de la línea de engrane, por lo que hay que definir un procedimiento adicional para calcular la nueva línea de acción sobre la que medir la distancia de separación entre perfiles. En definitiva, todo esto supone la consideración de dos tipos distintos de contacto: el contacto evolvente-evolvente y el contacto evolvente-arco de redondeo.

Por otra parte, a fin de que el modelo sea lo más representativo posible del comportamiento real de los engranajes, se hace necesario el planteamiento simultáneo de contactos en el flanco y en el contraflanco, de cara a modelizar no-linealidades tales como la pérdida de contacto y el traqueteo.

En las secciones que siguen se describen los distintos tipos de contacto considerados, la localización del punto de contacto para cada caso y el cálculo del solapamiento geométrico en función del desplazamiento de cada una de las ruedas. De nuevo, en [Fernández, 2010] se describe este procedimiento para el caso de ruedas exteriores, por lo que el ejemplo de aplicación del método presentado en este trabajo es el aplicable a los engranes interiores.

3.3.1 Contacto entre flancos de diente con perfil de evolvente

El contacto evolvente-evolvente tiene lugar a lo largo de la línea de engrane que define la tangente a las dos circunferencias base, y que representa la dirección normal a los perfiles. En la situación real en la que los apoyos de las ruedas no son infinitamente rígidos, éstas pueden desplazarse respecto a su situación de montaje original, viéndose modificada la relación de contacto y cambiando la distancia entre centros y el ángulo de presión.

Inicialmente se considera una rueda exterior designada como 1 y una rueda interior designada como 2 , en un sistema de referencia fijo con origen en O . La posición del centro C_{20} de la rueda 2 (interior) coincide con el origen del

sistema de referencia, y la rueda 1 se dispone a la distancia de montaje d_0 medida sobre el eje Y , de tal manera que la posición de su centro C_{10} coincide con el punto O_1 . La posición de referencia para el giro será aquella en la que los perfiles contacten en la posición del punto primitivo P , giros positivos contados desde dicha referencia en sentido antihorario. Cualquier desplazamiento que experimenten las ruedas se expresará en base a la traslación (x_i, y_i) de sus centros respecto a las posiciones indicadas con los subíndices 0 de referencia, y al giro θ_i partiendo del contacto con el punto primitivo.

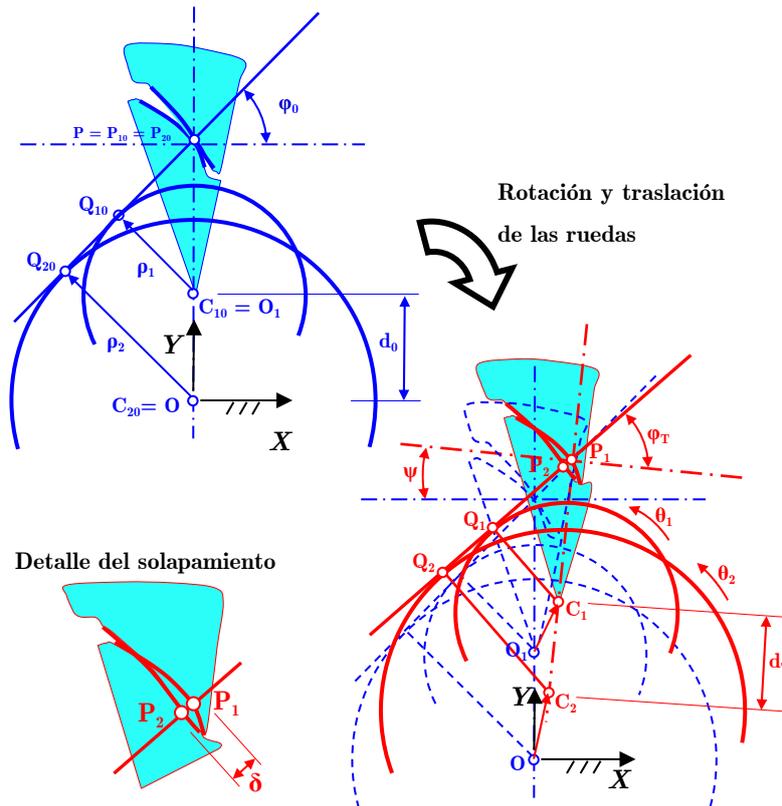


Figura 8. Solapamiento geométrico para el contacto evolvente-evolvente

Conociendo la posición de cada una de las ruedas $\overline{O_1C_1} = [x_1, y_1]^T$, $\overline{O_2C_2} = [x_2, y_2]^T$, es posible determinar la magnitud de la nueva distancia entre

centros d_T , su inclinación respecto a la inicial ψ y el ángulo de presión φ_T (de funcionamiento). La obtención de estos parámetros requiere el conocimiento del vector $\overline{C_2C_1}$ que, de acuerdo con la Figura 8, se puede expresar como:

$$\overline{C_2C_1} = \overline{O_0O_1} + \overline{O_1C_1} - \overline{O_0C_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Cuyo módulo coincidirá con el nuevo valor de la distancia entre centros d_T :

$$d_T = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (d_0 + y_1 - y_2)^2} \quad (3.37)$$

Y la inclinación respecto a la inicial ψ :

$$\psi = -\arctan\left(\frac{x_1 - x_2}{d_0 + y_1 - y_2}\right) \quad (3.38)$$

Mientras que el nuevo ángulo de presión de funcionamiento vendrá definido por:

$$\varphi_T = \arccos\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{d_T}\right) \quad (3.39)$$

Debido al desplazamiento de las ruedas, existirá o no contacto según sea la magnitud de separación entre perfiles o solapamiento geométrico. Observando el detalle de la Figura 8, se define el solapamiento geométrico como la distancia entre los puntos P_1 y P_2 pertenecientes a cada una de las ruedas, medida sobre la línea de engrane como sigue:

$$\delta_{Ev-Ev} = \overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2} + \overline{Q_1P_1} - \overline{Q_2P_2} \quad (3.40)$$

Según esta formulación, valores positivos de esta distancia se corresponderán con situaciones en las que los perfiles están solapados desde el punto de vista geométrico (obviando por el momento la situación real), indicando por lo tanto situaciones potenciales de contacto. De manera complementaria, valores negativos del solapamiento geométrico δ denotarían una posición de las ruedas en la que existe una cierta separación entre los perfiles de los dientes.

La obtención de cada uno de los términos que se emplean para el cálculo del solapamiento geométrico se apoya en las propiedades de la evolvente:

$$\overline{Q_i P_i} = \overline{Q_{i0} P_{i0}} + \rho_i (\varphi_T - \varphi_0 + \psi - \theta_i) ; i = 1,2 \quad (3.41)$$

$$\overline{Q_{i0} P_{i0}} = \rho_i \tan(\varphi_0) ; i = 1,2 \quad (3.42)$$

$$\overline{Q_1 Q_2} = d_T \sin(\varphi_T) \quad (3.43)$$

Donde sólo se desconoce el ángulo de presión inicial, que se obtiene a partir de la distancia de montaje d_0 :

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{d_0}\right) \quad (3.44)$$

Introduciendo cada uno de los términos en la ecuación (3.40) queda definido el valor del solapamiento geométrico entre dos perfiles de evolvente, en función del desplazamiento de las ruedas, teniendo en cuenta la posición de referencia descrita:

$$\begin{aligned} \delta_{Ev-Ev} = d_T \sin(\varphi_T) + (\rho_1 - \rho_2) (\tan(\varphi_0) + \varphi_T - \varphi_0 + \psi) - \\ - (\rho_1 \theta_1 + \rho_2 \theta_2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.2 Contacto entre flancos de diente con redondeo de punta

Cuando debido a las deformaciones sufridas por los engranajes, el redondeo de la punta de un diente entra en contacto con el perfil de evolvente de su par correspondiente, se producen diversas alteraciones en la dirección y magnitud de las fuerzas a transmitir. La dirección de la normal a los perfiles contactados deja de coincidir con la recta tangente a ambas circunferencias base. Se impone en este caso que la nueva directriz de fuerzas permanezca tangente a la circunferencia base cuya evolvente está implicada en el contacto, y que además esta recta pase por el centro del arco de circunferencia que define al redondeo C_{r1} . Dado que en el caso de engranes interiores no existe una simetría entre la geometría del piñón y la rueda, será necesario distinguir dos casos en función de la localización del tramo de redondeo considerado, pudiendo localizarse éste en el engranaje exterior o interior.

3.3.2.1 Contacto redondeo exterior-evolvente

En la Figura 9 se representa la situación correspondiente a un contacto redondeo-evolvente en el que el redondeo pertenece al engranaje exterior. Con el fin de mantener una formulación homogénea para el cálculo del solapamiento geométrico, es posible asimilar esta nueva situación en la que la línea de acción pasa por sólo una de las circunferencias base con un problema análogo al del contacto evolvente-evolvente. Para ello se define una nueva circunferencia tangente, denominada circunferencia base equivalente, y construida a partir de las normales a los perfiles, tal como se muestra en la Figura 10.

Esta nueva circunferencia tiene radio ρ_1^{r1} , empleando el superíndice $r1$ para referirse a la condición de contacto en el redondeo de la rueda 1 (exterior). En la Figura 10 es fácil observar cuáles son los nuevos parámetros respecto a la situación de contacto evolvente-evolvente atendiendo a dicho superíndice. Una vez conocidos los valores de los nuevos parámetros, es posible adaptar el modelo de contacto de evolvente a contacto con redondeo, proporcionando una gran robustez y simplicidad en cuanto a la definición de las direcciones de acción de los esfuerzos de contacto, así como a la reducción de las fuerzas actuantes en pares sobre cada una de las ruedas.

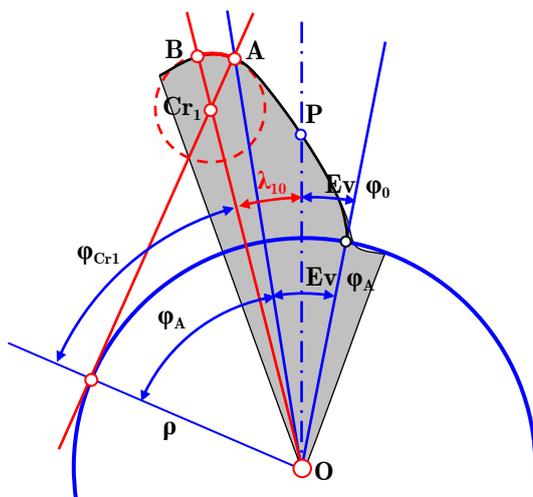


Figura 9. Contacto redondeo exterior-evolvente

La identificación de los nuevos puntos y distancias de contacto entre perfiles requiere en este caso de la localización del centro del arco de redondeo C_{r1} , para lo cual se puede recurrir al ángulo auxiliar λ_{10} que se forma entre la línea de centros y el radio del centro del arco de redondeo $\overline{OC_{r1}}$.

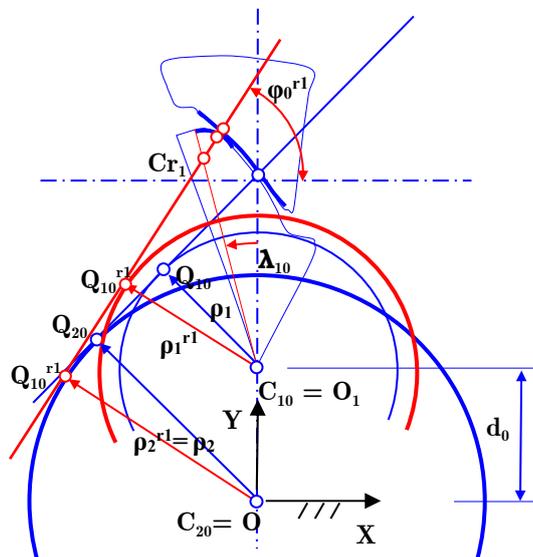


Figura 10. Determinación del ángulo auxiliar λ_{10}

Adoptando la misma posición de referencia que en caso del contacto evolvente-evolvente (cuyos parámetros vienen identificados por el subíndice 0), y de acuerdo con la Figura 9, dicho ángulo puede obtenerse como:

$$\lambda_{10} = \varphi_A + Ev(\varphi_A) - Ev(\varphi_0) - \varphi_{Cr1} \quad (3.46)$$

Donde sustituyendo la función de evolvente queda:

$$\lambda_{10} = \tan(\varphi_A) - \tan(\varphi_0) + \varphi_0 - \varphi_{Cr1} \quad (3.47)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\varphi_A = \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OA}}\right), \quad \varphi_{Cr1} = \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OC_{r1}}}\right) \quad (3.48)$$

Donde se conoce el valor de la distancia $\overline{OC_{r1}}$ al sustraer el valor del r_{red} del radio exterior \overline{OB} del engranaje. \overline{OA} es:

$$\overline{OA} = \sqrt{\rho^2 + \left(\sqrt{(R_{Ext} - r_{red})^2 - \rho^2} + r_{red}\right)^2} \quad (3.49)$$

El ángulo λ_{10} así obtenido se corresponderá con el formado por la línea de centros en la posición de referencia y la recta radial que pasa por C_{r1} , como se ha mostrado en la Figura 9. Sin embargo, para posiciones que no sean las de referencia, el ángulo que dará la ubicación del centro del arco de redondeo se denominará λ_1 sin el subíndice θ de referencia que, de acuerdo con la Figura 11, se determinará mediante la siguiente ecuación:

$$\lambda_1 = \lambda_{10} - (\psi - \theta_1) \quad (3.50)$$

Atendiendo a la construcción gráfica, y considerando el triángulo formado por $C_1C_2C_{r1}$, conocida la distancia de montaje d_T y el ángulo λ_1 , se puede obtener la distancia $\overline{C_2C_{r1}}$ y el ángulo ξ_2 como:

$$\overline{C_2C_{r1}} = \sqrt{(\overline{C_1C_{r1}} \sin(\lambda_1))^2 + (d_T + \overline{C_1C_{r1}} \cos(\lambda_1))^2} \quad (3.51)$$

$$\xi_2 = \arctan2\left(\overline{C_1C_{r1}} \cdot \sin(\lambda_1) / (d_T + \overline{C_1C_{r1}} \cdot \cos(\lambda_1))\right) \quad (3.52)$$

Donde se utiliza una variación de la función arco tangente que mantiene la información del sentido del ángulo ξ_2 . Posteriormente, se determina el ángulo μ_2 mediante:

$$\mu_2 = \arccos\left(\rho_2 / \overline{C_2C_{r1}}\right) \quad (3.53)$$

Con el cálculo de estos dos ángulos se obtiene por adición el nuevo ángulo de presión de trabajo φ_T^{r1} :

$$\varphi_T^{r1} = \xi_2 + \mu_2 \quad (3.54)$$

Una vez que se conoce el ángulo de presión, resulta sencilla la definición del resto de magnitudes del problema geométrico, comenzando por el radio base equivalente $\overline{C_1Q_1^{r1}}$ o ρ_1^{r1} de la rueda 1:

$$\rho_1^{r1} = \overline{C_1Q_1^{r1}} = \rho_2 - d_T \cos(\varphi_T^{r1}) \quad (3.55)$$

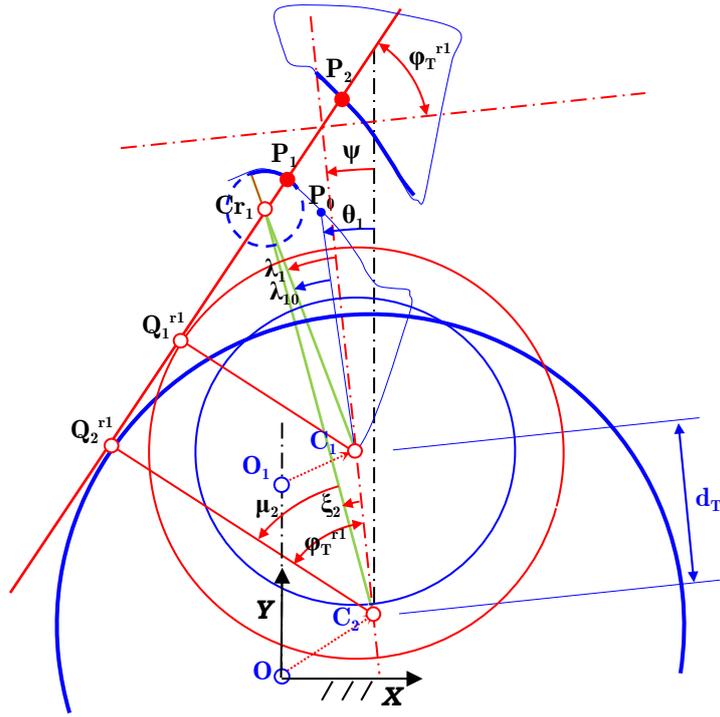


Figura 11. Solapamiento geométrico para el contacto redondeo exterior - evolvente

Recurriendo a la expresión (3.40) para el cálculo del solapamiento geométrico entre perfiles de evolvente, podemos adaptar cada uno de los sumandos con los superíndices correspondientes indicativos del redondeo en la rueda exterior, manteniéndose la misma formulación:

$$\delta_{Re-Ev} = \overline{P_1 P_2} = \overline{Q_1^{r1} Q_2^{r1}} + \overline{Q_1^{r1} P_1} - \overline{Q_2^{r1} P_2} \quad (3.56)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\overline{Q_2^{r1} P_2} = \overline{Q_{20} P_{20}} + \rho_2 (\varphi_T^{r1} - \varphi_0 + \psi - \theta_2) \quad (3.57)$$

$$\overline{Q_1^{r1} P_1} = \overline{C_1 C_{r1}} \sin(\varphi_T^{r1} - \lambda_1) + r_{red} \quad (3.58)$$

Y sustituyendo en (3.56) se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \delta_{Re-Ev} = \overline{P_1P_2} = d_T \cdot \sin(\varphi_T^{r1}) + (R_{Ext} - r_{red}) \cdot \sin(\varphi_T^{r1} - \lambda_1) + \\ + r_{red} + \rho_2 \cdot (\varphi_T^{r1} - \tan(\varphi_0) - \varphi_0 + \psi - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.3.2.2 Contacto redondeo interior-evolvente

En el caso de que el contacto considerado incluya el redondeo en la rueda interior, el procedimiento para hallar el valor del solapamiento geométrico es análogo al anterior, teniendo en cuenta ciertas consideraciones. Se hace de nuevo necesario recurrir al ángulo auxiliar λ_{20} que forman la línea de centros y el radio del centro del arco de redondeo $\overline{OC_{cr2}}$ tal como se muestra en la Figura 12.

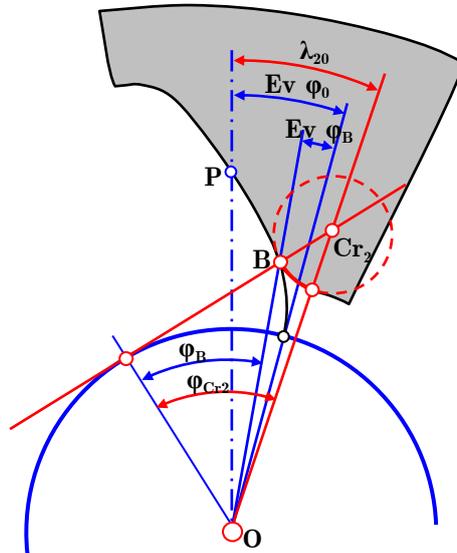


Figura 12. Determinación del ángulo auxiliar λ_{20}

La formulación difiere ligeramente, siendo el valor del ángulo auxiliar dado por la expresión:

$$\lambda_{20} = \tan(\varphi_0) - \varphi_0 + \varphi_{Cr2} - \tan(\varphi_B) \quad (3.60)$$

Donde:

$$\varphi_B = \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OB}}\right), \quad \varphi_{Cr2} = \arccos\left(\frac{\rho}{\overline{OC_{r2}}}\right) \quad (3.61)$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\rho^2 + \left(\sqrt{(R_{min} + r_{red})^2 - \rho^2} - r_{red}\right)^2} \quad (3.62)$$

Todos los subíndices y superíndices cambian en relación a la situación del contacto con redondeo en la rueda exterior, estando en este caso referidos a la rueda 2 o rueda interior.

Continuando con el mismo desarrollo aplicado de (3.50) a (3.58), y particularizando para la nueva geometría:

$$\lambda_2 = -\lambda_{20} - (\psi - \theta_2) \quad (3.63)$$

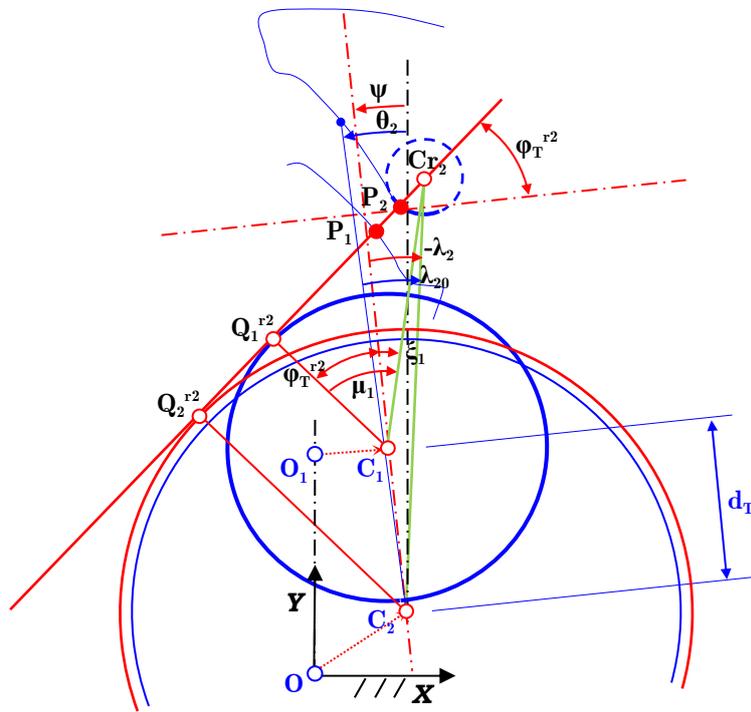


Figura 13. Solapamiento geométrico para el contacto redondeo interior-evolvente

Teniendo en cuenta que la distancia $\overline{C_2C_{r2}}$ se obtiene al sumar el radio de redondeo r_{red} al radio mínimo del engranaje interior R_{min} :

$$|\overline{C_1 C_{r2}}| = \sqrt{(\overline{C_2 C_{r2}} \sin(\lambda_2))^2 + (\overline{C_2 C_{r2}} \cos(\lambda_2) - d_T)^2} \quad (3.64)$$

$$\xi_2 = \arctan2\left(\overline{C_2 C_{r2}} \sin(\lambda_2) / (\overline{C_2 C_{r2}} \cos(\lambda_2) - d_T)\right) \quad (3.65)$$

Simplemente cambiando los índices se obtiene de manera análoga:

$$\mu_1 = \arccos\left(\rho_1 / \overline{C_1 C_{r2}}\right) \quad (3.66)$$

$$\varphi_T^{r2} = \xi_1 + \mu_1 \quad (3.67)$$

Atendiendo al signo:

$$\rho_2^{r2} = \overline{C_2 Q_2^{r2}} = \rho_1 + d_T \cos(\varphi_T^{r2}) \quad (3.68)$$

Y se puede definir finalmente el solapamiento geométrico como:

$$\delta_{Ev-Re} = \overline{P_1 P_2} = \overline{Q_1^{r2} Q_2^{r2}} + \overline{Q_1^{r2} P_1} - \overline{Q_2^{r2} P_2} \quad (3.69)$$

Donde se introduce:

$$\overline{Q_2^{r2} P_2} = \overline{C_2 C_{r2}} \sin(\varphi_T^{r2} - \lambda_2) - r_{red} \quad (3.70)$$

$$\overline{Q_1^{r2} P_1} = \overline{Q_{10} P_{10}} + \rho_1 (\varphi_T^{r2} - \varphi_0 + \psi - \theta_1) \quad (3.71)$$

Para llegar finalmente a:

$$\begin{aligned} \delta_{Ev-Re} = & d_T \sin(\varphi_T^{r2}) + \rho_1 (\varphi_T^{r2} - \varphi_0 + \psi + \tan(\varphi_0) - \theta_1) - \\ & -(R_{min} + r_{red}) \sin(\varphi_T^{r2} - \lambda_2) + r_{red} \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.3.3 Selección del tipo de contacto

De acuerdo con lo presentado, se tienen tres posibles tipos de contacto entre la corona interior y el engranaje exterior: evolvente-evolvente, redondeo exterior-evolvente o evolvente-redondeo interior. La formulación analítica deducida permite calcular los solapamientos geométricos entre los perfiles de los dientes de cada pareja, proporcionando los tres valores posibles correspondientes a cada tipo de contacto. Queda por lo tanto determinar

cuál de estos posibles contactos es el que se debe considerar para cada posición de las ruedas.

Una posible solución para este problema sería llevar a cabo el cálculo de los solapamientos geométricos para los tres posibles casos de contacto y, una vez obtenidas las distancias, hacer que el modelo descarte los dos valores de mayor separación. De esta manera el tercer caso se correspondería necesariamente con la menor distancia entre perfiles, indicando el caso particular y el punto potencial de contacto. Pese a la simplicidad de planteamiento de dicho procedimiento, éste conllevaría llevar a término el cálculo de los tres solapamientos geométricos para cada posición de las ruedas, lo que supone una implementación claramente ineficiente desde el punto de vista de coste computacional.

El método escogido para la selección del tipo de contacto en el modelo propuesto se apoya en la construcción gráfica representada en la Figura 14, donde se observan los distintos valores que pueden tomar los ángulos de presión para cada contacto.

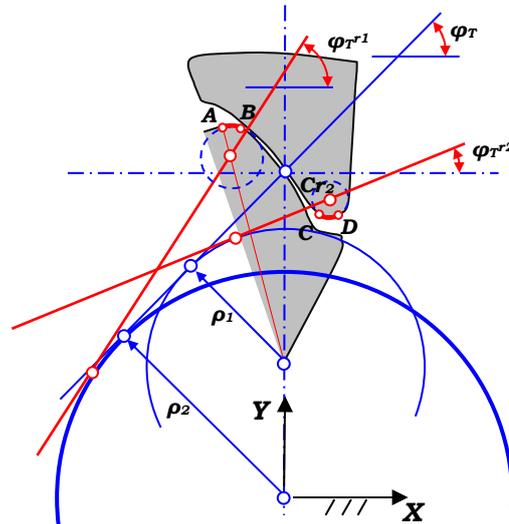


Figura 14. Selección del tipo de contacto

Para el caso de redondeo en la rueda exterior, el ángulo de presión es φ_T^{r1} , que coincidirá con el valor del ángulo de presión φ_T cuando el contacto se produzca en el punto B (inicio del tramo de contacto redondeo exterior-

evolvente si se considera giro antihorario). A partir de B y hasta el final del tramo de redondeo A, el ángulo de presión φ_T^{r1} irá disminuyendo su valor. Esto quiere decir que para valores de φ_T^{r1} mayores que φ_T , el contacto redondeo exterior-evolvente no tiene aplicación.

Análogamente, el ángulo de presión φ_T^{r2} coincidirá con φ_T cuando el contacto tenga lugar en el punto C, lo que se corresponderá con el inicio del contacto evolvente-redondeo interior (considerando giro horario de las ruedas). A partir de esta posición angular y hasta el fin del contacto (antes del punto D), el ángulo de presión φ_T^{r2} experimentará un progresivo aumento de su valor. Por lo tanto, también se pueden desechar aquellos φ_T^{r2} menores que φ_T .

De acuerdo con todo lo anterior, se puede definir un criterio de elección del tipo de contacto activo que atienda únicamente al valor del ángulo de presión de cada clase de contacto. El contacto será de tipo evolvente-evolvente salvo cuando los ángulos de presión de los contactos con redondeo excedan un cierto umbral, inferior en el caso del redondeo exterior-evolvente y superior en el caso del contacto evolvente-redondeo interior. Cabe aclarar que por la geometría del problema de engrane no tiene sentido valorar la posibilidad de que se den los dos contactos que involucran redondeo simultáneamente, por lo que no se incluye tal caso en el criterio de elección de contacto:

$$\varphi_T^{r1} < \varphi_T \rightarrow \text{redondeo exterior - evolvente}$$

$$\varphi_T^{r1} > \varphi_T, \varphi_T^{r2} < \varphi_T \rightarrow \text{evolvente-evolvente}$$

$$\varphi_T^{r2} > \varphi_T \rightarrow \text{evolvente - redondeo interior}$$

3.3.4 Múltiples perfiles en contacto y contacto inverso

Una vez definido el procedimiento para el cálculo de las distancias de separación entre los pares de dientes de las ruedas, es necesario tener en cuenta que a lo largo del proceso de engrane el contacto se va a producir de forma simultánea entre varias parejas de dientes. Además, para que el modelo de engrane sea completo, es preciso incluir un procedimiento que permita conocer los solapamientos geométricos del contacto inverso: así el modelo permitirá estudiar cambios en el sentido del par aplicado, problemas

de traqueteo, acuñaamiento u otros fenómenos (generalmente asociados con la dinámica) en los que tiene lugar contacto en ambos flancos del diente.

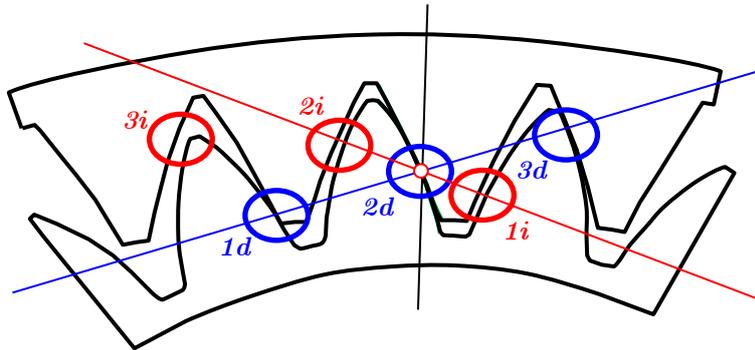


Figura 15. Contactos potenciales considerados

El número total de puntos de contacto potencial N que se tienen en cuenta en este modelo se obtiene a partir de:

$$N = 2 (\text{ceil}(\varepsilon) + 1) \quad (3.73)$$

Donde “ceil” es la función techo o función de parte entera, que proporciona el entero superior al argumento introducido, y ε es la relación de contacto de la transmisión modelada. De la fórmula presentada se puede observar que el número de parejas de dientes analizadas en el modelo incluye una pareja extra que es geoméricamente innecesaria. Esto se justifica por la necesidad de contemplar situaciones en las que el nivel de carga sea tal que las deformaciones en los engranajes produzcan nuevos contactos (debido al empleo de materiales poco rígidos o para relaciones de contacto próximas al entero superior).

En la Figura 15 se pueden observar los puntos potenciales de contacto considerados para una relación de contacto menor que 2, por lo que se considera el contacto en 3 parejas de dientes, lo que supone 6 puntos de contacto potencial. Se han denominado secuencialmente cada uno de los contactos en función de su sentido d o i (directo o inverso). Por simplicidad, en la figura se supone que las ruedas se sitúan en la posición de referencia (existe contacto en el punto primitivo del sentido directo). Dado que el contacto $2d$ (contacto de referencia) está formado por los perfiles que definen la posición de las ruedas, la obtención de la distancia de separación en este

caso será directa, introduciendo en las fórmulas de solapamiento el giro de los perfiles (que coincide con el de las ruedas y que en el caso mostrado en la Figura 15 son nulos). La consideración del resto de parejas en contacto se produce alterando la posición angular de la rueda teniendo en cuenta el paso angular de las ruedas implicadas. Para el contacto $1d$ habrá que sumar (giro horario) a los perfiles los pasos angulares θ_{1P} y θ_{2P} , y para el contacto $3d$ restárselo (giro antihorario).

3.3.4.1 Contacto inverso

Toda la formulación descrita en las secciones anteriores se ha planteado con la finalidad de obtener los solapamientos geométricos entre perfiles de diente en el contacto directo (pendiente positiva de la línea de acción). Debido a la simetría del problema, los solapamientos del contacto inverso pueden ser convertidos a contacto directo, de manera que la misma formulación empleada para el cálculo de los últimos sea válida también para el de los primeros. Empleando la misma posición de referencia (contacto en el punto primitivo), basta con introducir dos giros θ_1^d y θ_2^h para transformar la situación de contacto primitivo en el flanco directo a contacto primitivo en el flanco inverso. La magnitud de los giros a introducir a las ruedas para lograr que el contacto se produzca en la circunferencia primitiva en el flanco inverso se puede observar en la Figura 16. La corona interior habrá de girar el espesor angular del diente θ_1^d , mientras que el engranaje exterior lo hará el espesor angular del hueco θ_2^h (lo que equivale al paso angular menos el espesor angular del diente).

De esta manera, sin más que añadir al giro de las ruedas los ángulos θ_1^h y θ_2^d , se puede obtener el valor del solapamiento en el contacto $1i$ mediante la aplicación de la formulación de contacto directo empleada para $2d$. Al tratarse del problema simétrico, una vez añadidos estos giros auxiliares, hay que tener en cuenta que tanto los giros de las ruedas θ_1 y θ_2 así como el ángulo ψ deberán ser introducidos en las ecuaciones de cálculo de solapamiento con su signo cambiado. Lo mismo que sucedía en el caso de los directos, para los contactos inversos consecutivos $2i$ y $3i$ bastará con girar los perfiles la magnitud correspondiente respecto a la posición del contacto $1i$ ($-\theta_{1P}$ y $-\theta_{2P}$ para el primer caso, y $-2\theta_{1P}$ y $-2\theta_{2P}$ para el segundo).

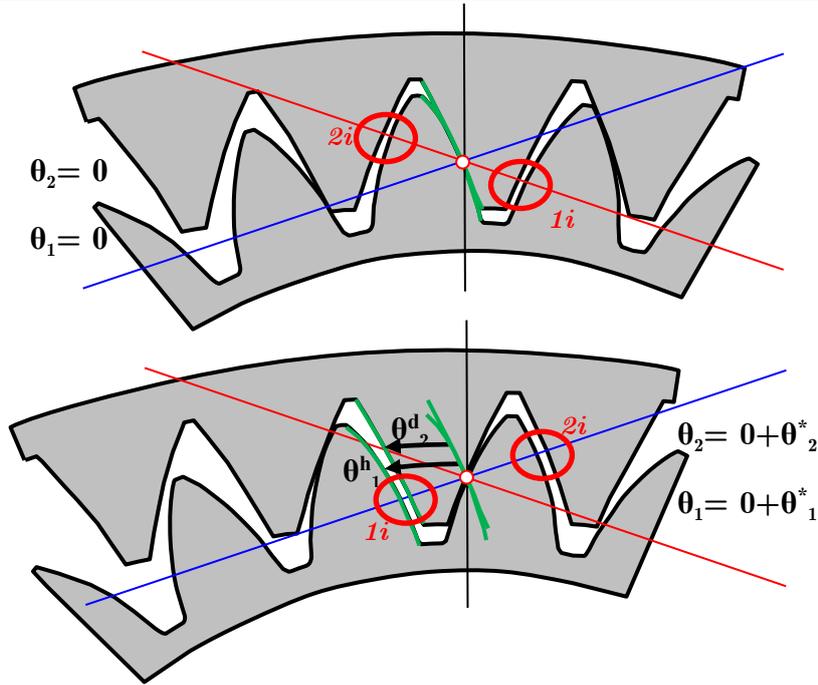


Figura 16. Giros a introducir en la consideración del problema de contacto inverso

De esta manera, se puede elaborar una tabla con las magnitudes modificadas (subíndice M) que hay que introducir en la formulación para obtener los solapamientos geométricos, teniendo en cuenta la multiplicidad de contactos, así como los dos posibles sentidos de acción, directo e inverso:

Tabla 1. Giros auxiliares a introducir en la formulación para la consideración de contactos múltiples y contactos inversos

	θ_{1M}	θ_{2M}	ψ_M
1d	$\theta_1 + \theta_{1P}$	$\theta_2 + \theta_{2P}$	ψ
2d	θ_1	θ_2	ψ
3d	$\theta_1 - \theta_{1P}$	$\theta_2 - \theta_{1P}$	ψ
1i	$-\theta_1 + \theta^{h_1}$	$-\theta_2 + \theta^{d_2} - \theta_{1P}$	$-\psi$
2i	$-\theta_1 + \theta^{h_1} - \theta_{1P}$	$-\theta_2 + \theta^{d_2} - \theta_{2P}$	$-\psi$
3i	$-\theta_1 + \theta^{h_1} - 2\theta_{1P}$	$-\theta_2 + \theta^{d_2} - 2\theta_{1P}$	$-\psi$

Por último, es importante subrayar que, desde el punto de vista de la implementación, los puntos de contacto analizados vienen definidos únicamente para un intervalo de giro de las ruedas equivalente a su paso. La secuencia de engrane se repetirá a partir de esa posición, siendo renombrados los puntos de contacto, y saltando la numeración al diente siguiente en cada caso.

3.3.5 Modificaciones de perfil

Con el proceso para la localización de los puntos potenciales de contacto ya definido, así como el algoritmo de cálculo de los solapamientos geométricos, conviene llamar la atención sobre algunos aspectos reales de los perfiles de dientes rectos en engranajes. Todos los procedimientos anteriormente descritos se apoyan en la definición analítica de unos tramos con formas teóricas de evolvente o arco de circunferencia, que en la práctica no se corresponden con la forma real de los flancos. En el diseño y fabricación real de engranajes de dientes rectos, hay dos motivos fundamentales por los que existe una desviación entre el perfil teórico de evolvente (cinemáticamente ideal) y el finalmente obtenido. El primero y más evidente de ellos, es la imposibilidad de fabricar ruedas perfectas, por lo que los flancos reales presentarán desviaciones respecto al diseño, variables en función de las tolerancias y métodos empleados. La norma ISO 1328: “*Cylindrical gears - ISO system of flank tolerance classification*” contempla estos errores de perfil, describiendo de manera unificada la definición de las distintas tolerancias para la forma del flanco del diente.

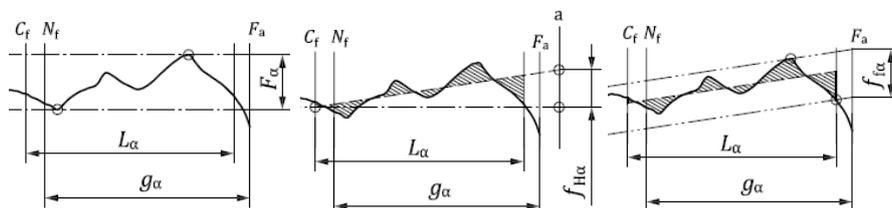


Figura 17. Composición de la amplitud y pendiente de la desviación de perfil según la norma ISO 1328

El segundo motivo, por el que los perfiles de evolvente presentan diferencias respecto al ideal, es la incorporación de modificaciones analizadas en la fase

de diseño. Son varias las razones para la introducción de estas desviaciones en el planteamiento de los flancos: aliviar el nivel de tensiones sobre los dientes, evitar el contacto en la punta y suavizar en lo posible el error de transmisión, cuya brusca variación está ampliamente aceptada como causa principal del ruido producido en el funcionamiento de transmisiones de engranajes rectos.

Es necesario por lo tanto dotar al modelo de la capacidad de contemplar la forma real de los flancos de dientes. Bien sean fruto de un proceso de fabricación intrínsecamente inexacto, o de las modificaciones introducidas de manera premeditada en la fase de diseño; puede considerarse que las desviaciones existentes respecto al perfil original no afectan a la flexibilidad global del diente ni a la dirección normal de contacto. Esto supone asumir que las desviaciones únicamente alteran la condición de contacto en cuanto a la magnitud del solapamiento geométrico, adelantando o retrasando el contacto respecto a la posición ideal calculada para perfiles estrictamente de evolvente. Por lo tanto, la inclusión en el modelo de las desviaciones de perfil se realiza mediante la modificación de los solapamientos geométricos, que habrán sido calculados siguiendo las pautas descritas en las secciones anteriores para perfiles teóricos de evolvente.

Las modificaciones de diseño introducidas en los flancos de los dientes son de diverso tipo, siendo las más habituales el rebaje de punta o de base del diente, pero pudiéndose encontrar también perfiles con variación del ángulo de presión o con coronamiento (*crowning*). En este trabajo se incluye la implementación en el modelo de rebajes de punta (*tip relief*) o de base del diente (*bottom relief*), cuya forma y magnitud deben seleccionarse atendiendo al nivel de carga a transmitir. Este tipo de rebajes, según la longitud del tramo de perfil afectado, se pueden clasificar como cortos o largos. Así, para relaciones de transmisión entre 1 y 2, aquellos rebajes que presenten incidencia en la zona de contacto múltiple serán cortos, mientras que los que extiendan su influencia hasta la zona de contacto simple serán considerados de tipo largo. En cuanto a la forma de la modificación, se pueden encontrar rebajes lineales o parabólicos, presentando distintas características dinámicas entre sí.

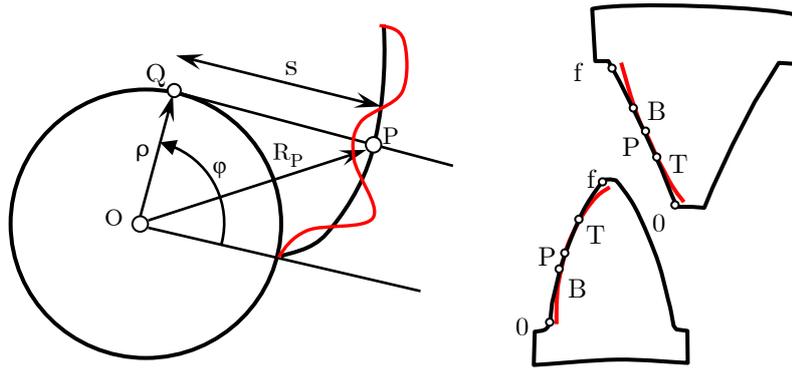


Figura 18. Definición de magnitudes para la implementación de la desviación de perfil

Tanto para el caso de errores como de rebajes, la práctica habitual es presentar la magnitud de la desviación de perfil en un diagrama en función del radio de curvatura del perfil (distancia s en la Figura 18). De esta manera, la corrección $e(s)$ introducida (desviación del perfil real respecto al perfil ideal) viene definida por la magnitud máxima del rebaje C_T para la cabeza ó C_B para la base, la longitud de la corrección ΔL_T ó ΔL_B y la forma adoptada: lineal o parabólica. Valores positivos de la corrección supondrán la eliminación de material y, por lo tanto, un menor radio de curvatura s respecto al teórico en el caso de engranes exteriores, mientras que supondrá un aumento del radio de curvatura para el caso interior, tal como se muestra en la Figura 18. El inicio del rebaje desde el punto primitivo P lo marcarán los puntos B y T para la base y la punta respectivamente, pudiéndose representar los rebajes como muestra la Figura 19.

Las magnitudes de rebaje a sumar al solapamiento geométrico hallado para cada punto potencial se corresponderán según lo anterior con:

$$\begin{aligned}
 e_T^{ext}(s) &= C_T \left(\frac{(s - s_T)}{\Delta L_T} \right)^n_{s \in [s_T, s_f]} & e_T^{int}(s) &= C_T \left(\frac{(s_T - s)}{\Delta L_T} \right)^n_{s \in [s_0, s_T]} \\
 e_B^{ext}(s) &= C_B \left(\frac{(s_B - s)}{\Delta L_B} \right)^n_{s \in [s_0, s_B]} & e_B^{int}(s) &= C_B \left(\frac{(s - s_B)}{\Delta L_B} \right)^n_{s \in [s_0, s_B]}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Teniendo en cuenta los distintos parámetros de rebaje, tomando n el valor 1 o 2 según el rebaje tenga forma lineal o parabólica respectivamente.

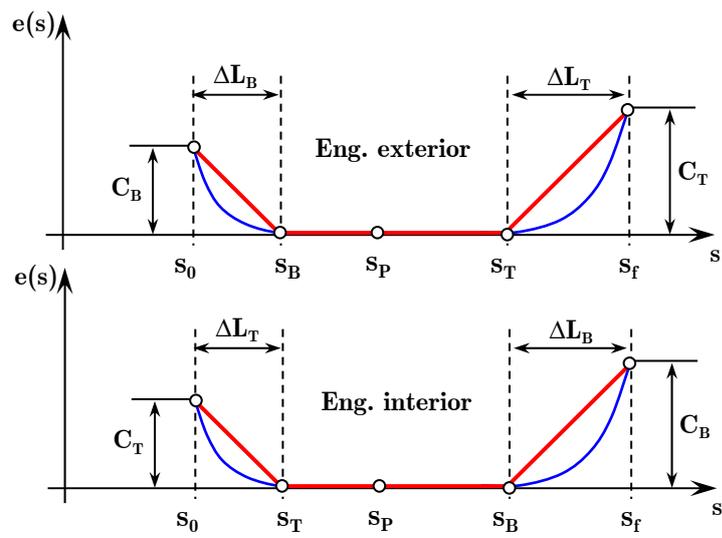


Figura 19. Rebajes de punta y base para engranajes exteriores e interiores

Capítulo 4

Procedimiento para el cálculo de las fuerzas de contacto en engranaje y rodamientos

4.1. INTRODUCCIÓN

Para la determinación de las fuerzas de contacto, se recurre a la relación existente entre éstas y las deformaciones producidas. Se plantea un sistema no-lineal de ecuaciones sujeto a ciertas condiciones, a partir del cual se calculan las fuerzas de contacto para una posición determinada de las ruedas. Es por lo tanto necesario obtener primero la relación entre deformaciones y fuerzas. Para ello, se utilizará un método derivado del propuesto por Andersson [2003]. Este método aplica un procedimiento similar al descrito por Vijayakar, [1991] para la formulación de los esfuerzos de contacto. Siguiendo el trabajo previo de Vedmar [1981] para el caso estático, los desplazamientos fruto de la deformación de los puntos en contacto se obtienen como la composición de dos términos diferenciados; uno global (en adelante estructural) y otro local. El primero se refiere a la deformación lineal en el campo alejado de la zona de contacto, fruto de la flexión y cortante en el diente y de la rotación del cuerpo de la rueda. El segundo término (local), describe el comportamiento de los perfiles en cuanto a su deformación no-lineal de contacto, en la zona cercana al mismo.

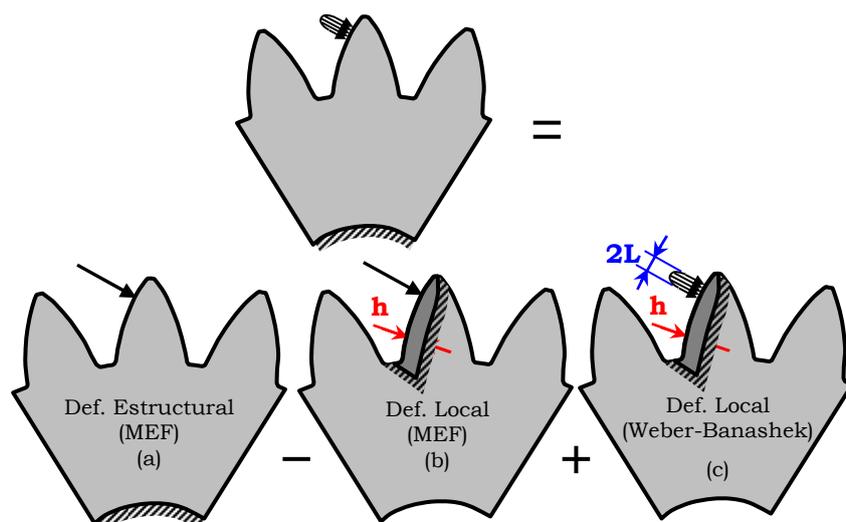


Figura 20. Superposición de problemas para el cálculo de la deformación

En definitiva el método se reduce a aplicar el principio de superposición a los tres problemas independientes que se muestran en la Figura 20, teniendo en cuenta el teorema de Saint-Venant para cargas estáticamente equivalentes: a distancias suficientemente grandes del punto de aplicación, las diferencias entre sus efectos son despreciables. De esta manera, se establece una frontera a una distancia h en torno a la que se compatibilizarán los dos tipos de deformación considerada: local y estructural. Así, el cálculo de la deformación estructural se resuelve mediante la aplicación de técnicas MEF, cargando de manera puntual en la zona de contacto potencial. Como los resultados obtenidos mediante el modelo de elementos finitos bajo estas condiciones de carga únicamente son válidos en las zonas alejadas del punto de aplicación de la fuerza, es preciso introducir una corrección para los puntos cercanos. Esto se consigue superponiendo a dichos resultados los obtenidos mediante la resolución del problema recíproco en la zona cercana al contacto (profundidad $< h$), tal como se muestra en los términos 1 y 2 de la Figura 20. Una vez se tiene la deformación estructural como composición de estos dos términos (entre los que se anula el efecto local), finalmente se añade la deformación local en el dominio cercano a la zona de contacto, calculada mediante la aplicación de una formulación analítica no-lineal en forma cerrada, derivada de la teoría de Hertz.

Como se referenció anteriormente, el uso de este planteamiento a la hora de calcular las fuerzas de contacto plantea una serie de ventajas. Normalmente, el tamaño de la zona de contacto entre engranajes ($2L$) es dos órdenes de magnitud más pequeño que el tamaño de los dientes. Esto supone la necesidad de disponer una malla extremadamente fina en dicha zona de contacto, cuando el problema se pretende resolver aplicando el MEF. Además, dado que la zona de contacto se va desplazando durante el proceso de engrane a lo largo del flanco de los dientes, la situación de este mallado fino ha de ser reubicada para cada posición de cálculo. Con el enfoque híbrido empleado en este trabajo, en el que las deformaciones locales se calculan de manera analítica y el modelo de elementos finitos se utiliza para obtener la deformación en un dominio lejano al contacto, no es necesario un alto grado de refinamiento de la malla en dicha zona, ni tampoco remallar para cada posición, reduciéndose enormemente el coste computacional.

A continuación se describen de manera detallada los dos procedimientos empleados para la obtención de cada uno de los dos tipos de deformación considerados, así como el método de integración de ambos y el cálculo final de los esfuerzos de contacto. Finalmente, se presentará el método de cálculo de esfuerzos de contacto en rodamientos empleado en el modelo.

4.2. CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES ESTRUCTURALES

Las deformaciones estructurales se calculan empleando un modelo de elementos finitos bidimensional, pudiendo tenerse en cuenta condiciones de tensión o deformación plana. En general, el espesor de los engranajes es significativo frente a su diámetro, por lo que se puede plantear el empleo de condiciones de deformación plana. La consideración de hipótesis de tensión o deformación plana indudablemente implica la asunción de un cierto error en la estimación de la deformación, no existiendo un criterio establecido para optar por una u otra alternativa. A este respecto, la aplicación de una hipótesis incorrecta podría dar lugar a errores relativos de hasta el 10% en cuanto al valor de rigidez de engrane según el trabajo de Wang [2003]. En el siguiente capítulo se analizarán las diferencias según la asunción de una u otra hipótesis en el marco de este modelo de transmisión.

Además del beneficio que supone el uso de un modelo de elementos finitos limitado al cálculo del campo de desplazamientos lejos de la zona de

contacto, existe otra ventaja en este planteamiento, que viene derivada del tratamiento individual de las ruedas. Resolver el problema de contacto de engranajes mediante MEF supondría la incorporación en el modelo de elementos de contacto específicos, requiriendo una cierta concordancia entre las mallas correspondientes a cada rueda, o bien la definición de relaciones funcionales entre los desplazamientos de los puntos localizados en las proximidades del contacto. En este caso, como el comportamiento local de contacto se define de manera separada, el modelo de elementos finitos únicamente tiene el cometido de proporcionar el comportamiento individual de cada rueda, simplificándose el problema de manera significativa.

El modelo de elementos finitos ha sido desarrollado en el entorno MATLAB® empleando la herramienta “*Partial Differential Equation Toolbox*”. A pesar de que esta herramienta únicamente admite el empleo de elementos triangulares, con unas capacidades muy limitadas en cuanto al control del mallado, sí posibilita la elaboración del modelo de elementos finitos en el mismo entorno empleado para el resto de las tareas (incluyendo las simulaciones dinámicas), motivando así su elección. En cuanto a la utilización de elementos triangulares, podrían surgir problemas de precisión, especialmente si el interés fuera el cálculo de tensiones. No obstante, como los resultados a obtener son únicamente los desplazamientos de los nodos correspondientes a los perfiles de los dientes, la utilización de elementos triangulares puede considerarse aceptable. Para la validación de este punto se han realizado contrastes empleando otros códigos de elementos finitos (*MSC-Nastran*®), con un mejor control del mallado y elementos cuadrangulares, encontrando que el empleo de la herramienta proporcionada por MATLAB® es suficiente.

4.2.1 Acoplamiento de deformaciones entre dientes adyacentes

En cuanto al modelo concreto de engranaje, el cometido del análisis por elementos finitos es proporcionar la deformación causada por la fuerza de contacto, teniendo en cuenta la flexión y cortante en el diente así como la torsión del cuerpo de la rueda. Por ello, se podría pensar en la construcción de un modelo simplificado con un solo diente, y quizás sólo una porción lo suficientemente representativa del cuerpo del engranaje. Este planteamiento es el empleado por numerosos trabajos en la bibliografía, pero tiene el inconveniente de no permitir estudiar la influencia que una pareja de dientes

en contacto puede tener sobre el contacto de las parejas adyacentes, y la posible modificación de la rigidez de engrane debido a estos términos de flexibilidad cruzada entre parejas. Para poder tener en cuenta este aspecto, el modelo elaborado para cada rueda presenta un número de dientes que es función de la relación de contacto, de tal manera que se considere la influencia de un contacto en cualquier punto potencial.

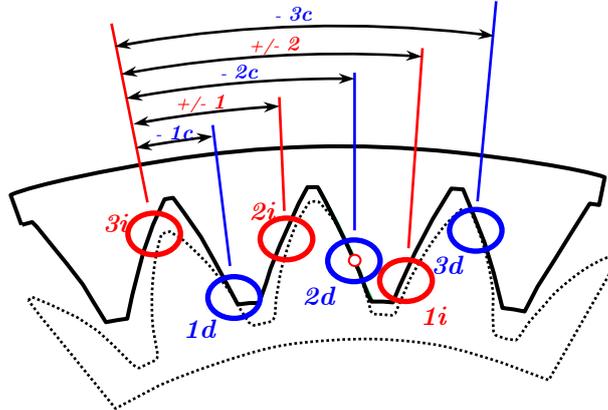


Figura 21. Distancias relativas entre puntos potenciales de contacto

Para saber el número de dientes que han de incluirse en el modelo es necesario estudiar de nuevo la construcción gráfica de puntos potenciales de contacto. En la Figura 21 se observa la relación existente entre dichos puntos potenciales de contacto, para una relación de contacto entre 1 y 2. En particular se muestran las distancias en número de dientes entre el punto denominado como $3i$ y los demás. Entre $3i$ y $1d$ existe una diferencia de un diente, en contraflanco (indicado por el color azul y el subíndice c); entre $3i$ y $2i$ hay una diferencia de un diente; entre $3i$ y $2d$ hay dos dientes, también en contraflanco, y así sucesivamente. El signo negativo o positivo indica la posición del flanco en el que se mide el desplazamiento respecto al flanco de carga y la dirección de la misma.

4.2.2 Modelo de elementos finitos para el cálculo de la deformación estructural

Por lo tanto, si se desea construir un único modelo que permita analizar las deformaciones cruzadas asociadas con todas las relaciones entre puntos de contacto potencial, se tiene que la diferencia máxima necesaria es de $+2/-3c$

respecto al flanco de referencia. Así, se plantea el modelo con 6 dientes de la Figura 22.

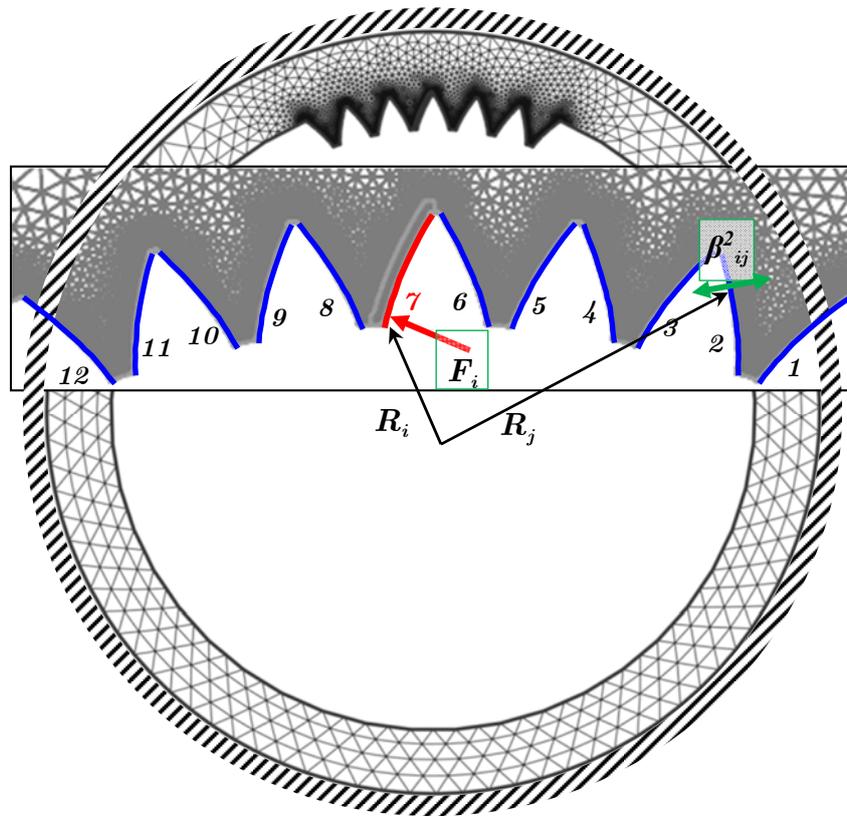


Figura 22. Modelo global de elementos finitos para el cálculo de la deformación estructural

Este modelo MEF se construye a partir de la geometría de los perfiles obtenida en la sección 3.2, con un número de dientes función de la relación de contacto, de manera que se tengan en cuenta todas las posibles relaciones de carga/deformación. La geometría del modelo se completa con un arco de circunferencia de radio igual al de fondo de diente, y con las circunferencias correspondientes al agujero del eje en engranajes exteriores o al perímetro exterior de la corona en engranajes interiores. En ambos casos los nodos situados sobre estas dos circunferencias serán los considerados con condición de contorno de empotramiento para el análisis de elementos finitos. El procedimiento de análisis consiste en la utilización de un único flanco de

carga (flanco activo, número 7 en la Figura 22), sobre cuyos nodos se aplica de forma sucesiva una carga unitaria F_i en la dirección normal al flanco. Cada uno de estos distintos casos de carga en el flanco 7 se referencian haciendo uso de la posición del punto de aplicación de la fuerza respecto al centro del engranaje o radio R_i .

Así, para cada caso de carga, se obtienen y almacenan todos los desplazamientos β producidos en cada uno de los perfiles k , ordenados según el radio R_j del nodo deformado. Estos valores de flexibilidad se guardan posteriormente en k matrices, una por cada flanco considerado, indexando las columnas y filas por su correspondiente radio de carga y desplazamiento respectivos. El valor de desplazamiento obtenido se designa entonces como β^k_{RiRj} , es decir, la flexibilidad del punto j situado en el flanco k cuando la fuerza está aplicada en el punto i del flanco de carga. Los valores de flexibilidad se consideran positivos cuando el desplazamiento se dirige hacia el centro de curvatura del perfil, siendo negativos en caso contrario. De esta manera, las relaciones carga/desplazamiento entre todos los puntos potenciales de contacto se corresponderán con los desplazamientos de los siguientes flancos en el modelo de elementos finitos según la Tabla 2.

Tabla 2. Referencia de flancos para las relaciones entre puntos de contacto potencial

Carga Desplazamiento	1d	2d	3d	1i	2i	3i
1d	7	5	3	10	8	6
2d	9	7	5	8	6	4
3d	11	9	7	6	4	2
1i	10	8	6	7	5	3
2i	8	6	4	9	7	5
3i	6	4	2	11	9	7

4.2.2.1 Modelo de elementos finitos: eliminación del efecto local

Al no ser válidos los resultados de desplazamiento obtenidos mediante el modelo en zonas cercanas al punto de aplicación de la fuerza, es necesario aplicar una superposición para corregir de manera local los desplazamientos en la zona de contacto, de acuerdo con el esquema mostrado en la Figura 20. Con este fin, se define un modelo parcial de elementos finitos mallado de forma compatible con el modelo global, y que únicamente abarca el flanco activo hasta una profundidad h , como se presenta en la Figura 23.

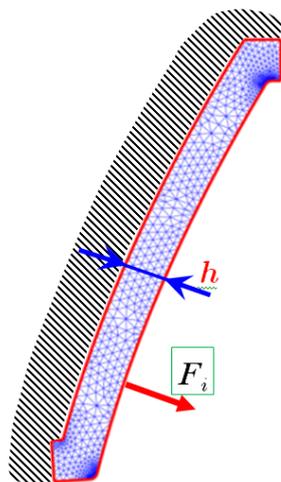


Figura 23. Modelo parcial de elementos finitos para la corrección de la deformación estructural en la zona del contacto

Para cada caso de carga se aplica en el modelo parcial una fuerza unitaria F_i en la dirección normal al flanco, de sentido opuesto a la aplicada en el modelo global, y se suman los resultados de desplazamiento obtenidos mediante la resolución de ambos modelos. Con esta superposición se eliminan los resultados de deformación de carácter local en la zona de contacto, tal como se aprecia en la Figura 24. En ésta se muestra la deformada (amplificada con una escala de 50000:1) obtenida con el modelo global (en azul) y parcial (en verde) así como el resultado de la composición de ambas (en negro), en donde se puede apreciar cómo el flanco sólo presenta deformaciones estructurales, corrigiéndose los desplazamientos locales.

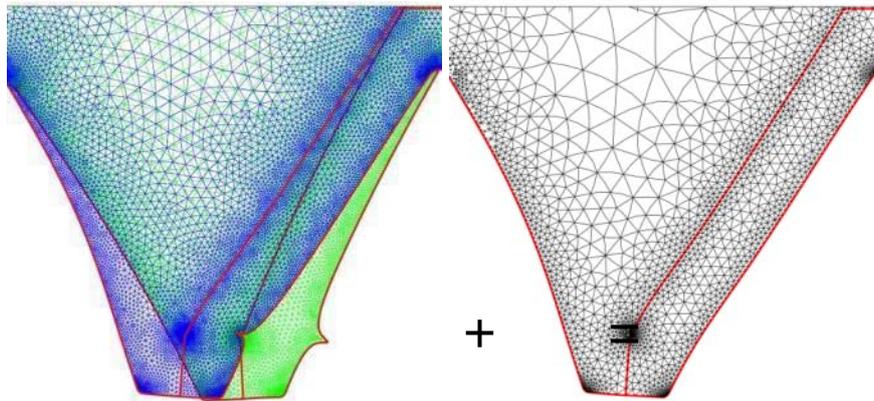


Figura 24. Composición de deformaciones del modelo global y parcial para la eliminación de la deformación local

La selección de la profundidad h a la que se define la frontera entre ambos modelos ha de realizarse mediante un estudio previo particular para cada geometría del diente. Si la distancia no es lo suficientemente grande, la aplicación de dos fuerzas iguales y opuestas no causará deformaciones iguales y opuestas, debido a la existencia de unas condiciones de contorno distintas. Según el principio de Saint-Venant, a medida que la separación de estas diferencias en las condiciones de contorno con el punto de aplicación de las fuerzas aumente, las deformaciones producidas en ambos sistemas tenderán a ser equivalentes.

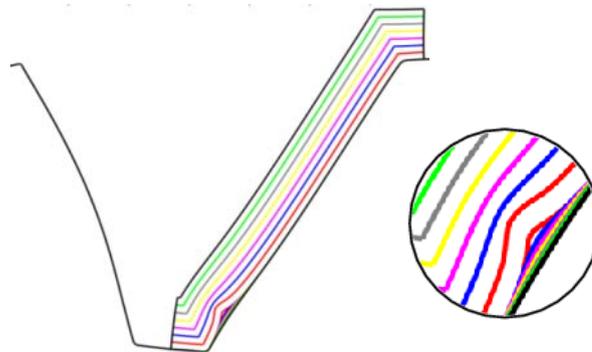


Figura 25. Incidencia de la profundidad de la frontera h en la eliminación de deformaciones de contacto en el MEF

En la Figura 25 se muestran las deformadas del flanco de carga para distintos valores de la profundidad h de la frontera entre dominios. Se observa como para valores pequeños de h la superposición de modelos no es válida, resultando en valores de la deformación del flanco de carga con una componente local. La deformación así calculada será errónea, debido a que el modelo de elementos finitos no es capaz de resolver el problema de contacto, tanto por lo grosero del mallado como por el carácter puntual de la carga.

4.2.3 Deformación estructural: matrices de flexibilidad

La precisión de las matrices de flexibilidad finalmente obtenidas vendrá dada tanto por el número de nodos considerados en el flanco activo o de carga, como por el número de nodos en el resto de flancos. Dado que el análisis de flexibilidades se realiza una única vez, al ser propiedad inalterable de las ruedas, esto invita a proponer una resolución muy elevada en el cálculo de las flexibilidades. Sin embargo, el tamaño de las matrices de flexibilidad juega un papel importante en el peso total de la memoria que ha de emplear la máquina durante las simulaciones dinámicas. Es por ello que resulta aconsejable reducir el número de datos por flanco, mediante una interpolación sobre los valores de flexibilidad calculados en cada nodo. Se consigue con esta normalización que todas las matrices de flexibilidad tengan el mismo tamaño, y además que su indexación sea homogénea. La indexación homogénea de las matrices supone que todos los valores de flexibilidad guardados en la matriz han de estar equiespaciados, tanto respecto al radio de carga R_i como respecto al radio del punto de desplazamiento R_j . Estos dos aspectos son importantes de cara a la posterior manipulación de datos en el resto de rutinas, agilizando la computación en varias operaciones.

La matriz de flexibilidad representada en la Figura 26 se corresponde con los desplazamientos del flanco de carga cuando la fuerza se aplica a lo largo de ese mismo flanco. Es sencillo observar por lo tanto que los únicos valores de flexibilidad β^7 que serán de utilidad en esta matriz son aquellos que se sitúan en la diagonal (resaltados en negro en la figura), por ser éstos los valores de la deformación estructural en el propio punto de contacto: $\beta^7_{R_i R_i}$ ($1d-1d$, $2d-2d$, etc. en la diagonal de la Tabla 2), y al no poder darse contacto en dos puntos simultáneos en el mismo flanco.

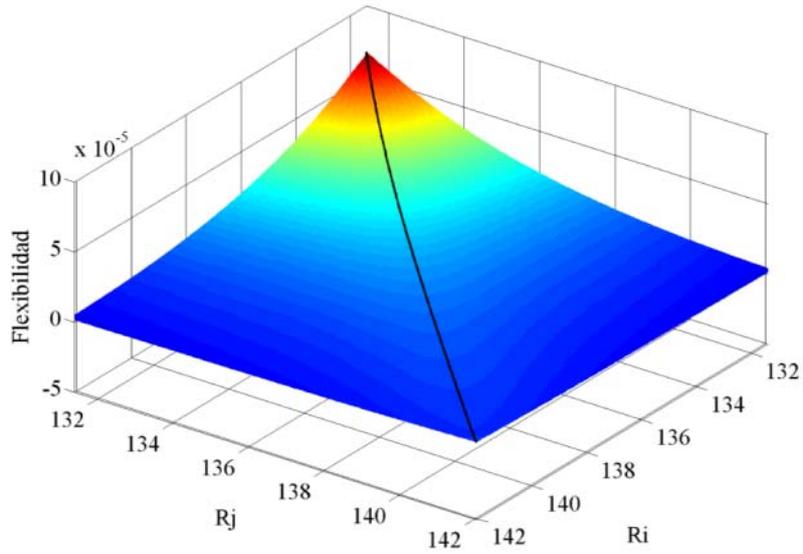


Figura 26. Representación de los valores de flexibilidad para el flanco de carga (7)

El hecho de utilizar el radio de los nodos R_i y R_j como referencia de las matrices de flexibilidad tiene el inconveniente de la pérdida de resolución en la zona de redondeo de los dientes, en el interior del flanco la corona y el exterior de los engranajes exteriores. En la siguiente figura se muestra la diagonal de la matriz 7, en azul sin la normalización (con los valores de flexibilidad dados por los nodos MEF del modelo), y en rojo tras la normalización a 100 puntos por flanco:

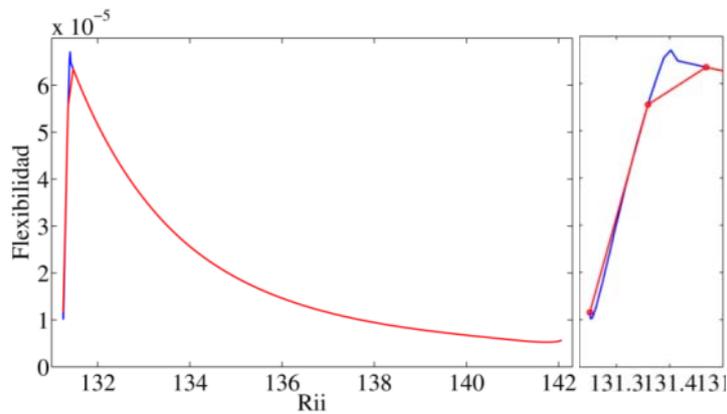


Figura 27. Vectores de flexibilidad para el flanco de carga: en azul solución por nodos del modelo, en rojo valores normalizados a 100 puntos

Se aprecia cómo a partir de la transición evolvente-redondeo los datos de flexibilidad almacenados en la versión normalizada no recogen fielmente la deformación del diente. Dado que en el caso del flanco de carga los únicos datos útiles son los de la diagonal, ésta se almacena sin aplicar normalización, y la matriz es desechada. Para el resto de flexibilidades cruzadas (Figuras 28-30), este procedimiento no es posible y las matrices arrastrarán un cierto error en la zona de transición por la reducción del número de puntos considerados. Sin embargo, su incidencia será mucho menos importante, al ser las deformaciones en los flancos adyacentes varios órdenes de magnitud inferiores a las del flanco de carga.

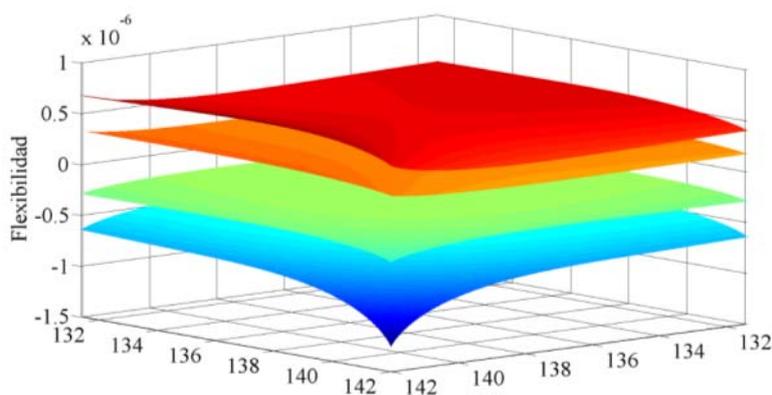


Figura 28. Representación gráfica de los valores de flexibilidad para los flancos (en orden descendente) 3, 1, 2 y 4

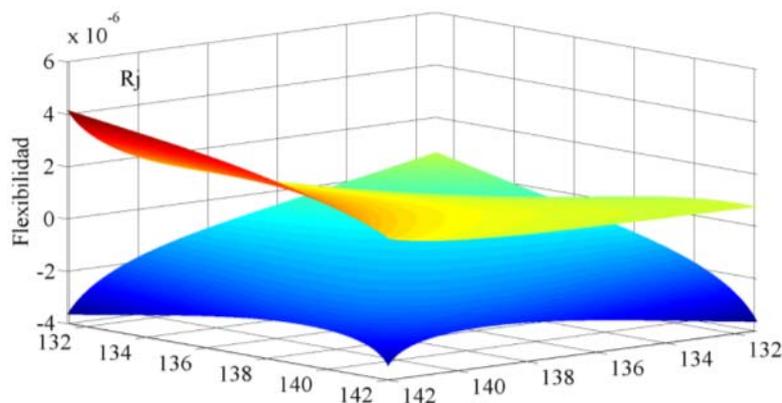


Figura 29. Representación gráfica de los valores de flexibilidad para los flancos (en orden descendente) 5 y 6

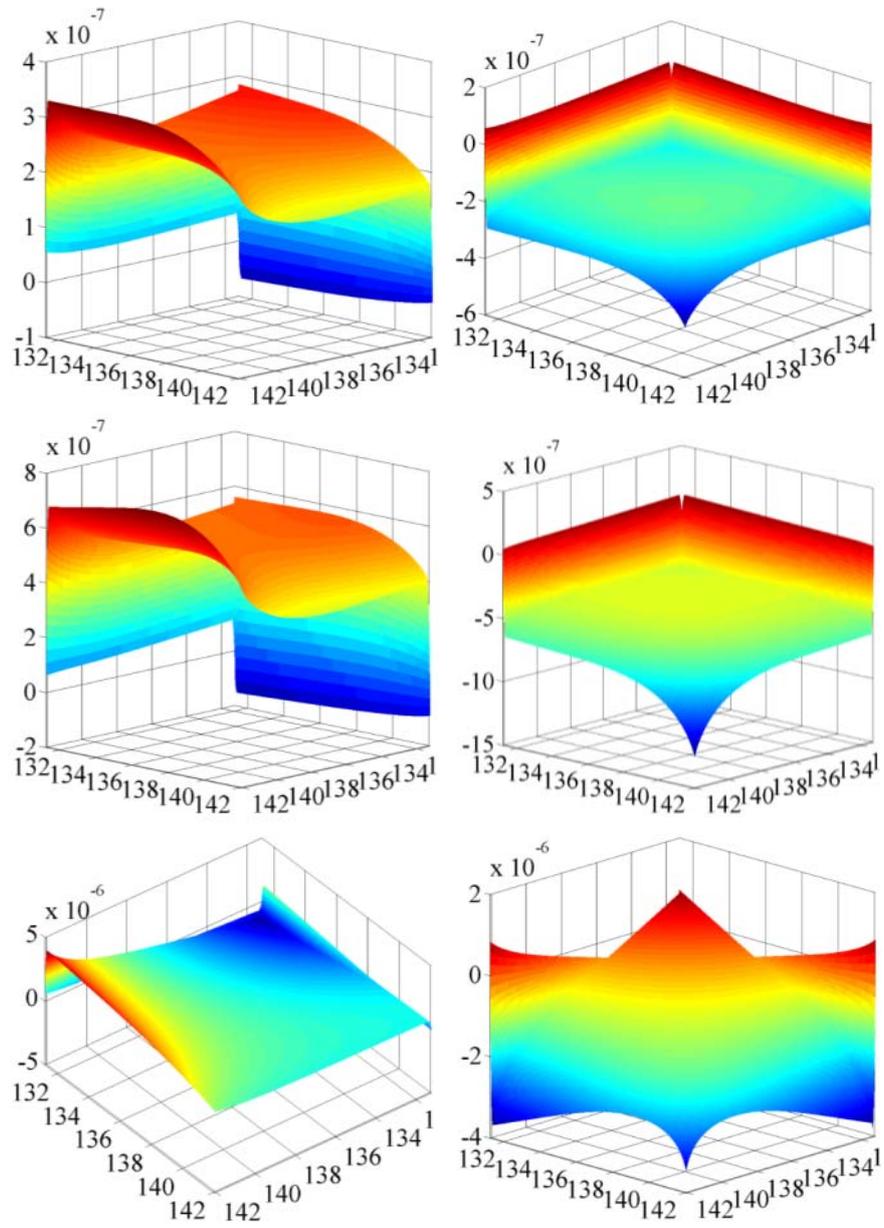


Figura 30. Representación gráfica de los valores de flexibilidad para los flancos 1-6 (1,3,5 y 2,4,6 por columnas)

4.3. CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES LOCALES

Las deformaciones locales se van formular aplicando la propuesta de Weber-Banashek para problemas bidimensionales, derivada de la teoría de Hertz. Frente al modelo de Vijayakar, esta propuesta evita la obtención de la presión actuante en la zona de contacto. Para ello, se sustituye la discretización del área de contacto y la integración de la solución de Bousinesq por una formulación analítica en forma cerrada, por lo que en este caso se asume que tanto el área de contacto como la distribución de presiones adoptan una forma predeterminada. De acuerdo con Weber-Banashek, la deformación entre un punto situado en la superficie de un diente y un punto localizado a una profundidad h , cuando se dan condiciones de deformación plana, se obtiene mediante la expresión:

$$u_{local}(q) = \frac{2(1-v^2)}{\pi E} q \left[\ln \left(\frac{h}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right) - \frac{v}{1-v} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{L}{h} \right)^2} - 1 \right) \right] \quad (4.1)$$

Donde q es la intensidad de carga (expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud) y $2L$ es la extensión de la distribución de presiones en las proximidades de aplicación de la carga. En el caso de tensión plana la formulación anterior se ve modificada, dando lugar a:

$$u_{local}(q) = \frac{2}{\pi E} q \left[\ln \left(\frac{h}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{h}{L} \right)^2} \right) - v \left(\frac{h}{L} \right)^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{L}{h} \right)^2} - 1 \right) \right] \quad (4.2)$$

En cuanto a la semiextensión de la distribución de presiones L , ésta se obtiene en función de la carga y de las características geométricas y de los materiales de los cuerpos en contacto, como:

$$L = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} q} \quad (4.3)$$

Donde E_i , v_i y χ_i , son el módulo elástico, el coeficiente de Poisson y el radio de curvatura del cuerpo i . En el caso de los engranajes, la intensidad de la carga q se obtendrá dividiendo la carga aplicada sobre el diente F por el ancho de la rueda b . En cuanto a los radios de curvatura, se obtendrán a partir de la expresión (3.41) para el contacto entre perfiles de evolvente.

Cuando haya redondeos implicados se emplearán las expresiones (3.57) y (3.71) (en función de la rueda sobre la que se encuentre el redondeo) para obtener el radio de curvatura de los perfiles de evolvente, mientras que para el tramo de redondeo en la punta el valor del radio de curvatura será el propio radio de redondeo.

La fórmula presentada para la estimación de la longitud de la distribución de presiones es correcta para cualquier pareja de engranajes exteriores, cuya relación de superficies en contacto siempre es convexa-convexa. Sin embargo, cuando una de las ruedas engranadas es interior (Figura 31), lo anterior es únicamente cierto cuando se produce el contacto en el redondeo de la corona, mientras que la relación será cóncava-convexa en el resto de casos (contacto normal entre perfiles de evolvente y contacto con el redondeo de la punta del engranaje exterior). Por lo tanto, la extensión de la distribución de presiones se verá modificada de la siguiente manera:

$$L_{conc} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left(\frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right) \frac{\chi_1 \chi_2}{\text{abs}(\chi_1 - \chi_2)} q} \quad (4.4)$$

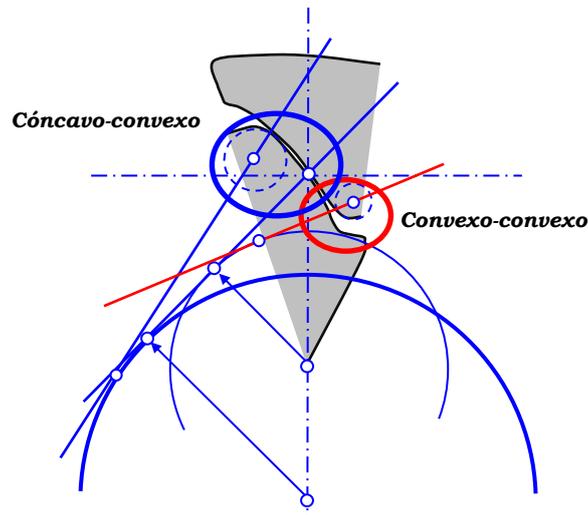


Figura 31. Convexidad de las superficies de contacto en el engrane interior

Y dando como resultado la consecuente ampliación de la longitud de contacto en el contacto cóncavo-convexo. Es por lo tanto necesario tener en cuenta durante la resolución del problema de las fuerzas de contacto la

condición de concavidad o convexidad al trabajar con este método en engranajes interiores. La formulación para la extensión de la distribución de presiones implica una variación brusca debida al cambio puntual en los radios de curvatura de los flancos de los dientes en el paso de evolvente a redondeo. Dado que en la práctica el tamaño de la zona de contacto no es puntual, sino que abarca una cierta longitud del desarrollo del flanco, tampoco ha de ser puntual la evaluación de los radios de curvatura. De cara a corregir este hecho, durante la implementación se ha introducido una corrección de carácter lineal en la transición entre valores de radios de curvatura, distribuyendo el cambio a lo largo de un rango de posiciones angulares.

4.4. COMPOSICIÓN DE DEFORMACIONES Y OBTENCIÓN DE LOS ESFUERZOS DE CONTACTO

En las últimas dos secciones se ha descrito el procedimiento empleado en el modelo para la obtención de la relación existente entre las fuerzas aplicadas en los dientes durante el proceso de engrane y las deformaciones producidas como consecuencia del mismo. Aplicando el método de superposición planteado, se puede formular la deformación total en el punto de contacto j u_{Tj} como la suma de las contribuciones locales y estructurales de ambas ruedas:

$$u_{Tj} = u_{Local}^{R1}(F_j) + u_{Local}^{R2}(F_j) + u_{Estructural,j}^{R1}(F_{1:N}) + u_{Estructural,j}^{R2}(F_{1:N}) \quad (4.5)$$

Las componentes locales únicamente dependen de la fuerza aplicada en el propio punto de contacto que se analiza, empleando las ecuaciones (4.1) y (4.2). Las componentes estructurales por el contrario dependen no sólo de la fuerza en el punto de contacto j , sino también de las fuerzas que actúan en los dientes adyacentes, de la siguiente manera:

$$u_{Estructural,j}^{R1}(F_1, F_2, \dots, F_N) = \sum_{i=1}^N F_i \lambda_{j,i} \quad (4.6)$$

En donde N es el número de puntos potenciales de contacto considerados, F_i es la fuerza actuante en el punto de contacto i y $\lambda_{j,i}$ es la deformación del punto de contacto j cuando se aplica una fuerza unitaria en el punto de contacto i . Esta sencilla relación lineal en (4.6) se implementa en el modelo

sin más que asignar adecuadamente los valores de flexibilidad $\lambda_{j,i}$ almacenados en las matrices de flexibilidad por flancos β^k . Atendiendo a la Tabla 2 para la selección de la matriz correspondiente según la relación de flancos existente entre puntos de contacto, y sabiendo que los valores de flexibilidad $\beta^k_{R_i R_j}$ se almacenan ordenados a partir de R_i y R_j , se calculan estos radios de los puntos de contacto (ver Figura 32) para cada rueda r :

$$R_r = \overline{C_r P_r} = \sqrt{\overline{C_r Q_r}^2 + \overline{Q_r P_r}^2} \quad (4.7)$$

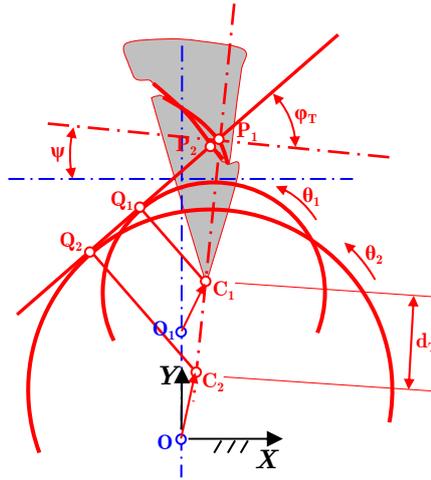


Figura 32. Cálculo de los radios de contacto para la extracción de flexibilidades

La formulación para los distintos valores de los segmentos $\overline{C_r Q_r}$ y $\overline{Q_r P_r}$ estará sujeta al tipo de contacto (evolvente, redondeo de punta, etc.), tal como se describe en las ecuaciones (3.41), (3.57), (3.58), (3.70) y (3.71). Al almacenar un número discreto de datos por flanco, los valores de flexibilidad $\lambda_{j,i}$ finalmente asignados se obtendrán mediante interpolación lineal entre los cuatro valores de radios que rodean al $\beta^k_{R_i R_j}$ deseado.

Una vez se tienen las deformaciones según (4.5), se plantea la compatibilidad de deformaciones. Esta compatibilidad supone que el solapamiento geométrico entre perfiles engranados (fruto de la modificación en la posición de las ruedas) ha de ser igual a la deformación total sufrida en el punto de contacto:

$$\delta_i(\{\vec{r}_1, \theta_1\}, \{\vec{r}_2, \theta_2\}) = u_{Ti}(\{\vec{r}_1, \theta_1\}, \{\vec{r}_2, \theta_2\}, \{F_1, F_2, \dots, F_N\}) \quad (4.8)$$

El solapamiento geométrico (o distancia de separación) entre perfiles únicamente depende de la geometría del problema y de las posiciones de las ruedas, dadas por el vector de posición de centro de cada rueda \vec{r}_i y por el ángulo θ_i girado por las mismas. Las deformaciones, por su parte, además de depender de las posiciones de los engranajes (distintas flexibilidades y curvaturas para cada posición), también son función de las fuerzas de contacto. Expandiendo el problema en un sistema de n ecuaciones no lineales, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{Local,1}^{R1}(F_1) \\ u_{Local,2}^{R1}(F_2) \\ \vdots \\ u_{Local,n}^{R1}(F_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{Local,1}^{R2}(F_1) \\ u_{Local,2}^{R2}(F_2) \\ \vdots \\ u_{Local,n}^{R2}(F_n) \end{pmatrix} + (\lambda^{R1} + \lambda^{R2}) \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$F_{1,\dots,n} \geq 0$$

Donde se define la condición de complementariedad, que establece que no pueden existir fuerzas de contacto negativas como consecuencia de la aplicación de (4.6) en aquellos contactos con separación real entre perfiles. De esta manera, la dimensión del sistema pasa a ser $n \leq N$, y el problema se reduce a determinar los valores de las fuerzas $\{F\}$ que verifican el sistema de ecuaciones escrito de forma compacta como:

$$\{\delta(\{q\})\} = \{u_{Local}^{R1}(\{q\}, \{F\})\} + \{u_{Local}^{R2}(\{q\}, \{F\})\} + \lambda(\{q\})\{F\} \quad (4.10)$$

$$\text{Variables de posición : } \{q\} = [x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2]$$

4.4.1 Acoplamiento de deformaciones entre engranes

El procedimiento de obtención de flexibilidades se generaliza en este modelo de tal manera que la relación entre fuerza y deformación no sólo considere la rigidez de engrane debida a la flexibilidad del diente individual, sino que tenga en cuenta también la deformación del cuerpo de la rueda. Dicha inclusión de la flexibilidad del cuerpo de la rueda, además de una mejora en el tratamiento individual del engrane entre una pareja de dientes, tiene como consecuencia el acoplamiento de las rigideces entre dientes adyacentes, tal como se describió en el apartado 4.1 e ilustra en la Figura 22. Esto supone

que la dimensión del problema descrito en la expresión (4.9) presente una dimensión de n , con el máximo en N : el número total de puntos de contacto potencial considerados según la relación de contacto. En el siguiente capítulo se presentará una comparativa detallada de resultados según se adopte o no esta hipótesis de rigidez acoplada entre puntos de contacto de un mismo engrane. Sin embargo, desde un punto de vista descriptivo del modelo, es preciso añadir que en el caso de modelizado de transmisiones planetarias, la consideración de este acoplamiento conlleva una complejidad añadida. Ésta deriva del hecho de que sobre una misma rueda se producen de manera simultánea múltiples engranes: en el caso de los planetas, se tienen siempre dos engranes diametralmente opuestos con sol y corona. Por su parte, sobre el sol y la corona engranan todos los planetas. Por lo tanto, de cara al cálculo de las fuerzas de contacto, la deformación del cuerpo de las ruedas producirá un acoplamiento no sólo entre los N puntos de contacto potencial de cada engrane, sino que también existirá un acoplamiento en la flexibilidad entre cada engrane. Tal como se muestra en la Figura 33, existirá un $\beta_{P_i(C-S)}$ para el acoplamiento entre cada engrane de un planeta a través de la deformación de dicho planeta, así como un $\beta_{C(i-i+1)}$ y $\beta_{S(i-i+1)}$ para el acoplamiento a través de las deformaciones de los cuerpos de la corona y el sol respectivamente.

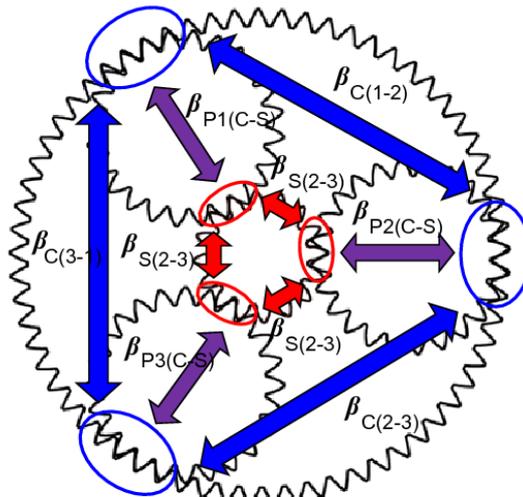


Figura 33. Acoplamiento entre engranes múltiples en las ruedas

El modelo de elementos finitos que se emplea en 4.2.2 para la obtención de las deformaciones estructurales, y que era válido para el tratamiento de transmisiones ordinarias con un único engrane por rueda, es por lo tanto insuficiente para el modelizado de transmisiones planetarias. Es necesario en este caso disponer de un modelo más completo que no sólo abarque los dientes de un engrane, sino que permita obtener las flexibilidades cruzadas entre los diversos engranes del sol y la corona con cada planeta, así como entre los dos engranes que presenta cada uno de los planetas. En cuanto a los modelos de elementos finitos a utilizar se pueden plantear diversas soluciones, tal como se muestra en la Figura 34. Dichas opciones incluyen la construcción de un modelo completo de rueda (el sol y el planeta en la figura) o la inclusión de un número de dientes limitado a los engranes necesarios (la corona en la figura).

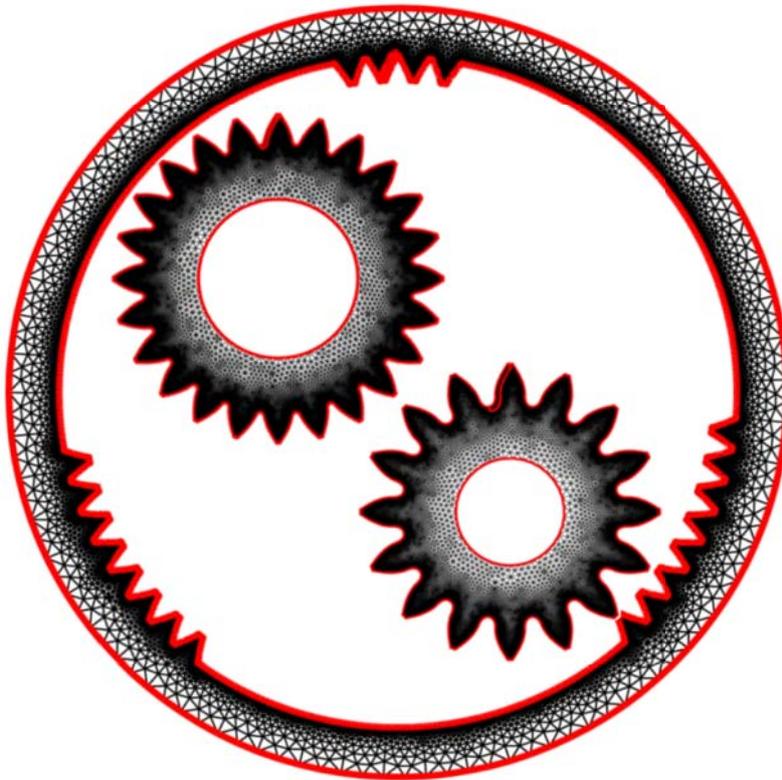


Figura 34. Modelos de elementos finitos para el cálculo de la flexibilidad cruzada entre engranes (no escalados)

Estas flexibilidades se almacenan de nuevo siguiendo la misma filosofía de trabajo presentada en el apartado 4.2.3: ordenación consecutiva de las matrices por flancos (partiendo en este caso del flanco de carga) e indización de los valores de flexibilidad según los radios de los puntos de contacto. De acuerdo con lo anterior, el problema de contacto se amplía, al quedar todos los engranes de la transmisión planetaria acoplados por medio de la rigidez de los engranajes. Por lo tanto, para una transmisión con un número de planetas P y puntos potenciales de contacto N , en lugar de resolver $2P$ sistemas de ecuaciones de engrane individual de dimensión N , el acoplamiento de las flexibilidades transforma el problema en un único sistema de dimensión $2PN$. Así, la expresión (4.6) queda:

$$u_{Estructural,j}^{R1}(F_1, F_2, \dots, F_{2PN}) = \sum_{i=1}^{2P \cdot N} F_i \lambda_{ji} \quad (4.11)$$

Atendiendo a la formulación en forma matricial (4.10), se tiene ahora que la matriz de flexibilidades estructurales es de dimensión $2PN \times 2PN$, y compuesta por submatrices de dimensión $N \times N$ que representan cada uno de los acoplamientos señalados en la Figura 33:

$$\lambda(q) = \begin{bmatrix} [\lambda_{SP1}] & [\lambda_{SP1-SP\dots}] & [\lambda_{SP1-SPp}] & [\lambda_{SP1-CP1}] & 0 & 0 \\ [\lambda_{SP\dots-SP1}] & [\lambda_{SP\dots}] & [\lambda_{SP\dots-SPp}] & 0 & [\lambda_{SP\dots-CP\dots}] & 0 \\ [\lambda_{SPp-SP1}] & [\lambda_{SPp-SP\dots}] & [\lambda_{SPp}] & 0 & 0 & [\lambda_{SPp-CPp}] \\ [\lambda_{CP1-SP1}] & 0 & 0 & [\lambda_{CP1}] & [\lambda_{CP1-CP\dots}] & [\lambda_{CP1-CPp}] \\ 0 & [\lambda_{CP\dots-SP\dots}] & 0 & [\lambda_{CP\dots-CP1}] & [\lambda_{CP\dots}] & [\lambda_{CP\dots-CPp}] \\ 0 & 0 & [\lambda_{CPp-SPp}] & [\lambda_{CPp-CP1}] & [\lambda_{CPp-CP\dots}] & [\lambda_{CPp}] \end{bmatrix}$$

En la diagonal de esta matriz (en color rojo) se recogen cada uno de los $2P$ problemas individuales, con los que las fuerzas de contacto se calcularían de manera desacoplada entre engranes. En negro aparecen las flexibilidades acopladas mediante el engranaje sol en la sección superior izquierda de la matriz, y también en negro en la sección inferior derecha las flexibilidades acopladas mediante la corona interior. Por otra parte, en color azul se muestran las flexibilidades acopladas de los dos engranes de cada planeta. Haciendo nula cada una de estas secciones se desacoplarían distintas partes

del problema de la transmisión planetaria, lo que puede tener interés desde el punto de vista de comparativa de modelos, y de cara a cuantificar el error cometido cuando no se considera la flexibilidad del cuerpo de las distintas ruedas. La condición de complementariedad sigue siendo de aplicación necesaria, por lo que de lo anterior se concluye que si bien la dimensión del problema tendrá un tamaño máximo de $2PN \times 2PN$ (36×36 para el caso de 6 planetas con 6 puntos de contacto potencial), en la realidad el número de contactos activos y por lo tanto la dimensión final n del problema será siempre menor.

4.4.2 Resolución del problema de contacto

La resolución final del problema de contacto consiste en la obtención de las fuerzas F_i que verifican el sistema de ecuaciones descrito por (4.10), que se puede reformular para una posición determinada como:

$$f(F) = \{u_{Local}^{R1}(\{F\})\} + \{u_{Local}^{R2}(\{F\})\} + \lambda\{F\} - \{\delta\} = \{0\} \quad (4.12)$$

La no-linealidad asociada con la formulación de las deformaciones locales plantea la necesidad de aplicar un método iterativo para la obtención de las fuerzas $\{F\}$. Se propone la utilización de un método de iteración de punto fijo, para lo cual se sustituye la resolución de $f(\{F\}) = 0$ por la obtención del punto fijo de una función $g(\{F\})$ que se define como:

$$f(\{F\}) = \{F\} - g(\{F\}) = 0 \xrightarrow{z \text{ iteraciones}} \{F\}^{z+1} = g(\{F\}^z) \quad (4.13)$$

$$g(\{F\}) = \lambda^{-1}[\{\delta\} - \{u_{Local}^{R1}(\{F\})\} - \{u_{Local}^{R2}(\{F\})\}]$$

A continuación se describe el proceso de resolución de las fuerzas de contacto, teniendo en cuenta el planteamiento del problema (datos relativos a los engranajes y a su posición). Como punto de partida es necesario calcular las flexibilidades de las ruedas, así como los valores de solapamiento geométrico entre perfiles, tal como se muestra en el diagrama de la Figura 35. En primer lugar, se introducen en el modelo los datos que definen la geometría de las ruedas, así como las propiedades del material necesarias en cálculos posteriores. A partir del análisis de elementos finitos definido en secciones anteriores, se obtienen las matrices de flexibilidad β_{RiRj}^k que relacionan las fuerzas aplicadas con el desplazamiento en cada punto de los

flancos de los engranajes para las tres ruedas: sol, planeta y corona. De estas matrices de flexibilidad se extraen los datos necesarios, definidos por la posición de los engranajes, que proporcionan las diversas relaciones de flexibilidad estructural entre cada uno de los puntos de contacto potencial N . Estas flexibilidades, particularizadas para la posición de la transmisión, se almacenan en la matriz $\lambda(\{q\})$. Por otro lado se determinan, para la posición fijada, el vector de solapamientos geométricos (distancias de separación o penetración entre perfiles) en cada uno de los puntos de contacto potencial $\{\delta(q)\}$.

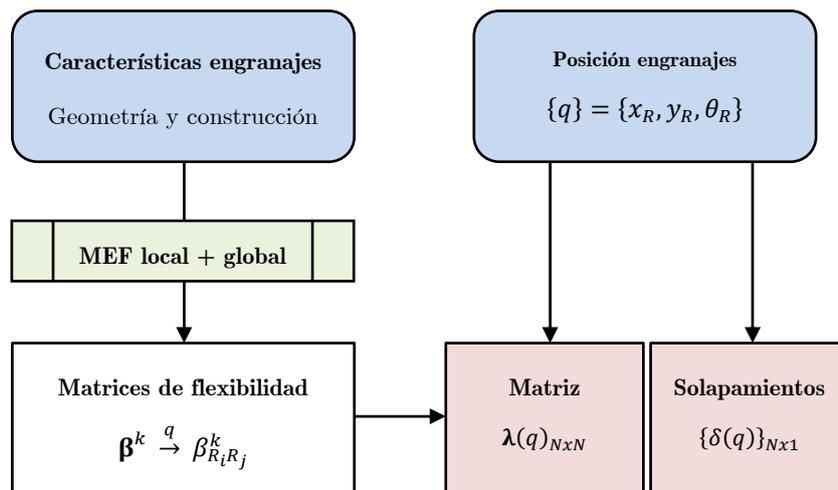


Figura 35. Planteamiento de variables previo del problema de contacto

A priori, la dimensión del problema n resulta desconocida, por lo que se asumirá que coincide con el número de contactos activos desde un punto de vista meramente geométrico. Así, de entre todos los puntos potenciales de contacto N , sólo se considerarán inicialmente activos aquellos n contactos en los que $\delta_i(q) > 0$. Tal como se muestra en el algoritmo presentado en la Figura 36, una vez determinados los contactos activos inicialmente, se reduce de manera consecuente la dimensión de la matriz $\lambda(q)_{NxN}$ a $\lambda(q)_{n \times n}$, y se resuelve el sistema de ecuaciones no lineales (4.10) por medio de la iteración de punto fijo enunciada en (4.13). Cuando la diferencia del valor de las fuerzas entre dos iteraciones consecutivas queda por debajo de un valor de tolerancia establecido Tol se continúa con el algoritmo.

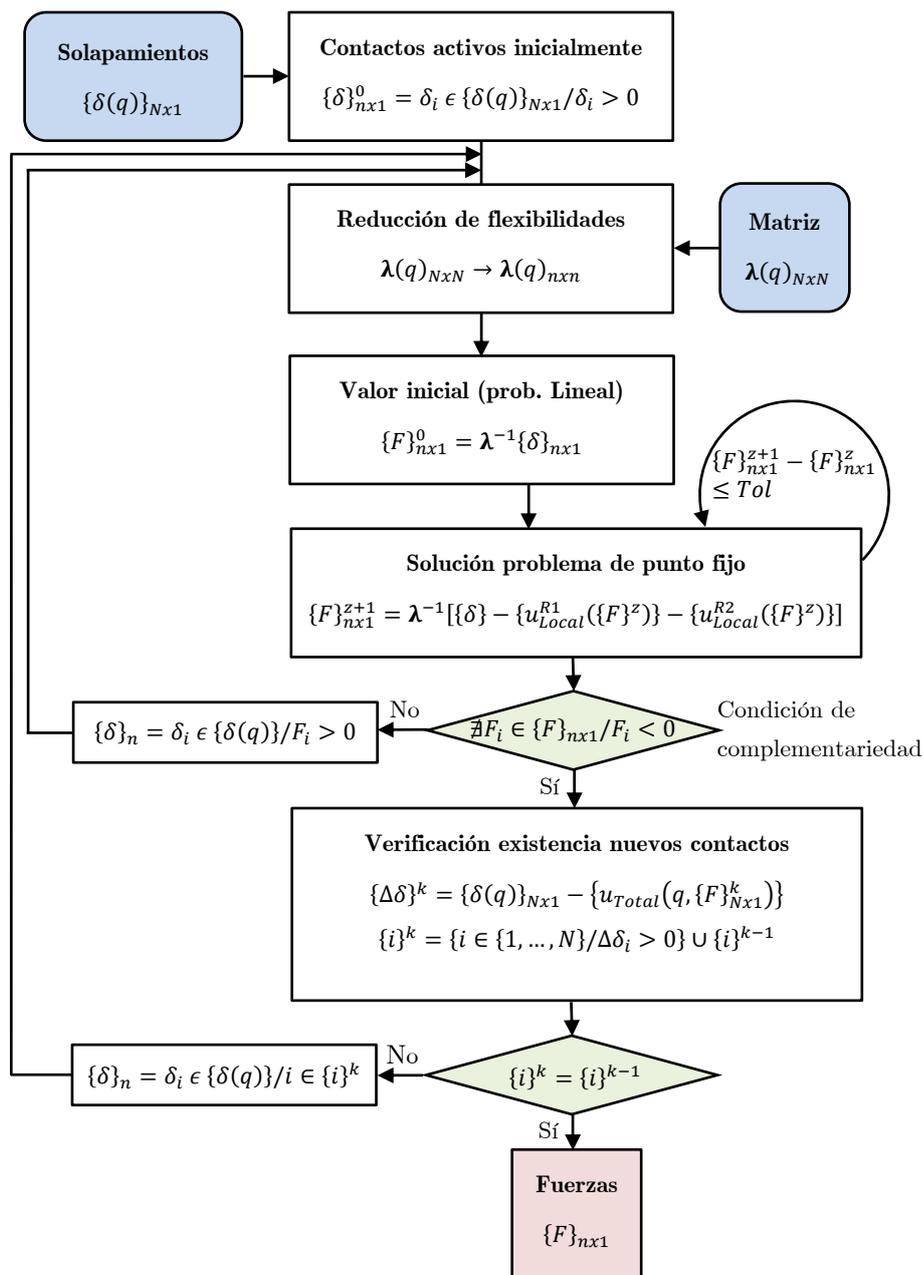


Figura 36. Algoritmo para la resolución de las fuerzas de contacto

La aplicación del método de punto fijo produce una convergencia muy rápida en este tipo de problemas. En la Tabla 3 se muestra la evolución de la fuerza y el porcentaje de error cometido para cada iteración para el caso de contacto doble tanto para un engrane exterior como para uno interior.

Tabla 3. Convergencia del método de punto fijo empleado para engranes exteriores (arriba) e interiores (abajo)

Iteración	F1	%Error	F2	%Error
0	2430,70131	10,72786	2467,74712	12,1581272
1	2198,96228	0,17125787	2204,99696	0,21623674
2	2195,26180	0,00268644	2200,33224	0,00422668
3	2195,20360	3,55E-05	2200,24117	8,79E-05
4	2195,20283	2,14E-07	2200,23928	1,99E-06
5	2195,20282	1,04E-08	2200,23924	4,98E-08
6	2195,20282	6,63E-10	2200,23924	1,37E-09
7	2195,20282	2,79E-11	2200,23924	4,05E-11

Iteración	F1	%Error	F2	%Error
0	2022,99392	14,009052	2521,24771	14,4347072
1	1778,86073	0,25053637	2211,66773	0,38345211
2	1774,47357	0,00329109	2203,47956	0,01180638
3	1774,41452	3,67E-05	2203,22822	0,00039856
4	1774,41507	5,84E-06	2203,21976	1,46E-05
5	1774,41517	3,38E-07	2203,21945	5,47E-07

Durante el proceso de obtención de los esfuerzos, el acoplamiento de las deformaciones entre los distintos puntos de contacto potencial puede tener como consecuencia la anulación de contactos inicialmente considerados, o la aparición de otros nuevos. Esta posibilidad se tiene en cuenta en el proceso de resolución mediante los dos bucles que se muestran en el diagrama de bloques de la Figura 36. En el primero se comprueba que no existen contactos en los que la fuerza sea negativa (condición de

complementariedad), lo que se correspondería con la pérdida de un contacto considerado. Por su parte, el segundo bucle evalúa la posibilidad de que las fuerzas actuantes deformen el sistema, de manera que algún solapamiento negativo cambie de signo, significando la entrada de un nuevo contacto en juego. Para realizar esta comprobación es necesario por lo tanto valorar el efecto de las fuerzas sobre el conjunto total de contactos potenciales N . Así, se obtienen las deformaciones totales $\{u_{Total}(q, \{F\}_{Nx1}^k)\}$, cuyo valor se sustrae al de los solapamientos geométricos $\{\delta(q)\}_{Nx1}$. Las diferencias resultantes se almacenan en el vector $\{\Delta\delta\}^k$, cuyas componentes positivas marcan los contactos realmente activos al finalizar la iteración k . Si los índices de $\{\Delta\delta\}^k$ no coinciden con los índices de la iteración anterior $\{\Delta\delta\}^{k+1}$ (o bien con los índices de los contactos geométricos iniciales, en el caso de que $k=1$), es necesario considerar los nuevos contactos e iterar de nuevo. Si los índices de dos iteraciones consecutivas coinciden, el problema está resuelto y las fuerzas de contacto de la transmisión planetaria quedan calculadas para la posición dada.

Una vez obtenidas las magnitudes de las fuerzas de contacto, es necesario definir sus sentidos de aplicación, que se ilustran para la pareja planetar-corona en la Figura 37. Se calcula el ángulo de inclinación de la normal al punto de contacto, coincidente con la recta tangente a las circunferencias base (o circunferencias base equivalentes en el caso de contacto en el redondeo). Para contacto directo se tiene que:

$$\vec{n}_{1i \text{ dir}} = \begin{Bmatrix} \cos(\varphi + \psi_i) \\ \sin(\varphi + \psi_i) \end{Bmatrix} ; \quad \vec{n}_{2i \text{ dir}} = -\vec{n}_{1i \text{ dir}} ; \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.14)$$

Mientras que para el contacto inverso:

$$\vec{n}_{1i \text{ inv}} = \begin{Bmatrix} -\cos(\varphi + \psi_i) \\ \sin(\varphi + \psi_i) \end{Bmatrix} ; \quad \vec{n}_{2i \text{ inv}} = -\vec{n}_{1i \text{ inv}} ; \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.15)$$

Donde cada uno de los ángulos que intervienen en las ecuaciones anteriores ha sido definido en secciones anteriores para los distintos tipos de contacto que pueden darse.

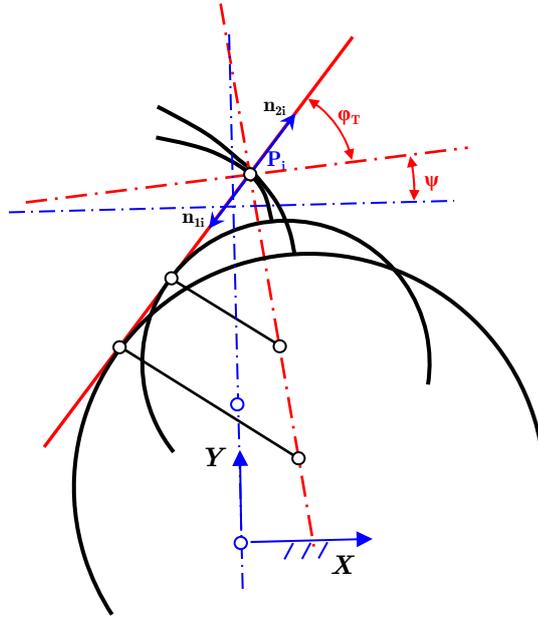


Figura 37. Obtención de las direcciones de las fuerzas de contacto planeta-corona

Finalmente, se reduce el conjunto de fuerzas actuante sobre cada rueda a su centro geométrico, obteniéndose el vector de los esfuerzos de contacto para cada pareja de ruedas como:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{pmatrix}_{cont} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N F_i \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N/2} F_i \rho_{1i} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N F_i \rho_{1i} \\ \sum_{i=1}^N F_i \vec{n}_{2i} \\ \sum_{i=1}^{N/2} F_i \rho_{2i} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N F_i \rho_{2i} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Donde se multiplica la fuerza por el brazo correspondiente, que será el radio base para cada punto de contacto, para obtener el par. En la definición de los puntos de contacto potencial, se agruparon en la primera mitad los

relativos al contacto directo, cuyas fuerzas producen un par positivo sobre la rueda, mientras que la segunda mitad, de contacto inverso, produce un par negativo.

4.5. FORMULACIÓN DEL RODAMIENTO

Una vez planteada la resolución del problema de cálculo de fuerzas de contacto en los engranajes, se plantea como consecuencia directa la necesidad de obtener también las fuerzas en los apoyos de las ruedas, que transmiten finalmente el efecto de las fuerzas de engrane al bastidor. Las fuerzas de engrane y las de apoyo interactúan entre sí, combinándose con el resto del sistema para proporcionar el comportamiento dinámico de la transmisión. Se pueden distinguir dos alternativas fundamentales respecto a los apoyos: cojinetes de fricción o los rodamientos. Dado que en las cajas de transmisión la solución más habitual es optar por elementos rodantes, en el modelo de transmisión planetaria presentado en este trabajo se implementará dicha solución. La resolución del comportamiento dinámico de los rodamientos mediante modelizado se puede realizar en fases análogas al planteamiento para engranajes: inicialmente es necesario describir la geometría y definir las áreas de contacto, para después obtener los esfuerzos e integrar el conjunto en el modelo de transmisión.

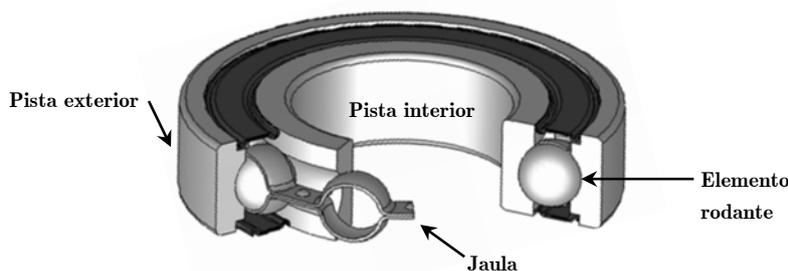


Figura 38. Componentes de un rodamiento

La construcción de rodamientos se realiza por norma general encapsulando un conjunto de elementos rodantes (bolas, rodillos, barriletes, conos, agujas, etc.) entre dos anillos o secciones tubulares, uno menor de diámetro d y uno mayor de diámetro D , que servirán respectivamente como pista interior y exterior sobre las que ruedan y deslizan los elementos rodantes (Figura 38). Estas pistas, según el tipo de elemento empleado, presentan en ocasiones

acanaladuras para garantizar la trayectoria del elemento rodante. Además, los elementos rodantes se encuentran habitualmente atrapados dentro de otra estructura denominada jaula, que es la encargada de mantener las bolas o rodillos distribuidos de manera homogénea a lo largo de toda la circunferencia de su trayectoria.

Desde el punto de vista del modelizado, hay que tener presente que los rodamientos comparten una característica fundamental con los engranajes, como es la existencia de una excitación paramétrica consecuencia de la rigidez variable. Esta variación en la rigidez de contacto se produce por la alteración cíclica del número de elementos rodantes que soportan la carga en función de la posición angular. Dicho fenómeno dará lugar a la existencia de vibraciones incluso cuando la fabricación y el montaje de los elementos que constituyen el rodamiento sean perfectos. Dichas vibraciones vendrán caracterizadas por producirse a múltiplos de la denominada frecuencia de paso de bola. Al igual que en el caso de los engranajes, el modelo de rodamientos ha de ser capaz de reproducir esta excitación paramétrica con el fin de alcanzar un nivel de realismo aceptable en la simulación de la transmisión.

4.5.1 Antecedentes de modelizado y planteamiento

En los primeros modelos de rodamientos ya se investiga la excitación paramétrica, y Perret y Meldau [Wensing, 1998] sugieren que un incremento en el número de elementos rodantes reducirá la variación de la rigidez. Posteriormente Jones [1960], incorpora el efecto de las fuerzas centrífugas y los efectos giroscópicos asociados a los elementos rodantes. Estos primeros modelos, de carácter estrictamente estático, fueron recopilados por Palmgren [1959], quien junto con Gustav Lundberg elaboraron las bases teóricas sobre las que se sustentan las expresiones de cálculo empleadas por las normativas ANSI e ISO para el diseño a fatiga de rodamientos.

Siguiendo la línea de modelizado cuasi-estático, Lim [1989] elaboró un modelo completo de transmisión empleando rodamientos de rodillos y bolas, que fue extendido por Royston [1998] para el caso de rodamientos autoalineantes de tipo esférico. Con un planteamiento similar, Liao [2001] propuso un modelo con el objetivo de analizar la variación del ángulo de contacto de los elementos rodantes, concluyendo que la aplicación de una

precarga axial podría reducir el deslizamiento entre elementos rodantes y pistas. Hernot [2000] por su parte, describió un modelo de cálculo de la matriz de rigidez completamente analítico. Liew [2005] planteó una mejora del modelo de Lim, incluyendo la posición angular de la jaula, con la que estudiar la variación en los coeficientes de rigidez. La no linealidad vinculada a la existencia de holguras fue analizada inicialmente por Yamamoto [1955] y por Gustafsson [1963]. Fukata [1985] elaboró un modelo bidimensional que incluía los efectos de holguras, contacto y excitación paramétrica. Dicho modelo fue posteriormente utilizado por varios investigadores, como Tiwari [2000] o Nataraj [2008].

La mayor parte de los modelos hasta aquí descritos son bidimensionales, considerando solamente 2 g.d.l. traslacionales, en los que se desprecian los efectos dinámicos asociados con la masa de los elementos rodantes y se asume que únicamente existe deformación (de tipo Hertziano) en los contactos entre éstos y las pistas. El efecto de la masa de los elementos rodantes adquiere importancia cuando las velocidades de operación se incrementan. Este aspecto ha sido incluido por diversos autores, introduciendo estos efectos en las ecuaciones de equilibrio de los elementos rodantes, o bien considerando grados de libertad adicionales que definan la posición radial de estos elementos [Harsha, 2005]. Aktiuk [1997] incluyó el desplazamiento en dirección axial, elaborando un modelo de 3 g.d.l. que fue empleado en la evaluación de los efectos de la precarga y el número de bolas en la vibración a la frecuencia de paso de bola. Los modelos más complejos consideran hasta 5 g.d.l., desde el punto de vista de los esfuerzos transmitidos, e incluyen la excitación paramétrica, la holgura [Jang, 2002], los efectos giroscópicos vinculados con los elementos rodantes [Jang, 2004] y la estimación de la velocidad de la jaula como un valor promediado de la velocidad orbital de los elementos rodantes [Changqing, 2006].

El amortiguamiento y el rozamiento son fenómenos que han recibido una menor atención por parte de los investigadores. Dietl [2000], clasifica el origen del amortiguamiento en tres posibles fuentes. La primera es el lubricante ubicado en los contactos de los elementos rodantes con las pistas, la segunda la deformación Hertziana de los cuerpos en contacto, y la tercera y de menor incidencia el amortiguamiento producido en la interfase entre el anillo exterior y el alojamiento. En cuanto a los valores del coeficiente de amortiguamiento estos autores proporcionan resultados experimentales

asignando valores en el rango de 0.4 a 0.8 Ns/mm, mientras que Mitsuya [1998] proponen valores de amortiguamiento relativo del 2 al 4%, dando lugar a coeficientes de amortiguamiento entre 0.15 y 0.35 Ns/mm para rodamientos de características similares. La dependencia con respecto de la velocidad, la viscosidad del lubricante, el nivel de carga y otros fenómenos hace complejo la elaboración de un modelo preciso y rápido, por lo que la propuesta mayoritaria es la adopción de un valor de amortiguamiento proporcional a la rigidez [Nataraj, 2008]. Wensing [1998] analizó con detalle el fenómeno de lubricación elastohidrodinámica, incluyendo un modelo de contacto a partir del cual estimó la rigidez y el amortiguamiento asociados al mismo, concluyendo que las diferencias en cuanto a la rigidez son reducidas frente a la utilización de un modelo de contacto seco de tipo Hertziano. La inclusión del fenómeno de la fricción en los modelos dinámicos es poco frecuente, de modo que la mayor parte de los autores indican que este aspecto quedaría contemplado dentro del coeficiente de amortiguamiento.

En la bibliografía se pueden encontrar también modelos que tratan la inclusión de defectos de fabricación y de funcionamiento en los rodamientos. La mayoría de estos trabajos se centran en la simulación de la ondulación superficial de los elementos en contacto (waviness), y en la posibilidad de incluir un defecto puntual como picaduras por fatiga o corrosión.

Dado que el objetivo del presente trabajo es el modelizado de una transmisión planetaria completa, es necesario renunciar a la incorporación de modelos de rodamiento excesivamente complejos, que en su implementación puedan no aportar una mejora significativa del comportamiento simulado con respecto al coste computacional añadido que representen. El modelo de rodamiento finalmente adoptado está basado en la propuesta de Fukata [1985]. A continuación se va a presentar el procedimiento para la obtención de las fuerzas del rodamiento, incluyendo el planteamiento cinemático y la obtención de la rigidez de contacto para distintos tipos de elementos rodantes.

4.5.2 Relaciones cinemáticas

Dado que la excitación paramétrica se debe al número de elementos rodantes en contacto activo, es necesario definir adecuadamente la posición de dichos elementos respecto a la dirección de actuación de la carga. De esta manera, a

la hora de calcular los esfuerzos de contacto para una posición dada del conjunto, unos elementos quedarán cargados mientras que otros no lo estarán. Este análisis se realiza mediante un sencillo planteamiento cinemático apoyado en la Figura 39, y que tiene en cuenta condiciones de rodadura pura. En realidad, sobre todo para niveles de carga bajos, existe un cierto deslizamiento en el movimiento relativo entre elementos rodantes y pistas, cuestión que ha sido tenida en cuenta mediante la introducción de un deslizamiento aleatorio.

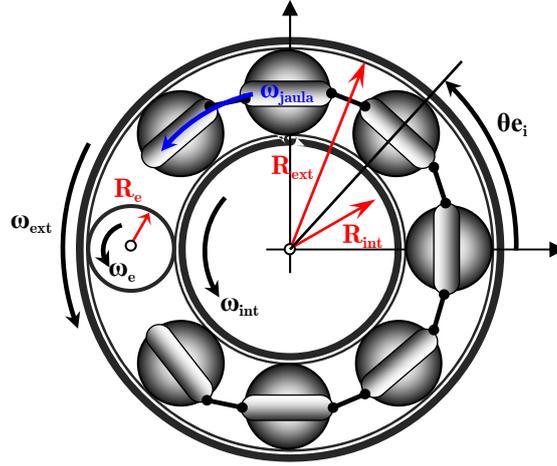


Figura 39. Velocidades angulares y radios de los elementos del rodamiento

Planteando la igualdad de velocidades de rodadura lineales para la superficie de un elemento rodante cualquiera se tiene que:

$$(\omega_{jaula} - \omega_{int}) R_{int} = (\omega_{ext} - \omega_{jaula}) R_{ext} \quad (4.17)$$

De donde se extrae la relación existente entre la velocidad angular de la jaula (y por lo tanto la de cualquier elemento rodante) en función de la geometría del rodamiento y las velocidades angulares de la pista exterior e interior:

$$\omega_{jaula} = \frac{\omega_{int} R_{int} + \omega_{ext} R_{ext}}{R_{int} + R_{ext}} \quad (4.18)$$

Esta formulación es válida también para establecer las relaciones entre las posiciones angulares, teniendo en cuenta las referencias y orígenes de todos

ellos. En la mayoría de las aplicaciones, una de las dos pistas se encuentra estacionaria, siendo el caso de la pista exterior el más habitual. Sin embargo, en las transmisiones planetarias los rodamientos que sirven de apoyo a los planetas presentan giro absoluto de ambas pistas, por lo que la ecuación (4.18) no puede ser simplificada en ninguno de sus términos. La posición angular del elemento rodante i -ésimo θ_{ei} vendrá determinada a partir de su posición relativa en la jaula, así como de la posición angular de ésta:

$$\theta_{ei} = \theta_{jaula} + \frac{2\pi}{N_e}(i-1) = \frac{\theta_{int} R_{int} + \theta_{ext} R_{ext}}{R_{int} + R_{ext}} + \theta_{j_0} + \frac{2\pi}{N_e}(i-1) \quad (4.19)$$

Donde θ_{ext} y θ_{int} son las posiciones angulares de la pista exterior e interior respectivamente, respecto a una posición inicial o de referencia en la que la jaula presenta una posición angular θ_{j_0} . N_e es el número de elementos rodantes, e i se corresponde con el índice del elemento de interés.

4.5.3 Obtención de la rigidez de contacto

La obtención de la rigidez de contacto se realiza mediante aplicación de la teoría de Hertz en la interacción entre elementos rodantes y pistas interior y exterior, de manera que el resto de elementos del rodamiento se consideran infinitamente rígidos. La teoría de Hertz considera el contacto entre dos cuerpos con superficies curvas sujetos a una carga F . La superficie de cada uno de estos cuerpos en contacto se asimila según el esquema mostrado en la Figura 40 a dos elipsoides de revolución, definidos por sus correspondientes radios de curvatura en sus direcciones principales, teniendo la consideración de emplear signos negativos cuando las superficies sean cóncavas. Según el tipo de rodamiento, se selecciona cada uno de estos radios de forma que la geometría del problema quede descrita adecuadamente, teniendo en cuenta los radios de las pistas interior y exterior, así como el radio de los surcos de rodadura (en el caso de que los hubiera) y el diámetro de los elementos rodantes. Para rodamientos no esféricos será necesario emplear también el radio de curvatura en el sentido axial.

A partir de estos radios de curvatura se define la magnitud suma de curvatura:

$$\sum \rho = \frac{1}{r_{A1}} + \frac{1}{r_{A2}} + \frac{1}{r_{B1}} + \frac{1}{r_{B2}} \quad (4.20)$$

y posteriormente la diferencia de curvatura:

$$F(\rho) = \frac{\left(\frac{1}{r_{A1}} - \frac{1}{r_{A2}}\right) + \left(\frac{1}{r_{B1}} - \frac{1}{r_{B2}}\right)}{\sum \rho} = \quad (4.21)$$

Valor éste último íntimamente ligado con la geometría del problema formulado por Hertz, y parámetro respecto al cual se encuentran tabuladas las aproximaciones simplificadas llevadas a cabo por Brewe y Hamrock [Harris, 2001].

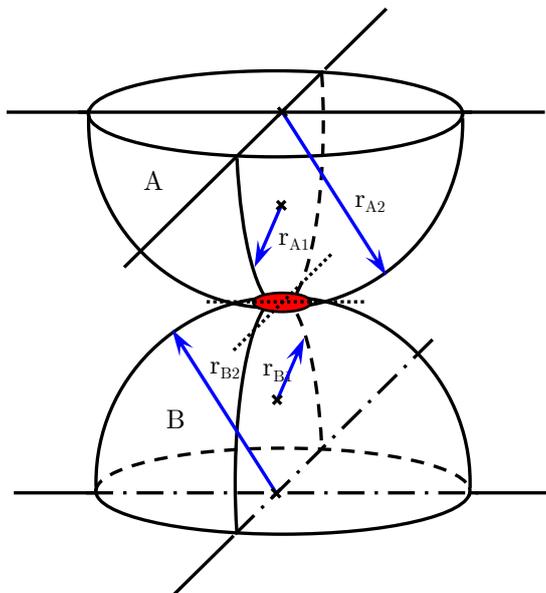


Figura 40. Radios de curvatura de las superficies y elipse de contacto

Estas aproximaciones simplificadas se basan en el empleo del método de regresión lineal de mínimos cuadrados para la obtención directa de las integrales elípticas completas de primera y segunda especie \mathcal{F} y \mathcal{E} . Al evitar mediante el uso de tablas el cálculo de estas integrales, la resolución del problema de contacto se simplifica enormemente. Así, para cuerpos metálicos se tiene que la deformación de contacto en milímetros viene dada por:

$$\delta = 2.79 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^* \cdot Q^{2/3} \cdot \left(\sum \rho\right)^{2/3} \quad (4.22)$$

Donde δ^* es un parámetro adimensional tabulado según la Tabla 4 en función de la diferencia de curvatura $F(\rho)$. Pese a que no se muestran aquí, también es posible encontrar por el mismo procedimiento fórmulas similares para las el cálculo de las dimensiones de la elipse de contacto (área en rojo en la Figura 40), así como para la tensión.

Tabla 4. Valor del parámetro adimensional de contacto δ^* [Harris, 2001]

F(ρ)	δ^*	F(ρ)	δ^*	F(ρ)	δ^*
0	1	0.83495	0.7602	0.995112	0.3176
0.1075	0.9974	0.87366	0.7169	0.997300	0.2705
0.3204	0.9761	0.90999	0.6636	0.9981847	0.2427
0.4795	0.9429	0.936738	0.6112	0.9989156	0.2106
0.5916	0.9077	0.95738	0.5551	0.9994785	0.17167
0.6716	0.8733	0.97290	0.4960	0.9998527	0.11995
0.7332	0.8394	0.983797	0.4352	1	0
0.7948	0.7961	0.990902	0.3745		

Con el fin de disponer de la rigidez de engrane para su posterior uso en el cálculo de los esfuerzos de contacto del rodamiento, se despeja el valor de la fuerza Q de la ecuación anterior (4.22), obteniendo:

$$k_c = 2.15 \cdot 10^5 \cdot \delta^{*-3/2} \cdot \left(\sum \rho\right)^{-1/2} \tag{4.23}$$

Cuyo carácter no lineal se aprecia atendiendo a la formulación, encontrando que esta rigidez presenta dimensiones de $N/mm^{3/2}$. El valor total de la rigidez de contacto de cada elemento rodante k_B se obtendrá componiendo en serie cada una de las rigideces k_C obtenidas para el contacto con la pista interior y exterior, de manera que:

$$k_B = \frac{k_{Ci} k_{Ce}}{(k_{Ci}^{2/3} + k_{Ce}^{2/3})^{3/2}} \tag{4.24}$$

Las ecuaciones y procedimientos anteriormente descritos son válidos únicamente para el caso de contacto puntual. Las geometrías de los elementos rodantes se ajustan a esta hipótesis fundamentalmente en el caso

de las esferas, y en casos particulares de elementos cilíndricos con curvatura longitudinal pronunciada (en forma de barril). Existen diversos desarrollos teóricos que tratan de establecer la deformación de contacto para el caso de contacto lineal ideal. Sin embargo, los rodamientos de tipo cilíndrico no se ajustan bien con la hipótesis ideal, y es común recurrir a formulaciones semiempíricas como la proporcionada por Palmgren [1959]:

$$\delta = 3.84 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{Q^{0.9}}{l^{0.8}} \quad (4.25)$$

Que es similar a la desarrollada teóricamente de manera más reciente por Kunert [1961] y validada experimentalmente por Korrem [1963]

$$\delta = 4.05 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{Q^{0.925}}{l_{eff}^{0.85}} \quad (4.26)$$

Siendo l_{eff} la longitud efectiva del elemento rodante, es decir, eliminando los redondeos y correcciones en los extremos. Se extrae de las dos formulaciones anteriores que la deformación en el caso de contacto lineal es independiente de los radios de curvatura de las superficies del rodamiento. De esta manera, la rigidez combinada del contacto entre el elemento rodante y las pistas exterior e interior será igual a la mitad de la correspondiente a un único contacto, al ser ambas idénticas (por no depender de la curvatura). La rigidez de contacto para rodamientos con elementos de tipo cilíndrico o contacto puntual queda finalmente:

$$k_c = \frac{l_{eff}^{0.85/0.925}}{(8.10 \cdot 10^{-5})^{1/0.925}} \quad (4.27)$$

Para rodamientos con elementos rodantes cilíndricos, el carácter de la rigidez de contacto tiene un carácter mucho más aproximado al lineal que en el caso de rodamientos de bolas, como se aprecia en sus unidades, $\text{N/mm}^{1/0.925}$.

4.5.4 Esfuerzos de contacto

Una vez conocido el valor de la rigidez de contacto, la existencia de una fuerza de contacto en un elemento rodante quedará supeditada a que éste se encuentre cargado, es decir, a que exista un solapamiento geométrico positivo δ_{ei} (análogo al definido para el contacto entre perfiles de evolvente en

engranajes), entre la pista interior, exterior y el susodicho elemento. Este solapamiento se obtiene para cada elemento rodante planteando el desplazamiento relativo p_{rel} de la pista interior respecto a la exterior, tal como se muestra en la Figura 41.

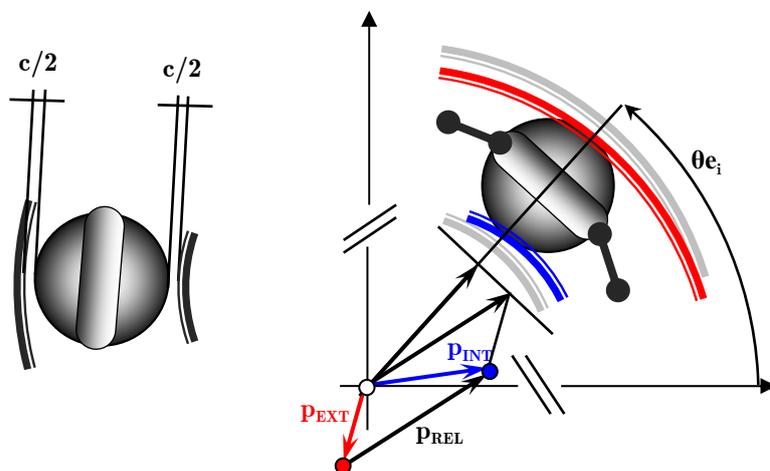


Figura 41. Holgura radial y composición de desplazamientos para el cálculo de δ

A continuación se proyecta este vector sobre la recta de posición angular del elemento, para obtener el solapamiento, al que se le sustrae el valor de la holgura c en caso de que ésta exista.

$$\delta_{ei} = p_{relx} \cos \theta_{ei} + p_{rely} \sin \theta_{ei} - c \quad (4.28)$$

Donde θ_{ei} se obtiene según (4.19). Una vez se dispone del valor del solapamiento geométrico para cada elemento rodante, los esfuerzos producidos en el rodamiento se determinan sumando las fuerzas de contacto de cada elemento activo, producto del solapamiento y la rigidez de contacto k_B correspondiente según:

$$\begin{aligned} F_x &= k_B \sum_{i=1}^{N_a} H(\delta_{ei}) \delta_{ei}^p \cos \theta_{ei} \\ F_y &= k_B \sum_{i=1}^{N_a} H(\delta_{ei}) \delta_{ei}^p \sin \theta_{ei} \end{aligned} \quad \text{siendo } H(\delta_{ei}) = \begin{cases} 1 & \delta_{ei} \geq 0 \\ 0 & \delta_{ei} < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Donde el exponente p depende del tipo de rodamientos empleados. Atendiendo a las expresiones para la rigidez de contacto presentadas en el epígrafe anterior, $p=3/2$ para el caso de contacto puntual (rodamientos de bolas), y $p=1/0.925$ cuando el contacto sea lineal (rodamientos cilíndricos).

Parte III

Capítulo 5

Modelo de transmisión planetaria: validación e integración

5.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se describe en primer lugar la transmisión tipo empleada en las simulaciones, para la que se determina la capacidad de carga de las distintas ruedas, con el objetivo de plantear las condiciones de simulación de forma realista. Una vez definido el nivel de carga, se realiza una validación por parejas de la rigidez de engrane y los errores de transmisión, empleando como patrón para la comparativa los valores propuestos mediante la aplicación de la norma internacional ISO-6336. Posteriormente se muestran algunas de las diferencias obtenidas en los resultados, según las distintas hipótesis adoptadas en el modelizado (acoplamiento o no de las deformaciones entre dientes, deformación y tensión plana, profundidad del modelo local, etc.).

El capítulo continúa con la integración de un engrane interior y uno exterior, analizando su comportamiento en régimen estático, atendiendo a cuestiones tales como el acoplamiento de la deformación a través del cuerpo del planeta, o la componente radial de fuerza fruto de los distintos ángulos de presión de funcionamiento.

Finalmente, el modelo de doble engrane se extiende a una transmisión planetaria completa con tres ramas (vías) de carga, prestando especial

atención al error de transmisión y al reparto de carga resultante entre las distintas vías, teniendo en cuenta una configuración de montaje fija y otra con elementos flotantes.

5.2. TRANSMISIÓN TIPO

En relación a los ejemplos utilizados en este trabajo, si bien se irán introduciendo modificaciones para demostrar las distintas capacidades de simulación del modelo, la transmisión tipo permanecerá inalterada en términos generales. De esta manera, será más fácil la comparación de resultados, al ser todos consistentes en su origen. La transmisión planetaria presentada es parte de un diseño real empleado en reductoras de máquinas tractoras para trabajo agrícola. En un capítulo posterior se añadirán los datos necesarios para la simulación dinámica, quedando la geometría definida en la Tabla 5:

Tabla 5. Parámetros que definen la transmisión (mm)

	Sol	Planeta	Corona
Número de dientes	16	24	65
Módulo	4.23	4.23	4.23
Ángulo de presión	25°	25°	25°
Espesor diente (primitivo)	6.40	8.30	-
Espesor hueco (primitivo)	-	-	8.25
Trocoide (D. máx/mín)	62.26	96.89	288.77(mín)
Diámetro de pie	55.66	93.60	288.81
Diámetro base	61.39	92.08	249.38
Diámetro de cabeza	76.96	114.24	269.51
Distancia de montaje	86.40	86.40	86.40
Desfase entre planetas	-	120°	-
Ancho de cara	25	25	85.86

5.2.1 Capacidad de carga de los engranajes utilizados

Se va a emplear la norma ISO-6336 para determinar la capacidad de carga de los engranajes de la transmisión ejemplo. Partiendo de esta capacidad se

establecerá un rango razonable de variación del parámetro de carga, que se utilizará en aquellos casos de estudio en los que se quiera prestar atención a la influencia de la carga sobre el comportamiento de la transmisión. La norma propone dos cálculos resistentes, para durabilidad superficial y para resistencia a flexión. Realizando la correspondiente selección y cálculo de los distintos factores, y minimizando el factor de seguridad para obtener un mayor rango de ensayo, se obtiene el valor de par máximo admisible a transmitir por cada uno de los distintos engranajes que componen la transmisión, y que se refleja en la Tabla 6:

Tabla 6. Par máximo a transmitir según el método de fallo considerado

	Par máximo admisible (durabilidad superficial)	Par máximo admisible (resistencia a flexión)
Sol	202.52 N·m	714.70 N·m
Planeta	480.18 N·m	825.24 N·m
Corona	2028.22 N·m	9172,42 N·m

En el caso de la transmisión objeto de estudio, la durabilidad superficial es el mecanismo de fallo dominante, por lo que se tomarán los valores de la columna izquierda de la tabla como referencia del límite de par en los ensayos. Para el caso de la transmisión planetaria es necesario tener en cuenta el número de vías entre las que se divide el par, así como traducir todos los valores a un elemento común sobre el que poder establecer una comparativa. Así, tomando el valor máximo admisible de par sobre el sol, considerando los engranes de manera individual y dejando a un lado las eficiencias, la fracción máxima de par correspondiente a cada engrane i será:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{Engrane } i \text{ sol}} &= 202.52 \text{ Nm} \\
 T_{\text{Planeta } i} &= 202.52 \frac{24}{16} = 303.78 \text{ Nm} < 480.18 \text{ Nm} \\
 T_{\text{Engrane } i \text{ corona}} &= 202.52 \frac{65}{16} = 822.74 \text{ Nm} < 2028.22 \text{ Nm}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

De lo que se desprende que, en este caso, el engranaje sol será el que trabaje en las condiciones más desfavorables, marcando por lo tanto el par total a introducir en la transmisión planetaria.

5.3. VALIDACIÓN DE LOS ESFUERZOS DE CONTACTO

De cara a la validación del método empleado para el cálculo de los esfuerzos de contacto en este modelo, se ha realizado una serie de análisis de carácter cuasi-estático. Estos análisis se presentan a continuación en orden progresivo de complejidad, partiendo de los resultados obtenidos para cada pareja de ruedas, e incorporando de manera sucesiva los engranes adicionales necesarios para la composición de la transmisión planetaria completa. El problema más básico que se puede plantear es entonces la obtención de la posición angular de una pareja de ruedas, para la que se cumple la condición de equilibrio estático siguiente, ilustrada en la Figura 42:

$$\sum_{i=1}^{N/2} F_i(\{q\}) \rho_{1i} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N F_i(\{q\}) \rho_{1i} = T_{ext} \quad (5.2)$$

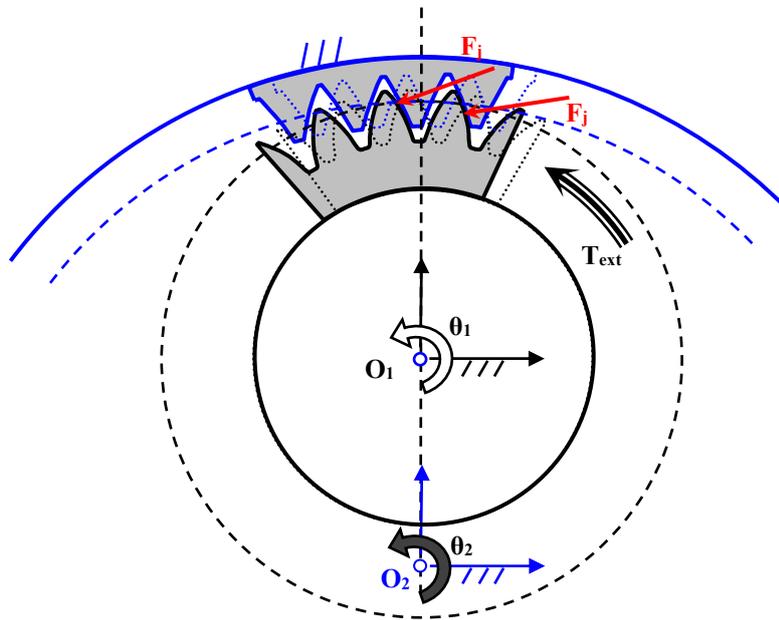


Figura 42. Definición del problema cuasiestático en la pareja planeta-corona

Inicialmente se dispone la pareja de ruedas en contacto, fijando la posición de los centros de ambas ruedas O_1 y O_2 . A continuación se plantea el equilibrio considerando la rueda 2 fija en su rotación, en una posición angular θ_2 . Se permite como único grado de libertad del problema la rotación de la primera rueda θ_1 , a la que además se aplica el par exterior T_{ext} . La solución del problema pasa por encontrar el giro θ_1 para el cual las fuerzas de engrane generadas equilibran dicho par exterior. Este giro de la rueda 1 se compondrá de los dos términos que se indican en la siguiente ecuación.

$$\theta_1 = \theta_2 \frac{z_2}{z_1} + \Delta\theta_1 \quad (5.3)$$

El primero de los términos se corresponde con el valor de la rotación de carácter estrictamente cinemático que habrá de realizar la rueda 1 para contactar con la rueda 2. El segundo término representa todos aquellos giros adicionales que se producen como consecuencia de la deformación de ambas ruedas por la acción de las fuerzas de contacto, y también por los distintos defectos de fabricación (errores de perfil, de paso, etc.) que puedan presentar los engranajes. La diferencia $\Delta\theta_1$ existente entre la posición angular teórica (o cinemática) de la rueda y su posición real se denomina comúnmente *error de transmisión*. A pesar de ser ésta la definición general, se pueden distinguir distintas nomenclaturas o tipos, en función de las fuentes que produzcan el error: así, se puede encontrar un error de transmisión cinemático, estático, dinámico, etc. En este trabajo se denominará error de transmisión a la diferencia entre la posición real y la posición teórica cinemática, sin hacer distinciones desde el punto de vista de la nomenclatura, según:

$$\text{Error de transmisión (ET)} = \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 \frac{z_2}{z_1} \quad (5.4)$$

La definición del problema no variará en la consideración de la pareja sol-planeta frente a planeta-corona. De la misma manera, se puede generalizar el error de transmisión descrito para la transmisión planetaria, entendiéndose siempre como error de transmisión la diferencia entre la posición real ocupada por cualquiera de los elementos de la transmisión bajo unas condiciones determinadas, y la posición que ocuparía en esas mismas condiciones bajo la consideración de construcción ideal e infinitamente rígida. La resolución del problema planteado en (5.2) se resuelve mediante la

aplicación de una variación del método de Newton con regiones de confianza, directamente implementado en la plataforma de modelizado.

5.3.1 Error de transmisión y rigidez de engrane

El problema cuasiestático de equilibrio se ha resuelto para cada pareja de ruedas en torno a la posición de contacto en el punto primitivo. De esta manera, se presentan en lo sucesivo los resultados referidos a un paso angular de la rueda fija: la corona en el caso de la pareja interior y el sol en el caso de pareja de ruedas exteriores.

En la Figura 43 y Figura 44, donde se presenta el error de transmisión, es fácil observar la excitación paramétrica debida a la variación en el número de dientes en contacto, y cómo la amplitud de variación del error aumenta a medida que lo hace también la carga. Otro efecto que el aumento de la carga tiene sobre la forma del error de transmisión es la reducción de la zona de contacto simple, alterando por tanto la relación de contacto. Esto se debe a que con el aumento de deformación de los dientes cargados, el giro adicional consecuente provoca que el contacto entre la siguiente pareja se adelante; de manera análoga y complementaria, las parejas retrasan su salida.

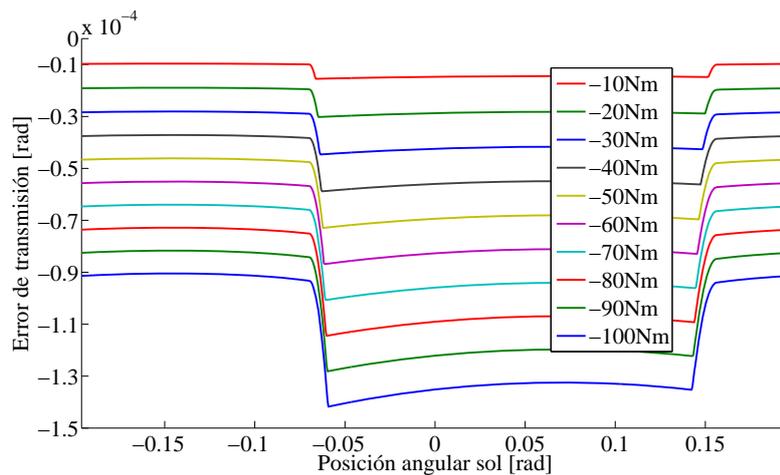


Figura 43. Error de transmisión pareja sol-planeta para distintos pares

El efecto del redondeo de la punta también tiene influencia en la forma del error de transmisión. Mayores radios de redondeo implican una reducción de la longitud de perfil de evolvente efectivo, afectando en consecuencia la

entrada y salida de los dientes, y disminuyendo la relación de contacto al reducir la zona de contacto doble.

Atendiendo a la formulación de las deformaciones locales descrita en el capítulo anterior, cabe esperar la aparición de una singularidad en la gráfica del error de transmisión, en forma de variación brusca. Este fenómeno, apreciable en la variación mostrada en línea discontinua para el par superior en la Figura 44, se produce en las transiciones entre el contacto evolvente-evolvente y evolvente-redondeo. Se debe a que la formulación de las deformaciones locales incluye un cambio puntual de los radios de curvatura de los flancos de los dientes. Al ser este cambio sensiblemente importante (la variación es de hasta dos órdenes de magnitud), su efecto en el error de transmisión es apreciable, teniendo además consecuencias en el comportamiento dinámico, al actuar como una excitación impulsional. En el comportamiento real se produce una transición suave entre una curvatura y otra: el tamaño de la zona de contacto no es puntual, sino que abarca una cierta longitud del desarrollo del flanco, implicando zonas de contacto evolvente-evolvente de manera simultánea con zonas de redondeo-evolvente. Por lo tanto, tal como se presentó en la sección 4.3, se introdujo una corrección (de carácter lineal con el giro) en la transición entre valores de radios de curvatura, modificando su carácter puntual y suavizando el resultado final, tal como se muestra en los errores de transmisión representados.

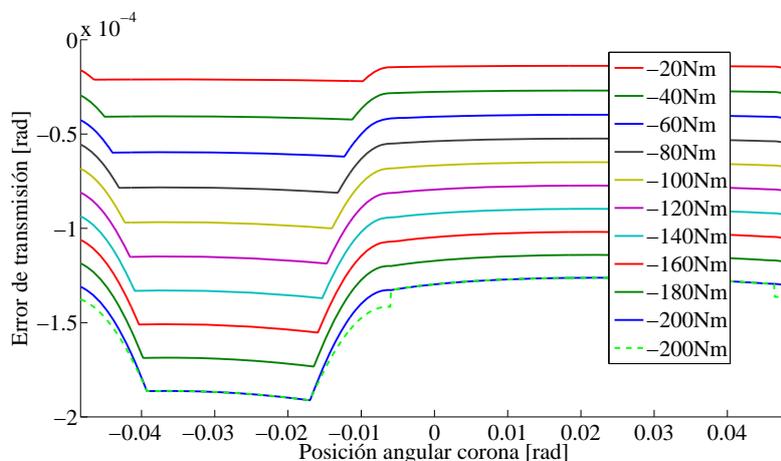


Figura 44. Error de transmisión pareja planeta-corona para distintos pares

Una magnitud complementaria que se define partiendo del error de transmisión es la rigidez de engrane K_e (Figura 45). La rigidez de engrane se supone habitualmente como un único resorte lineal, que actúa sobre la línea de acción. No representa por lo tanto las rigideces individuales de cada pareja de dientes, sino la composición en paralelo de todas ellas, definiéndose como el cociente entre el par aplicado y el producto del cuadrado del radio base y el error de transmisión:

$$\text{Rigidez de engrane } K_e = \frac{T_{ext}}{\rho^2 \Delta\theta_1} \quad (5.5)$$

Conviene tener presente que, si bien esta cantidad es un indicador y una herramienta útil de cara a la linealización de los modelos de transmisión que proporciona una idea global de la rigidez del proceso de engrane, al incluir en su formulación el valor del error de transmisión, la definición de éste último ha de realizarse cuidadosamente. Si el error de transmisión empleado en la definición de la rigidez no está libre de los giros de sólido rígido de carácter cinemático debidos a holguras o errores, el valor de la rigidez obtenido no se corresponderá con la capacidad real de almacenamiento de energía elástica presentada por el engrane, comportándose en la dinámica de manera totalmente distinta a la real.

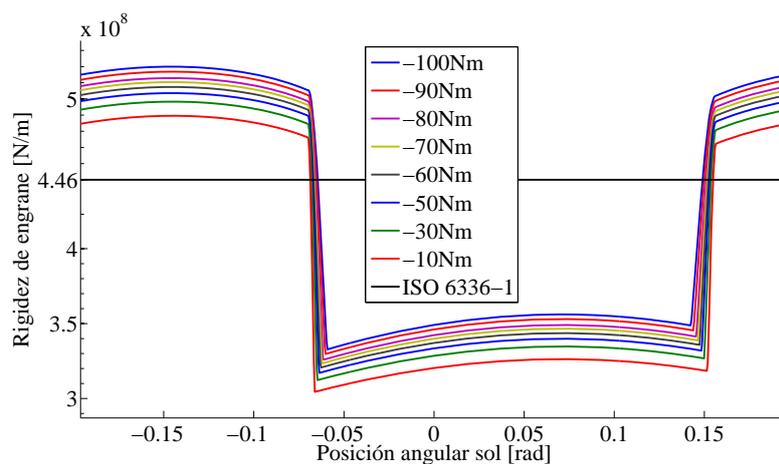


Figura 45. Rigidez de engrane pareja sol-planeta para distintos pares

Recurriendo a la representación de la rigidez de engrane para un ciclo completo con distintos niveles de carga, se pueden observar los mismos

efectos que la variación de ésta causa sobre los errores de transmisión. Sin embargo, al representar la rigidez respecto al par aplicado, si se puede advertir en este caso el aumento no lineal de la rigidez de engrane con la carga, aspecto presente pero no evidente en las figuras de error de transmisión.

Con el objetivo de validar el modelo en lo referente al nivel de rigidez de engrane obtenido, se ha obtenido el valor de la rigidez para las dos parejas de ruedas empleadas, siguiendo el método B propuesto por la norma ISO 6336-1. Los valores obtenidos se calculan mediante:

$$K_{ISO} = \left(\frac{1}{q'} C_M C_R C_B \cos \beta \right) (0.75 \varepsilon_\alpha + 0.25)$$

$$\text{con } q' = 0.04723 + \frac{0.15551}{z_{n1}} + \frac{0.25791}{z_{n2}} - 0.00635x_1 - \frac{0.11654x_1}{z_{n1}} \quad (5.6)$$

$$- 0.00193x_2 - \frac{0.24188x_2}{z_{n2}} + 0.00529x_1^2 + 0.00182x_2^2$$

Donde se introducen las correcciones de tallado x_1 y x_2 y la relación de contacto ε_α correspondiente a cada pareja, así como los coeficientes $C_M=1$, $C_R=1$ y $C_B=1.086$ para el interior y $C_B=1.127$ para el exterior. Teniendo en cuenta la recomendación que hace la norma de emplear un z_{n2} infinito para el cálculo de la rigidez de la pareja interior, se obtienen los siguientes valores: $6.2822 \cdot 10^8$ N/m para la pareja planeta-corona y $4.4575 \cdot 10^8$ N/m para la pareja sol-planeta.

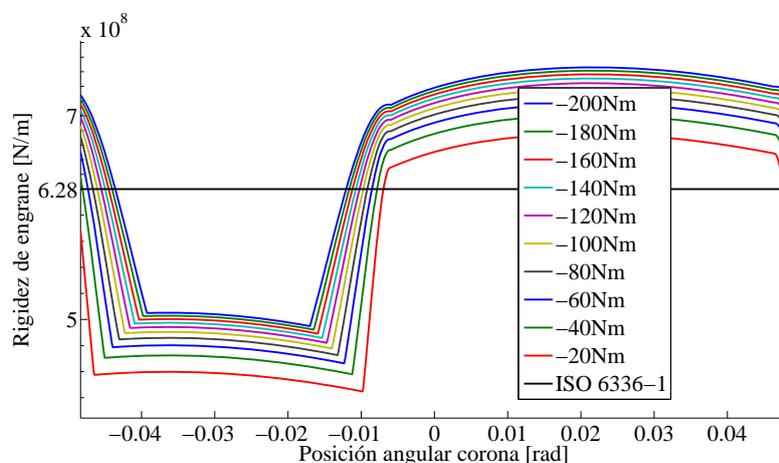


Figura 46. Rigidez de engrane pareja planeta-corona para distintos pares

El valor de rigidez media proporcionado por la norma ISO 6336-1, obtenido a partir de un estudio exhaustivo basado en una formulación teórica y sucesivas correcciones apoyadas en la observación experimental, se ajusta de manera razonable a los valores de rigidez para una pareja de dientes obtenidos mediante la utilización del modelo. Si bien la forma y la amplitud de variación de la rigidez no se contrastan en este estudio, el planteamiento razonado del modelo de engrane, unido a la correlación obtenida para el valor medio de la rigidez proporcionada por la norma, permiten afirmar con un razonable margen de confianza que el modelo reproduce adecuadamente en términos de rigidez el proceso de engrane tanto para el caso interior como para el exterior.

Tal como se aprecia en la Figura 45 y Figura 46, el valor de rigidez media de la pareja planeta-corona es aproximadamente un 50% superior a la de la pareja sol-planeta. El motivo es doble: tanto desde el punto de vista de la deformación local en la zona de contacto como de la deformación estructural. En cuanto a la deformación local, la distribución de presiones en el contacto presentará un área mayor (y en consecuencia una tensión y deformación menores) para el contacto planeta-corona, tanto por los mayores radios de curvatura de los flancos implicados como por su especial condición de concavidad-convexidad. En cuanto a las deformaciones estructurales, en la Figura 47 se presenta una comparativa de flexibilidad para los flancos de las distintas ruedas, donde se aprecia la diferencia de rigidez estructural de las mismas.

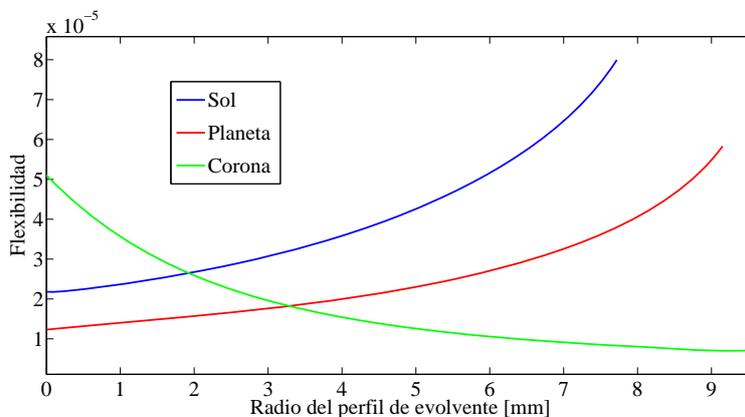


Figura 47. Flexibilidad en (m/N) del perfil de evolvente para las distintas ruedas

5.3.2 Efecto del acoplamiento de las deformaciones entre dientes

De entre las ventajas que presenta el método utilizado para el cálculo de las fuerzas de contacto, cabe destacar la consideración de deformaciones acopladas entre dientes adyacentes. Cuando un diente se encuentra cargado, todo el cuerpo de la rueda se deforma en consecuencia, incluyendo los perfiles de los dientes adyacentes, afectando por lo tanto a las condiciones de solapamiento de las parejas de dientes cercanas. El efecto del acoplamiento de deformaciones entre dientes puede observarse en la Figura 48 y Figura 49, tanto para el caso de engrane exterior como interior. En la zona de contacto doble los términos acoplados de rigidez provocan un descenso de la rigidez de engrane, y el correspondiente aumento del error de transmisión. Por el contrario, en la zona de contacto simple no cabe esperar ninguna variación en el nivel de la rigidez de engrane o en el del error de transmisión, al haber una única pareja de dientes engranada sin posibilidad de acoplamientos. La combinación de la reducción de la rigidez en la zona de contacto doble y el mantenimiento de la misma en la zona de contacto simple tiene como consecuencia global una disminución de la variación pico a pico del error de transmisión. El modelo utilizado tiene la capacidad de reflejar este hecho, frente a otros planteamientos que ignoran las componentes de flexibilidad cruzadas y sus consecuencias.

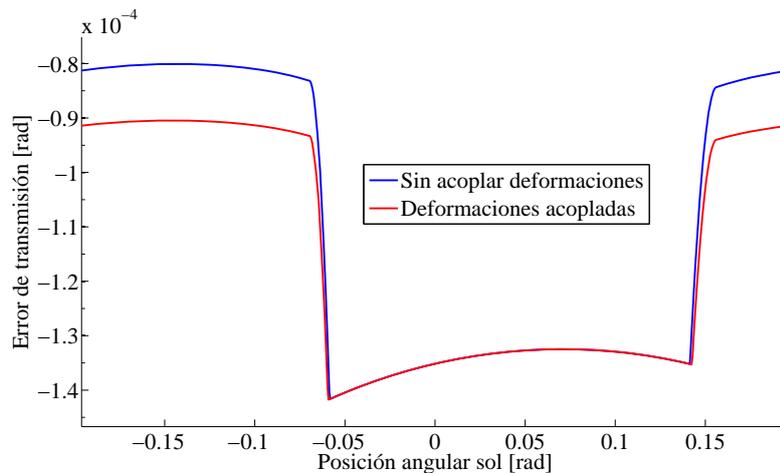


Figura 48. Efecto del acoplamiento de deformaciones entre dientes en el error de transmisión en la pareja sol-planeta

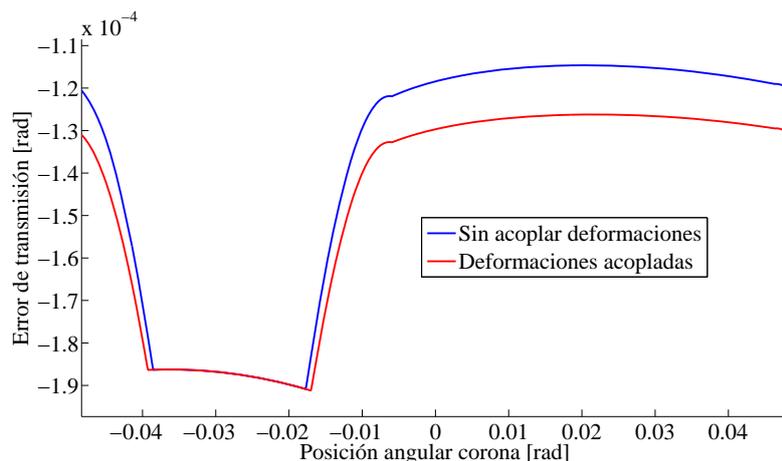


Figura 49. Efecto del acoplamiento de deformaciones entre dientes en el error de transmisión en la pareja planeta-corona

A pesar de que el acoplamiento de deformaciones no presenta efecto alguno en cuanto al valor de la rigidez en la zona de contacto simple, sí existe una modificación en la duración del mismo. Las deformaciones acopladas producidas por el engrane de una pareja de dientes tienden a alejar los flancos de las parejas adyacentes con mismo ángulo de presión, retrasando el inicio del contacto doble y adelantando su final, y modificando en definitiva la relación de contacto. De manera análoga, las deformaciones acopladas producidas en los flancos opuestos (ángulo de presión contrario) sufrirán una aproximación, pudiendo llegar a darse el fenómeno de contacto en contraflanco, de gran importancia en ruedas con cierta flexibilidad y/o escaso juego circunferencial (holgura).

5.3.3 Reparto de fuerzas entre dientes

El motivo por el cual no es posible atender al efecto del acoplamiento de deformaciones mediante el empleo de una buena parte de los modelos más sencillos que se pueden encontrar en la bibliografía, es que éstos consideran la existencia de una única rigidez de engrane, cuya variación se define explícitamente *ad-hoc*. En el presente trabajo la variación de la rigidez de engrane se obtiene de manera implícita, como resultado de la variación del número de parejas en contacto superpuestas en cada posición. Esto supone que en todo momento se conoce el nivel de carga existente en cada pareja de

dientes de manera individual. Esta información es vital desde el punto de vista del diseño, permitiendo establecer tanto los niveles medios como de variación de las tensiones a las que se ven sometidos los dientes.

En la Figura 50 se observa la evolución de la carga en una pareja de dientes desde que el inicio del contacto hasta la salida del mismo, normalizando esta carga respecto al valor máximo de la fuerza teórica transmitida por un único diente, (considerando el reparto entre el número de vías de carga o planetas N_p cuando se trate de una transmisión planetaria). El dato así obtenido, denominado *coeficiente de carga de diente*, aporta información sobre la forma de la variación de la fuerza aplicada respecto a la prevista bajo criterios puramente cinemáticos.

$$\text{Coef. carga diente} = \frac{F_{\text{diente}}}{\frac{T_{\text{ext}}}{N_p \rho}} \quad (5.7)$$

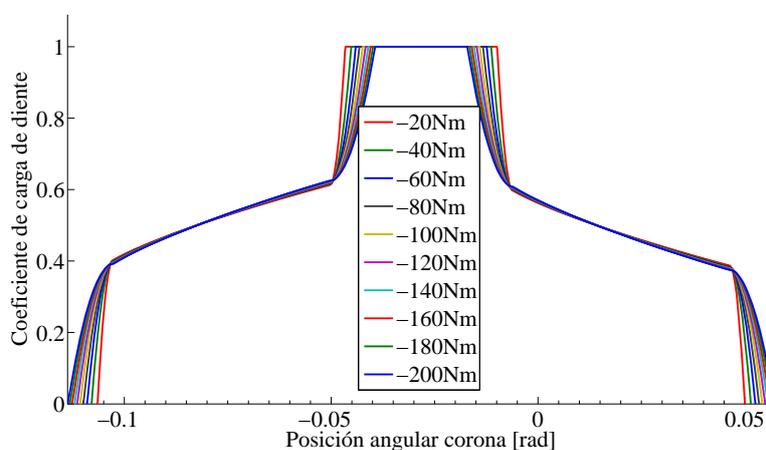


Figura 50. Coeficiente de carga de diente en la pareja planeta-corona

5.3.4 Comparativa hipótesis fuerzas de contacto

Con el objetivo de justificar dos de las asunciones realizadas en la descripción del modelo, en esta sección se aborda desde la perspectiva de los resultados una comparativa de las mismas. Estos dos aspectos del modelizado son analizados, cuantificando los límites del error cometido en su implementación.

5.3.4.1 Deformación plana y tensión plana

En general, las condiciones de tensión en las proximidades del área de contacto entre una pareja de dientes no se corresponderán estrictamente con una situación de tensión o deformación plana, sino que tendrán un carácter tridimensional. En muchos de los trabajos consultados es norma general ignorar una de las tensiones o deformaciones principales, derivando en el empleo de una hipótesis plana.

La elección entre hipótesis de tensión o deformación plana no suele venir acompañada de una comparativa detallada, sino de un razonamiento de tipo cualitativo apoyado en la geometría del problema: sin embargo, no es raro encontrar trabajos con geometrías prácticamente idénticas en las que se adoptan hipótesis distintas.

Wang [2006] realizó un estudio extensivo a base de modelos de elementos finitos con el objetivo de cuantificar el error cometido con la asunción de hipótesis de elasticidad plana. Este trabajo se centró en las diferencias en la rigidez torsional de engrane y las tensiones de los dientes calculadas para las distintas hipótesis, en función de la longitud axial de los engranajes (b). En la Figura 51 se reproducen los resultados obtenidos del error relativo que se comete en el cálculo de la rigidez de engrane según Wang, particularizando para las ruedas utilizadas en este trabajo.

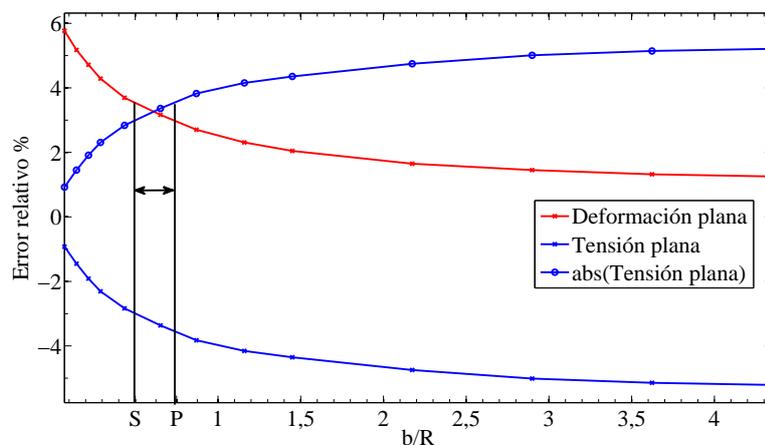


Figura 51. Error relativo de la rigidez de engrane

El eje de abscisas de la Figura 51 se corresponde con el cociente de la longitud axial de la rueda entre su radio primitivo, y en el eje de ordenadas se presenta el error relativo en tanto por ciento cometido respecto a un valor de referencia, que se obtiene mediante un análisis tridimensional de elementos finitos. Para facilitar la comparativa de hipótesis mediante la gráfica de error relativo, se incluye también el módulo del error para la hipótesis de tensión plana.

Los valores de abscisas indicados como S y P se corresponden con el ratio b/R para el sol y el planeta de este estudio respectivamente, y su posición indica claramente que para los anchos de ruedas de la transmisión ejemplo, la elección de una u otra hipótesis de elasticidad plana es indiferente en cuanto al módulo del error cometido. En la zona de trabajo de la transmisión la diferencia relativa entre hipótesis será aproximadamente del 6%, y la diferencia con la situación real (entendiendo por reales los resultados obtenidos mediante el modelo tridimensional sin simplificaciones) de tan sólo un 3%. Hay que tener en cuenta que la transmisión empleada por Wang para su estudio utiliza dos ruedas idénticas, y que las características tanto geométricas como de materiales son ligeramente distintas de las empleadas para la transmisión planetaria objeto de este estudio. Pese a ello, y aunque no sean resultados extrapolables en términos absolutos a la transmisión planetaria presentada, sí aportan una información valiosa sobre la diferencia entre ambas alternativas de modelización plana.

Con el fin de evaluar el error máximo que se puede cometer en la utilización del modelo propio, se ha realizado una comparativa del error de transmisión para cada pareja de ruedas obtenido con cada una de las hipótesis, que se muestra en la Figura 52. El error relativo calculado por Wang es referido a la rigidez torsional, y por tanto igualmente válido para el análisis del error de transmisión. Las diferencias porcentuales entre ambas hipótesis son de un 7.6% para el caso de engrane interno, mientras que para el caso de la pareja sol-planeta la diferencia en el error de transmisión es de un 7.3%. Estos resultados son consistentes con el trabajo de Wang, que encuentra diferencias en torno al 6%, y apuntan a un error en la estimación de la rigidez de engrane para la transmisión planetaria de un $\pm 4\%$.

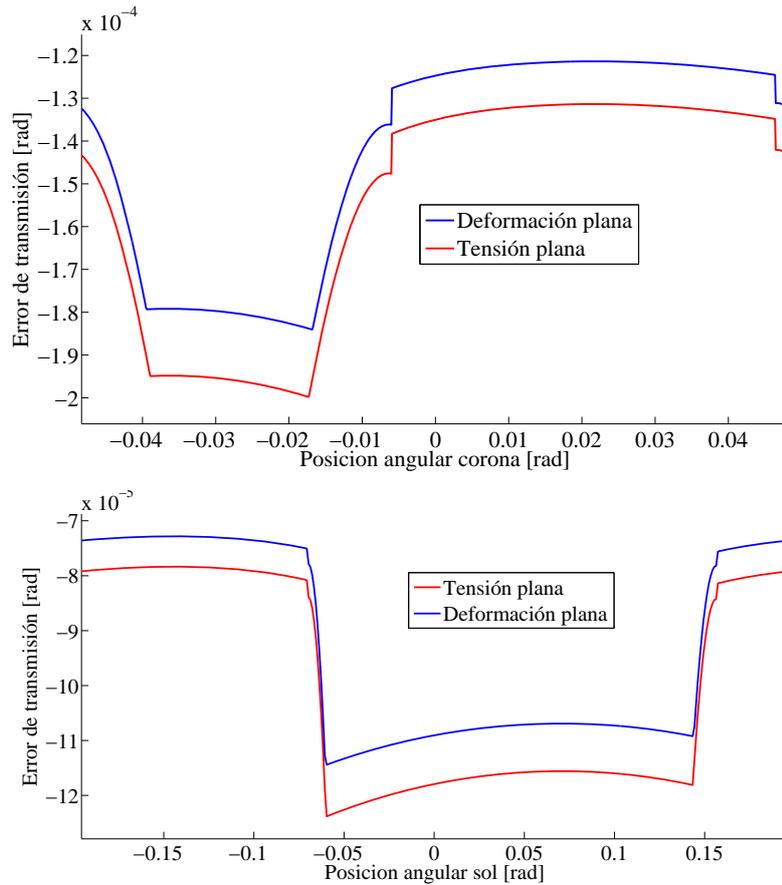


Figura 52. Error de transmisión interno (superior) y externo (inferior) para cada hipótesis de elasticidad considerada

5.3.4.2 Efecto de la profundidad del modelo local

En el estudio sobre el estado del arte en modelizado de transmisiones se ha prestado especial atención a las posibles metodologías planteadas por los investigadores en la determinación de la profundidad a la que situar la frontera del modelo local cuando se utiliza superposición de modelos: sin embargo, no se encontró ninguna información específica ni procedimiento alguno acerca del valor a utilizar. Se planteó por lo tanto el problema de la determinación de la profundidad h , concluyéndose que su solución pasaba por el estudio paramétrico previo de h y su efecto sobre los resultados. En el

capítulo anterior se presentó un análisis cualitativo del efecto que la variación de la profundidad h tenía sobre las deformaciones (y por lo tanto sobre los valores de flexibilidad estructural). Para valores no suficientemente grandes, la superposición de resultados de los modelos de elementos finitos mostraba deformaciones locales en el área de contacto. Los resultados así obtenidos son erróneos, al introducirse una deformación local adicional producida por el uso de un modelo inadecuado: con condiciones de carga puntual y un mallado de baja densidad. Al aplicar la superposición de la formulación analítica de las deformaciones locales con los resultados obtenidos por MEF, es previsible que el error cometido en la estimación de la deformación se vea compensado parcialmente por la consiguiente subestimación del valor de la deformación local proporcionado mediante la formulación analítica de Weber-Banashek. Para comprobar los problemas que una selección inadecuada del parámetro h pudiera tener, se han realizado simulaciones estáticas tanto para ruedas interiores como exteriores. En la Figura 53 se pueden observar los valores del error de transmisión para distintos valores de h , con relación a un valor normalizado $hnorm$.

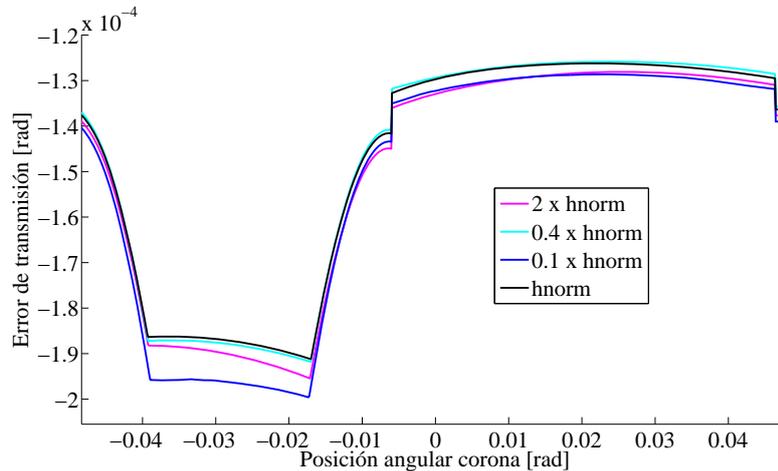


Figura 53. Error de transmisión interno para distintos valores de h

La profundidad $hnorm$ es aquella para la cual la superposición de modelos de elementos finitos proporciona un perfil deformado sin indentaciones o curvaturas que indiquen fenómenos locales. Se obtiene mediante la evaluación numérica de la deformada del diente con relación a un umbral

establecido para cada una de las 3 ruedas que intervienen en la transmisión. A medida que se aumenta la profundidad h , la solución del modelo de elementos finitos siempre proporciona una mejora asintótica, acorde con el enunciado del principio de Saint-Venant. Se selecciona por lo tanto un valor h que proporcione un perfil deformado con efectos locales limitados al umbral mencionado. Si bien la mejora del resultado obtenido mediante el modelo de elementos finitos es proporcional al aumento de la profundidad, en general es preferible establecer un h pequeño, con un valor del umbral lo suficientemente alejado de cero. Esta preferencia se debe a la naturaleza de la formulación analítica de Weber-Banashek, que tiende a sobrestimar las deformaciones locales con el aumento de la profundidad considerada (la deformación obtenida es una función monótona creciente definida para todo R). Se concluye que el modelizado de engranajes mediante superposición con una profundidad h demasiado pequeña da lugar a una menor rigidez de contacto que la real, fruto de la aparición de una deformación local extra proporcionada por el modelo de elementos finitos. Por el contrario, el modelizado con una profundidad demasiado grande aporta la misma tendencia de error (hacia valores de rigidez menores), pero fruto esta vez de la sobreestimación de la deformación proporcionada por la formulación analítica. Este hecho se puede observar tanto para engranes interiores como exteriores, pero de manera más evidente en la Figura 53 para el engrane planeta-corona. En color negro se muestra el valor del error de transmisión para el valor de profundidad ideal $hnorm$. A medida que se reduce la profundidad, aparece una deformación local residual en el modelo de elementos finitos, que se traduce en un aporte de flexibilidad al engrane, aumentándose el error de transmisión (en azul para una profundidad de un décimo de $hnorm$). Cuando se excede $hnorm$ ($2hnorm$, error de transmisión magenta en la figura), en un intento por garantizar la eliminación de la deformación local residual del modelo de elementos finitos, y por lo tanto pretendiendo garantizar la adecuada rigidez del engrane, el resultado es el inverso. En este caso la formulación analítica es la responsable de asignar una flexibilidad extra al engrane, al sobreestimar la deformación local.

En la Tabla 7 se muestra el desglose unitario medio de las deformaciones experimentadas por los puntos de contacto, según sean parte estructural (procedente de la superposición de modelos de elementos finitos) o local (calculada por Weber-Banashek). A pesar de que existen unas diferencias

porcentuales de hasta 16 puntos en los pesos asignados a cada tipo de deformación (entre la profundidad de frontera más pequeña y la adoptada en este estudio como óptima $hnorm$), la diferencia en la deformación total obtenida es menor del 5%. Esto es debido a la mencionada compensación parcial que se produce al reducirse la deformación local obtenida analíticamente a la vez que aumenta la deformación estructural por la inadecuada superposición de modelos.

Tabla 7. Reparto unitario por tipo de deformación

Planeta-corona	2·hnorm	h·norm	0.4·hnorm	0.1·hnorm
Deformación estructural	0.71	0.77	0.84	0.93
Deformación local	0.29	0.23	0.16	0.07
Sol-planeta	2·hnorm	h·norm	0.4·hnorm	0.1·hnorm
Deformación estructural	0.83	0.87	0.93	0.98
Deformación local	0.17	0.13	0.07	0.02

Se puede establecer una analogía en la que el valor de la rigidez de engrane se compone de una pareja de resortes conectados en serie: el primero se corresponde con la deformación estructural (flexión del diente, deformación del cuerpo de la rueda, etc.) y el segundo se corresponde con la deformación local en la zona de contacto. La rigidez de estos resortes varía con el parámetro h . Partiendo de cero, el aumento de este parámetro acaba proporcionando la estabilización de la rigidez del resorte estructural, y sucesivos incrementos en h no suponen una variación sustancial de la rigidez de dicho resorte: se establece así el valor $hnorm$ cuando la variación diferencial de la rigidez es menor que un determinado umbral. En este punto la superposición de modelos de elementos finitos muestra un perfil sin deformaciones locales, y toda la flexibilidad estructural se debe a fenómenos alejados de la zona de contacto. Utilizando este valor $hnorm$, el mínimo para el cual el resorte estructural alcanza un valor estable (según el umbral definido), se evalúa el segundo resorte asociado con la deformación local.

Llegado este punto, cualquier aumento de la profundidad no va a conllevar una variación significativa de la rigidez estructural, mientras que la rigidez local (y por lo tanto también la rigidez total de engrane) seguirá disminuyendo de manera monótona la naturaleza de la formulación empleada. Dado que el objeto de formular la deformación local de manera separada es el de complementar el cálculo de elementos finitos en la zona próxima al contacto, no tiene sentido aumentar la profundidad h por encima del valor para el cual el modelo de elementos finitos proporciona resultados adecuados.

Observando los valores de reparto de deformación puede resultar llamativo que la deformación local tenga un peso mayor en el caso de los engranes interiores que en el de los exteriores. No sólo en el primer caso los radios de curvatura de los perfiles son mayores, sino que en los contactos sol-planeta las superficies de evolvente son ambas convexas, mientras que en el contacto planeta-corona interior son conformes. Esto implica que la superficie de contacto en el caso de engranes interiores será mayor, con la consiguiente reducción de la tensión de contacto y deformación. De acuerdo con lo anterior, la rigidez debida al contacto del engrane interior será mayor que la del exterior, por lo que cabría esperar también un menor peso relativo de la deformación de contacto en el engrane interior que en el exterior. Es la mayor flexibilidad del engrane sol-planeta (Figura 47) la que produce un efecto de compensación sobre el reparto y explica la tendencia diferente.

5.3.5 Conjunto sol-planeta-corona

Como aproximación inicial previa a la integración completa del modelo de transmisión planetaria propuesto, y con vistas a la comprobación gradual de los planteamientos realizados, se han llevado a cabo simulaciones con la terna formada por el sol, la corona y un único planeta, considerando grados de libertad únicamente de rotación, aplicando un par externo en el sol y obteniendo el equilibrio para las distintas posiciones del portasatélites.

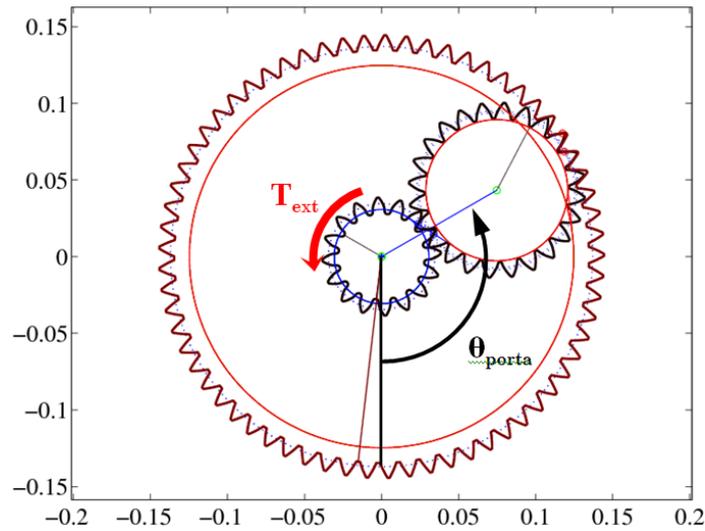


Figura 54. Conjunto modelizado sol-planeta-corona

Las características de la transmisión ejemplo propuesta, por el hecho de ser ésta tomada de una aplicación real, incluyen una serie de aspectos que se traducen en exigencias de modelizado concretas. Uno de estos aspectos, cuyas implicaciones sobre el modelizado podría pasar inadvertido en transmisiones estandarizadas, es la diferencia existente en los ángulos de presión de funcionamiento de los engranes sol-planeta y planeta-corona.

Es sencillo comprender que en una transmisión planetaria, cuando se desea que todas las ruedas trabajen en condiciones nominales de ángulo de presión, se ha de cumplir la siguiente relación de radios primitivos de referencia:

$$R_{sol} + 2R_{planeta} = R_{corona} \quad (5.8)$$

En la primera construcción gráfica de la Figura 55 se desarrolla esta relación, que se puede reescribir en términos de número de dientes con la utilización del módulo, obteniendo que el número de dientes teórico que debiera presentar la corona para el sol y planetas utilizados en el ejemplo es de $16+2\cdot24=64$. Dado que el número de dientes de la corona empleada es de 65, se presenta en rojo la nueva dimensión de su circunferencia base, así como el efecto que la nueva construcción tiene sobre los distintos ángulos de presión y circunferencias primitivas.

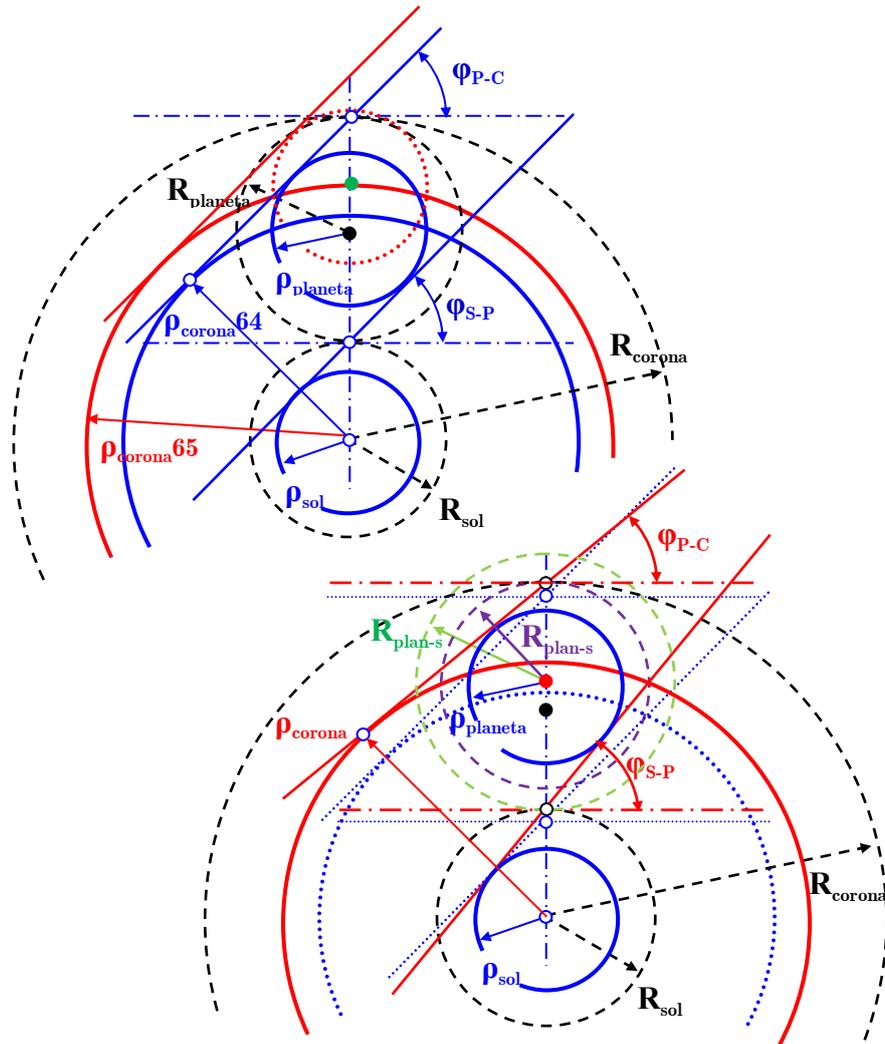


Figura 55. Circunferencias primitivas de funcionamiento en el planeta y ángulos de presión para cada engrane al emplear un número de dientes distinto del nominal

Al utilizar una corona con un número superior de dientes, aparece un rango de posiciones posibles para el planeta, pudiendo éste situarse en cualquier punto comprendido entre las posiciones indicadas con un punto negro y verde en la figura, cuando no existan correcciones de tallado. Estas posiciones se corresponden respectivamente con aquellas para las cuales el

planeta engrana según el ángulo de presión nominal con el sol y con la corona. Cualquiera que sea la posición que ocupe el planeta entre estos dos valores extremos, los ángulos de presión de funcionamiento serán siempre mayores que el nominal para el caso del engrane sol-planeta y menores que el nominal para el engrane planeta-corona, dándose la circunstancia adicional de que el planeta presentará siempre dos circunferencias primitivas de funcionamiento.

Las consecuencias que este hecho tiene sobre la transmisión planetaria son diversas. En primer lugar, desde el punto de vista del modelizado, hay que tener presente que todos los algoritmos para el cálculo de los solapamientos geométricos se apoyan en una posición angular de referencia, que es aquella para la que hay contacto en el punto primitivo. Además del posible desfase natural entre engranes (que para la geometría de este problema es nulo), dado que ahora hay dos circunferencias primitivas en el planeta, es preciso distinguir entre la posición angular del planeta respecto a su engrane con la corona y la posición angular respecto a su engrane con el sol.

$$\begin{aligned}\varphi_{P-C} &= \arccos\left(\frac{\rho_{PLANETA}}{d_{montaje} \rho_{PLANETA} / \rho_{CORONA} - \rho_{PLANETA}}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{46.04}{86.4 \cdot 46.04 / 124.69 - 46.04}\right) = 24.45^\circ\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$\varphi_{S-P} = \arccos\left(\frac{\rho_{SOL} + \rho_{PLANETA}}{d_{montaje}}\right) = \arccos\left(\frac{30.69 + 46.04}{86.4}\right) = 27.37^\circ \quad (5.10)$$

Desde el punto de vista del funcionamiento, una consecuencia de que el planeta presente dos ángulos de presión distintos es la aparición de una componente de fuerza radial neta sobre el portaplanetas. En (5.9) y (5.10) se presenta el cálculo de los ángulos de presión de funcionamiento para cada engrane, teniendo en cuenta la distancia de montaje establecida en los parámetros de la transmisión.

Se puede observar que el ángulo de presión del sol será mayor que el de la corona (y ambos a su vez distintos de los 25° nominales de tallado), por lo

que la composición de las dos fuerzas de engrane actuantes sobre el planeta resultarán en una componente radial negativa (orientada hacia el exterior), tal como se aprecia en la Figura 56. Los picos que se observan en la componente de fuerza radial a lo largo de los diferentes ciclos de engrane se deben a los contactos fuera de la línea de acción. Los contactos fuera de la línea de acción se producen cuando los puntos de los perfiles implicados no son exclusivamente de evolvente, sino que incluyen un tramo de redondeo de punta de diente. Mediante el análisis de lo expuesto en la sección 3.3.2 relativa a los contactos con redondeo de punta, se puede razonar que el contacto en el redondeo supone una reducción de la circunferencia base equivalente. Atendiendo a la inclinación de la recta tangente a ambas circunferencias base en la Figura 55, el ángulo de presión del engrane interior aumentará cuando el redondeo que contacta sea el de la corona, mientras que disminuirá cuando el arco de redondeo en contacto sea el del planeta. En el caso del engrane exterior, los contactos en arco de redondeo de las dos ruedas (planeta o sol) producirán siempre un aumento del ángulo de presión. En resumen, de los cuatro casos posibles de contacto fuera de la línea de acción, solo uno (el contacto con redondeo en la corona) producirá una compensación positiva de la resultante radial sobre el planeta, mientras que los otros tres contactos (redondeo en cualquiera de los engranajes exteriores) aumentarán la componente radial negativa. Este hecho se verifica atendiendo a los lóbulos de la Figura 56, 3 negativos (dos de ellos con un cierto solapamiento entre sí) y 1 positivo para cada ciclo de engrane.

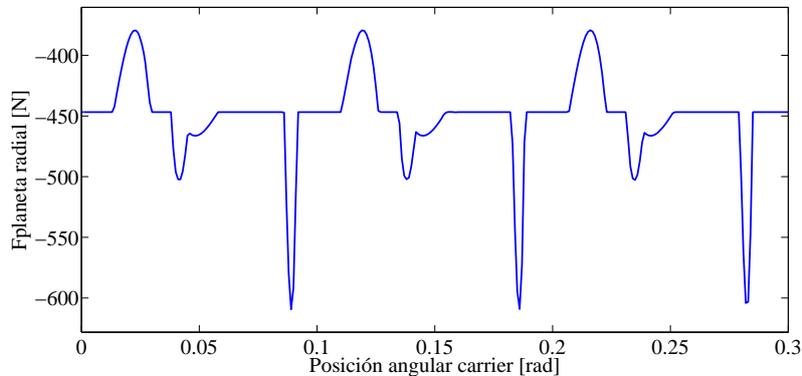


Figura 56. Componente de fuerza radial sobre el planeta

En cuanto al valor del error de transmisión de la terna sol-planeta-corona, es sencillo apreciar la combinación de las rigideces de engrane de las dos parejas. Para la Figura 57, en la que se muestra el error de transmisión a diversos niveles de carga para tres ciclos de engrane, el dúo sol-planeta presenta inicialmente una pareja de dientes en contacto, mientras que el planeta-corona presenta dos. En la posición angular 0.025 rad del portasatélites el engrane planeta-corona pierde una de las parejas. A continuación, se produce un escalón debido a la entrada en contacto de una pareja de dientes extra en cada engrane. Esta entrada no es exactamente simultánea, y para los niveles más bajos de carga, donde el comportamiento puramente cinemático es más visible por la menor deformación, se aprecia el doble escalón que producen las entradas consecutivas de dichas parejas. El ciclo de engrane concluye con la salida del contacto de una pareja en el sol-planeta y la posterior salida de otra pareja en el engrane planeta-corona.

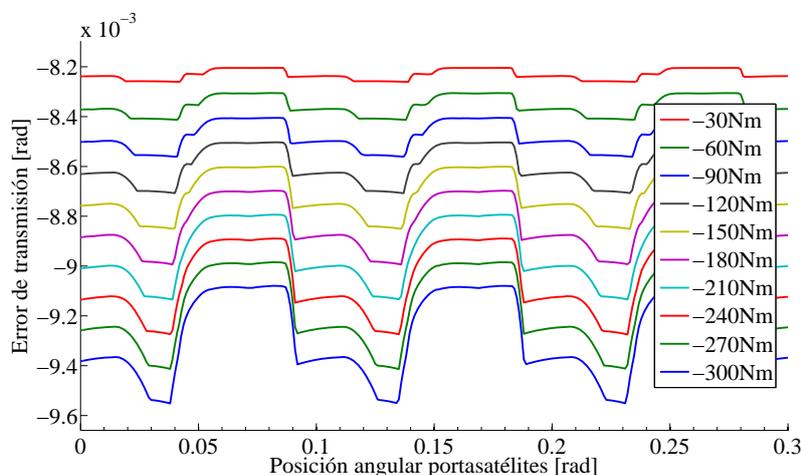


Figura 57. Error de transmisión del conjunto sol-planeta-corona

5.3.5.1 Efecto de la flexibilidad cruzada: variación de la rigidez de engrane

En el caso del conjunto sol-planeta-corona, la consideración de la flexibilidad cruzada entre engranes descrita en el Capítulo 4 únicamente pasa por tener en cuenta la deformación del planeta, ya que tanto el sol como la corona presentan un único engrane.

El acoplamiento de deformaciones entre dientes adyacentes dentro de un mismo engrane produce un efecto de disminución de la rigidez, al actuar todas las deformaciones (tanto las propias como las acopladas) en el mismo sentido. El acoplamiento de deformaciones de los dos engranes del planeta tiene el efecto contrario. La deformación producida por cada uno de los engranes sobre los flancos del engrane opuesto tiende a acercar aún más los perfiles de los dientes en contacto, teniendo como consecuencia la rigidización de ambos engranes. En términos del error de transmisión del sol, tal como se aprecia en la Figura 58, la consideración del acoplamiento de deformaciones proporciona unos valores de error ligeramente inferiores a los previstos por el modelo sin acoplar. El resultado varía ligeramente para el caso de las tres ruedas, siendo el efecto más pronunciado para la transmisión planetaria completa.

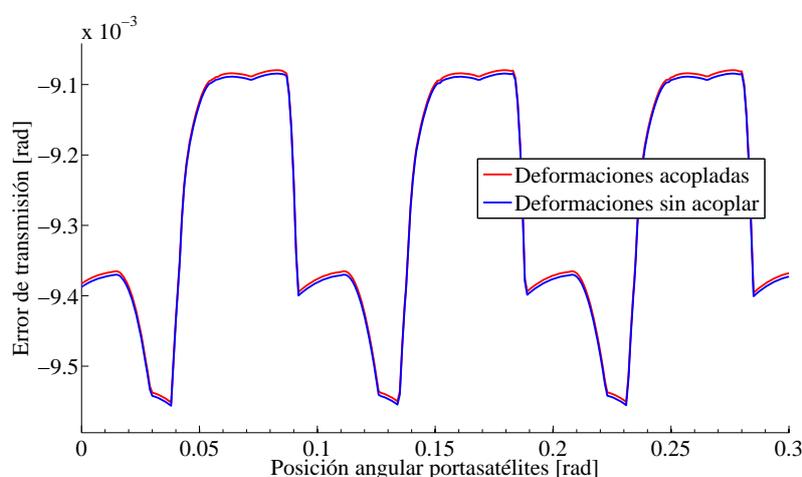


Figura 58. Efecto del acoplamiento de deformaciones entre los engranes del planeta

5.4. INTEGRACIÓN DEL MODELO DE ENGRANE EN LA TRANSMISIÓN PLANETARIA

Una vez simulado y validado el comportamiento de la combinación de engranes exteriores e interiores en el modelo, se extiende el estudio de la transmisión al caso completo, que en el ejemplo propuesto contempla tres planetas. Mediante el empleo del modelo de rodamiento presentado en la sección 4.5 o la eliminación completa de restricciones, a los grados de libertad rotacionales presentados se añaden los traslacionales según su

necesidad de uso en función de la configuración adoptada. La configuración será fija o flotante y se empleará para el análisis de uno de los factores de estudio fundamentales de una transmisión planetaria, el coeficiente de reparto de carga entre planetas, que se presenta y describe a continuación.

5.4.1 Reparto de carga

Existen multitud de variaciones de trenes planetarios, tanto en tipología como en su aplicación. Sin embargo, ya sean de tipo simple o compuesto, con engranajes rectos o helicoidales, empleados en cambios de velocidad o como elemento diferencial, la inmensa mayoría de diseños de transmisiones planetarias comparten una característica fundamental, ya señalada en capítulos anteriores: la compacidad. Se puede entender que una transmisión planetaria es compacta por dos razones, ambas fundamentadas en el mayor volumen de material que sería necesario utilizar para satisfacer los mismos requerimientos a base de configuraciones ordinarias. La primera razón tiene que ver con la configuración cinemática de la transmisión planetaria (portaplanetas giratorio), que proporciona relaciones de transmisión mucho mayores que aquellas suministradas mediante transmisiones ordinarias. De manera adicional, esta configuración permite entradas y salidas coaxiales, lo que es un valor añadido en multitud de aplicaciones. La segunda razón por la que una transmisión planetaria se puede decir compacta, es la división del par transmitido en una multitud de vías de carga. La capacidad de carga de un engranaje está determinada en última instancia por el tamaño de sus dientes, por lo que, en general, una carga de trabajo grande implica necesariamente unos engranajes de tamaño acorde. Sin embargo, las transmisiones planetarias implican la división de la carga total en un número variable de vías, de manera que la dimensión de los engranajes puede reducirse en la misma proporción en la que se aumenta el número de vías de carga.

En condiciones ideales, cada una de las vías de carga planetarias transmite la misma fracción de par que las demás. De esta manera, no han de existir fluctuaciones en las condiciones de trabajo de los distintos componentes, evitando así el funcionamiento fuera de las condiciones de diseño, o al menos acotando de manera más estrecha tales condiciones. Sin embargo, existen una serie de razones por las que el reparto de carga no puede ser equitativo

en el funcionamiento real de las transmisiones planetarias: motivos de diseño o debidos a errores en el proceso de fabricación y montaje.

Dentro de las razones que imposibilitan un reparto equitativo de la carga entre las distintas vías, la que surge de manera inmediata es la presencia de una rigidez variable de engrane. Se podría plantear la sincronización de cada una de estas rigideces para todas las vías, en pos de un reparto de carga equitativo: sin embargo esta estrategia provocaría un incremento sustancial de la amplitud del error de transmisión del conjunto, lo que tendría una incidencia negativa sobre el comportamiento dinámico. Es por ello que habitualmente no se recurre a una configuración de planetas en fase, sino que más bien al contrario se intenta suavizar en la medida de lo posible la forma del error de transmisión, desfasando las rigideces de engrane de cada vía $2\pi/n$ (donde n es el número de vías). Además de la rigidez variable, inherente a cualquier transmisión mediante engranajes, cualquier error en la fabricación o el montaje de los distintos componentes puede derivar en un reparto de cargas desigual, como por ejemplo los errores de perfil, de paso, las excentricidades y los errores de posicionamiento de los planetas.

Bien sea por un motivo u otro, el reparto de carga tiene consecuencias tanto en el comportamiento dinámico: vibraciones debidas a la excitación por fuerzas variables, como en la durabilidad: mayores cargas de trabajo que las planteadas, o peor comportamiento a fatiga de rodamientos y ruedas debido al aumento en la amplitud de la tensión. Es por ello que los ingenieros e investigadores han dedicado una gran parte de la atención en el estudio de transmisiones planetarias a la búsqueda de métodos que mejoren el reparto de carga. Existen diversos sistemas, de mayor o menor complejidad, que pueden emplearse en la consecución de un objetivo de reparto equitativo. Las soluciones más complicadas incluyen apoyos flexibles de los planetas, diseñados específicamente para absorber las desviaciones de fabricación o montaje, o simplemente las diferencias entre las diversas rigideces de engrane instantáneas. En ocasiones se emplean también coronas flexibles que permitan acomodar las variaciones en el funcionamiento que derivan en reparto desigual. Sin embargo, la solución más sencilla (y completamente efectiva para un elevado número de situaciones) para lograr una mejora del reparto de carga, es permitir que uno de los miembros centrales pueda moverse libremente, sin restricción alguna en su traslación alrededor de la posición nominal. Es de nuevo la especial configuración axisimétrica de las

transmisiones planetarias la que permite contemplar esta solución, al tener cada uno de los miembros centrales una carga radial nula, como consecuencia de esta simetría. Así, los elementos centrales tienen la capacidad de autosustentarse por efecto de la combinación de fuerzas de engrane sobre ellos, por lo que en teoría pueden prescindir de apoyo convencional (ya sea rodamiento o cojinete). El modelo presentado aquí tiene especial atención en la consideración de todos los aspectos anteriores de cara al modelizado del coeficiente de reparto de carga (CRC), que se calcula según:

$$CRC_i = T_{engrane_{pi-s}} / T_{ext} \quad (5.11)$$

Y que representa la relación existente entre el par en el sol transmitido por cada una de las vías de carga y el par exterior total aplicado.

5.4.2 Configuraciones empleadas

Se propone a continuación el estudio del comportamiento de la transmisión planetaria, apoyado en el reparto de carga obtenido según la configuración utilizada. Inicialmente, se plantean dos posibilidades de configuración de transmisión en el estudio: sol flotante y sol fijo, con el resto de elementos restringidos a sus grados de libertad de rotación. De esta manera, para el caso de la configuración con sol fijo el equilibrio estático se plantea en la transmisión planetaria para una posición determinada, marcada por las posiciones angulares de la corona y del portasatélites. Así, de la transmisión planetaria quedan por definir únicamente las posiciones angulares de los planetas y el sol, por lo que se necesitan 4 ecuaciones de equilibrio:

$$(T_{engrane_{s-p_i}}) + (T_{engrane_{c-p_i}}) = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (5.12)$$

$$\sum_{i=1}^3 (T_{engrane_{pi-s}}) = T_{ext} \quad (5.13)$$

Cuando se considera la configuración con sol flotante, es necesario determinar la posición del centro del mismo, por lo que al sistema de ecuaciones anteriores hay que añadir la resolución del equilibrio de fuerzas en el sol:

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{F}_{engrane_{pi-s}}) = 0 \quad (5.14)$$

5.4.2.1 Sol fijo

Analizando el error de transmisión del sol cuando se emplea la configuración fija, se observa cómo la forma del error resultante se corresponde con la composición de la obtenida para el conjunto sol-planeta-corona mostrado en la Figura 57. Los tres errores individuales para cada vía o planeta se combinan con el correspondiente desfase de 120° entre engranes que la geometría de la transmisión modelada impone. Las salidas y entradas de las distintas parejas entre engranes se van solapando en sucesión, tal como se indica en la Figura 59, donde se muestra el error de transmisión, así como los distintos engranes PC (planeta corona) y SP (sol planeta), con el número representativo del planeta y un subíndice que indica el número de parejas en contacto en cada instante.

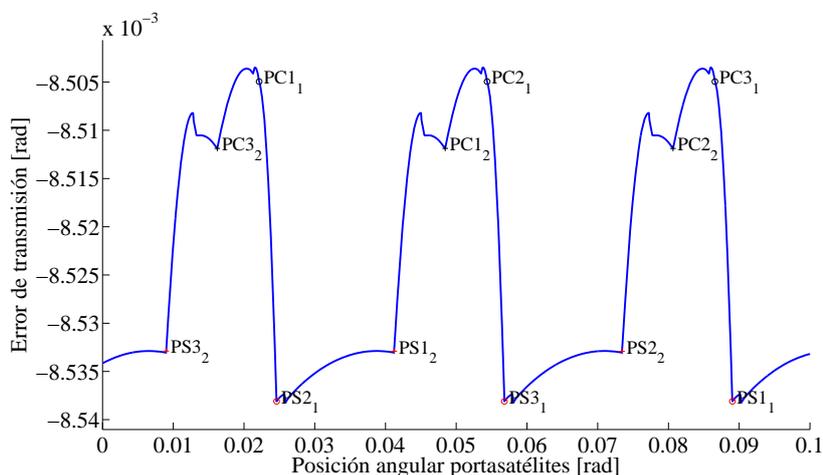


Figura 59. Error de transmisión del sol en la transmisión planetaria con los cambios en el número de parejas en contacto (configuración con sol fijo). Par $-300Nm$.

El efecto del aumento de par en el error de transmisión es triple: modifica el valor medio, la amplitud de la variación pico a pico y la forma del error de transmisión, tal como se presenta en la Figura 60. La forma del error varía, modificándose el tamaño de los lóbulos en la zona de error mínimo. Esta

variación se produce en la zona de doble contacto de los engranes planeta-corona, al tener el aumento de par una incidencia mayor sobre la relación de contacto en este engrane que en el del sol-planeta.

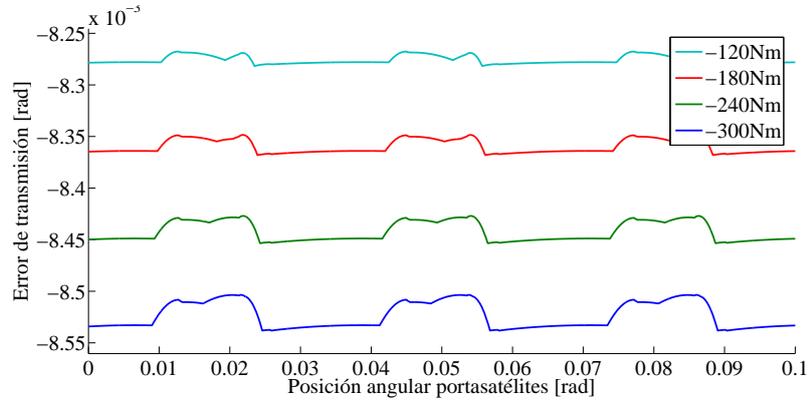


Figura 60. Error de transmisión del sol en la transmisión planetaria a diversos niveles de carga

El reparto de carga cuando se emplea una configuración fija de los elementos, sin posibilidad de flotación o traslación de ninguno de los cuerpos centrales, es una expresión directa de la variación relativa de la rigidez de contacto de cada uno de los engranes. Así, una transmisión planetaria como la presentada, en la que los engranes se encuentran desfasados 120° presentará un error de transmisión lo más suave posible en cuanto a su variación pico a pico. Como contrapartida, esta homogeneización de la rigidez de engrane absoluta a la entrada (en el sol) mediante el desfase de engranes, conlleva que el reparto de carga entre planetas sufra fuertes variaciones, tal como se aprecia en la Figura 61, llegando a diferencias de hasta un $\pm 9\%$ sobre el total de carga. Sobre la capacidad de carga nominal del planeta, esta diferencia del 9% en el total de carga transmitida por el planetario supone el triple de variación, es decir un $\pm 27\%$ de variación.

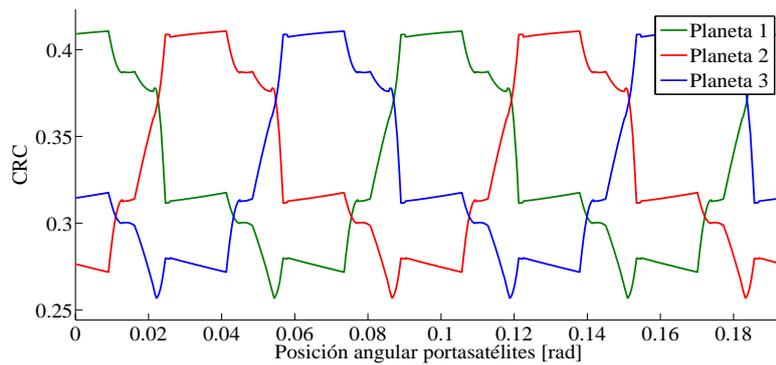


Figura 61. Coeficiente de reparto de carga entre planetas. Sol fijo, par $-300Nm$

Se podría presumir que esta enorme fluctuación en la carga transmitida por cada vía de la transmisión planetaria tiene graves consecuencias en la durabilidad de los engranajes. Sin embargo, atendiendo al coeficiente de reparto de carga de diente individual del engranaje sol durante todo su ciclo de carga presentado en la Figura 62, se observa que la fuerza ni siquiera alcanza el valor unidad.

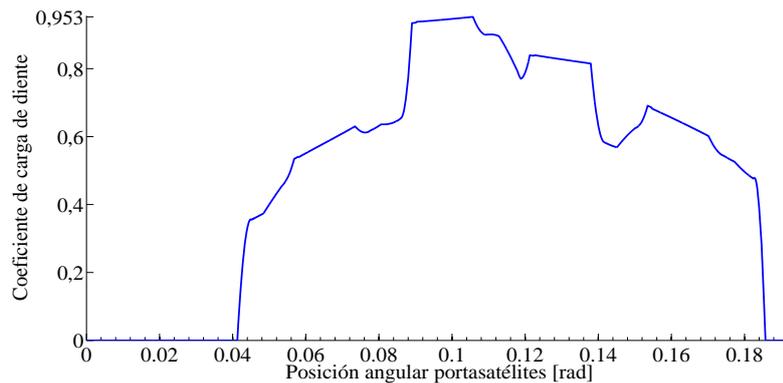


Figura 62. Coeficiente de reparto de carga de diente. Engrane sol-planeta 1.
Par $-300Nm$

Este hecho se debe a que el máximo de fuerza sobre el cual se normaliza el reparto de carga de diente se refiere a la fuerza teórica aplicada en un único diente para equilibrar el par nominal, dividido éste entre el número de vías de la transmisión. Se utiliza el contacto simple como condición sobre la que

normalizar el reparto de carga de diente porque es ésta la situación más desfavorable, en la que el diente ha de alcanzar su carga máxima. Sin embargo, en el caso de la transmisión planetaria hay que atender al hecho adicional del período para el cual cada una de las vías transmite su mayor porcentaje de carga. Al introducir este factor en la discusión, se hace evidente que las vías con mayor carga serán aquellas que presenten mayor rigidez, lo que se corresponde con períodos con un mayor número de parejas en contacto. De esta manera, las vías más rígidas liberan de carga al resto en períodos de contacto simple, por lo que los dientes se encuentran cargados siempre con un valor de carga menor a un tercio del total en su zona de contacto simple.

5.4.2.2 Sol flotante

Cuando la configuración de transmisión planetaria es de sol flotante, la situación de reparto de carga cambia radicalmente. El sol ha de cumplir con el equilibrio estático de fuerzas además de con el de momentos aplicados, lo que deriva en que el sol realiza una órbita alrededor de su posición central. Este movimiento responde al alejamiento del sol según la dirección de la línea de acción de los engranes más rígidos, hasta que la suma de productos de las rigideces y solapamientos individuales de cada engrane se igualan.

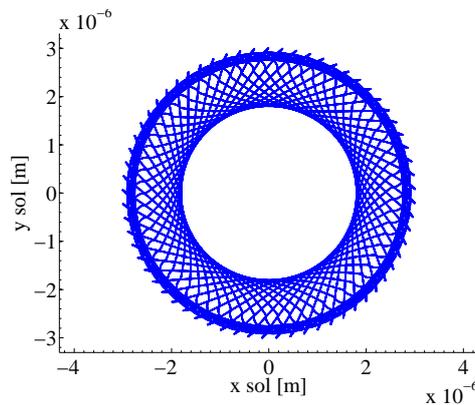


Figura 63. Órbita descrita por el sol flotante. Par $-300Nm$

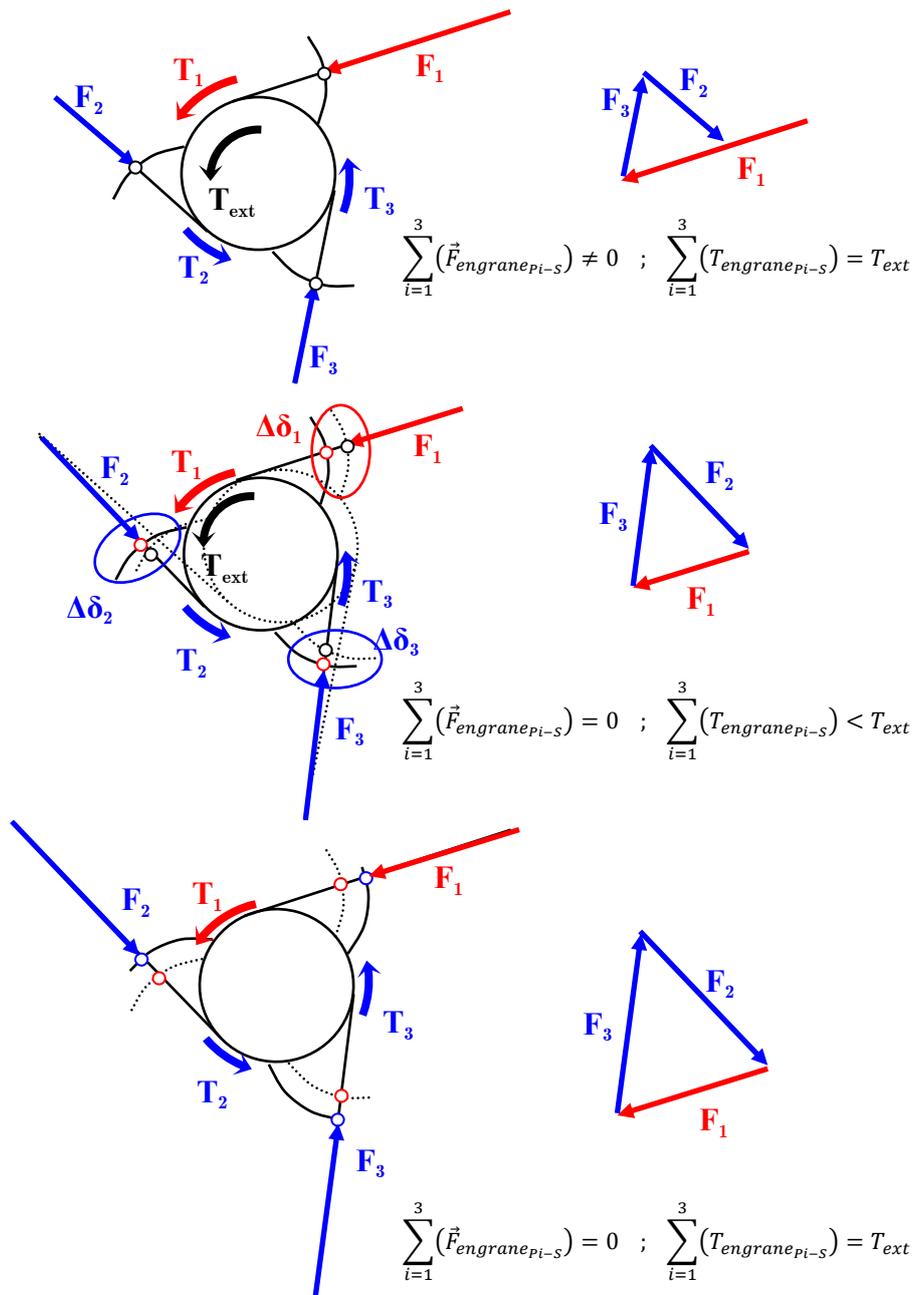


Figura 64. Traslación y rotación del sol por efecto de la rigidez de engrane variable

En la Figura 64 se presentan tres construcciones gráficas correspondientes con el estado de equilibrio del sol en fuerzas y momentos considerando sus tres engranes. En la construcción superior se muestra la situación de sol fijo. El sistema de fuerzas de engrane produce un equilibrio de momentos con una componente no nula de fuerza, causada por la mayor rigidez del engrane 1, marcado en rojo en la figura.

Al tratarse de un sistema lineal, se ha descompuesto de manera arbitraria el movimiento del sol (causado por el desequilibrio fruto de eliminar el apoyo del sol) en una traslación y una rotación, en cada una de las cuales se satisface respectivamente el equilibrio de fuerzas y de momentos.

Partiendo de la construcción gráfica inicial, con el sol fijo y una componente no nula de fuerza sobre el mismo, que se supone absorbida por el apoyo, se elimina este último con el fin de analizar el proceso de equilibrado. El sol se aleja del engrane 1, de mayor rigidez, disminuyendo su solapamiento en una cantidad $\Delta\delta_1$. Por la simetría del problema y considerando pequeñas deformaciones, esta diferencia en la distancia de solapamiento $\Delta\delta_1$ es absorbida por los otros dos engranes, de manera que $\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2 + \Delta\delta_3$. Al disminuir el solapamiento $\Delta\delta_1$, disminuye de manera consecuente F_1 . Como corresponde, los valores de F_2 y F_3 también aumentan, proporcionalmente con el aumento de sus solapamientos, hasta que finalmente el sistema de fuerzas sobre el sol se hace nulo.

Dado que el radio base permanece inalterado durante las transformaciones, el par resultante de las fuerzas de engrane es proporcional a la suma aritmética de las mismas. Tras la primera traslación, esta suma será menor, dado que el decremento de F_1 es mayor que el incremento de F_2 y F_3 , por ser las rigideces de engrane 2 y 3 menores. En definitiva, el par resultante de las fuerzas de engrane se habrá reducido, por el efecto de la traslación introducida para obtener un sistema de fuerzas nulo.

Para alcanzar el equilibrio de par desde la segunda construcción gráfica bastará por lo tanto con aumentar de manera proporcional todas las fuerzas, lo que se consigue mediante una rotación adicional, incrementando todos los solapamientos geométricos en la misma cantidad, hasta que el par de engrane equilibre al par exterior.

Dado que los desplazamientos del sol son pequeños, el sistema sigue siendo simétrico y los ángulos de presión permanecen prácticamente inalterados. Por

lo tanto, el triángulo formado por las fuerzas de engrane es equilátero, lo que equivale a decir que el reparto de carga entre las distintas vías será perfectamente equitativo. Con esta construcción gráfica y descomposición de desplazamientos del sol se pretende además explicar el aumento del error de transmisión del sistema flotante respecto al sistema fijo, presentado en la Figura 65. En definitiva, la posibilidad de traslación del sol aporta flexibilidad al conjunto de engranes, por lo que para obtener el mismo par es necesario un mayor solapamiento geométrico y como consecuencia el sistema presentará un mayor error de transmisión.

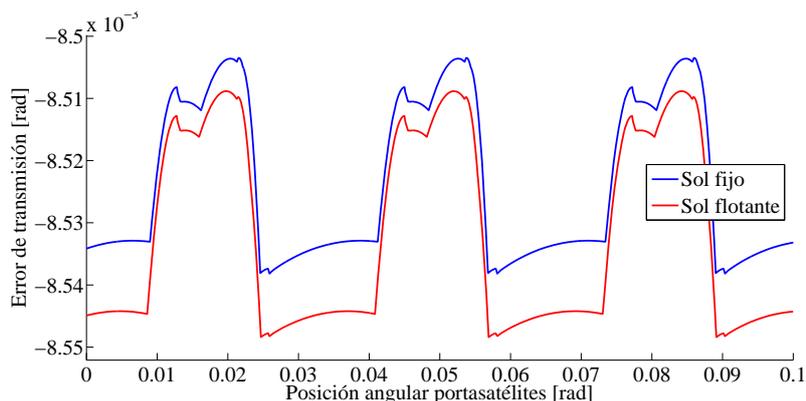


Figura 65. Comparativa de error de transmisión en configuración de sol fija y flotante

Tal como ha deducido con el apoyo de las construcciones gráficas presentadas en la Figura 64, el reparto de carga equitativo es una consecuencia absolutamente directa de la flotación del sol. Existen unas diferencias infinitesimales en el reparto, debidas a la minúscula variación de los ángulos de presión, fruto de la asimetría real producida por el desplazamiento del centro del sistema. Observando los resultados de reparto de carga mostrados en la Figura 66, si bien se confirma que la carga se reparte de manera prácticamente perfecta durante la mayoría del ciclo de engrane, en determinadas posiciones angulares aparecen picos con diferencias de hasta 3 décimas de punto porcentual del reparto. Estas diferencias se explican acudiendo al concepto de radio base equivalente, introducido para el tratamiento de los contactos fuera de la línea de acción. Al cambiar el radio base en el contacto con redondeo, el sistema deja de ser simétrico, por lo que no existe la posibilidad de alcanzar un sistema nulo con fuerzas de igual valor, y el reparto de carga ha de ser por definición no homogéneo.

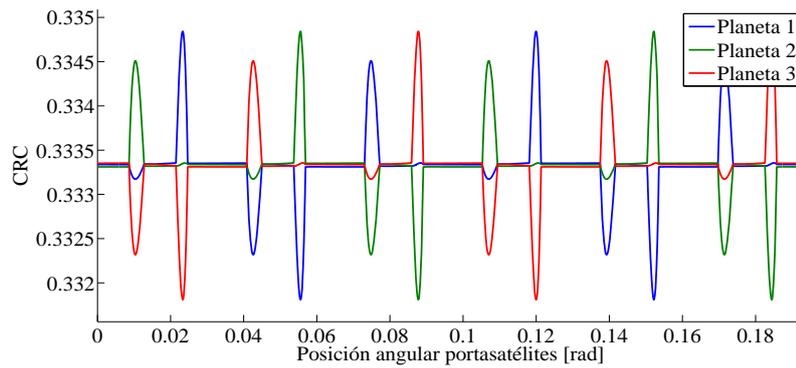


Figura 66. Coeficiente de reparto de carga entre planetas. Sol flotante, par $-300Nm$

5.4.3 Efecto del acoplamiento de deformaciones

En el apartado 5.3.5.1 se mostró el efecto de la flexibilidad cruzada entre engranes en el caso del conjunto sol-planeta-corona. Las diferencias en el nivel del error de transmisión resultante eran pequeñas, al tratarse únicamente del acoplamiento que se producía entre los dos engranes del planeta, diametralmente opuestos, producido por la deformación de la rueda. En el caso de la transmisión planetaria completa, al ser todas las vías paralelas, los efectos se suman, con el resultado que se muestra en la Figura 67.

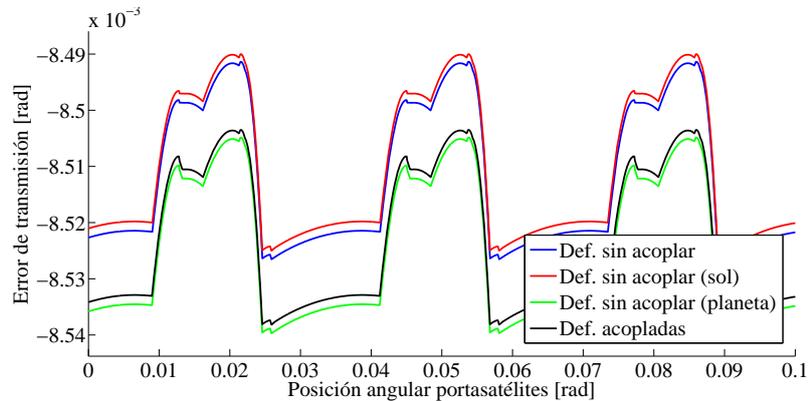


Figura 67. Comparativa del error de transmisión según distintos acoplamientos de deformaciones. Sol fijo, par $-300Nm$

Así como el acoplamiento de deformaciones en el planeta tiende a acercar aún más los perfiles de los dientes en contacto del engrane opuesto, rigidizando los engranes, el acoplamiento de deformaciones en el sol tiene el efecto contrario. De hecho, el efecto del acoplamiento entre engranes del sol es absolutamente equivalente al acoplamiento de deformaciones entre los dientes de un mismo engrane, alejando los flancos de las parejas adyacentes y por lo tanto flexibilizando el conjunto. Por otra parte, el acoplamiento a través de la deformación del sol tiene un efecto mucho más visible que el acoplamiento a través de la deformación del planeta, al estar los dientes de cada engrane mucho más cercanos entre sí en el primer caso que en el segundo. En cuanto al acoplamiento a través de la corona, su efecto es prácticamente inapreciable y no se muestra en la Figura 67. El modo de deformación que produce el acoplamiento de flexibilidades entre engranes es fundamentalmente la torsión que se produce del cuerpo de la rueda alrededor de los nodos empotrados del eje. En el caso de la corona, al ser el espesor de la rueda pequeño y los engranes alejados entre sí, el empotramiento de los nodos provoca que la deformación acoplada sea inapreciable. Si bien las condiciones de contorno impuestas en el ejemplo se relacionan con el montaje real de la transmisión empleada, en muchos otros casos y aplicaciones la corona del planetario tiene mayor libertad de movimiento, pudiendo flectar y sufrir deformaciones distintas a la mera torsión axial, lo que daría como resultado unos acoplamientos mucho más importantes entre sus engranes.

Observando el error de transmisión resultante, según se considere el acoplamiento de deformaciones en cada rueda o en el conjunto, se concluye que el efecto global es el de una flexibilización del engrane, debido al efecto predominante que tiene el acoplamiento de las deformaciones del sol, tal como se aprecia en la Figura 67.

Capítulo 6

Modelo de transmisión planetaria: comportamiento en presencia de defectos

6.1. INTRODUCCIÓN

Es sencillo encontrar en la literatura numerosas referencias que tratan sobre el comportamiento de trenes planetarios en presencia de defectos, especialmente en el último período de auge en modelizado computacional de transmisiones.

Un gran porcentaje de los trabajos publicados se apoya en el estudio del reparto de carga entre las distintas vías de la transmisión planetaria, analizando las causas y defectos por los que no se produce un reparto equitativo, y proponiendo soluciones o herramientas para predecir la cuantía del desequilibrio [Singh, 2010, 2011]. Se acepta en general que las transmisiones con 3 planetas son las que presentan una mejor capacidad de reparto de carga. La opción de configurar la transmisión con un miembro central flotante es la solución que proporciona unos mejores resultados de cara a la absorción de desviaciones, errores de fabricación y montaje, y reduciendo el desequilibrio en el reparto de carga.

6.2. ERRORES EN TRANSMISIONES PLANETARIAS

Las dos causas aceptadas como fuente mayoritaria de reparto de carga desigual están íntimamente relacionadas con las tolerancias de fabricación y montaje, y son los errores en el posicionamiento de los planetas [Singh, 2010] y la excentricidad de las ruedas [Gu, 2012b]. A continuación se describe cada uno de los errores así como su implementación en el modelo desarrollado. Parte del trabajo presentado en este epígrafe se encuentra publicada en [Iglesias, 2013].

6.2.1 Errores de posicionamiento de planetas

Los errores de posicionamiento de planetas (en inglés *pinhole positioning error*) se producen cuando, debido a las tolerancias de fabricación del porta, las posiciones de los ejes de los planetas difieren de sus posiciones teóricas. Se dividen por su distinto impacto en dos componentes, según la dirección de su desviación: así, pueden encontrarse errores de posicionamiento radial o tangencial, tal como se muestra en la Figura 68. Por sencillez y claridad, se estudia el error de posicionamiento en uno de los planetas, permaneciendo los dos planetas restantes situados en su posición nominal.

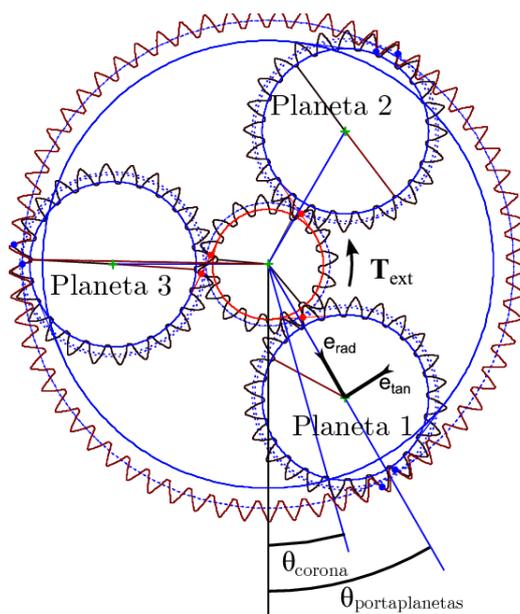


Figura 68. Componentes del error de posicionamiento de planetas

El error de posicionamiento del planeta se descompone en el e_{tan} , según la línea tangente a la circunferencia de posicionamiento de los planetas en sentido antihorario, y en el e_{rad} , positivo en el sentido radial de acercamiento al centro del sistema. Cada una de estas dos componentes tiene una incidencia muy diferente sobre el reparto de carga, tal y como se describe a continuación.

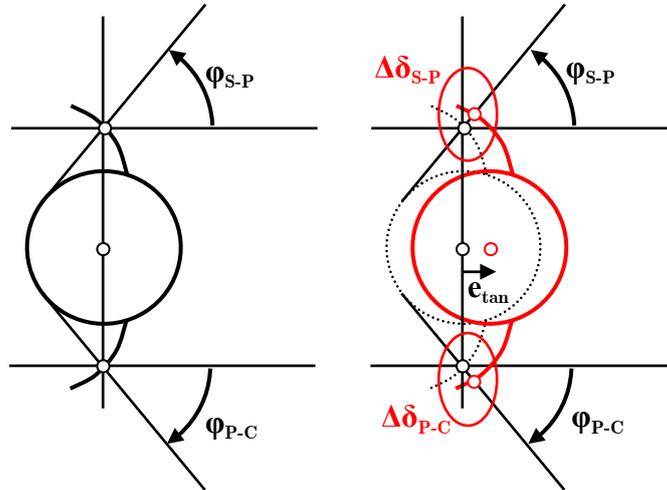


Figura 69. Construcción gráfica para la descripción de la variación de solapamiento producido por el error de posicionamiento tangencial

La componente de error de posicionamiento tangencial tiene el efecto de adelantar o retrasar la entrada en contacto del planeta afectado, según cuál sea el sentido del contacto. En la Figura 69 se muestra el caso particular de error positivo, donde para las direcciones de contacto elegidas el planeta defectuoso sufre una precarga (fruto del solapamiento geométrico introducido por el error). En general, el exceso de capacidad de carga del planeta desplazado respecto a los planetas no defectuosos, será el valor medio de la suma de los productos de la rigidez de engrane por el solapamiento correspondiente:

$$(k_{engrane\ P-C} \Delta\delta_{P-C} + k_{engrane\ S-P} \Delta\delta_{S-P})/2 = \Delta T \quad (6.1)$$

$$\text{con } \Delta\delta_{P-C} = e_{tan} \cos(\varphi_{P-C}) \text{ y } \Delta\delta_{S-P} = e_{tan} \cos(\varphi_{P-C})$$

En el caso de los errores de posicionamiento radial (Figura 70), la cuantía del exceso de capacidad de carga varía notablemente respecto a la componente tangencial.

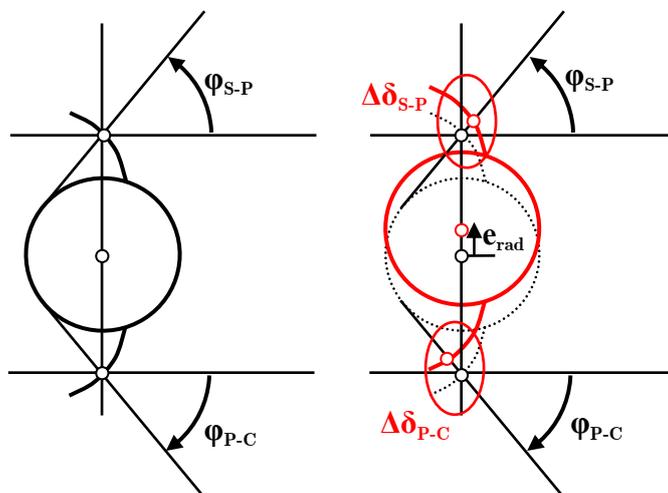


Figura 70. Construcción gráfica para la descripción de la variación de solapamiento producido por el error de posicionamiento radial

En este caso, el desplazamiento del planeta introduce una variación del solapamiento geométrico de sentido contrario en cada uno de los engranes. Así, mientras que el solapamiento es positivo en el caso del engrane sol-planeta, produciéndose un acercamiento de los perfiles, en el caso del engrane planeta-corona el solapamiento es negativo, alejándose los flancos de los dientes de cada pareja. Por lo tanto, para obtener la variación de la capacidad de carga del planeta por efecto del desplazamiento radial, es necesario analizar la diferencia de solapamientos, dado que la aparición de juego en uno de los contactos compensa (mediante la posibilidad de giro de sólido rígido del planeta) el aumento del solapamiento en el engrane contrario.

De esta manera, cuando los ángulos de presión son idénticos para cada uno de los dos engranes implicados, el solapamiento geométrico será igual y de sentido contrario en cada engrane. Esto supone que el desplazamiento radial del planeta introduciría, como único efecto, el giro adicional en la rueda, sin

ninguna consecuencia sobre el reparto de carga. El hecho de que en algunas transmisiones planetarias el ángulo de presión del engrane sol-planeta sea distinto que el del planeta-corona ha sido obviado por algunos autores [Singh, 2010], y es habitual encontrar en la bibliografía aseveraciones acerca del efecto nulo de la componente radial del error de posicionamiento sobre el reparto de carga en transmisiones planetarias.

Si bien es cierto que la naturaleza compensatoria de los solapamientos producidos por el desplazamiento radial de los planetas minimiza su efecto sobre el reparto (máxime cuando se compara con el caso de desplazamiento tangencial), la variación del reparto de carga dista de ser nula, tal como se mostrará en los siguientes ejemplos de aplicación del modelo.

La implementación del error de posicionamiento de planeta pasa sencillamente por introducir en las fórmulas para el cálculo de los puntos potenciales de contacto y solapamiento del modelo la modificación de las coordenadas de situación del planeta, sumando a su situación nominal las componentes constantes (e_{tan}, e_{rad}) , transformadas al sistema de coordenadas generalizado. En la configuración más general de transmisión planetaria con rodamientos, la implementación del error de posicionamiento se consigue mediante la alteración de la formulación del solapamiento del rodamiento presentado en la sección 4.5.4, sumando a la posición de la pista interior (perteneciente al portaplanetas) el vector de error de posicionamiento expresado en coordenadas absolutas.

6.2.2 Errores de excentricidad en los planetas

La excentricidad (*run out*) se produce cuando existe un desplazamiento del centro geométrico de la rueda respecto a la posición de su centro de giro o eje sobre el que la rueda va montada. Analizando su definición, se puede asimilar el error de excentricidad del planeta, desde un punto de vista cinemático, a un error de posicionamiento que varía armónicamente en sus dos componentes con la posición angular absoluta de la rueda. Así, la implementación de la excentricidad presenta una única complejidad añadida sobre la del error de posicionamiento, como es la combinación armónica de sus dos componentes tangencial y radial, según la posición angular en la que se encuentre la excentricidad en cada momento.

De la misma manera que ambos errores son similares en cuanto a su concepto e implementación, el efecto de la excentricidad del planeta sobre la transmisión también será vinculable de manera directa al que presentan los errores de posicionamiento, como se mostrará en las siguientes secciones.

6.3. COMPORTAMIENTO DE LA TRANSMISIÓN PLANETARIA EN PRESENCIA DE ERRORES DE POSICIONAMIENTO

De manera análoga a lo concluido mediante el análisis estático de la transmisión sin defectos, la introducción de errores en un sistema con grados de libertad únicamente torsionales tendrá una mayor incidencia sobre la propiedad de reparto de carga. La introducción de flexibilidad en cualquiera de los apoyos siempre tendrá como consecuencia una tendencia hacia el equilibrio en el reparto de par entre las distintas vías, por lo que se puede utilizar la configuración fija como referencia del límite máximo que puede alcanzar el desequilibrio del reparto de carga en una transmisión planetaria para una situación de error dada. Los errores de posicionamiento se analizarán por componentes, con el fin de ratificar las conclusiones extraídas del análisis geométrico presentado en la sección anterior. Inicialmente se presentarán los resultados obtenidos para una configuración con sol fijo, para posteriormente analizar el comportamiento cuando al sol se le permite realizar una órbita sin restricciones externas.

6.3.1 Error de posicionamiento tangencial con configuración fija

En la Figura 71 se presenta el coeficiente de reparto de carga (CRC) para una transmisión planetaria en la que se ha introducido un error de posicionamiento tangencial positivo en dos niveles en el planeta designado como 1, dejándose además la referencia del valor de reparto para la transmisión nominal a efectos de comparación. El error de posicionamiento tangencial positivo, tal como se presentó en la Figura 69 para la misma línea de acción (par exterior negativo aplicado en el sol), produce el adelantamiento del planeta afectado sobre el resto. De esta manera, para un error de posicionamiento de $30\mu\text{m}$, el planeta 1 asume en determinadas posiciones del ciclo de engrane valores cercanos al 80% de la carga total transmitida.

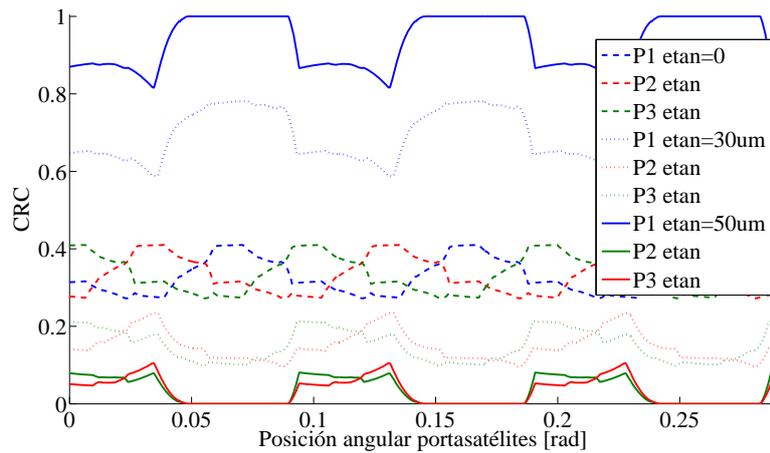


Figura 71. Reparto de carga entre planetas con error tangencial. Sol fijo, par $-900Nm$

La pérdida de simetría se generaliza, en el sentido de que los dos planetas no defectuosos presentan un reparto de carga distinto entre sí, no sólo desde el punto de vista del desfase, como cabría esperar, sino con una forma y amplitud diferentes. Al aumentar el error de posicionamiento en la misma rueda hasta alcanzar los $50\mu m$, el adelantamiento o precarga del planeta es tal que para el nivel de carga empleado ($900Nm$), en determinadas rangos de posición los dos planetas restantes quedan descargados por completo, asumiendo el planeta 1 la totalidad de la carga.

El error tangencial negativo, para el sentido de carga empleado en estos ensayos, produce un alejamiento entre flancos de los dientes en contacto de ambos engranes en el planeta desplazado. Se confirma este hecho por la pérdida de carga del planeta 1 al introducir un error tangencial negativo de $20\mu m$, cuyo CRC se muestra en la Figura 72.

Cuando el error se presenta de manera individual sobre uno de los planetas, se hace evidente que el error que produce un adelantamiento del planeta tiene un mayor potencial de impacto sobre el funcionamiento de la transmisión. En el peor de los casos, el alejamiento de uno de los planetas derivará en el reparto del total de la carga sobre dos vías, mientras que el adelantamiento o acercamiento (error positivo en el caso que nos ocupa) puede provocar como ya se ha demostrado la eliminación de dos vías de carga completas, quedando toda la carga transmitida por una única vía.

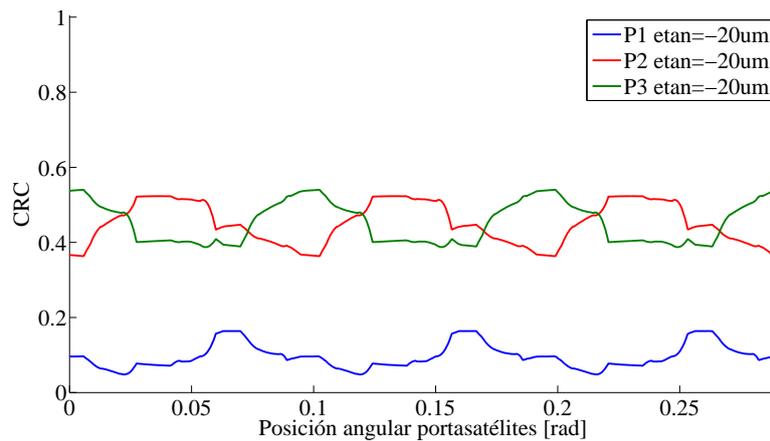


Figura 72. Reparto de carga entre planetas con e_{tan} negativo. Sol fijo, par $-900Nm$

En la Figura 73 se aprecia el valor del coeficiente de reparto de carga para el planeta con posición desviada, donde se han eliminado los coeficientes complementarios del resto de planetas por claridad. Se realiza un barrido de magnitud de error que abarca desde la pérdida de contacto del planeta defectuoso (e_{tan} negativo), hasta el desplazamiento que provoca un adelantamiento del planeta tal que descarga el resto de vías.

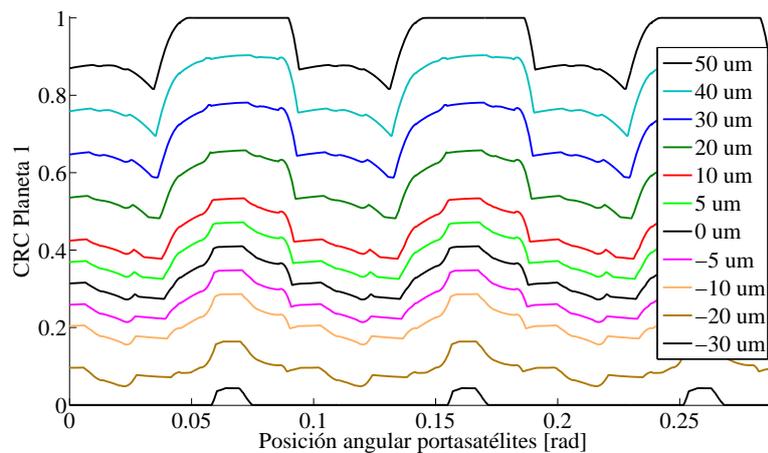


Figura 73. Reparto de carga del planeta 1 a distintos valores de error tangencial
Sol fijo, par $-900Nm$

Si bien la forma del reparto a lo largo del ciclo varía fuertemente con el error, el nivel medio de reparto puede considerarse prácticamente lineal con la variación del error de posicionamiento.

Atendiendo al coeficiente de carga de diente, los errores de posicionamiento en un sistema de transmisión planetaria excesivamente rígida pueden comprometer el funcionamiento del sistema. En la Figura 74 se presenta el coeficiente de carga de una pareja de dientes de cada planeta en su engrane con el sol, para un error de posicionamiento tangencial del planeta 1 de $30\mu\text{m}$. El CRC del planeta desplazado fluctúa para este caso aproximadamente entre el 60% y el 80% del total de carga transmitida, lo que se corresponde con entre un 180 y un 240% de la carga nominal asignada a cada vía. Igual que sucedía con el caso de la transmisión sin errores del capítulo anterior, la correlación entre el coeficiente de carga de los planetas y el coeficiente de carga de diente no es estrictamente directa y proporcional, sino que depende de los solapamientos y los períodos de contacto simple y doble. Por este motivo, el diente del planeta 1 alcanza un valor de carga de diente cercano a 2 (el doble de su carga nominal), suficiente para provocar graves problemas de funcionamiento, pero alejado del 2,4 proyectado atendiendo únicamente al CRC. Esto se debe a que la mayor carga del diente se alcanza durante el período de contacto simple del planeta defectuoso (una única pareja transmitiendo el par), que se produce en el valle de CRC.

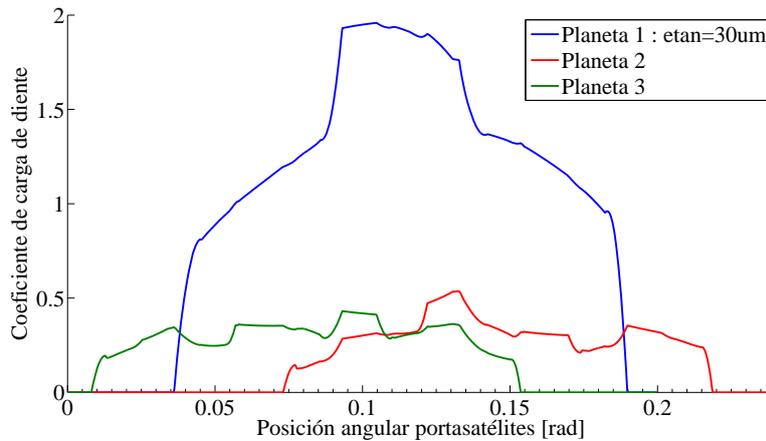


Figura 74. Coeficiente de reparto de carga de diente. Par -900Nm

De nuevo la asimetría del problema en presencia de errores de posicionamiento se hace patente. A modo de ejemplo, el nivel máximo de carga de los dientes de los planetas 2 y 3 se comprueban distintos.

El efecto del par sobre el reparto de carga en transmisiones con errores de posicionamiento es muy relevante, como se aprecia en la Figura 75. En general, los errores relacionados con la geometría en las transmisiones mediante engranajes tienen una mayor visibilidad para valores reducidos de la carga, al diluirse sus efectos en presencia de altos valores de deformación. En el caso del error de posicionamiento, para niveles crecientes de carga su influencia se ve efectivamente atenuada, como consecuencia directa de la reducción relativa del valor de precarga introducida por el error respecto a la carga total, cuando ésta última aumenta.

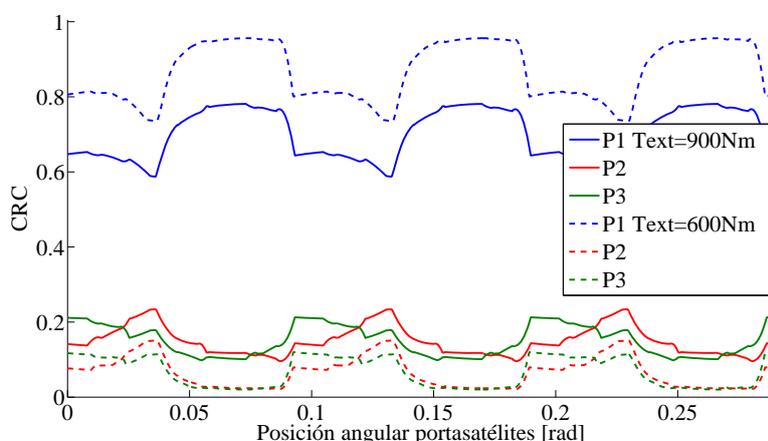


Figura 75. Efecto del par sobre el reparto de carga. Sol fijo, $e_{tan}=30 \mu m$

El efecto del error de posicionamiento sobre el error de transmisión global de la transmisión (siempre medido en el sol), se muestra en la Figura 76. La introducción de un error positivo introduce una precarga en los dientes del planeta defectuoso, teniendo como consecuencia principal la reducción del error de transmisión. El solapamiento geométrico necesario para la aparición de fuerzas de contacto que equilibren el par exterior no se produce únicamente mediante el giro de las ruedas, sino que la precarga de los engranes del planeta contribuye parcialmente a este hecho. Así, el error de transmisión se va reduciendo en magnitud a medida que aumenta el error de

posicionamiento. En cuanto a la forma y amplitud de variación de dicho error de transmisión, es perfectamente visible su evolución en la gráfica. Esta evolución se corresponde con la transformación progresiva de la forma de error de transmisión correspondiente a una caja planetaria sin defectos en la forma del error propio de una transmisión uniplanetaria como la mostrada en la sección 5.3.5. Los lóbulos correspondientes a los planetas 2 y 3 se van absorbiendo de manera paulatina, hasta el punto en el que la magnitud de desplazamiento tangencial provoca la descarga completa de estos planetas, momento en el que la forma del error de transmisión es indistinguible del presentado por el trío sol-planeta-corona. Al quedar en los últimos estadios de transformación la vía cargada con el triple de su carga nominal, la amplitud pico a pico del error de transmisión se verá sustancialmente incrementada.

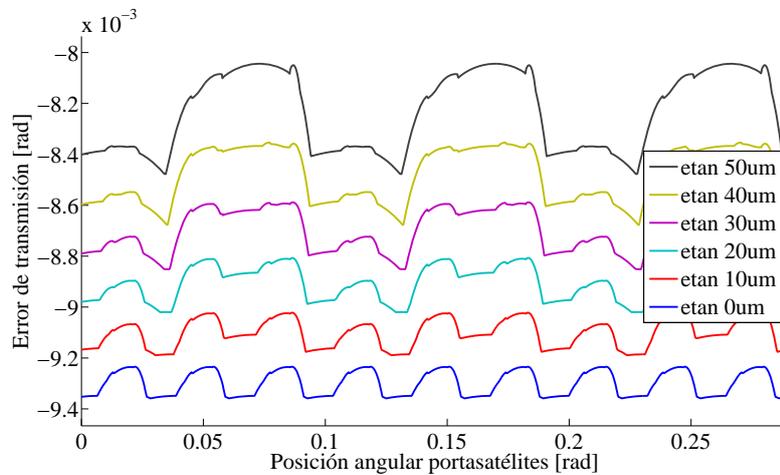


Figura 76. Error de transmisión en presencia de defecto de posicionamiento del planeta. Sol fijo, par $-900Nm$

6.3.2 Error de posicionamiento radial con configuración fija

La componente radial del error de posicionamiento de los planetas, como se introdujo en el epígrafe 6.2.1, tiene un efecto menor sobre el reparto de carga que el causado por la componente tangencial. Depende directamente de la diferencia entre los ángulos de presión de funcionamiento de los engranes sol-planeta y planeta-corona, siendo su efecto prácticamente nulo cuando dichos ángulos son iguales.

En la Figura 77 se muestra el CRC para un error de posicionamiento en la dirección radial (positivo) del planeta 1 de $40\mu\text{m}$. La diferencia entre el valor medio de la carga de la vía defectuosa respecto a las otras dos es de aproximadamente 2 puntos porcentuales. Con el objetivo de comparar los efectos de las distintas componentes del error de posicionamiento, se ha encontrado que un error de $40\mu\text{m}$ en la dirección radial es equivalente en sus consecuencias sobre el CRC a un error de $1\mu\text{m}$ en la dirección tangencial. Ambos casos se muestran de manera superpuesta en la Figura 77 para apreciar su coincidencia, con los valores de CRC correspondientes a la dirección tangencial mostrados en color negro y distintas tipologías de línea discontinua.

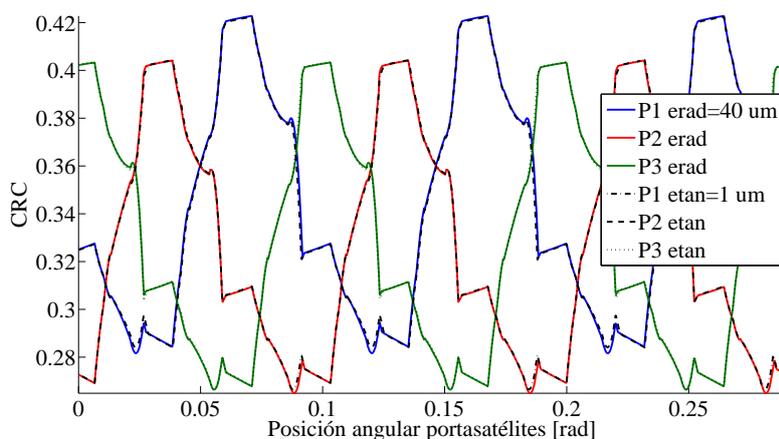


Figura 77. Comparativa del reparto de carga del planeta 1 para la componente radial y tangencial. Sol fijo, par -900Nm

6.3.3 Error de posicionamiento con configuración flotante

Al introducir errores de posicionamiento en una configuración de planetario con sol flotante, el CRC se homogeneiza para todas las vías, aproximándose a un reparto perfecto. El sol describe una órbita alrededor de su posición central, compensando el error de posicionamiento del planeta mediante el alejamiento o acercamiento al mismo según la dirección de la línea de acción, tal como se muestra en la Figura 78.

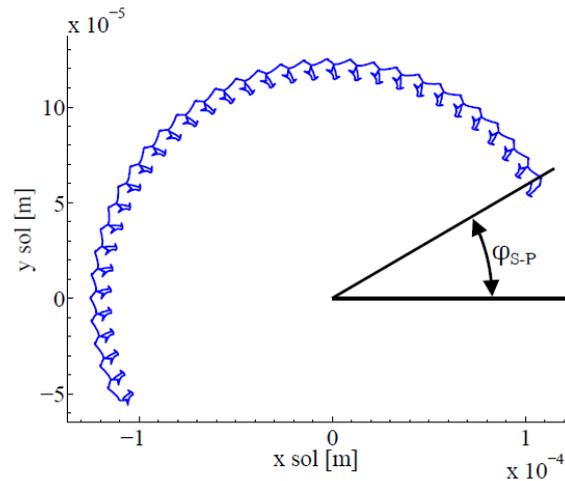


Figura 78. Órbita descrita por el sol. $0 < \theta_{porta} < \pi \text{ rad}$. Par -600 Nm $e_{tan} = 100 \mu\text{m}$

En esta figura se representa la órbita realizada por el sol para el recorrido del porta de 0 a π radianes, con un error de posicionamiento tangencial del planeta 1 de $100 \mu\text{m}$ positivos. Para la posición inicial se muestra en la figura como el desplazamiento del sol consiste en un alejamiento del planeta defectuoso según la línea de acción del engrane sol-planeta. Se observa además en la gráfica que el radio de la órbita descrita presenta una magnitud similar al del error de posicionamiento del planeta.

Al trazar esta órbita, se forma un sistema de fuerzas nulo compuesto por los engranes de los distintos planetas con el sol, alcanzándose un CRC de $1/3$ para todas las vías (ver Figura 79), salvo en las zonas de contacto fuera de la línea de acción. La asimetría introducida por el desplazamiento del planeta y la correspondiente excentricidad del sol en el trazado de la órbita se refleja en la pequeña diferencia neta y constante entre las distintas vías, que para el valor de $e_{tan} = 100 \mu\text{m}$ es de un par de décimas de punto porcentual.

De manera complementaria a la homogeneización que se produce en el reparto de carga entre planetas al permitir la traslación del sol, el reparto de carga de diente también recupera la simetría para los tres planetas, como se puede apreciar en la Figura 79. El valor máximo vuelve a ser la unidad, correspondiente a la fuerza que equilibra un tercio del par exterior aplicado durante la zona de contacto simple.

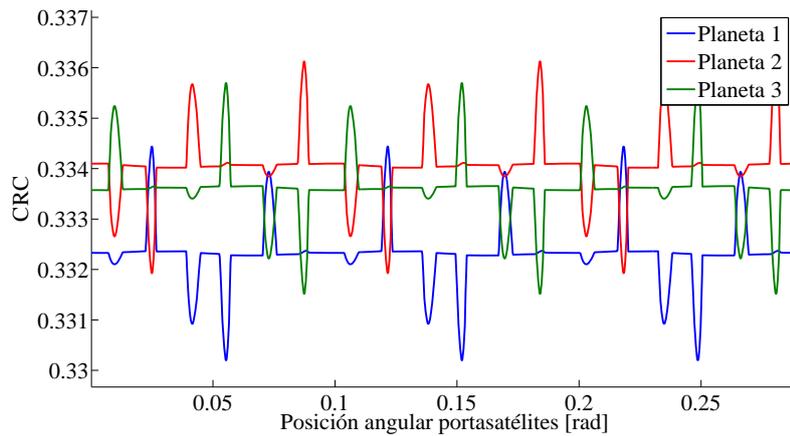


Figura 79. Reparto de carga entre planetas. Sol flotante, $e_{tan}=100\mu m$, par $-600Nm$

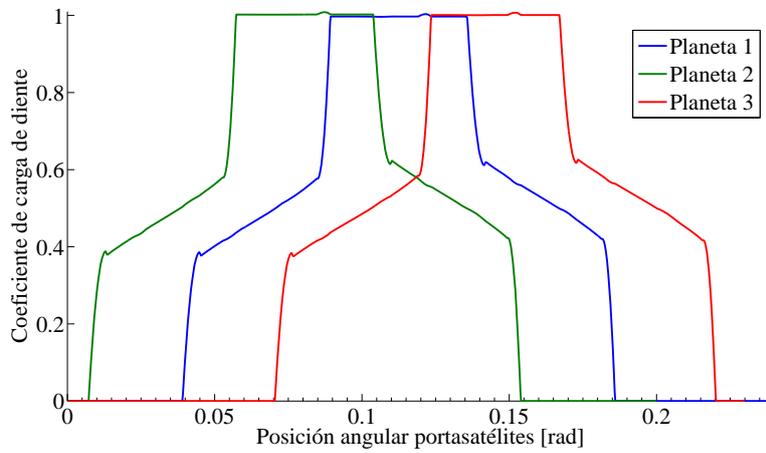


Figura 80. Coeficiente de carga de diente. Sol flotante, $e_{-}=100\mu m$, par $-600Nm$

Respecto al error de transmisión, se puede realizar una comparativa entre las dos configuraciones empleadas respecto a su comportamiento en presencia de defectos de posicionamiento, que se muestra en la Figura 81. En el caso de la configuración fija, los errores de posicionamiento introducen una precarga en una de las vías, por lo que un mayor error (positivo) implica una mayor precarga, y por lo tanto una menor necesidad de giro de las ruedas. Se puede incluso llegar a dar el caso de inversión en el sentido del error de transmisión

absoluto, cuando la precarga sea tal que supere el valor del par exterior aplicado, y las ruedas hayan de girar en sentido contrario. Para la configuración flotante, el sol se desplaza eliminando la precarga mediante una traslación, redistribuyendo el solapamiento entre el conjunto de vías. Así, la rigidez rotacional aumenta con la inclusión de estas dos vías, que en el caso de la configuración fija no estaban implicadas, teniendo como consecuencia el descenso del error de transmisión global.

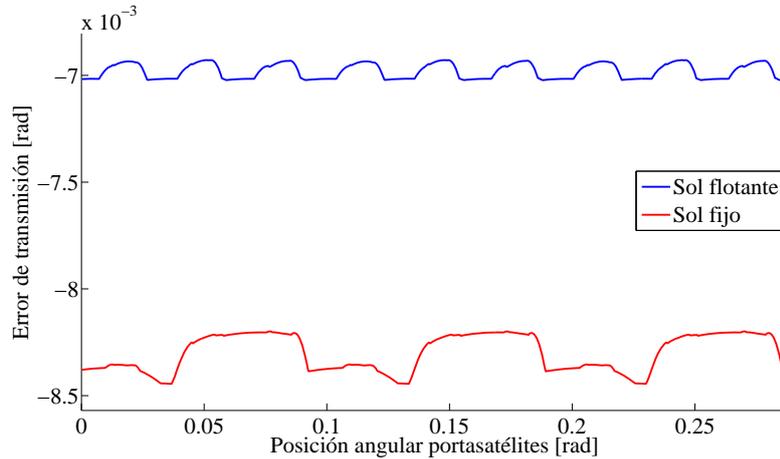


Figura 81. Comparativa del error de transmisión en presencia de defecto de posicionamiento del planeta para ambas configuraciones. Par $-600Nm$, $e_{tan}=30\mu m$

6.4. COMPORTAMIENTO DE LA TRANSMISIÓN PLANETARIA EN PRESENCIA DE ERRORES DE EXCENTRICIDAD

De manera análoga a lo realizado en la sección anterior, el efecto de la excentricidad se analiza de manera separada según el tipo de configuración presentada por la transmisión planetaria: sol fijo o flotante. El objetivo fundamental del análisis de resultados es la demostración de la semejanza existente entre los efectos producidos por los errores de posicionamiento y el error de excentricidad, al ser éste último una manifestación armónica de los primeros.

6.4.1 Error de excentricidad con configuración fija

Todas las simulaciones con error de excentricidad presentadas a continuación se realizan con un desplazamiento del eje de rotación del planeta 1 respecto a su centro geométrico de $20\mu\text{m}$. En la posición inicial (posición angular nula del portasatélites), el centro geométrico de la rueda se encuentra desplazado $20\mu\text{m}$ en el sentido radial negativo, siendo por lo tanto la configuración del planetario idéntica a la que se tendría para un error de posicionamiento radial negativo de $20\mu\text{m}$. Por lo tanto, el CRC en tal situación con excentricidad tiene que ser el mismo que el que presentaría la transmisión con error de posicionamiento radial de la misma magnitud. En efecto, en la Figura 82 se aprecia que el CRC para todas las vías presenta muy poca desviación respecto al reparto de carga de $1/3$ que sería de esperar con un error de posicionamiento radial de tan baja magnitud. A medida que el portasatélites gira, el planeta lo hace en sentido contrario, y la proyección de la excentricidad sobre cada una de sus componentes comienza a proporcionar una componente tangencial negativa, lo que supone la progresiva descarga del planeta, tal como se mostró en la Figura 72. Análogamente con la situación de error radial negativo puro en el inicio del análisis, cuando el planeta realice un giro de $\pi/2$ respecto al porta, el giro de la excentricidad situará el centro geométrico del planeta a $20\mu\text{m}$ en sentido tangencial negativo, alcanzándose el máximo de descarga del planeta defectuoso. En la ecuación (6.2) se muestra el giro absoluto del porta al que se da el primer evento descrito ($\pi/2$ de giro relativo del planeta).

$$\theta_{P/porta} = \theta_P - \theta_{porta} = -\frac{Z_C - Z_P}{Z_P} \theta_{porta} - \theta_{porta} = \pi/2 \rightarrow \theta_{porta} \quad (6.2)$$

$$\theta_{porta} = 0.58 \text{ rad}$$

Así, para dicha posición del porta, se aprecia en la Figura 82 que el planeta 1 alcanza una descarga total, y se puede comprobar además cómo la forma del CRC para cada uno de los planetas se corresponde con lo mostrado en secciones anteriores para e_{tan} negativos. A partir de esta posición, y a medida que el sistema sigue rotando, el error de excentricidad pierde carácter tangencial, alcanzando el valor de e_{rad} positivo máximo de $20\mu\text{m}$ en la posición de 1.16 rad de giro del porta. En esta posición de nuevo el CRC presenta un valor cercano a $1/3$ para todas sus vías, debido al débil efecto

del error de posicionamiento radial sobre el reparto. De manera antisimétrica, a continuación la excentricidad tenderá a valores de e_{tan} positivos, pudiéndose apreciar de nuevo las similitudes respectivas entre la gráfica del CRC en la zona de giro del porta 1.74rad (que se corresponden con los $3\pi/2$ rad del giro $\theta_{P/porta}$). El ciclo se cerrará de nuevo cuando la combinación de giro y excentricidad del planeta sitúen su centro geométrico a $20\mu\text{m}$ en la posición radial negativa, posición a partir de la cuál se repetirá el CRC periódicamente.

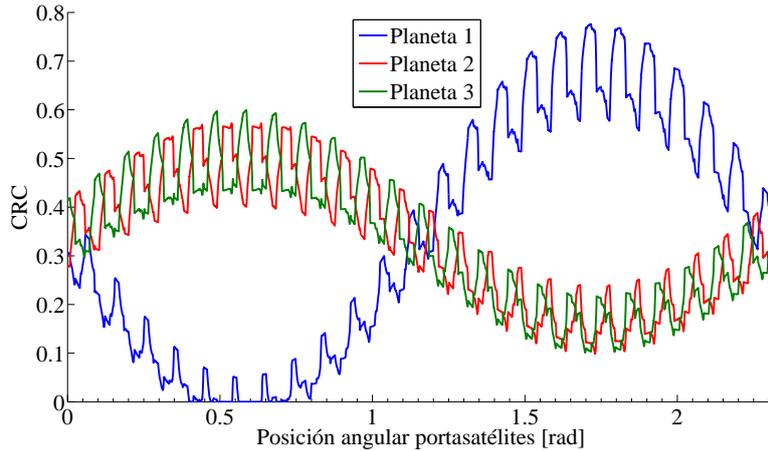


Figura 82. Reparto de carga entre planetas. Sol fijo, $exc=20\mu\text{m}$, $par -600\text{Nm}$

En cuanto al error de transmisión con excentricidad, se puede realizar un análisis paralelo al presentado para el CRC. En la Figura 83 se aprecian las mismas cuatro zonas en cuanto al efecto de la excentricidad: aquellas en las que dicho efecto es equivalente al del error radial (tanto positivo como negativo) así como una zona inferior, correspondiente al error tangencial negativo, y otra superior, correspondiente al error tangencial positivo, en ambas de las cuales se aprecian las similitudes naturales con la forma del error de transmisión presentado para transmisiones con defecto de posicionamiento.

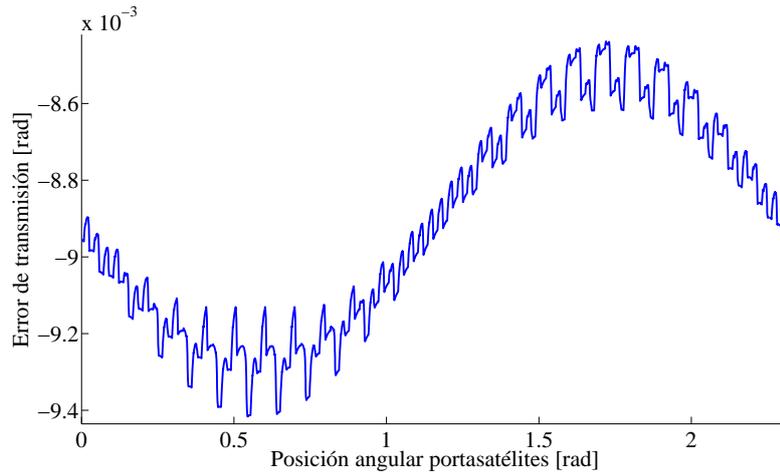


Figura 83. Error de transmisión con $exc=20\mu m$. Sol fijo, par $-600Nm$

6.4.2 Error de excentricidad con configuración flotante

De igual manera a lo sucedido para la transmisión con error de posicionamiento, la configuración de planetario con sol flotante absorbe la excentricidad, describiendo la órbita representada en Figura 84, de radio máximo similar al valor de la desviación. Se aprecian una forma lobular debido a la escasa incidencia del error en su componente radial, reduciéndose la órbita significativamente durante estas fases del giro excéntrico.

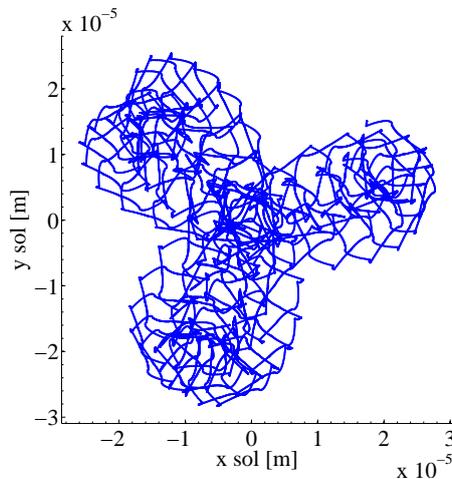


Figura 84. Órbita descrita por el sol. $0 < \theta_{porta} < 2\pi rad$. Par $-600Nm$, $exc=20\mu m$

En una configuración flotante se produce la misma mejora drástica del coeficiente de reparto de carga CRC (Figura 85) para el defecto de excentricidad que la presentada para el error de posicionamiento. De nuevo en esta gráfica se observan los picos de variación causados por los contactos fuera de la línea de acción, así como una pequeña modulación en los valores medios producida por la excentricidad y el paso por las distintas fases de orientación de la misma.

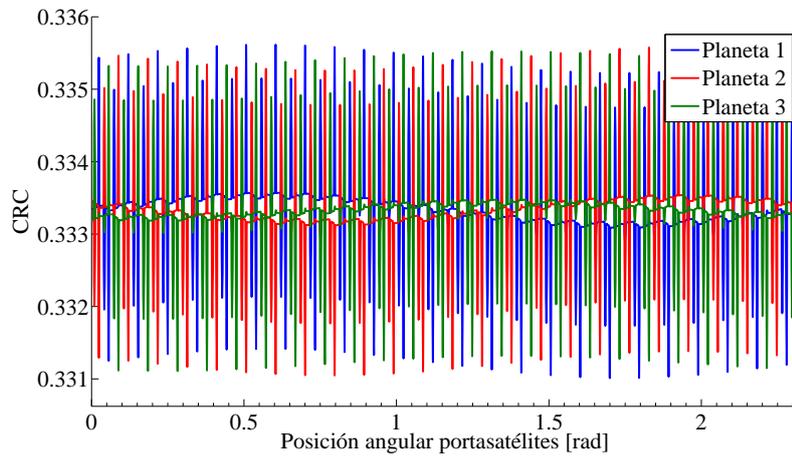


Figura 85. Reparto de carga entre planetas. Sol flotante, $exc=20\mu m$, par $-600Nm$

En cuanto al error de transmisión, se puede apreciar en la Figura 86 cómo su forma se ve dominada por una fuerte modulación en su valor medio, debida al giro relativo del planeta respecto al portasatélites. A menor escala, es perfectamente reconocible la forma que toma el error de transmisión en una configuración sin defectos como la mostrada en la Figura 76, o en presencia de errores de posicionamiento con configuración flotante como la presentada en la Figura 81 para un e_{tan} de $30\mu m$.

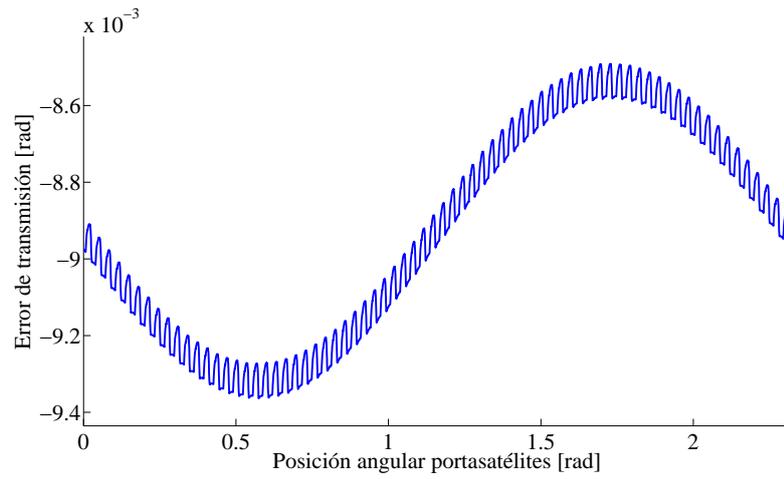


Figura 86. Error de transmisión con $exc=20\mu m$. Sol flotante, par $-600Nm$

Parte IV

Capítulo 7

Modelo dinámico de transmisión planetaria

7.1. INTRODUCCIÓN

El objetivo último de este trabajo es la integración de los distintos elementos considerados en un modelo dinámico completo de transmisión planetaria. El modelo propuesto consiste en un modelo plano de parámetros concentrados, donde las fuerzas de contacto de rodamientos y engranajes se obtendrán mediante el procedimiento descrito en la tercera parte de esta Tesis.

La extensión del modelo de transmisión empleado en los análisis cuasiestáticos presentados en los capítulos 5 y 6 a un modelo con capacidades dinámicas, supone la formulación de las ecuaciones correspondientes, con las necesidades de modelizado adicionales que conlleva la presencia de las derivadas temporales de la posición en todo sistema mecánico.

Con este propósito, es necesario incluir en el modelo los fenómenos disipativos, fuertemente vinculados con la velocidad del sistema. Se describe por lo tanto en este capítulo la implementación hecha en el modelo del rozamiento y amortiguamiento, así como la formulación de sus esfuerzos resultantes.

7.2. FENÓMENOS DISIPATIVOS

En las primeras fases del planteamiento dinámico del problema de modelizado de una transmisión planetaria, surge la necesidad de incorporar adecuadamente los fenómenos disipativos, vinculados con la dinámica del sistema. En la literatura es difícil encontrar trabajos que recojan de manera sistemática y global la modelización de cada uno de los mecanismos de pérdidas existentes en una transmisión mediante engranajes. Estos efectos disipativos se pueden clasificar según su dependencia de la carga en pérdidas por fricción, rodadura y deformación (dependientes) y pérdidas relacionadas con el movimiento de la masa del conjunto fluido refrigerante/aire (independientes). De acuerdo con [Höhn, 2010] la fricción predomina sobre la rodadura como mecanismo disipativo, justificando el mayor interés sobre este aspecto de la modelización. Desde el punto de vista de la excitación del sistema, la fricción tiene además una importancia adicional sobre el comportamiento dinámico del sistema: no sólo la fuerza de rozamiento actúa desalineada respecto al ángulo de presión, sino que incluye además un cambio brusco en su sentido de aplicación cuando la zona de contacto pasa por el punto primitivo. En este trabajo se prestará especial atención por tanto a las fuerzas de rozamiento, así como el amortiguamiento debido a la deformación del sólido y el producido por el fluido lubricante en la zona de contacto.

7.2.1 Velocidades relativas

Cualquiera de las alternativas adoptadas para el modelizado de los efectos disipativos en la transmisión, bien se trate de esfuerzos de fricción o de amortiguamiento, requiere de la determinación de la velocidad relativa instantánea de los distintos perfiles en contacto en cada punto potencial. El proceso de engrane de una pareja de dientes implica un movimiento relativo de rotación y deslizamiento entre sí, que será únicamente de rotación cuando el contacto de los perfiles tenga lugar en el punto primitivo. Se presenta a continuación el cálculo de velocidades relativas que sirve como base inicial para el modelizado de estos esfuerzos.

De acuerdo con la Figura 87, la velocidad relativa entre los puntos de contacto se puede establecer a partir de sus velocidades absolutas como:

$$\vec{v}_{Pi(1/2)} = \vec{v}_{Pi(1/0)} - \vec{v}_{Pi(2/0)} \quad (7.1)$$

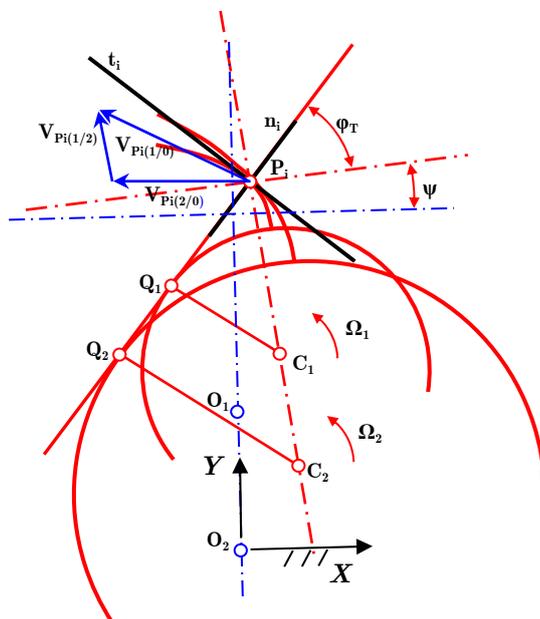


Figura 87. Construcción gráfica para el cálculo de las velocidades relativas

Para la determinación de las velocidades absolutas se recurre al planteamiento del campo de velocidades del sólido rígido:

$$\vec{v}_{Pi(1/0)} = \vec{v}_{Ci(1/0)} + \vec{\Omega}_{(1/0)} \times \overline{C_1P_i} ; \quad \vec{v}_{Pi(2/0)} = \vec{v}_{Ci(2/0)} + \vec{\Omega}_{(2/0)} \times \overline{C_2P_i} \quad (7.2)$$

Donde $\vec{v}_{Ci(1,2/0)}$ y $\vec{\Omega}_{(1,2/0)}$ son respectivamente las velocidades absolutas de los centros de las ruedas y sus velocidades angulares. Las magnitudes $\overline{C_1P_i}$ se hallan como suma de los siguientes términos:

$$\overline{C_1P_i} = \overline{C_1Q_1} + \overline{Q_1P_i} \quad ; \quad \overline{C_2P_i} = \overline{C_2Q_2} + \overline{Q_2P_i} \quad (7.3)$$

Los módulos de los vectores en los respectivos miembros a la derecha de (7.3) han sido definidos en el capítulo anterior para cada uno de los casos de

solapamiento considerados. En cuanto a su orientación y sentido, se tiene que:

$$\overline{CQ} = \rho_{1,2} \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_T + \psi) \\ \cos(\varphi_T + \psi) \end{Bmatrix} ; \quad \overline{QP} = |\overline{Q_{1,2}P_{1,2}}| \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_T + \psi) \\ \sin(\varphi_T + \psi) \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

Para la rueda 1 (rueda exterior en el caso representado en la Figura 87), la orientación de los vectores \overline{CQ} y \overline{QP} es la misma que para la rueda 2, tal como se formula en (7.4). Sin embargo, en el caso de engranes exteriores, para la rueda 1 (que se correspondería con el sol) las orientaciones son opuestas:

$$\overline{C_1Q_1} = \rho_1 \begin{Bmatrix} \sin(\varphi_T + \psi) \\ -\cos(\varphi_T + \psi) \end{Bmatrix} ; \quad \overline{Q_1P_1} = |\overline{Q_1P_1}| \begin{Bmatrix} -\cos(\varphi_T + \psi) \\ -\sin(\varphi_T + \psi) \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Una vez obtenidos los valores de velocidad relativa en los puntos de contacto, en el caso de la fricción será necesario proyectar dichas velocidades sobre las direcciones tangenciales de cada punto de contacto, con el fin de obtener el sentido de la fuerza de rozamiento. Esta dirección tangente para el contacto directo se obtiene como:

$$\vec{t}_{1i \text{ dir}} = \begin{Bmatrix} \sin(\varphi + \psi_i) \\ -\cos(\varphi + \psi_i) \end{Bmatrix} ; \quad \vec{t}_{2i \text{ dir}} = -\vec{t}_{1i \text{ dir}} ; \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (7.6)$$

Mientras que para el inverso:

$$\vec{t}_{1i \text{ inv}} = \begin{Bmatrix} \sin(\varphi + \psi_i) \\ \cos(\varphi + \psi_i) \end{Bmatrix} ; \quad \vec{t}_{2i \text{ inv}} = -\vec{t}_{1i \text{ inv}} ; \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (7.7)$$

Tanto para el caso de ruedas exteriores como el de interiores.

7.2.2 Fricción

La modelización de los esfuerzos de fricción podría reducirse a la implementación de un modelo de Coulomb, en el que las fuerzas de contacto en cada punto potencial se multipliquen por el coeficiente de rozamiento correspondiente. Sin embargo, hay ciertas consideraciones relativas a los engranajes que han de ser tomadas en cuenta. El movimiento relativo de rotación y deslizamiento entre perfiles de evolvente y las características geométricas de los mismos hace que el coeficiente de rozamiento deba tomar un valor nulo en el paso por el punto primitivo, donde además se invierte el

sentido de las fuerzas de rozamiento. Por otro lado, la existencia de lubricante modifica las características del coeficiente de rozamiento de Coulomb, por lo que parámetros y variables tales como la velocidad de deslizamiento, la viscosidad del lubricante, la magnitud de la carga y la rugosidad superficial inciden simultáneamente sobre el fenómeno disipativo, por lo que hay que prestar atención a tales factores.

Es posible encontrar en la literatura formulaciones que proporcionan el valor del coeficiente de rozamiento en función de diversos factores. Iida [1985] desarrolló un modelo para el estudio del efecto de la fricción en donde el coeficiente de rozamiento se expresaba en función de la velocidad de deslizamiento, mediante un modelo discontinuo definido por dos tramos rectilíneos, uno que pasaba por el origen con pendiente positiva y un segundo tramo de pendiente negativa que se iniciaba para un cierto valor de la velocidad de deslizamiento. Lin [1988] propuso dos formulaciones empíricas alternativas para la obtención del coeficiente de rozamiento. La primera, utilizada también por Pimsarn [2005a, b], proporciona el valor del coeficiente de rozamiento en función de la velocidad relativa tangencial como:

$$\mu = 0.05e^{-0.125V_s} + 0.002\sqrt{V_s} \quad (7.8)$$

La segunda formulación incluye el efecto de otros parámetros tales como la magnitud de la carga aplicada, el ancho de cara de la rueda, la viscosidad del lubricante y la velocidad de rodadura, de la forma:

$$\mu = 0.0127 \cdot \ln \left(\frac{45.94W}{F\mu_0 V_s V_R^2} \right) \quad (7.9)$$

Vaishya [2000] indicó que el coeficiente de rozamiento debería obtenerse aplicando alguna teoría que tuviera en cuenta el régimen de lubricación en el que se produce el deslizamiento relativo a lo largo del ciclo de engrane, encontrando que la relación existente entre el espesor de película fluida y el tamaño de la rugosidad superficial impedía la aplicación de una teoría basada exclusivamente en la consideración de lubricación elastohidrodinámica. La aplicación de las formulaciones anteriores junto con otras de mayor complejidad en un modelo de tipo cinemático revela grandes diferencias en la variación de la magnitud del coeficiente de rozamiento instantáneo a lo largo del ciclo de engrane. Sin embargo, los esfuerzos de

fricción resultantes presentan un impacto mucho menor ante distintas formulaciones, incluso para el caso de introducir un coeficiente de rozamiento constante. Muchos autores concluyen que la variación en magnitud del coeficiente de rozamiento es de importancia secundaria, y que la respuesta dinámica está marcada principalmente por el cambio en el sentido de actuación de la fuerza de rozamiento en el paso por el contacto de punto primitivo [Vaishya, 2003; Velex, 2000].

Es habitual encontrar planteamientos que proponen partir de una estimación del valor promedio del coeficiente de rozamiento considerando únicamente un modelo cinemático, para luego aplicar alguna de las formulaciones disponibles [He, 2007] que incluyan el efecto de los distintos factores. Una vez conocido el coeficiente de rozamiento medio, la fuerza de rozamiento puede obtenerse mediante una expresión del tipo [Vedmar, 2003; Velex, 2000, 2002]:

$$\vec{F}_{roz} = -\mu_{med} |\vec{F}_{contacto}| \frac{\vec{V}_{relativa}}{|\vec{V}_{relativa}|} \quad (7.10)$$

De acuerdo con todo lo anterior, en este trabajo se ha adoptado la siguiente formulación para la fuerza de rozamiento en cada punto de contacto i :

$$(\vec{F}_{roz})_{1i} = -F_i \mu \tanh\left(\frac{\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{Pi(1/2)}}{|\vec{v}_{Pi(1/2)}|} \cdot \vec{t}_{1i} = -(\vec{F}_{roz})_{2i} \quad (7.11)$$

Donde $(\vec{F}_{roz})_{1i}$ y $(\vec{F}_{roz})_{2i}$ son las fuerzas de rozamiento actuantes en el punto i sobre cada una de las ruedas, μ es el coeficiente de rozamiento y se incluye una función continua como la tangente hiperbólica para suavizar la transición de paso por el punto primitivo, aproximando el escalón que resulta del cambio de sentido de las fuerzas de rozamiento. El valor umbral en esta función hiperbólica marca la pendiente del salto, y ha de ser establecido buscando un compromiso entre la pérdida de exactitud con respecto al escalón real y la mayor facilidad de resolución del problema dinámico.

Para la determinación del coeficiente de rozamiento se ha optado finalmente por adoptar la formulación de Niemann, de amplio consenso en cuanto a su utilización por parte de diversos autores [Baglioni, 2012; Höhn, 2010; Michaelis, 2011] y que plantea un coeficiente de la siguiente forma:

$$\mu = 0.048 \left(\frac{F_{bt}/b}{V_{\Sigma C} \rho_C} \right)^{0.2} \eta_{oil}^{-0.05} R_a^{0.25} X_L \quad (7.12)$$

Donde F_{bt} es la carga normal aplicada en el punto primitivo, ρ_C es el radio equivalente de curvatura medido en el punto primitivo, b es la longitud axial de las ruedas, η_{oil} la viscosidad dinámica del aceite, R_a la rugosidad y los parámetros $V_{\Sigma C}$ y X_L se definen como:

$$V_{\Sigma C} = 2 V_t \sin(\varphi_T) \quad y \quad X_L = \frac{1}{(F_{bt}(\theta)/b)^d} \quad (7.13)$$

Siendo V_t la velocidad tangencial a la circunferencia primitiva en el punto primitivo, y el valor $d=0.0651$ para aceites minerales.

Sumando en cada caso las fuerzas correspondientes a todos los puntos de contacto activos, y expresándolas reducidas al centro geométrico de cada una de las ruedas, se obtienen los esfuerzos debidos a la fricción en cada pareja como:

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{pmatrix}_{roz} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^N F_i \mu \tanh\left(\frac{\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{Pi(1/2)}}{|\vec{v}_{Pi(1/2)}|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^N \left(-F_i \mu \tanh\left(\frac{\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{Pi(1/2)}}{|\vec{v}_{Pi(1/2)}|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^N F_i \mu \tanh\left(\frac{\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{Pi(1/2)}}{|\vec{v}_{Pi(1/2)}|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^N \left(F_i \mu \tanh\left(\frac{\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{Pi(1/2)}}{|\vec{v}_{Pi(1/2)}|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_2 P_i} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

7.2.3 Amortiguamiento

La inclusión de otros fenómenos disipativos en los modelos dinámicos distintos del rozamiento, como aquellos relacionados con el amortiguamiento, tampoco es abordada en el actual estado del arte de manera consensuada por los distintos autores. En la mayoría de modelos de parámetros concentrados, se suele considerar que el amortiguamiento debido al engrane entre dos ruedas se puede representar mediante un modelo de tipo viscoso, definido por

un valor de amortiguamiento equivalente C actuando en los grados de libertad de torsión. Dicho valor a su vez estará relacionado con la rigidez de contacto K mediante el coeficiente de amortiguamiento relativo ξ [Kasuba, 1981; Lin, 1988], de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C = 2 \xi \sqrt{K M_{eq}} \quad \text{con} \quad M_{eq} = \frac{J_1 J_2}{\rho_1^2 J_1 + \rho_2^2 J_2} \quad (7.15)$$

En donde ρ_i y J_i son respectivamente los radios de los círculos base y momentos de inercia polar de las ruedas. El mayor problema en este tipo de planteamiento es la definición del valor del amortiguamiento relativo: Lin [1988] por ejemplo propone adoptar valores entre 0.03 y 0.17. Umezawa [1984, 1986a, 1986b] se apoya en resultados experimentales para su propuesta de entre 0.06 y 0.07. Özgüven [1988] adopta un valor de 0.1, mientras que Al-Shyyab [2005a, b] 0.05.

En algunos casos el valor del amortiguamiento relativo es constante, mientras que en otros se tiene en cuenta su variación con la rigidez de contacto. Yang [1985, 1987] postuló que el amortiguamiento quedaba concentrado en las zonas del diente donde se producían deformaciones locales de tipo Hertziano. Así, planteó la fuerza de amortiguamiento en función de la penetración o solapamiento geométrico y su derivada de acuerdo con:

$$F_{amort} = D \delta \dot{\delta} \quad ; \quad D = \frac{6(1-e)K_e}{[(2e-1)^2 + 3]V_i} \quad ; \quad e = 1 - 0.022 V_i^{0.36} \quad (7.16)$$

Donde V_i es la velocidad relativa al inicio del impacto y K_e la rigidez del contacto correspondiente. Por su parte Peeters [2006] hace referencia a una ecuación empírica donde se introducen como parámetros la distancia entre los centros de las ruedas, la viscosidad del lubricante y la velocidad tangencial medida en la circunferencia primitiva.

De entre las demás posibles alternativas, una de las más habituales es la consideración de un amortiguamiento de Rayleigh, proporcional a la masa y la rigidez [Parker, 2000a], de forma que la matriz de amortiguamiento del sistema se expresa como:

$$C = \alpha K + \beta M \quad (7.17)$$

Los valores de los coeficientes α y β son ajustados aplicando el método del decremento logarítmico, en el caso propuesto por Parker para que el error de transmisión dinámico resultante proporcione una relación estimada de amortiguamiento del 7%. Lundvall [2004] también consideraron la inclusión de este tipo de amortiguamiento adoptando para las constantes $\alpha = 0.4 \cdot 10^{-3}$ (s) y $\beta = 0.5 \cdot 10^{-3}$ (1/s). En cualquier caso, la estimación de estos valores está sujeta a un cierto grado de arbitrariedad, ya que el fenómeno disipativo no se modeliza tratando de imitar su naturaleza física, sino mediante un ajuste en base a los efectos que se producen.

Recientemente han aparecido algunos trabajos que consideran el efecto que la presencia del lubricante tiene en el desarrollo de los esfuerzos de contacto. Este tipo de modelos tienen especial interés en aquellas situaciones en las que se espera una respuesta dinámica que incluya la separación de los flancos, a frecuencias tales que aparezca traqueteo. Bracanti [2005, 2007] planteó la consideración del amortiguamiento de tipo “squeeze”, tratando de representar la disipación de energía que tiene lugar en la aproximación normal de dos superficies entre las que se dispone una película de lubricante. Estos autores obtuvieron una expresión para la fuerza de amortiguamiento, integrando la ecuación de Reynolds a lo largo de la línea tangencial al contacto. Theodossiades [2007] también considera este tipo de amortiguamiento, en su caso bajo la hipótesis de dientes rígidos, por lo que se niega la existencia de contacto real entre dientes.

En general, las propuestas que incluyen un tratamiento del fluido lubricante, y especialmente aquellas en las que es necesario integrar la ecuación de Reynolds, conllevan una complejidad tal que su coste computacional imposibilita la implementación de dichos planteamientos en un modelo dinámico. Además, en la resolución de los modelos más realistas de contacto fluido aparecen discontinuidades al llegar al contacto, por lo que es preciso realizar aproximaciones, definiendo distintas zonas en función del régimen de lubricación presente en cada caso, con unas transiciones entre la lubricación hidrodinámica y elastohidrodinámica difusas y complicados de estimar y verificar.

Dado que la inclusión de amortiguamiento modifica la magnitud de los esfuerzos de contacto, es necesario tener en cuenta este aspecto a la hora de obtener los esfuerzos de fricción, asunto que no ha sido descrito con claridad por los distintos autores. Vedmar [1998, 2003] consideró únicamente los

esfuerzos de contacto a la hora de estimar la fuerza de rozamiento, mientras que Pimsarn [2005a], Howard [2001] o He [2007] sí tienen en cuenta el amortiguamiento en el cálculo de la fuerza de contacto neta, y por lo tanto en la estimación de la fuerza de rozamiento.

Para el modelo empleado en el presente trabajo se ha optado por una combinación de planteamientos de complejidad media, con el fin de no lastrar la capacidad de simulación dinámica, pero tratando de abarcar con un suficiente nivel de realismo los fenómenos disipativos presentes en la transmisión. Así, se han tenido en cuenta dos fenómenos: el amortiguamiento debido al lubricante en la aproximación de los perfiles y el debido al contacto entre sólidos. La magnitud de la fuerza de amortiguamiento debida a la compresión así como al desplazamiento ejercido sobre el fluido se aproxima mediante una formulación propuesta por Koster [1974], y empleada en engranajes por Mucchi [2010], proporcional a la velocidad normal de la siguiente forma:

$$F_{amort} = 12\pi\eta b \left(\frac{1}{2h} \frac{\chi_1\chi_2}{\chi_1 + \chi_2} \right)^{3/2} |\vec{v}_n| \quad (7.18)$$

Donde η es la viscosidad dinámica del lubricante, b la longitud axial de las ruedas (o la mínima en el caso de que haya diferencia entre ambas), χ_i cada uno de los radios de curvatura de los perfiles y $|\vec{v}_n|$ el módulo de la velocidad relativa de los perfiles en el punto de contacto sobre la dirección normal. En ausencia de contacto real, esta fuerza de amortiguamiento estará presente en la dirección normal a los perfiles siempre y cuando éstos estén en fase de aproximación. Se establece además un umbral h_{min} de espesor de película de lubricante que indique el inicio de contacto real, para el cual se desactive la condición de amortiguamiento fluido. En caso de no adoptar un cierto umbral de desactivación, los perfiles no entrarían en contacto nunca, al tener el amortiguamiento la capacidad de absorber toda la carga a transmitir con la reducción del espesor de película h . Este problema surge debido a la singularidad vinculada con la expresión de la formulación del amortiguamiento fluido, con el espesor h en el denominador de (7.18).

Para el amortiguamiento debido al contacto entre sólidos se ha optado por una formulación que incluya el coeficiente de amortiguamiento relativo, acorde con las propuestas de Lin y Kasuba de manera que:

$$F_{amort} = 2 \xi \sqrt{\bar{K}_{engrane} \frac{J_1 J_2}{\rho_1^2 J_1 + \rho_2^2 J_2}} |\vec{v}_n| \quad (7.19)$$

Similar a (7.15) y donde $\bar{K}_{engrane}$ es el valor promedio de la rigidez de engrane evaluado para un ciclo completo. Combinando las dos facetas de modelizado adoptadas en esta sección, se tiene que la fuerza de amortiguamiento para cada contacto i actuando sobre ambas ruedas 1 y 2 es:

$$(\vec{F}_{amort})_{1i} = -C_{amort\ i} (\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i} = -(\vec{F}_{amort})_{2i} \quad (7.20)$$

Donde el coeficiente de amortiguamiento $C_{amort\ i}$ se expresa como:

$$C_{amort\ i} = \begin{cases} 2 \xi \sqrt{\bar{K}_{engrane} \frac{J_1 J_2}{\rho_1^2 J_1 + \rho_2^2 J_2}} & F_i > 0 \\ 0 & F_i = 0 \quad \vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} \geq 0 \\ 12\pi\eta b \left(\frac{1}{2\max(h_{min}, \delta)} \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} \right)^{3/2} & F_i = 0 \quad \vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} < 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

Donde se ha incluido el valor umbral h_{min} que evita que para solapamientos geométricos cercanos a cero se dispare el valor de la presión del lubricante.

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{pmatrix}_{amort} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^N C_{amort\ i} (\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^N (-C_{amort\ i} (\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i}) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^N C_{amort\ i} (\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^N (C_{amort\ i} (\vec{v}_{Pi(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i}) \cdot \vec{n}_{1i}) \times \overline{C_2 P_i} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

De manera análoga a como se presentaron las fuerzas de rozamiento, las fuerzas de amortiguamiento conjuntas y reducidas al centro geométrico de cada rueda del engrane se expresan como se muestra en (7.22).

En el caso de los rodamientos, y siguiendo la propuesta mayoritaria descrita por los distintos autores en la sección 4.5.1, se opta por la introducción de un amortiguamiento viscoso lineal proporcional a la rigidez media.

7.3. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DINÁMICAS

El modelo de transmisión planetaria confeccionado se muestra en forma de diagrama de bloques en la Figura 88. Con el objetivo de focalizar la atención de estudio sobre los diversos tipos de elemento modelizados en este trabajo, se prescinde en la medida de lo posible de ejes y elementos adicionales, que enmascaran las características de comportamiento dinámico imputables a engranajes y rodamientos. Por este motivo se decide limitar el modelo de transmisión estrictamente a la etapa de tren planetario de 6 cuerpos cuyas características se tabulan a continuación.

Tabla 8. Parámetros dinámicos de la transmisión

	Sol	Planeta	Corona	Porta
Masa (kg)	1.19	1.23	28.10	3.64
Inercia rotacional ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	$9.92\cdot 10^{-4}$	$24.65\cdot 10^{-4}$	$68.20\cdot 10^{-2}$	$20.41\cdot 10^{-3}$
Rugosidad superficial	0.8 μm	0.8 μm	0.8 μm	0.8 μm
Viscosidad dinámica lub.	50mPas			

Tabla 9. Parámetros de los rodamientos (mm)

Rodamiento de bolas		Rodamiento de rodillos	
Diámetro Pista Exterior	77.71	Diámetro Pista Exterior	55.19
Radio Canal Pista Exterior	6.6	Radio Canal Pista Exterior	-
Diámetro Elemento	12.7	Diámetro Elemento	9
Diámetro Pista Interior	52.29	Diámetro Pista Interior	37.18
Radio Canal Pista Interior	6.6	Radio Canal Pista Interior	-
Número de Elementos	9	Número de Elementos	16
Amortiguamiento ($\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$)	334.3	Amortiguamiento ($\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$)	546.6

Tabla 10. Parámetros geométricos que definen la transmisión (mm)

	Sol	Planeta	Corona
Número de dientes	16	24	65
Módulo	4.23	4.23	4.23
Ángulo de presión	25°	25°	25°
Espesor diente (primitivo)	6.40	8.30	-
Espesor hueco (primitivo)	-	-	8.25
Trocoide (D. máx/mín)	62.26	96.89	288.77(mín)
Diámetro de pie	55.66	93.60	288.81
Diámetro base	61.39	92.08	249.38
Diámetro de cabeza	76.96	114.24	269.51
Distancia de montaje	86.40	86.40	86.40
Desfase entre planetas	-	120°	-
Diámetro del eje	27.70	55.19	349.04
Ancho de cara	25	25	85.86

Los grados de libertad considerados para la transmisión son por lo tanto $3 \cdot 6 = 18$ GDL, que pueden ser agrupados en el siguiente vector:

$$\{q\} = \{x_S y_S \theta_S x_{P1} y_{P1} \theta_{P2} x_{P2} y_{P2} \theta_{P3} x_{P3} y_{P3} \theta_{P3} x_{port} y_{port} \theta_{port} x_C y_C \theta_C\} \quad (7.23)$$

Que se pueden agrupar por elemento como:

$$\begin{aligned} \{q_S\} &= \{x_S y_S \theta_S\} \\ \{q_{Pi}\} &= \{x_{Pi} y_{Pi} \theta_{Pi}\} \\ \{q_{port}\} &= \{x_{port} y_{port} \theta_{port}\} \\ \{q_C\} &= \{x_C y_C \theta_C\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estos grados de libertad, se ha confeccionado el diagrama de bloques de la Figura 88, que representa los elementos principales de la transmisión planetaria modelizada, con las relaciones y enlaces que se forman entre dichos elementos representados por las flechas denominadas $F_{engrane}$ y F_{rodam} .

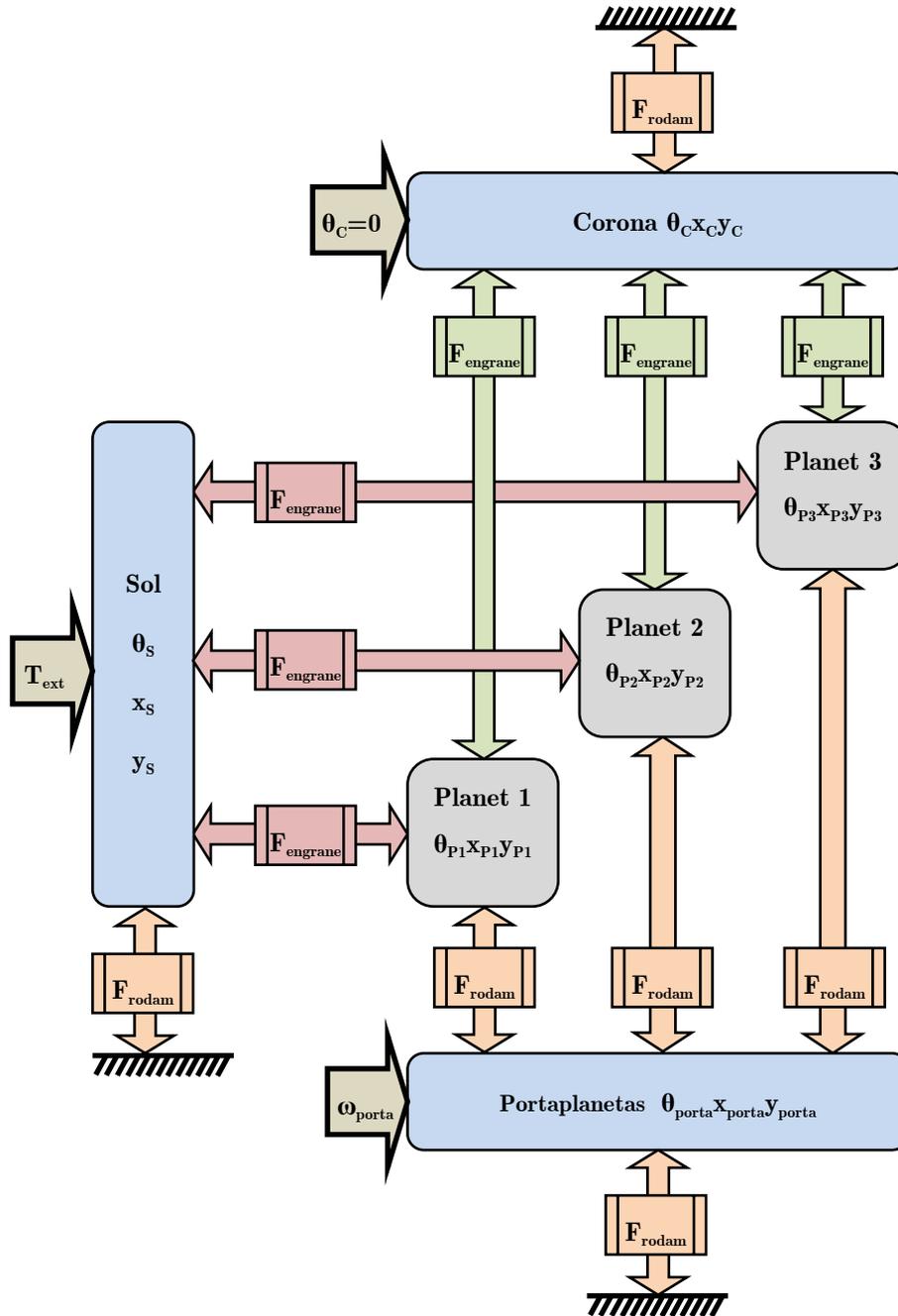


Figura 88. Diagrama de bloques de la transmisión planetaria

Cada uno de los cuerpos sol, planeta, portaplanetas y corona concentrarán la masa e inercia rotacional del sistema. Todas las relaciones entre bloques se reducen a dos tipos: $F_{engrane}$ y F_{rodam} , ambas de carácter no lineal, y ajustándose en su cálculo a lo presentado en la parte II de esta memoria de Tesis. La nomenclatura $F_{engrane}$ aglutina todos los esfuerzos debidos al proceso de engrane: tanto los esfuerzos de contacto como aquellos relacionados con el rozamiento y el amortiguamiento que han sido introducidos en el presente capítulo. Por su parte, F_{rodam} incluye la componente de esfuerzos de contacto en los rodamientos, así como los esfuerzos fruto del amortiguamiento viscoso lineal considerado para estos elementos. De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de la dinámica para la transmisión planetaria completa quedan como sigue (la nomenclatura ha sido simplificada por claridad):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_s \ddot{x}_s + F_{rodam-x}(q_s, \dot{q}_s) + \sum_{i=1}^3 F_{engrane-x}^{S-P}(q_s, q_{Pi}, \dot{q}_s, \dot{q}_{Pi}) = F_{S\ ext-x} \\ m_s \ddot{y}_s + F_{rodam-y}(q_s, \dot{q}_s) + \sum_{i=1}^3 F_{engrane-y}^{S-P}(q_s, q_{Pi}, \dot{q}_s, \dot{q}_{Pi}) = F_{S\ ext-y} \\ J_s \ddot{\theta}_s + \sum_{i=1}^3 T_{engrane}^{S-P}(q_s, q_{Pi}, \dot{q}_s, \dot{q}_{Pi}) = T_{S\ ext} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{P1} \ddot{x}_{P1} + F_{rodam-x}(q_{P1}, q_{port}, \dot{q}_{P1}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-x}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P1}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P1}) = F_{P1\ ext-x} \\ m_{P1} \ddot{y}_{P1} + F_{rodam-y}(q_{P1}, q_{port}, \dot{q}_{P1}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-y}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P1}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P1}) = F_{P1\ ext-y} \\ J_{P1} \ddot{\theta}_{P1} + T_{engrane}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P1}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P1}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{P2} \ddot{x}_{P2} + F_{rodam-x}(q_{P2}, q_{port}, \dot{q}_{P2}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-x}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P2}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P2}) = F_{P2\ ext-x} \\ m_{P2} \ddot{y}_{P2} + F_{rodam-y}(q_{P2}, q_{port}, \dot{q}_{P2}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-y}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P2}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P2}) = F_{P2\ ext-y} \\ J_{P2} \ddot{\theta}_{P2} + T_{engrane}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P2}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P2}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{P3} \ddot{x}_{P3} + F_{rodam-x}(q_{P3}, q_{port}, \dot{q}_{P3}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-x}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P3}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P3}) = F_{P3\ ext-x} \\ m_{P3} \ddot{y}_{P3} + F_{rodam-y}(q_{P3}, q_{port}, \dot{q}_{P3}, \dot{q}_{port}) + F_{engrane-y}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P3}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P3}) = F_{P3\ ext-y} \\ J_{P3} \ddot{\theta}_{P3} + T_{engrane}^{S-P,P-C}(q_s, q_C, q_{P3}, \dot{q}_s, \dot{q}_C, \dot{q}_{P3}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{porta} \ddot{x}_{porta} + \sum_{i=1}^3 F_{rodam-x}(q_{port}, q_{Pi}, \dot{q}_{port}, \dot{q}_{Pi}) = F_{porta \text{ ext-x}} \\ m_{porta} \ddot{y}_{porta} + \sum_{i=1}^3 F_{rodam-y}(q_{port}, q_{Pi}, \dot{q}_{port}, \dot{q}_{Pi}) = F_{porta \text{ ext-y}} \\ J_{porta} \ddot{\theta}_{porta} + \sum_{i=1}^3 (\vec{F}_{rodam}(q_{port}, q_{Pi}, \dot{q}_{port}, \dot{q}_{Pi}) \wedge \overline{O_{Pi} O_{porta}}) = T_{porta \text{ ext}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_C \ddot{x}_C + F_{rodam-x}(q_C, \dot{q}_C) + \sum_{i=1}^3 F_{engrane-x}^{P-C}(q_C, q_{Pi}, \dot{q}_C, \dot{q}_{Pi}) = F_{C \text{ ext-x}} \\ m_C \ddot{y}_C + F_{rodam-y}(q_C, \dot{q}_C) + \sum_{i=1}^3 F_{engrane-y}^{P-C}(q_C, q_{Pi}, \dot{q}_C, \dot{q}_{Pi}) = F_{C \text{ ext-y}} \\ J_C \ddot{\theta}_C + \sum_{i=1}^3 T_{engrane}^{P-C}(q_C, q_{Pi}, \dot{q}_C, \dot{q}_{Pi}) = T_{C \text{ ext}} \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de forma matricial:

$$[M]\ddot{q} + F_{rodam}(q, \dot{q}) + F_{engrane}(q, \dot{q}) = F_{ext}(t) \quad (7.24)$$

de donde la componente de amortiguamiento se puede extraer del vector F_{rodam} por tener carácter lineal, quedando la nueva expresión matricial como:

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + F_{rodam}(q) + F_{engrane}(q, \dot{q}) = F_{ext}(t) \quad (7.25)$$

Las matrices de masa y amortiguamiento M y C tendrán todos sus términos constantes, siendo toda la rigidez del sistema de carácter no lineal y contenida en los vectores F_{rodam} y $F_{engrane}$. En el caso de éste último, también incluirá parte del amortiguamiento no lineal debido al proceso de engrane. F_{ext} por su parte se corresponde con todas las excitaciones externas, sean o no dependientes del tiempo (gravedad, pares externos aplicados, etc.).

7.4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN EL ENTORNO SIMULINK

La obtención de los esfuerzos de contacto en los rodamientos, así como las fuerzas de engrane (incluyendo contacto, amortiguamiento debido al lubricante y rozamiento entre flancos) han sido implementados en diversas funciones en el entorno MATLAB[®], para su posterior integración en la herramienta SIMULINK[®].

Las ecuaciones del movimiento, desarrolladas matricialmente en (7.25), se reformulan para su implementación y resolución numérica como:

$$\ddot{q} = [M]^{-1} \left(F_{ext}(t) - [C]\dot{q} - F_{rodan}(q) - F_{engrane}(q, \dot{q}) \right) \quad (7.26)$$

Donde se ha despejado la aceleración de manera que sea posible construir el sistema de ecuaciones en forma de diagrama de bloques, tal como requieren las herramientas de integración de la plataforma elegida. El esquema del problema modelizado queda por lo tanto representado en el diagrama mostrado en la Figura 89.

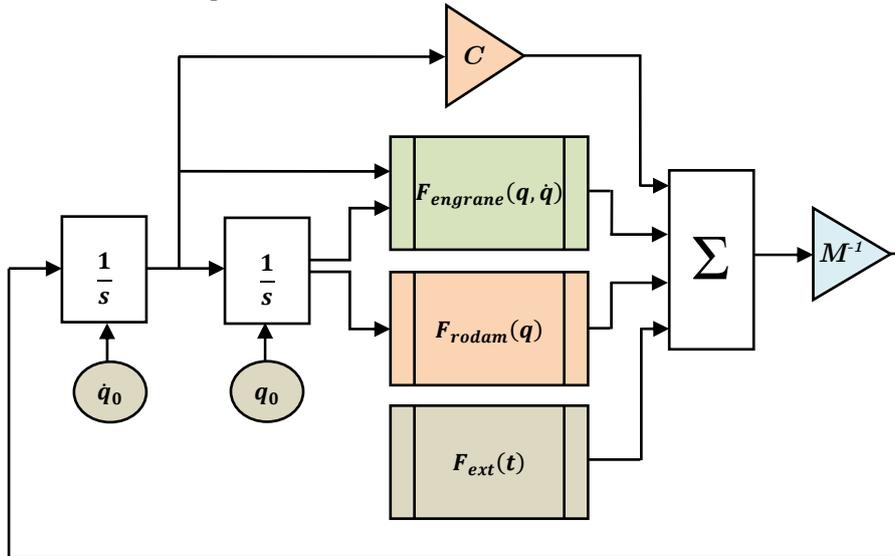


Figura 89. Diagrama de bloques de la implementación en SIMULINK de la transmisión planetaria modelizada

La introducción de la velocidad de giro de la transmisión así como el control de la misma se puede llevar a cabo por diversos procedimientos. Se plantea fundamentalmente dos alternativas, consistentes en el control del par o de la velocidad de giro. En este caso, tal como muestra la Figura 88, se realiza un control de la velocidad de entrada en el portaplanetas, combinada con un control continuo del par resistente exterior, que es aplicado en el engranaje sol. De esta manera, el grado de libertad de rotación del porta θ_{porta} queda cancelado desde el punto de vista de resolución del problema, pudiendo ser

eliminado de la formulación como variable de estado, siendo actualizado en cada paso de integración por el valor externo deseado.

Respecto al proceso de integración de las ecuaciones dinámicas, se plantean una serie de posibilidades, pudiendo encontrarse para la resolución de un problema de estados continuos como el planteado algoritmos de paso fijo o variable, de tipo explícito o implícito.

Se realizaron pruebas a distintos niveles de tolerancia con el modelo sin amortiguar, comprobando la disipación (o difusión) numérica introducida por los distintos algoritmos. Una vez descartados los algoritmos que provocaban un alto grado de pérdida de energía por ciclo, se seleccionaron dos métodos explícitos de resolución: uno de paso variable que permitiera una convergencia eficiente durante el transitorio inicial (las posiciones iniciales se correspondían con aquellas obtenidas del equilibrio estático), y uno de paso fijo que tomase el relevo para la simulación en régimen estacionario. La utilización de un algoritmo de paso fijo se realizó de cara al establecimiento de un período de muestreo constante, que permitiera el análisis en el dominio de la frecuencia.

7.5. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE LA TRANSMISIÓN PLANETARIA

A continuación se presentan y analizan una serie de resultados dinámicos, escogidos como más representativos de la capacidad de simulación del modelo desarrollado. Se han tratado de incluir de forma sintetizada cada uno de los aspectos más relevantes considerados, demostrando el potencial de la herramienta para reproducir el comportamiento real de las transmisiones.

7.5.1 Descripción de los distintos casos simulados

Con el fin de poner a prueba las diferentes capacidades del modelo de transmisión planetaria, se ha llevado a cabo una serie de simulaciones por casos. En esta memoria de Tesis se presentan los resultados más relevantes y significativos extraídos de dicha campaña, de acuerdo con la descripción de casos presentados en la Tabla 11, que especifica las distintas condiciones de simulación del modelo de transmisión. La velocidad que se muestra en la segunda columna, y que se introduce como parámetro constante en el portaplanetas, viene referida al valor medio de velocidad de salida en el sol.

La configuración con sol y porta flotantes o en rodamientos se refiere respectivamente como *Flot* o *Rod*.

Tabla 11. Definición de las simulaciones

Casos simulados	Vel(rad/s)	Par(Nm)	Configuración	Otros
V10P600SF	10	600	Sol Flot	-
V20P600SF	20	600	Sol Flot	-
V30P600SF	30	600	Sol Flot	-
V40P600SF	40	600	Sol Flot	-
V50P600SF	50	600	Sol Flot	-
V60P600SF	60	600	Sol Flot	-
V70P600SF	70	600	Sol Flot	-
V80P600SF	80	600	Sol Flot	-
V90P600SF	90	600	Sol Flot	-
V100P600SF	100	600	Sol Flot	-
V120P600SF	120	600	Sol Flot	-
V30P600SR	30	600	Sol R od	-
V50P300SF	50	300	Sol Flot	-
V50P900SF	50	900	Sol Flot	-
V50P600SFroz	50	600	Sol Flot	Roz
V50P600SFetan	50	600	Sol Flot	$e_{\tan}=50 \mu\text{m}$
V50P600SRetan	50	600	Sol R od	$e_{\tan}=50 \mu\text{m}$
V50P600SFexc	50	600	Sol Flot	exc=50 μm
V50P600SFexcPF	50	600	Sol Flot/Port Flot	exc=50 μm
V50P600SFRelief	50	600	Sol Flot	Tip Relief

7.5.2 Linealización del modelo. Modos y frecuencias

De acuerdo con los distintos tipos de configuración estudiados, se ha realizado una linealización del modelo con el fin de extraer los modos y

frecuencias naturales de vibración. La linealización del modelo se ha realizado siguiendo una variación del procedimiento propuesto por Lin y Parker en [Lin, 1999b]. Se parametriza el modelo (Figura 90) con las masas concentradas en los centros de los cuerpos, y resortes de rigidez media constante tanto para las relaciones de engrane como de apoyo.

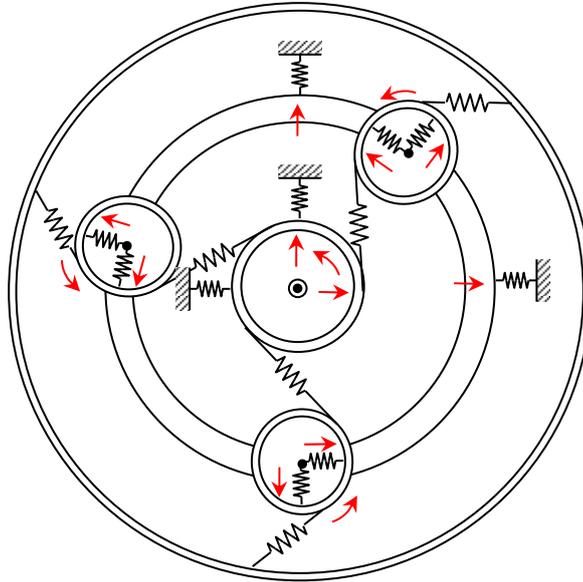


Figura 90. Modelo de parámetros concentrados empleado en la linealización

Como consideración adicional, se plantean las ecuaciones dinámicas eliminando los términos giroscópicos y de coriolis fruto de la consideración de movimientos relativos planeta/portaplanetas. En el caso particular de la linealización llevada a cabo para la transmisión ejemplo, los grados de libertad seleccionados son 14 (eliminando los GDL de la corona y rotación del porta, que se consideran fijados):

$$\{x_{port} \ y_{port} \ x_S \ y_S \ \theta_S \ x_{P1} \ y_{P1} \ \theta_{P2} \ x_{P2} \ y_{P2} \ \theta_{P3} \ x_{P3} \ y_{P3} \ \theta_{P3}\} \quad (7.27)$$

La linealización se ha realizado teniendo en cuenta un par exterior aplicado al sol de 600 Nm, promediando los valores de rigidez para un ciclo completo, tanto de rodamientos como de engranes.

El análisis de modos y frecuencias se ha llevado a cabo para tres configuraciones de planetario diferentes, todas ellas empleadas en los distintos casos de simulación presentados en la Tabla 11. En primer lugar se han calculado los modos y frecuencias naturales para una configuración con sol flotante y portaplanetas en rodamientos, con las frecuencias que se muestran en la Tabla 12 y los seis primeros modos representados en la Figura 91. En la Tabla 13 se introducen las frecuencias naturales obtenidas mediante la resolución del problema de valores propios para una configuración de sol y porta apoyados en rodamientos. En la Figura 92 se presentan los primeros seis modos para este caso. La configuración de sol y portaplanetas flotante introduce sobre las anteriores dos modos de sólido rígido, tal y como se advierte en la Tabla 14. Esto es debido a que la combinación de determinados giros y traslaciones permite la variación de posiciones de los cuerpos sin una variación en la energía potencial elástica almacenada.

Tabla 12. Frecuencias naturales configuración sol flotante, porta en rodamientos

Frecuencia	Valor(Hz)	Frecuencia	Valor(Hz)
W1	832	W8	5134
W2	832	W9	6596
W3	2326	W10	6596
W4	2702	W11	6723
W5	2702	W12	7399
W6	4791	W13	8084
W7	5134	W14	8084

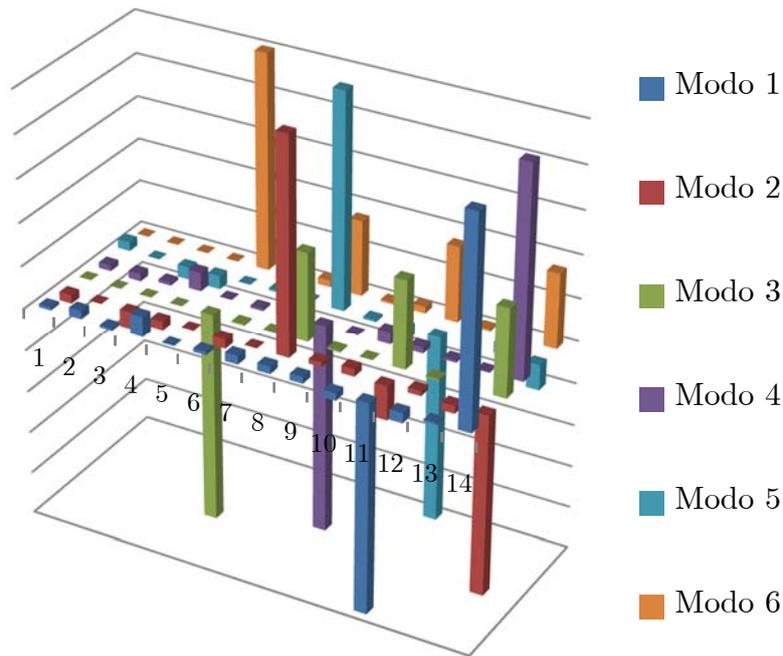


Figura 91. Forma de los 6 primeros modos descritos en la tabla 12

Tabla 13. Frecuencias naturales configuración sol rodamientos, carrier rodamientos

Frecuencia	Valor(Hz)	Frecuencia	Valor(Hz)
W1	1600	W8	5353
W2	1600	W9	6667
W3	2326	W10	6667
W4	3256	W11	6723
W5	3256	W12	7399
W6	4791	W13	8093
W7	5353	W14	8093

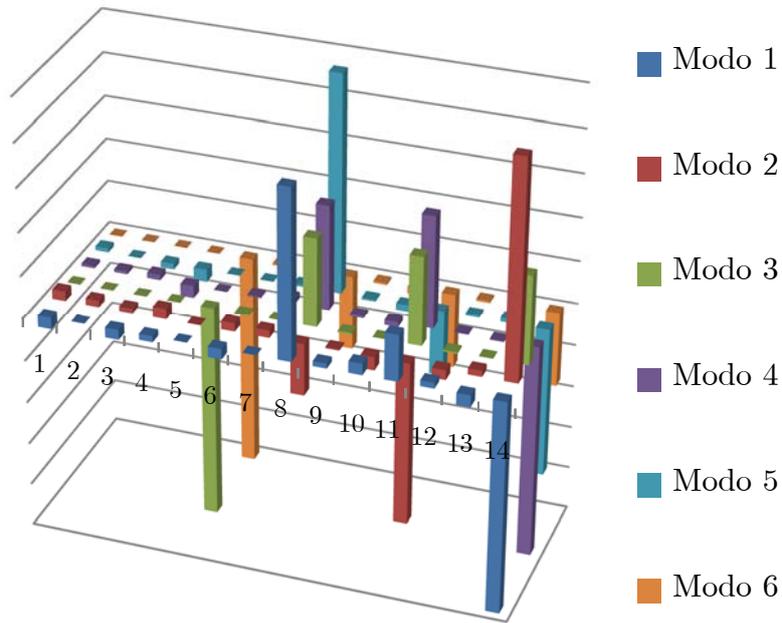


Figura 92. Forma de los 6 primeros modos descritos en la tabla 13

Tabla 14. Frecuencias naturales configuración sol flotante, carrier flotante

Frecuencia	Valor(Hz)	Frecuencia	Valor(Hz)
W1	~0	W8	5096
W2	~0	W9	6593
W3	2326	W10	6593
W4	2580	W11	6723
W5	2580	W12	7399
W6	4791	W13	8022
W7	5096	W14	8022

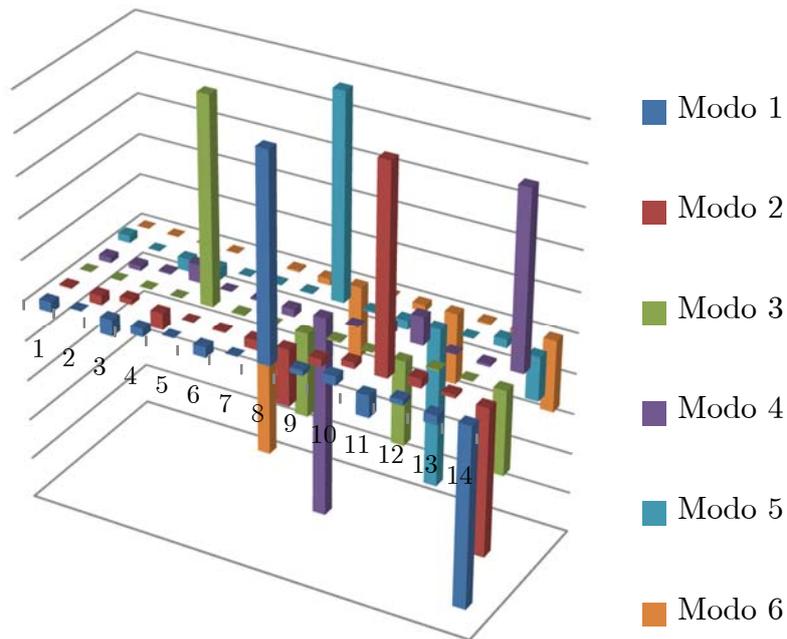


Figura 93. Forma de los 6 primeros modos descritos en la tabla 14

7.5.3 Sol flotante vs sol rodamientos

El modelo dinámico se puso a prueba para la evaluación de las diferencias existentes entre el uso de una configuración con sol apoyado en rodamientos y una flotante. A diferencia de lo sucedido con la idealización de configuración fija empleada en capítulos anteriores, el sol no se encuentra restringido por un apoyo infinitamente rígido. Por este motivo, ahora en ambos casos (V30P600SR y V30P600SF), el cuerpo de la rueda sufrirá una traslación, de menor cuantía cuanto mayor sea la rigidez del rodamiento, tal como se muestra en la Figura 94.

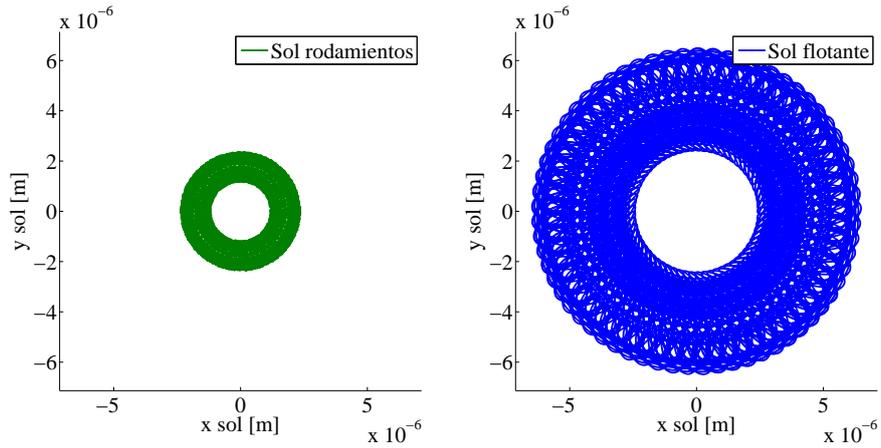


Figura 94. Comparativa de las órbitas dinámicas del sol según configuración

Con respecto al error de transmisión, la dinámica del sistema introduce una modificación en la forma original del error de transmisión estático. En la Figura 95 se presenta una comparativa, donde se observa cómo el sol sin apoyos aumenta el valor medio del error de transmisión con respecto al caso con rodamientos. Sin embargo, la diferencia en esta comparativa es menor que la mostrada entre configuraciones flotantes y fijas durante el estudio estático idealizado, dado que ahora en ambos casos el sol realiza una órbita.

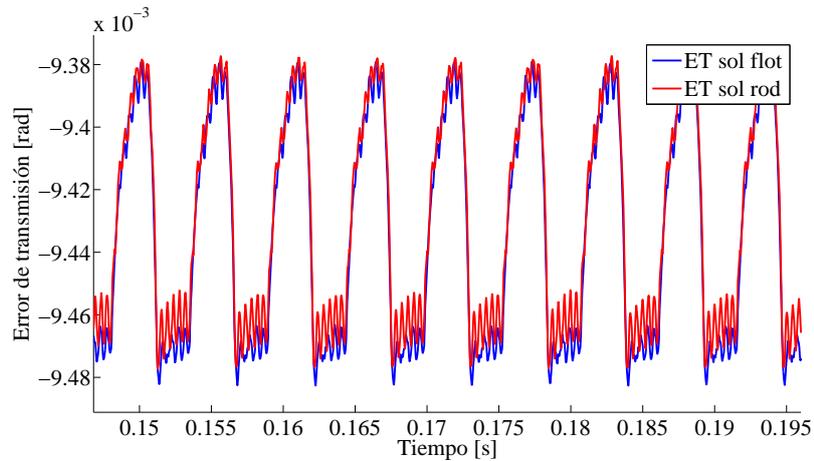


Figura 95. Comparativa del error de transmisión dinámico - $\omega_{sun}=30rad/s$

En la Figura 96 se presenta el espectro del error de transmisión del sol para el barrido de velocidades realizado a la transmisión con sol flotante y portaplanetas en rodamientos a 600 Nm.

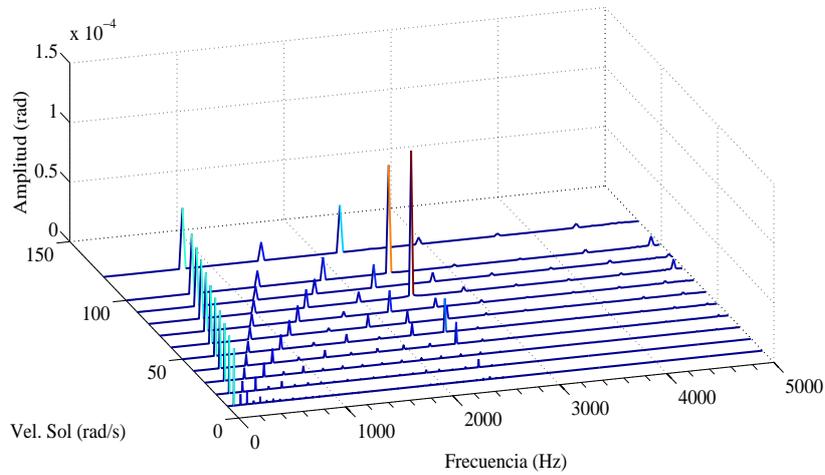


Figura 96. Espectro del error de transmisión casos V10-120P600SF

Se puede apreciar a simple vista una zona de resonancia en torno a los 2300-2400 Hz, que se corresponde con el modo 3 de la Tabla 12. Al ser el error de transmisión una magnitud vinculada con la rotación del sol, la aparición de esta frecuencia viene asociada con el modo de mayor amplitud en dicho grado de libertad, tal como se puede comprobar en la Figura 91. De forma menos evidente, el modo 6 también es apreciable en el rango elevado de frecuencias, entre 4800-5000 Hz.

La órbita descrita por el porta (Figura 97) tiene un tamaño un orden de magnitud menor que la realizada por el sol. Este hecho se debe a que la traslación del porta está supeditada a las fuerzas que actúan sobre el mismo. Dado que las fuerzas de los engranes sol-planeta y planeta-corona se compensan entre sí parcialmente, las fuerzas transmitidas al porta serán en consecuencia menores, con el correspondiente efecto sobre el tamaño de la órbita.

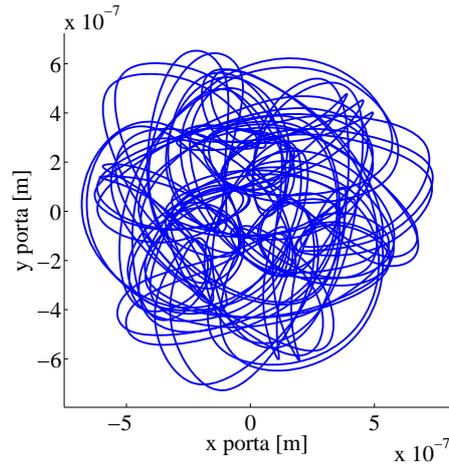


Figura 97. Órbita del porta. Caso V50P600SF

Cuando se observan otras magnitudes, como por ejemplo la fuerza dinámica vertical registrada en el bastidor, representada en la Figura 98, es posible reconocer otras zonas de amplificación modal del sistema. En este caso se aprecian zonas de resonancia entre los 4500 y 5000 Hz, así como en torno a los 7000 Hz. Atendiendo a los modos y frecuencias naturales encontrados en la linealización del modelo, es fácil reconocer en las Tablas 12-14 y Figuras 91-93 dichas resonancias.

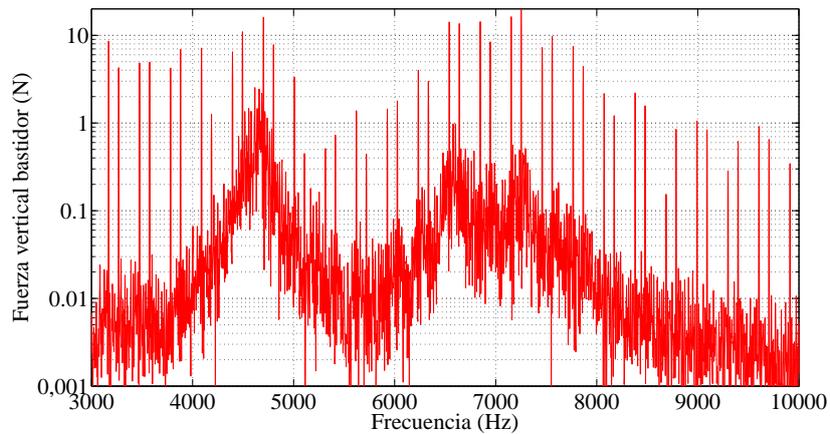


Figura 98. Espectro de la fuerza dinámica vertical registrada en el bastidor. Caso simulado V50P600SF

En cuanto al CRC, se pueden observar en la Figura 99 resultados análogos a los mostrados para el estudio cuasiestático, con un reparto de carga desigual en el caso de la transmisión con desplazamiento del sol restringido (caso V30P600SR). Los efectos dinámicos se aprecian tanto en la aparición de armónicos como en el aumento de la amplitud de la variación del CRC en la configuración flotante (caso V30P600SF), con diferencias pico a pico de hasta dos puntos porcentuales para una velocidad de rotación del sol de 30 rad/s

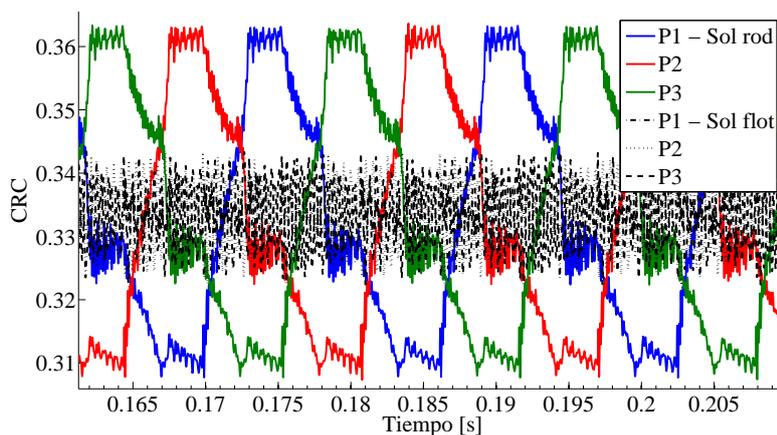


Figura 99. CRC dinámico para ambas configuraciones - $\omega_{sun}=30\text{rad/s}$

7.5.4 Influencia del nivel de carga

El nivel de carga, como ya quedó demostrado en el análisis de las simulaciones estáticas, tiene un efecto de gran importancia sobre los niveles medios y formas de los distintos factores estudiados. En el caso de las simulaciones dinámicas, los efectos del nivel de carga incluyen la alteración del orden de amplitud de los armónicos. A este hecho se le ha de prestar una gran atención, puesto que la mayor fluctuación del nivel de carga en las transmisiones planetarias puede dificultar la extracción de información sobre el estado en condición del sistema. En la Figura 100 se muestra el error de transmisión para los casos V50P300SF, V50P600SF y V50P900SF, donde se aprecia, además de la variación en el nivel medio, la mencionada distorsión en los armónicos presentes. En la Figura 101 se muestra en detalle el contenido armónico (en múltiplos de las frecuencias de engrane) para los casos extremos V50P300SF y V50P900SF. Así, el orden de los armónicos 3,

9, 24 y 6 de la frecuencia de engrane para un par de 900Nm se convierte con el descenso del nivel de carga en 24, 3, 18 y 21.

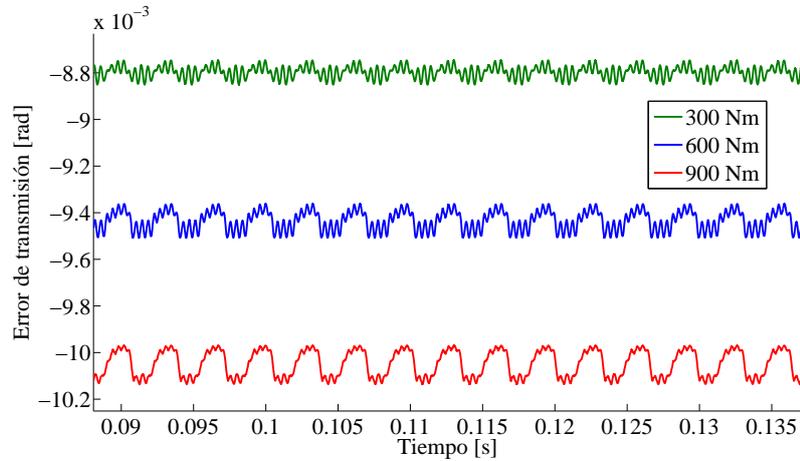


Figura 100. Error de transmisión dinámico a distintos niveles de par - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

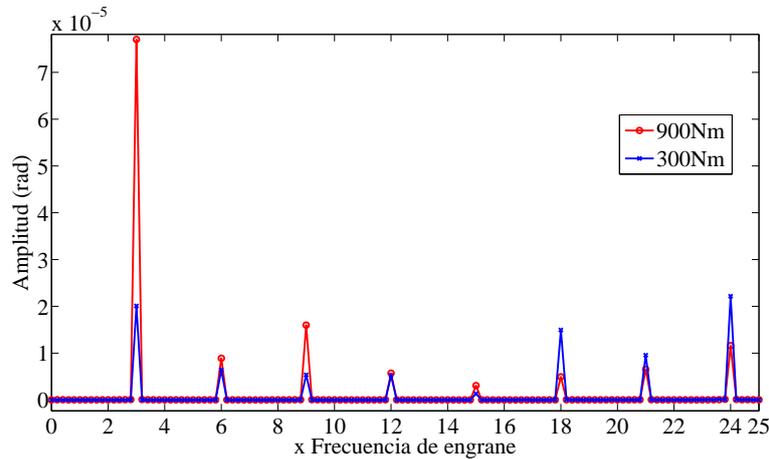


Figura 101. Contenido armónico del ET dinámico a distintos pares - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

En la Figura 102 se reproduce la fuerza dinámica vertical registrada en los apoyos de la corona para una misma velocidad de 50rad/s y a los mismos tres niveles de par anteriormente descritos: 300, 600 y 900Nm. Debido a la simetría que presenta la transmisión planetaria, el nivel medio de la fuerza es nulo. La amplitud de la variación de la fuerza es mucho mayor en el caso de

los 300Nm, y la evolución de la misma con el aumento del par exterior aplicado al sistema no es lineal, mostrando una menor amplitud para un par exterior aplicado de 900Nm que de 600Nm.

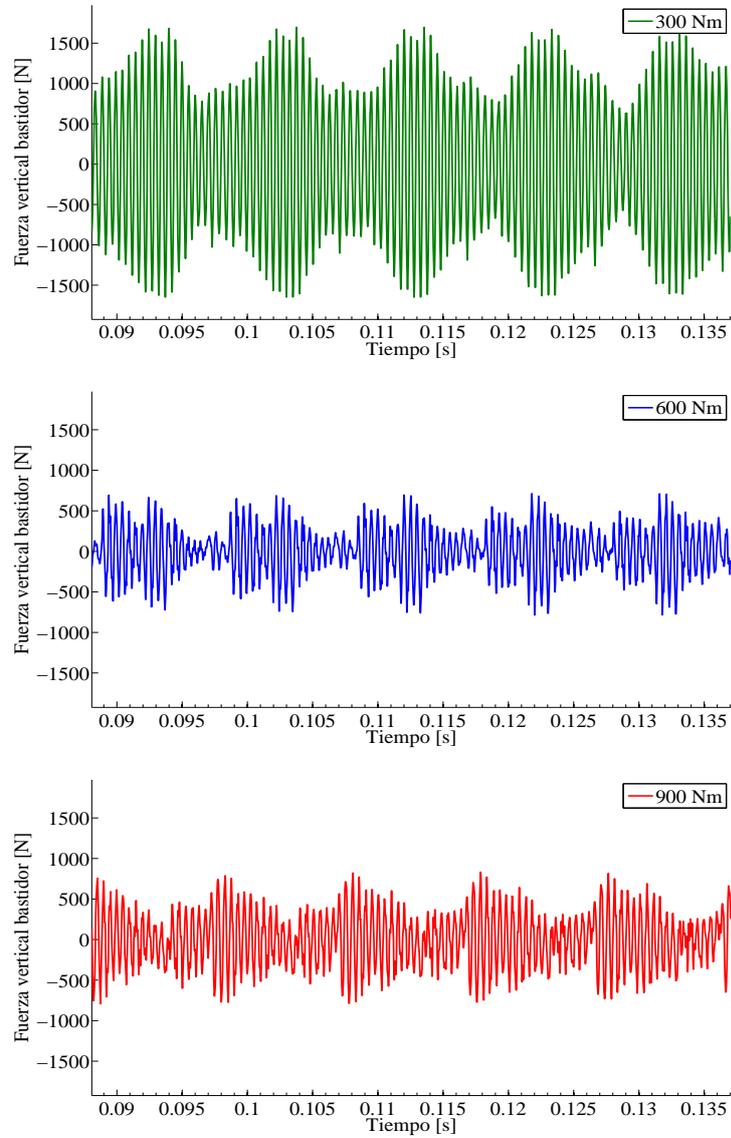


Figura 102. Fuerza dinámica vertical registrada en el bastidor a distintos niveles de par $\omega_{sum}=50\text{rad/s}$

En el caso de las órbitas descritas por el sol y presentadas en la Figura 103, la no linealidad provocada en la dinámica del sistema por la variación de la carga está presente tanto en la amplitud del desplazamiento del sol como por la forma de la órbita.

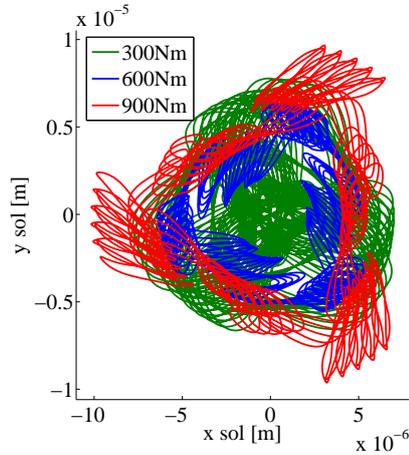


Figura 103. Comparativa de las órbitas dinámicas del sol a distintos niveles de par

El CRC también sufre amplias variaciones con el nivel de par aplicado. Así, un sistema ligeramente cargado es mucho más sensible a los errores o desviaciones relacionados con la geometría de los engranajes. En la Figura 104 se presenta el CRC para el planeta 1, donde se observa la gran amplitud en la variación de la carga producida por los contactos fuera de la línea de acción.

7.5.5 Errores en los planetas

En cuanto a los errores de posicionamiento y excentricidad de los planetas, los resultados dinámicos se asemejan al funcionamiento previsto en los análisis estáticos. Si bien la configuración fija de aquellos análisis ahora no se corresponde exactamente con la situación dinámica simulada, por tener el sol la posibilidad de traslación (aunque restringida por los rodamientos), el reparto de carga se ve afectado de manera similar. En los casos V50P600SFetan y V50P600SRetan mostrados en este apartado, se introduce un defecto de posicionamiento tangencial de $50\mu\text{m}$ en el planeta 1. El CRC dinámico resultante, mostrado en la Figura 105, presenta grandes desequilibrios para el sol apoyado en rodamientos:

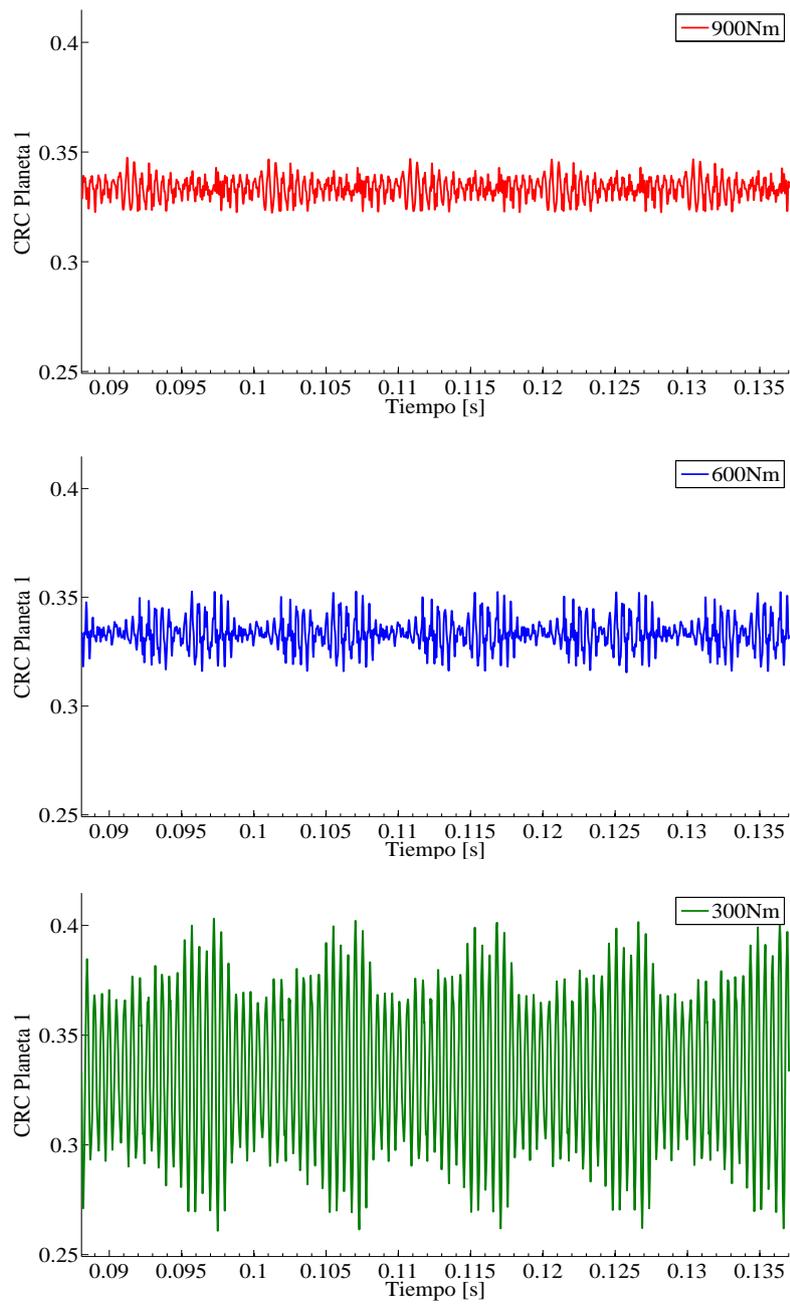


Figura 104. CRC dinámico del planeta 1 a distintos niveles de par - $\omega_{sun}=30\text{rad/s}$

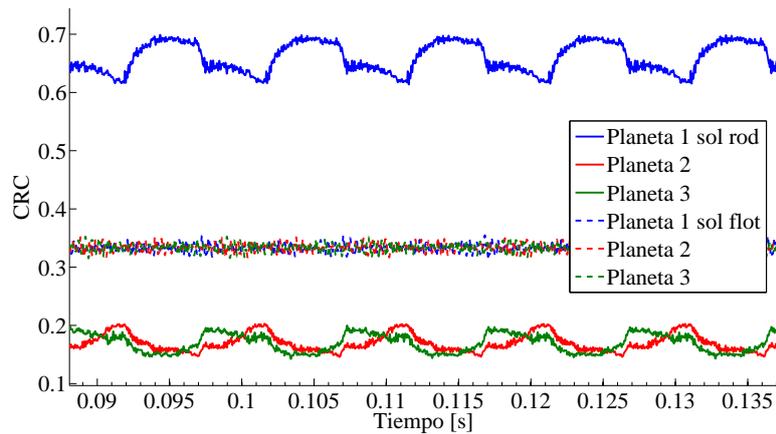


Figura 105. CRC dinámica para ambas configuraciones con un $e_{tan}=50\mu m$

El motivo por el cual un error del sol de $50\mu m$ como el que se muestra en la Figura 107 no produce una descarga de las dos vías, tal y como sí sucedía en el caso estático (ver Figura 71), es que en este caso el sol sí realiza una cierta órbita. Esta órbita, que se presenta en la Figura 106, será menor cuanto mayor sea la rigidez de los rodamientos, pero en todo caso compensará sustancialmente el desequilibrio producido por el error de posicionamiento.

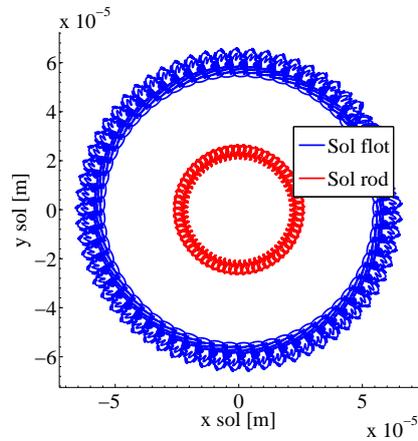


Figura 106. Órbita dinámica del sol para ambas configuraciones con un $e_{tan}=50\mu m$

Atendiendo a la fuerza dinámica vertical experimentada por el bastidor para los dos casos utilizados con error tangencial, se aprecia en la Figura 107 la gran variación existente entre el uso de una configuración fija/con rodamientos y una configuración con sol flotante. Este efecto se debe fundamentalmente a la pérdida de simetría de las cargas actuantes sobre la corona, introduciendo la variación que se aprecia en el registro de fuerza.

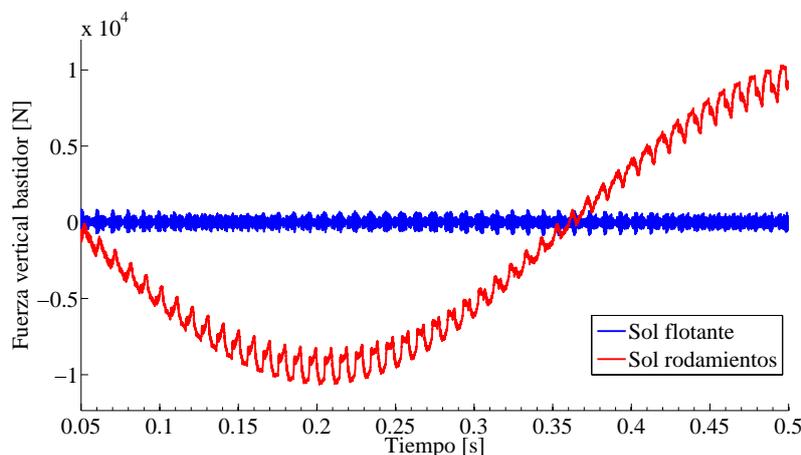


Figura 107. Fuerza dinámica vertical registrada en el bastidor en ambas configuraciones con un $e_{tan}=50\mu m$ - $\omega_{sun}=50rad/s$

Con respecto al error de excentricidad, en el caso V50P600SFexc se implementa en el modelo dinámico un error de excentricidad de $50\mu m$ en el planeta 1, con el efecto sobre las órbitas del sol y del porta que se muestran en la Figura 108.

Los resultados del CRC y del error de transmisión son similares a los mostrados para el caso del error tangencial, por lo que no se muestran. En la Figura 109 se presentan las órbitas del sol y del porta correspondientes al caso simulado V50P600SRexcPF, en el que ambos cuerpos se encuentran suspendidos sin apoyo, con el mismo error de excentricidad de $50\mu m$. Atendiendo a la Tabla 14 y a la Figura 93, el hecho de permitir la libre traslación de dos cuerpos centrales de la transmisión planetaria introduce dos modos adicionales de sólido rígido relacionados con la traslación de dichos cuerpos, tal y como se deduce del análisis de modos y frecuencias. Este hecho da lugar a órbitas más complejas y de mayor amplitud que en el caso de

apoyo en rodamientos, con desplazamientos tales que pueden llegar a darse contactos en el contraflanco para esta configuración, en presencia de un error como el ejemplificado.

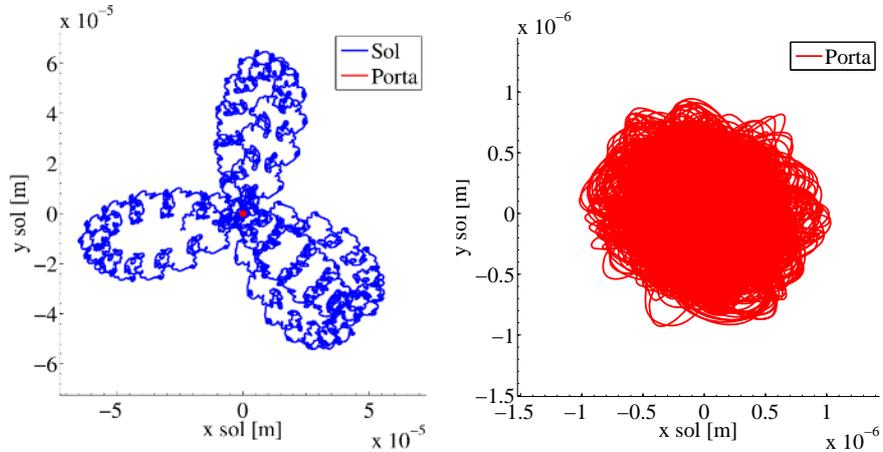


Figura 108. Órbitas dinámicas del sol y carrier flotantes y $exc=50\mu\text{m}$ - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

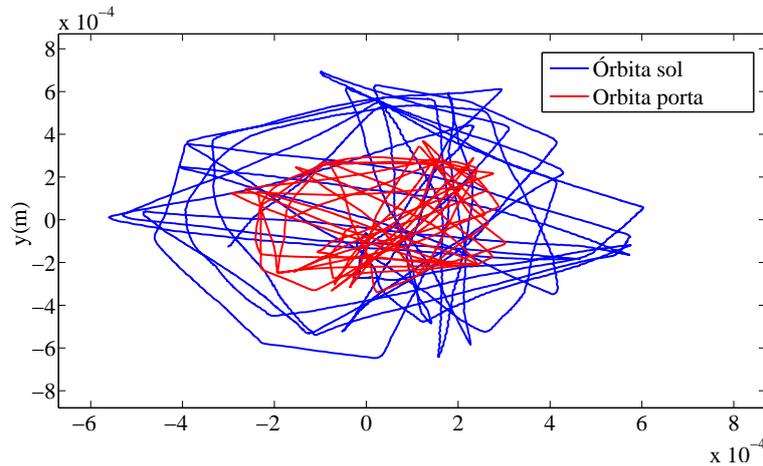


Figura 109. Órbitas dinámicas del sol y carrier flotantes y $exc=50\mu\text{m}$ - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

7.5.6 Influencia de la fricción

La introducción de la fricción en la modelización de transmisiones mediante engranajes no ha sido estudiada en profundidad con modelos dinámicos de transmisión planetaria. A pesar de ser un fenómeno disipador de energía, uno

de sus efectos principales es la introducción de una nueva excitación en el sistema, fruto del cambio instantáneo en el sentido de aplicación de la fuerza cuando el punto de contacto pasa por el polo. En la Figura 110 se presenta

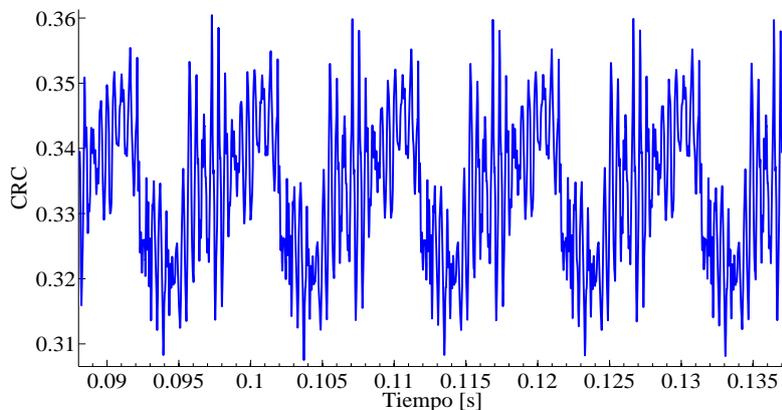


Figura 110. CRC dinámico en presencia de rozamiento - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

el CRC, cuya variación dinámica es de dos puntos porcentuales adicionales respecto al sistema sin rozamiento. El efecto de dicha excitación se puede apreciar en todos los niveles de los parámetros de salida estudiados del caso V50P600SFroz. La existencia de rozamiento también tiene un efecto sobre la amplitud y forma de la órbita del sol, aumentando su diámetro total, tal como se presenta en la Figura 111.

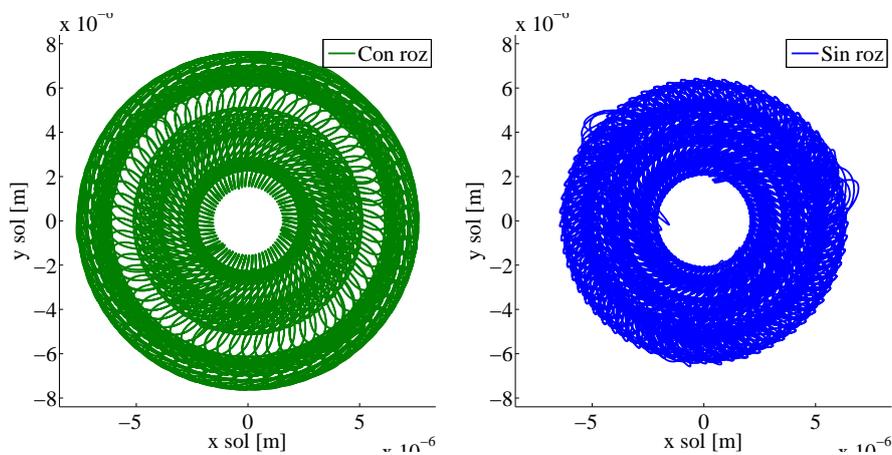


Figura 111. Órbitas dinámicas del sol con y sin rozamiento - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

Al introducir una fuerza ortogonal respecto a la fuerza de contacto, y debido a las diferentes condiciones de velocidad relativa existentes entre cada engrane sol-planeta y planeta-corona, la combinación de componentes radiales de fuerzas de engrane sobre el planeta varía ampliamente respecto al caso sin rozamiento, como se muestra en la Figura 112. Se puede apreciar que la fuerza radial sobre el planeta 1, además de aumentar la amplitud de la variación, llega a sufrir un cambio de sentido.

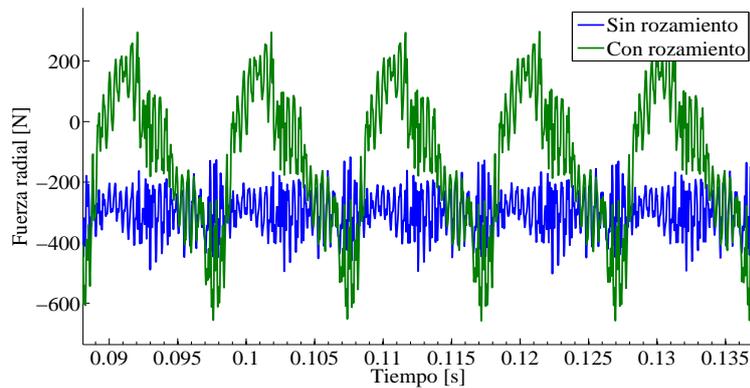


Figura 112. Fuerza dinámica radial sobre el planeta con y sin rozamiento

En cuanto al error de transmisión, la presencia de rozamiento altera la amplitud de determinados armónicos, como se aprecia en la Figura 113 en el marco temporal y en la Figura 114 para múltiplos de la frecuencia de engrane.

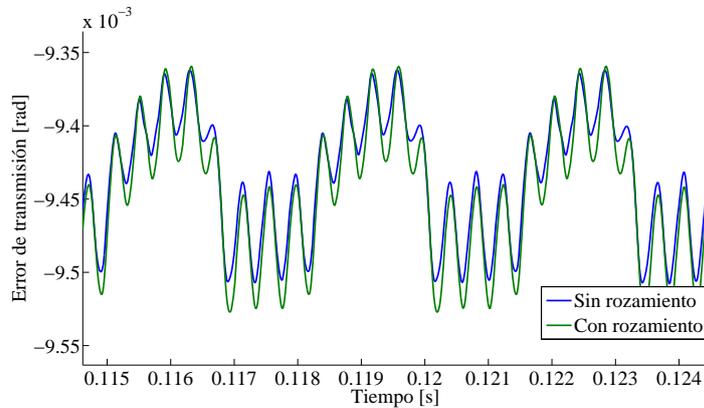


Figura 113. Comparativa del error de transmisión dinámico con y sin rozamiento

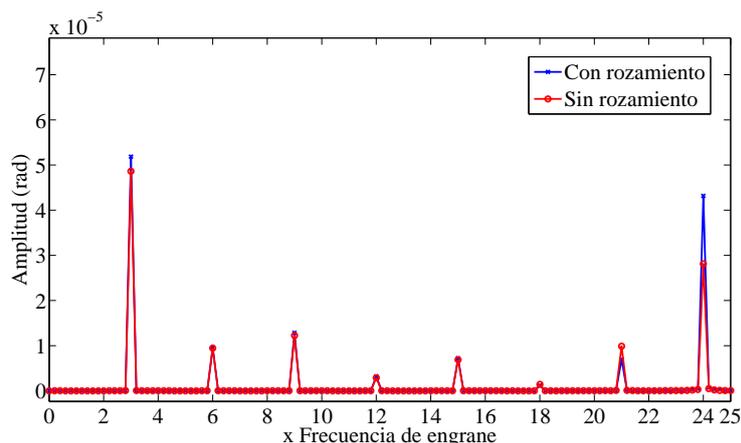


Figura 114. Comparativa de armónicos de la frecuencia de engrane del ET

7.5.7 Influencia de las correcciones de perfil

Las transmisiones reales incluyen modificaciones microgeométricas en el tallado de los perfiles, con el fin de evitar contactos en las aristas de los engranajes y reducir el nivel de ruido y vibración de la transmisión. El modelo presentado tiene la capacidad de simular dichas modificaciones, y se convierte en una valiosa herramienta para el diseño de correcciones, teniendo en cuenta no sólo la geometría de los perfiles, sino también los desplazamientos dinámicos fruto de la deformación y órbitas sufridas por los distintos elementos de la transmisión.

En el caso V50P600SFRRelief en el que se incluyen correcciones de perfil, se aplica a todos los engranajes una corrección lineal de la punta de diente de amplitud $CT=0.014mm$ para los engranajes exteriores y $CT=0.010mm$ para la corona. La amplitud en la que se aplicó la corrección fue de $\Delta L_T=3mm$ para el planeta, $\Delta L_T=2.5mm$ para el sol y $\Delta L_T=4mm$ para la corona.

En la Figura 115 se presenta la órbita del sol en presencia de correcciones y sin ellas, verificándose que el comportamiento dinámico mejora sustancialmente en el primer caso.

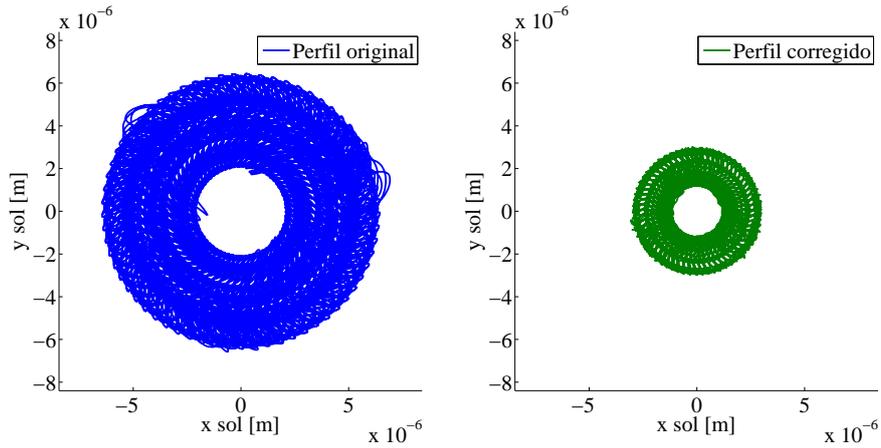


Figura 115. Órbita dinámicas del sol sin y con correcciones de perfil - $\omega_{sun}=50rad/s$

En la Figura 116 se presenta el CRC dinámico, donde se aprecia como la variación del mismo se ha limitado en gran medida con la introducción de la corrección, al evitarse la excitación producida por los contactos fuera de la línea de acción.

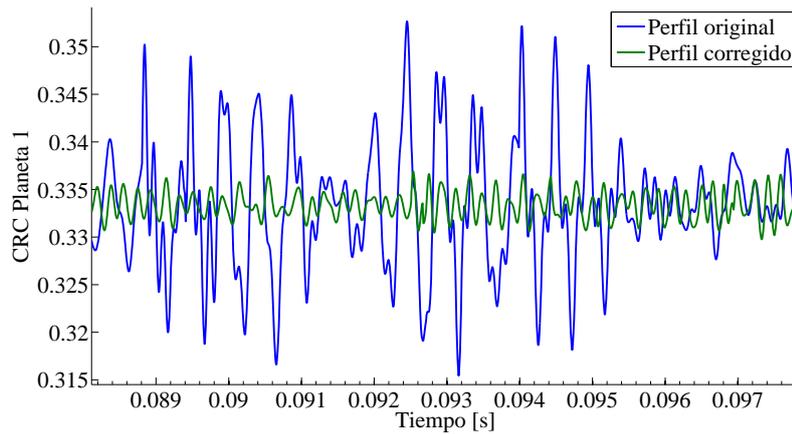


Figura 116. CRC dinámico del perfil original y corregido

En cuanto al error de transmisión, en la Figura 117 se aprecia como la introducción de correcciones de perfil actúa en dos frentes sobre la dinámica del sistema. En primer lugar, aumenta el nivel medio del error. Esto se debe a que la corrección de perfil tiene como primera consecuencia una ampliación

de la fase de contacto simple de los dientes, que se traduce en una reducción de la rigidez media global del sistema. Por otra parte, el contenido armónico de la respuesta torsional del sol queda modificado, al ser menor la excitación introducida debido a la entrada y salida suavizada en el contacto de las parejas de dientes.

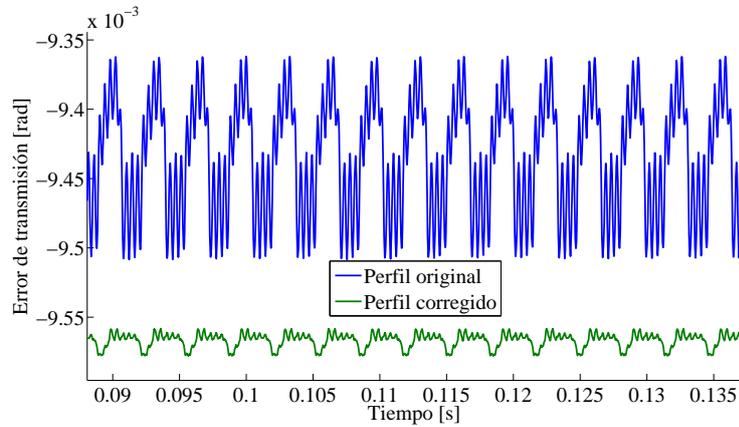


Figura 117. Comparativa del error de transmisión dinámico corregido

Como era de esperar, el registro de fuerza dinámica en el bastidor también se ve ampliamente reducido en su amplitud cuando se introducen correcciones de perfil, tal y como se presenta en la Figura 118.

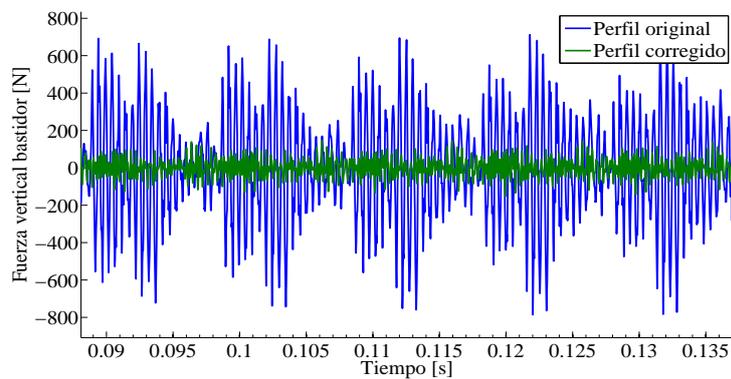


Figura 118. Fuerza dinámica vertical registrada en el bastidor en presencia de correcciones de perfil - $\omega_{sun}=50\text{rad/s}$

Parte V

Capítulo 8

Contributions, conclusions and future work

8.1. CONTRIBUTIONS

The final contribution of the research work presented on this Thesis has been the definition and complete development of a spur gear plane dynamic model of a planetary transmission. Other specific contributions derived from this work are detailed below:

- An advanced tool has been developed to simulate the inner gear cutting process, where the generation of the trochoid is directly considered. Furthermore, the possibility of generating corrected gears is included, resulting in an increased versatility of the model. The geometrical problem of contact in inner gears has been solved taking into consideration the three possible scenarios: involute-involute contact, and both kinds of involute-tip rounding arc contact (inner and external gears). Counter-flank and multiple contact are considered simultaneously.
- The algorithm used for the calculation of the meshing forces has been broadened and extended. The 6DOF system solved for a single couple of gears has been expanded to $6+3n$ DOF for a planetary transmission with n paths. Furthermore, the coupling of

deformations through the gear body flexibility has been also considered.

- The analytical model used to calculate the local deformation has been extended to consider the different conditions of curvature which can be found in planetary transmission, with the necessary introduction of inner gears. The treatment of the singularity due to the change of curvature between the different types of contacts has been improved, with the inclusion of a linear transition between areas.
- The contact forces model has been verified and validated, both in inner and external gears. The procedure followed included the comparison of the average meshing stiffness obtained with the model and those defined by the international norm ISO 6336-1-(2006)
- The bearing contact forces model applied has been broadened and improved, including the possibility to use either spherical or cylindrical elements with line contact.
- Profile relief has been added to the teeth flank geometry, both in exterior and inner gears, with the possibility of linear and parabolic correction. This feature aims to model adequately real transmissions, where out of the line of action contacts are avoided.
- On a system level, planet positioning eccentricity and errors have been implemented, as well as the possibility of different set-ups of transmission, with fixed or floating central members.
- The friction model has been completed and improved with the addition of new operational parameters. Some of these new parameters are the rugosity, the lubricant characteristics, the speed and the operational temperature.
- A dynamic planetary transmission model with lumped parameters has been formulated, including all the capabilities and contributions previously described. Planet positioning errors and eccentricity are also implemented in the dynamic version, along with the different set up of boundary conditions (floating or fixed elements). The model has been applied to the simulation of the example transmission behaviour in several conditions.

8.2. CONCLUSIONS

The most relevant conclusions extracted from the presented work during the model implementation, verification and simulation tasks are summarized hereunder.

- The addition of the tip rounding arc allows for the handling of out of the line contacts, preventing the possibility of corner contact. In spite of the good results provided by this model feature, the approach applied to calculate the local deformations introduces a step in the transition between different contact types, due to a change in the curvature radii.
- The implementation of a linear transition in order to avoid the mentioned singularity in the transitions between different contact types results in a significant improvement. With the smoothing of the transition adopted, the simulated behaviour is improved, with no significant additional computational effort.
- The verification of the average meshing stiffness obtained with the model has proved that the contact forces model reproduces realistically both inner and external gears behaviour.
- The choice of applying a hypothesis of plane stress or strain during the calculation of contact forces has an impact lower than 4% on the average meshing stiffness. Therefore, any of these two options could be used with a reasonable error. Another option could be the use of a weighted average, in order to become even closer to the real solution.
- The depth h at which it is set the boundary between the local and global FEM models has a certain impact on the outcome. Nevertheless, this effect is partially compensated by the nature of the problem formulation. It is hence concluded that the acceptance of a maximum local deformation threshold on the profile of the finite elements model provides better results than with an unlimited increase of the depth h . This is due to the existing conflict between the improvement of the structural deformation results and the simultaneous deterioration of the local deformation results when h is increased.

- The coupling through the planet deformation causes a torsional stiffening of the system because of the combination of inverse and direct contacts. The effect is slight, and affects the mean value.
- The deformation coupling of the n meshes of the sun causes a relaxation of the system torsional stiffness, equivalent to the effect of coupling between adjacent teeth. This effect has a great impact, due to the proximity of meshes, and therefore it is increased with the number of transmissions paths.
- The coupling through the n gears of the ring has a negligible effect on the transmission behaviour, due to the boundary conditions used in this study. For future works with different example transmissions, it is proposed to allow further deflections of the ring to check its effect on the coupling.
- Two different planetary configurations have been studied, considering the possibility of free traslation of the sun and taking into account the resulting values of load sharing ratio (LSR) between paths. It has been proved that the LSR varies widely in the fixed transmission scenario, due to the different path stiffness.
- These variations on the values of the LSR have been found to have no impact on the maximum level of contact forces, which will not exceed its maximum nominal value in transmissions without defects.
- In the floating sun scenario, the LSR becomes almost perfect, except for the areas where contacts out of the line of action take place. Nevertheless, even in those zones, the variations of the LSR are insignificant, never above a tenth of percentage point.
- Planet positioning errors have been analysed: tangential and radial component in a separately way. The following conclusions have been drawn:
 - The tangential error has a great impact on the LSR in non floating configurations. It can even cause the complete discharge of one or more paths under certain conditions of deviation and load.
 - Whereas a negative tangential deviation (with respect to the line of action) can cause the unload of the defected planet, a

positive deviation has the potential to unload all the non-defected paths. Thus, the consequences of the positive deviations are much more serious than the ones posed by the negative ones.

- The effect of the tangential component on the LSR has an impact in the maximum contact forces level. Nevertheless, the relationship between the increase on the contact forces and the variation of the LSR has been found to be not linear.
 - The radial component of the positioning error has a significantly lower impact on the LSR (found to be approximately 40 times lower) than the tangential component. Nonetheless, this impact is not null, in spite of what can be found in some bibliographic references. It strongly depends on the design and mounting conditions of the planetary transmission; more specifically on the difference between the pressure angles of sun-planet and planet-ring.
 - The increase of the transmitted load results in the dilution of the positioning error effects, due to the presence of greater levels of global deflections.
 - For the floating configuration, the sun follows an orbit of radius similar to the positioning error magnitude (for tangential components). In this way, the sun displacement absorbs the error and virtually evens the LSR.
- The effects of the eccentricity error have also been studied. It has been concluded that they are equivalent with a harmonic evolution of the positioning error, through its different components and directions.

The planetary transmission modelling is now in full swing, with numerous research groups making contributions on several fronts. While there is some consensus on the use of finite element tools, hybridized with analytical formulations, the diversity of methods used, as well as the variability of assumptions and simplifications adopted complicates the correlation between

the different approaches. For experimental verification, the scarcity of works, and the tendency of researchers to show only the results that best fit their models, also complicates the data comparison. Therefore, the need to achieve self-experimental verification within the research group becomes mandatory.

8.3. FUTURE WORK

The following future lines of work are the result of a critical analysis of the work presented in this document. This proposal aims to complement, extend and/or continue the research effort done heretofore in planetary transmissions.

- **EXPERIMENTAL VALIDATION:** This line of future work, whose interest has been previously justified, is part of the majority of the current research proposals made from modelling or theoretical studies. Nevertheless, the development and set up of a planetary transmission test bench carried out by the Mechanical Engineering Group of the University of Cantabria grants the feasibility of this line of work in the near future.
- **FLEXIBLE RING:** A modification of the boundary conditions in the calculation of the ring flexibility might result in a completely different outcome. In certain cases, the corona is thin and is not limited to deflections within its perimeter, allowing considerable changes on its shape and therefore causing great coupling between meshes. The study of these effects can be an important contribution to a comprehensive work.
- **MULTI-STAGE TRAINS:** Due to its coaxial configuration, the planetary transmissions often present several linked stages. Consequently, this is an important and easy to implement line of work that could answer a big amount of dynamic problems that come from the coupling of stages.
- **DEFECT MODELING:** In addition to the eccentricity and positioning errors, the model could be broadened to include other typical defects of planetary transmissions, like for example cracks in the carrier or carrier or the ring.

Contribuciones, conclusiones y trabajo futuro

8.1. CONTRIBUCIONES

Este trabajo de Tesis Doctoral ha tenido como contribución global la definición y desarrollo completo de un modelo dinámico plano de transmisión planetaria de dientes rectos, con capacidades mejoradas sobre los modelos actualmente existentes. El modelo tiene especial aplicación para la simulación detallada del reparto de carga entre planetas en diversas situaciones, incluyendo errores de posicionamiento y excentricidad. A continuación se detalla a modo de resumen el desglose de contribuciones puntuales realizadas.

- Se ha confeccionado una herramienta de simulación de tallado de perfiles de dientes interiores, que incluye la definición del tramo de trocoide, así como la posibilidad de introducir correcciones. Se ha resuelto el problema geométrico de distancias de separación en el contacto de engranajes interiores, considerando contactos múltiples en ambos flancos, tanto dentro como fuera de la línea de acción.
- Se ha ampliado y extendido el algoritmo de superposición de deformaciones locales y estructurales empleado para el cálculo de las fuerzas de contacto en los engranes, expandiéndose el sistema de 6GDL empleado para la solución de una pareja de ruedas a los

$6+3n$ GDL de una transmisión planetaria con n planetas. Se ha considerado además el acoplamiento de las deformaciones a través de la flexibilidad de los cuerpos de las ruedas.

- El modelo analítico para el cálculo de la deformación local ha sido extendido para la consideración de las distintas condiciones de concavidad y convexidad presentes en la transmisión planetaria, causadas por el empleo de ruedas interiores. El tratamiento de la singularidad debida al cambio de curvatura entre los distintos tipos de contacto ha sido mejorado mediante la inclusión de una transición lineal.
- Se ha verificado y validado el modelo conjunto de cálculo de fuerzas de contacto, tanto en engranes exteriores como interiores, mediante la comparativa de las rigideces de engrane medias obtenidas con el modelo y las definidas por la norma internacional de engranajes ISO 6336-1-(2006).
- Se ha ampliado y mejorado el modelo de cálculo de fuerzas de contacto de rodamientos, incluyendo la posibilidad de uso indistinto de rodamientos con elementos rodantes cilíndricos y esféricos.
- Se ha incorporado a la geometría de los engranajes las correcciones de perfil, tanto en ruedas exteriores como interiores, de tipo lineal y parabólico, a fin de mejorar el modelizado de transmisiones.
- A nivel de sistema, se han implementado en el modelo de transmisión planetaria errores de posicionamiento y de excentricidad en los planetas, así como la utilización de configuraciones con cuerpos centrales fijos o flotantes.
- Se ha mejorado el modelo para el cálculo de fuerzas de rozamiento, incluyendo nuevos parámetros de operación, como la rugosidad superficial de las superficies en contacto, las características del lubricante, la temperatura o la velocidad.
- Se ha formulado un modelo de transmisión planetaria de parámetros concentrados con capacidades dinámicas. En dicho modelo se han recogido e integrado todas las capacidades y contribuciones individuales anteriormente descritas. Se ha aplicado el modelo en la

simulación dinámica del comportamiento de la transmisión ejemplo en diversas situaciones.

8.2. CONCLUSIONES

A continuación se presentan de manera sintetizada las conclusiones más significativas extraídas del trabajo de investigación, tanto durante la fase de elaboración del modelo como durante las primeras etapas de verificación y simulación del modelo:

- La inclusión del redondeo en la punta de los dientes de la corona permite la gestión de contactos fuera de la línea de acción, con el objetivo de evitar la posibilidad de contacto singular en arista. El enfoque inicialmente empleado para el cálculo de deformaciones locales introduce un escalón en las transiciones entre tipos de contacto, debido al cambio de los radios de curvatura.
- La transición lineal adoptada en los cambios de curvatura suaviza de manera satisfactoria la forma de la rigidez de engrane, sin añadir un coste computacional significativo ni modificar el nivel medio de la rigidez.
- Se concluye, de la verificación de la rigidez de engrane media, que el modelo de fuerzas de contacto ajusta de manera muy razonable el comportamiento de transmisiones mediante engranajes, tanto para ruedas interiores como exteriores.
- La aplicación de una hipótesis de tensión plana o deformación plana durante el cálculo de las fuerzas de contacto para las ruedas estudiadas tiene un impacto menor al 4% sobre la rigidez de engrane final, pudiendo asumirse este error como aceptable, adoptando cualquiera de las dos hipótesis, o bien estableciendo una ponderación de ambas con el fin de ajustarse más a la solución real.
- Se concluye que la asunción de un umbral máximo de deformación local en el perfil del modelo de elementos finitos, proporciona resultados mejores que el aumento indefinido de la profundidad h . Esto se debe al conflicto existente entre la mejora del resultado de la deformación estructural y la degradación simultánea del resultado de deformación local cuando se aumenta la profundidad de la frontera.

- El acoplamiento de deformaciones entre los dos engranes diametrales de cada planeta tiene como consecuencia una rigidización torsional del conjunto, al ser los contactos de sentido contrario. El efecto es reducido, y afecta fundamentalmente al valor medio.
- El acoplamiento entre los n engranes del sol tiene como consecuencia una flexibilización torsional del conjunto, equivalente a la mostrada por el acoplamiento entre parejas de un mismo engrane. El efecto es grande, debido a la mayor proximidad entre engranes, y se verá consecuentemente incrementado con el aumento de vías de la transmisión.
- El acoplamiento entre los n engranes de la corona tiene una incidencia despreciable en el comportamiento del sistema para las condiciones de contorno consideradas en este estudio. Se plantea la posibilidad futura de permitir la flexión y deformación de la corona con el fin de comprobar la nueva situación de acoplamiento.
- En conjunto, el efecto total de los distintos acoplamientos está dominado por la flexibilización causada por la deformación del cuerpo del sol, modificando considerablemente el valor medio del error de transmisión y rigidez del conjunto.
- Se concluye del estudio del coeficiente de reparto de carga (CRC) en distintas configuraciones que para la transmisión fija (grados de libertad únicamente rotacionales) el CRC presenta una gran variación, achacable al desfase de rigidez entre vías.
- Pese al distinto CRC entre las distintas vías, se ha observado que este hecho no tiene impacto alguno sobre el nivel máximo de las fuerzas de contacto, que no sobrepasan su máximo nominal.
- Para la configuración flotante, el CRC se hace homogéneo, exceptuando las zonas en las que existen contactos fuera de la línea de acción, donde se pueden observar alteraciones despreciables del CRC, con el máximo en una décima de punto porcentual.
- Del estudio de errores de posicionamiento de los planetas, se concluye que:
 - El error tangencial tiene un gran impacto sobre el reparto de carga en configuraciones no flotantes, pudiendo suponer,

para determinadas combinaciones de desviación y par, la descarga completa de una o más vías.

- Las consecuencias dañinas para la transmisión son peores en el caso del error tangencial positivo, al tener el potencial de reducir en mayor medida el número de vías entre las que se reparte la carga.
 - El efecto del error tangencial sobre el CRC tiene una consecuencia sobre el nivel máximo de las fuerzas de contacto en los engranes, pero de manera análoga a lo que sucede en la transmisión sin defectos, el aumento de la fuerza de contacto no es proporcional a la variación del CRC.
 - El error de posicionamiento radial tiene un impacto mucho menor sobre el CRC (cuantificado en este estudio para el ejemplo utilizado como 40 veces menor) al causado por el error tangencial. Sin embargo, en contra de lo descrito en la bibliografía, este impacto no es nulo, sino que depende de la diferencia entre ángulos de presión sol-planeta y planeta-corona.
 - El aumento de la carga tiene como consecuencia la dilución de los efectos del error de posicionamiento, por la presencia de unos mayores valores de deformación global.
 - En el caso de la transmisión con sol flotante, el sol describe una órbita de radio comparable con el error de posicionamiento introducido, absorbiendo los solapamientos o precargas introducidos y mejorando el CRC hasta un reparto prácticamente equitativo.
- Se ha concluido que los efectos del error de excentricidad son comparables con la evolución armónica de un defecto de posicionamiento, a través de sus distintas componentes tangencial y radial, tanto positivas como negativas.

El modelizado de transmisiones planetarias se encuentra en este momento en pleno auge, con numerosos grupos de investigación realizando aportaciones en diversos frentes. Si bien existe un cierto consenso en el empleo de

herramientas de elementos finitos hibridizadas con formulaciones analíticas, la diversidad de métodos empleados y la variabilidad de hipótesis y simplificaciones adoptadas dificultan enormemente la correlación entre los distintos modelos. En cuanto a la verificación experimental, la escasez de trabajos así como la tendencia de los investigadores a mostrar únicamente los resultados que mejor ajustan sus modelos, dificultan el cruce de datos entre grupos de investigación, de lo que se extrae la necesidad de realizar una verificación experimental propia.

8.3. TRABAJO FUTURO

A partir de la reflexión crítica del trabajo realizado, se plantean las siguientes líneas de trabajo futuro, que pueden servir para complementar, ampliar o continuar la investigación realizada en transmisiones planetarias.

- **VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL:** Esta línea de trabajo futuro, cuyo interés ha sido justificado anteriormente, se encuentra presente en la inmensa mayoría de las nuevas propuestas de investigación a partir de estudios teóricos o de modelizado. Como se ha comentado al inicio de este documento, a la fecha de escritura de esta memoria esta es una línea de trabajo ya activa, gracias al desarrollo y puesta en marcha de un banco de ensayos de transmisiones planetarias realizado por el Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria.
- **CORONA FLEXIBLE:** La modificación de las condiciones de contorno en el cálculo de flexibilidad de la corona puede dar lugar a resultados muy diferentes a los mostrados para el caso estudiado. En determinados casos la corona es delgada o no se encuentra restringida en su perímetro, pudiendo experimentar grandes desviaciones de forma y resultando en grandes acoplamientos entre sus engranes.
- **TRENES COMPUESTOS:** Es muy habitual, por la facilidad de conexión, fruto de su configuración coaxial, el enlace de varias etapas de caja planetaria. Por su simplicidad de implementación e importancia de aplicación, esta línea de trabajo futuro puede dar respuesta a numerosos problemas dinámicos propios del acoplamiento entre transmisiones.

-
- **MODELIZACIÓN DE ERRORES Y DEFECTOS:** Además de los errores de posicionamiento y excentricidad, puede resultar interesante realizar un análisis de los distintos efectos asociados con el funcionamiento de transmisiones planetarias, planteando la posibilidad de incluir en el modelo, por ejemplo, la aparición de grietas en el portaplanetas o en la corona.

Bibliografía

- [Abdousleiman, 2006] Abousleiman, V.; Velez, P.: “*A Hybrid 3D Finite element/lumped Parameter Model for Quasi-Static and Dynamic Analyses of planetary/epicyclic Gear Sets*”. Mechanism and Machine Theory, vol. 41, no. 6, pp. 725-748, (2006).
- [Abdousleiman, 2007] Abousleiman, V. et ál.: “*Modeling of Spur and Helical Gear Planetary Drives with Flexible Ring Gears and Planet Carriers*”. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 129, no. 1, pp. 95-106, (2007).
- [Ajmi, 2005] Ajmi, M.; Velez, P.: “*A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears*”, Mechanism and Machine Theory, 30(2), pp. 173-190, (2005).
- [Aktüuk, 1997] Aktüuk, N. et ál.: “*The effects of number of balls and preload on vibrations associated with ball bearings*”, ASME Journal of Tribology, 119, pp. 747-753, (1997).
- [Al-shyyab, 2005a] Al-shyyab, A.; Kahraman, A.: “*Non-linear dynamic analysis of multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: sub-harmonic motions*”, Journal of Sound and Vibration, 279, pp. 417-451, (2005).

- [Al-shyyab, 2005b] Al-shyyab, A.; Kahraman, A.: "*Non-linear dynamic analysis of multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions*", Journal of Sound and Vibration, 284, pp. 151-172, (2005).
- [Ambarisha, 2006] Ambarisha, V. K.; Parker, R. G.: "*Suppression of Planet Mode Response in Planetary Gear Dynamics through Mesh Phasing*". Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, vol. 128, no. 2, pp. 133-142, (2006).
- [Ambarisha, 2007] Ambarisha, V. K.; Parker, R. G.: "*Nonlinear Dynamics of Planetary Gears using Analytical and Finite Element Models*". Journal of Sound and Vibration, vol. 302, no. 3, pp. 577-595, (2007).
- [Andersson, 2003] Andersson, A.; Vedmar, L.: "*A dynamic model to determine vibrations in involute helical gears*", Journal of Sound and Vibration, 260(2), pp. 195-212, (2003).
- [Antolick, 2010] Antolick, L. J. et ál.: "*Evaluation of gear condition indicator performance on rotorcraft fleet*". Annual Forum Proceedings - AHS International, (2010).
- [Argyris, 2002] Argyris, J. et ál.: "*Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191 (11-12), pp. 1057-1095, (2002).
- [Attia, 1959] Attia, A. Y.: "*Dynamic Loading of Spur Gear Teeth*", Journal of Engineering for Industry, ASME Transactions, Vol. 81, Ser. B, p. 1, (1959).
- [August, 1986] August, R.; Kasuba, R.: "*Torsional Vibrations and Dynamic Loads in a Basic Planetary Gear System*". Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, vol. 108, no. 3, pp. 348-353, (1986).

-
- [Baglioni, 2012] Baglioni, S. et ál.: “*Influence of the addendum modification on spur gear efficiency*”. Mechanism and Machine Theory, 49:216-33, (2012).
- [Barszcz, 2009] Barszcz, T.; Randall, R. B.: “*Application of Spectral Kurtosis for Detection of a Tooth Crack in the Planetary Gear of a Wind Turbine*”. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 23, no. 4, pp. 1352-1365, (2009).
- [Bartelmus, 2009] Bartelmus, W.; Zimroz, R.: “*A New Feature for Monitoring the Condition of Gearboxes in Non-Stationary Operating Conditions*”. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 23, no. 5, pp. 1528-1534, (2009).
- [Blankenship, 1995a] Blankenship, G. W.; Singh, R.: “*A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation*”, Mechanism and Machine Theory, 30(1), pp. 43-57, (1995).
- [Blankenship, 1995b] Blankenship, G. W.; Singh, R.: “*Dynamic force transmissibility in helical gear pairs*”, Mechanism and Machine Theory, 30(3), pp. 323-339, (1995).
- [Blunt, 2006] Blunt, DM.; Keller, JA.: “*Detection of a fatigue crack in a UH-60A planet gear carrier using vibration analysis*”. Mechanical Systems and Signal Processing; 20(8):2095-2111, (2006).
- [Botman, 1976] Botman, M.: “*Epicyclic Gear Vibrations*”. J Eng Ind Trans ASME, vol. 98 Ser B, no. 3, pp. 811-815, (1976).
- [Botman, 1979] Botman, M.; Toda, A.: “*Planet indexing in planetary gears for minimum vibrations*”, ASME paper no. 79-DET-73, (1979).
- [Brancati, 2005] Brancati, R. et ál.: “*A gear rattle model accounting for oil squeeze between the meshing gear teeth*”, Proceedings of the Institution of Mechanical

- Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 219(9) pp. 1075-1083, (2005).
- [Brancati, 2007] Brancati, R. et ál.: “*An analysis of the automotive driveline dynamic behaviour focusing on the influence of the oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon*”, Journal of Sound and Vibration, 303 pp. 858-872, (2007).
- [Brauer, 2002] Brauer, J.: “*Analytical geometry of straight conical involute gears*”, Mechanism and Machine Theory, 37(1), pp. 127-141, (2002).
- [Brauer, 2004] Brauer, J.: “*A general finite element model of involute gears*”, Finite Elements in Analysis and Design, 40(5), pp. 431-457, (2004).
- [Brauer, 2005] Brauer J.: “*Transmission error in anti-backlash conical involute gear transmissions: a global-local FE approach*”, Finite Elements in Analysis and Design, 41(5), pp. 431-457, (2005).
- [Cai, 1994] Cai, Y.; Hayashi, T.: “*The linear approximated equation of vibration of a pair of spur gears (Theory and experiments)*”, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Design, 116, pp. 558-564, (1994).
- [Chaari, 2013] Chaari, F.: “*Analysis of planetary gear transmission in non-stationary operations*”, Frontiers of Mechanical Engineering, 8(1), pp. 88-94, (2013).
- [Changqing, 2006] Changqing, B.; Qingyu, X.: “*Dynamic model of ball bearings with internal clearance and waviness*”, Journal of Sound and Vibration, 294(1-2), pp. 23-48, (2006).
- [Chen, 2012] Chen, C. et ál.: “*Machine Remaining Useful Life Prediction: An Integrated Adaptive Neuro-Fuzzy and High-Order Particle Filtering Approach*”. Mechanical Systems and Signal Processing, (2012)

-
- [Cheng, 2001] Cheng, Y.; Lim, T. C.: “*Vibration analysis of hypoid transmissions applying an exact geometry-based gear mesh theory*”, Journal of Sound and Vibration, 240(3), pp. 519-543, (2001).
- [Chung, 2007] Chung, M.Y.; Shaw, D.: “*Parametric study of dynamics of worm and worm-gear set under suddenly applied rotating angle*”, Journal of Sound and Vibration, 304(1-2), pp. 246-262, (2007).
- [Cunliffe, 1974] Cunliffe, F. et ál.: “*Dynamic Tooth Loads in Epicyclic Gears*”. J Eng Ind Trans ASME, vol. 96 Ser B, no. 2, pp. 578-584, (1974).
- [Di Puccio, 2005] Di Puccio, F. et ál.: “*Alternative formulation of the theory of gearing*”, Mechanism and Machine Theory, 40, pp. 613-637, (2005).
- [Di Puccio, 2006] Di Puccio, F. et ál.: “*Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach*”, Mechanism and Machine Theory, 41, pp. 382-404, (2006).
- [Dietl, 2000] Dietl P. et ál.: “*Rolling bearing damping for dynamic analysis of multi-body systems – experimental and theoretical results*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 214, pp. 33-43, (2000).
- [Ebrahimi, 2006] Ebrahimi, S.; Eberhard, P.: “*Rigid-elastic modelling of meshing gear wheels in multibody systems*”, Multibody System Dynamics, 16, pp. 55-71, (2006).
- [Eritenel, 2005] Eritenel, T.; Parker, R.G.: “*A static and dynamic model for three-dimensional, multi-mesh gear systems*”, Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - DETC2005, 5, pp. 945-956, (2005).

- [Fagang, 2009] Fagang Z. et ál.: “*Neuro-fuzzy based condition prediction of bearing health*”. JVC/Journal of Vibration and Control; 15(7):1079-1091, (2009).
- [Fernández, 2010] Fernández del Rincón, A.: “*Modelo avanzado para el estudio del comportamiento vibratorio de sistemas de transmisión mediante engranajes*”, PhD Tesis, Universidad de Cantabria, (2010).
- [Fernández, 2012] Fernández, A., et ál., “*Effect of cracks and pitting defects on gear meshing*”, Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science, 226(11), 2805–2815, (2012).
- [Fernández, 2013a] Fernández, A., et ál., “*Gear transmission dynamic: Effects of tooth profile deviations and support flexibility*”, Applied Acoustics, Article in Press, (2013).
- [Fernández, 2013b] Fernández, A., et ál., “*A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions*”, Mechanism and Machine Theory, 61, pp. 30-58, (2013).
- [Fukata, 1985] Fukata, S. et ál.: “*On the radial vibration of ball bearings*”, Bulletin of JSME, 28(239), pp. 899-904, (1985).
- [Gu, 2012a] Gu, X.; Vex, P. A.: “*Dynamic Model to Study the Influence of Planet Position Errors in Planetary Gears*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 331, no. 20, pp. 4554-4574, (2012).
- [Gu, 2012b] Gu, X.; Vex, P. A.: “*On the Dynamic Simulation of Eccentricity Errors in Planetary Gears*”, Mechanism and Machine Theory, vol. 61, pp. 14-29, (2012).
- [Guo, 2010] Guo, Y.; Parker, R. G.: “*Sensitivity of General Compound Planetary Gear Natural Frequencies and Vibration Modes to Model Parameters*”, Journal of

-
- Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, vol. 132, no. 1, pp. 0110061-01100613, (2010).
- [Gustafsson, 1963] Gustafsson, O. G. et ál.: “*Research report on study of the vibration characteristics of bearings*”, Report: AL631023, Reg: 58514:4223 SKF Ind., (1963).
- [Harris, 2001] Harris, T. A.: “*Rolling bearings analysis*”, 4th edition, John Wiley & Sons, Inc., USA (2001).
- [Harsha, 2005] Harsha, S. P.: “*Non-Linear dynamic response of a balanced rotor supported on rolling element bearings*”, Mechanical Systems and Signal Processing, 19, pp. 551-578, (2005).
- [He, 2007] He, S. et ál.: “*Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness*”, Journal of Sound and Vibration, 301, pp. 927-949, (2007).
- [Hedlund, 2007] Hedlund, J.; Lehtovaara, A.: “*Modelling of helical gear contact with tooth deflection*”, Tribology International, 40(4), pp. 613-619, (2007).
- [Heng, 2009] Heng, A. et ál.: “*Rotating machinery prognostics: State of the art, challenges and opportunities*”. Mech Syst Signal Process, 23(3):724-739, (2009).
- [Hernot, 2000] Hernot, X. et ál.: “*Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach*”, Journal of Mechanical Design, 122, pp. 83-90, (2000).
- [Heyns, 2012] Heyns, T. et ál.: “*Statistical gear health analysis which is robust to fluctuating loads and operating speeds*”. Mechanical Systems and Signal Processing, 2;27(0):651-666, (2012).
- [Hidaka, 1979] Hidaka, T. et ál.: “*Dynamic behavior of planetary gear (6th report: influence of meshing phase)*”, Bull. JSME 22 (169), 1026–1033, (1979).

- [Höhn, 2010] Höhn, B.: “*Improvements on noise reduction and efficiency of gears*”, *Meccanica*; 45(3):425-37, (2010).
- [Howard, 2001] Howard, I. et ál.: “The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), pp. 831-853, (2001).
- [Iglesias, 2013] Iglesias, M. et ál.: “*Planet position errors in planetary transmission: Effect on load sharing and transmission error*”, *Frontiers of Mechanical Engineering*, 8(1), pp. 80-87, (2013).
- [Iida, 1985] Iida, H. et ál.: “Vibrational characteristics of friction between gear teeth”, *Bulletin of JSME* 28(241), pp. 1512-1519, (1985).
- [Inalpolat, 2010] Inalpolat, M.; Kahraman, A.: “*A Dynamic Model to Predict Modulation Sidebands of a Planetary Gear Set having Manufacturing Errors*”. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 4, pp. 371-393, (2010).
- [Jang, 2002] Jang, G. H.: “*Nonlinear excitation model of ball bearing waviness in a rigid rotor supported by two or more ball bearings considering five degrees of freedom*”, *ASME Journal of Tribology*, 124, pp. 82-90, (2002).
- [Jang, 2004] Jang, G.; Jeong, S.-W.: “*Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness*”, *Journal of Sound and Vibration*, 269 (3-5), pp. 709-726, (2004).
- [Jardine, 2005] Jardine, KSA.; Tsang, HC.: “*Maintenance, Replacement, and Reliability: Theory and Applications*”, Taylor & Francis, (2005).
- [Jones, 1960] Jones, A. B.: “*A general theory of elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions*”, *ASME Journal of Basic Engineering*, 82, pp. 309-320, (1960).

-
- [Kahraman, 1993] Kahraman, A.: “*Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair*”, Journal of Vibration and Acoustics, 115(1), pp. 33-39, (1993).
- [Kahraman, 1994a] Kahraman, A.: “*Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train*”. Journal of Mechanical Design, Transactions Of the ASME, 116 (3) , pp. 706–712. (1994)
- [Kahraman, 1994b] Kahraman, A.: “*Load Sharing Characteristics of Planetary Transmissions. Mechanism and Machine Theory*”, vol. 29, no. 8, pp. 1151-1165, (1994).
- [Kahraman, 1994c] Kahraman, A.: “*Planetary Gear Train Dynamics. Journal of Mechanical Design*”, Transactions of the ASME, vol. 116, no. 3, pp. 713-720, (1994).
- [Kahraman, 1994d] Kahraman, A.: “*Natural Modes of Planetary Gear Trains*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 173, no. 1, pp. 125-130, (1994).
- [Kahraman, 2001] Kahraman, A.; Vijayakar, S.; “*Effect of Internal Gear Flexibility on the Quasi-Static Behavior of a Planetary Gear Set*”, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 123, no. 3, pp. 408-415, (2001).
- [Kahraman, 2003] Kahraman, A. et ál.: “*A Deformable Body Dynamic Analysis of Planetary Gears with Thin Rims*”, Journal of Sound and Vibration. Columbus, OH ed., vol. 262, no. 3, pp. 752-768, (2003).
- [Kasuba, 1981] Kasuba, R.; Evans, J. W.: “*An extended model for determining dynamic loads in spur gearing*”, Journal of Mechanical Design, 103(2), pp. 398-409, (1981).
- [Korrenn, 1963] Korrenn, H. et ál.: “*Die Elastische Verformung einer ebenen Stahloberfläche unter belasteten Zylinderrollen*”, Werkstattstechnik 53, pp. 178-182, (1963).

- [Koster, 1974] Koster, M. P.: *“Vibrations of Cam Mechanism”*, McMillan Press, London UK, (1974).
- [Kuang, 1992] Kuang, J. H.; Yang, Y. T.: *“An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair”*, International Power Transmission and Gearing Conference, DE-Vol.43-1, (1992).
- [Kunert, 1961] Kunert, K.: *“Spannungsverteilung im Halbraum bei elliptischer Fläschenpressungsverteilung über einer rechteckigen Druckfläche”*, Forschung auf d. Gebiet d. Ingenieur-Wesens 27, (1961).
- [Li, 2007] Li, S.: *“Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications”*, Mechanism and Machine Theory, 42 (1), pp. 88-114, (2007).
- [Liao, 2001] Liao, N. T.; Lin, J. F.: *“A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle”*, Journal of Mechanical Design, 123, pp. 304-312, (2001).
- [Liew, 2005] Liew, H.-V.; Lim, T. C.: *“Analysis of time-varying rolling element gearing characteristics”*, Journal of Sound and Vibration, 283(3-5), pp. 1163-1179, (2005).
- [Ligata, 2007] Ligata, H.: *“Impact of System Level Factors on Planetary Gear Set Behavior”*, Ph.D. Thesis, Ohio State University, (2007).
- [Ligata, 2008] Ligata, H. et ál.: *“An Experimental Study of the Influence of Manufacturing Errors on the Planetary Gear Stresses and Planet Load Sharing”*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 130, no. 4, (2008).

-
- [Lim, 1989] Lim, T. C.: “*Vibration transmission through rolling element bearings in geared rotor systems*”, Ph.D. Thesis, The Ohio State University, (1989).
- [Lin, 1988] Lin, H.-H. et ál.: “*On dynamic loads in parallel shaft transmissions: Part I*”, NASA Technical Report, Document ID: 19880003415; Report Number: NASA TM- 100181, (1988).
- [Lin, 1999a] Lin, J.; Parker, R. G.: “*Sensitivity of Planetary Gear Natural Frequencies and Vibration Modes to Model Parameters*”, Journal of Sound and Vibration, vol. 228, no. 1, pp. 109-128, (1999).
- [Lin, 1999b] Lin, J.; Parker, R. G.: “*Analytical Characterization of the Unique Properties of Planetary Gear Free Vibration*”, Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, vol. 121, no. 3, pp. 316-321, (1999).
- [Lin, 2002a] Lin, J.; Parker, R. G.: “*Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems*”, Journal of Vibration and Acoustics, 124, pp. 68-76, (2002).
- [Lin, 2002b] Lin, J.; Parker, R. G.: “*Planetary gear parametric instability caused by mesh stiffness variation*”, Journal of Sound and Vibration, 249(1), pp. 129-145, (2002).
- [Liptak, 2005] Liptak, M.; Fox, R.: “*The history of Helicopter safety*”, International Helicopter Safety Symposium, American Helicopter Society International, Inc., (2005).
- [Litvin, 1987] Litvin, F. L. et ál.: “*New generation methods for spur, helical and spiral-bevel gears*”, NASA Technical Report (Glenn Research Center), Document ID: 19870066146, (1987)
- [Litvin, 2002] Litvin, F. L. et ál.: “*Face-Gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm,*

- stress analysis*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191(25-26), pp. 2785-2813, (2002).
- [Litvin, 2003] Litvin, F. L. et ál.: "*Modified involute helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(33-34), pp. 3619-3655, (2003).
- [Litvin, 2004] Litvin, F. L.; Fuentes, A.: "*Gear Geometry and Applied Theory*", Second edition, Cambridge University Press., ISBN 0-521-81517-7, United Kingdom (2004).
- [Litvin, 2006] Litvin, F. L. et ál.: "*Design, simulation of meshing, and contact stresses for an improved worm gear drive*", Mechanism and Machine Theory, Vol. 42(8), pp. 940-959, (2007).
- [Lundvall, 2004] Lundvall, O. et ál.: "*A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears*", Journal of Sound and Vibration, 278(3,6), pp. 479-499, (2004).
- [Ma, 1984] Ma, P.; Botman, M.: "*Load sharing in a planetary gear stage in the presence of gear errors and misalignment*", ASME, J. Mech. Trans. Automat. Des., 84-DET-54, (1984).
- [MacLennan, 2002] MacLennan, L. D.: "*An analytical method to determine the influence of shape deviation on load distribution and mesh stiffness for spur gears*", Proceedings of IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 216, pp. 1005-1016, (2002).
- [McFadden, 1985] Mcfadden, P. D.; Smith, J. D. "*Explanation for the Asymmetry of the Modulation Sidebands about the Tooth Meshing Frequency in Epicyclic Gear Vibration*", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C. Mechanical

-
- Engineering Science, vol. 199, no. 1, pp. 65-70, (1985).
- [Meisel, 2006] Meisel, J.: “*An analytic foundation for the Toyota Prius THS-II powertrain with a comparison to a strong parallel hybrid-electric powertrain*”, SAE Technical Papers, (2006).
- [Meltzer, 2003a] Meltzer, G.; Ivanov, Y. Y.: “*Fault Detection in Gear Drives with Non-Stationary Rotational Speed - Part I: The Time-Frequency Approach*”, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 17, no. 5, pp. 1033-1047, (2003).
- [Meltzer, 2003b] Meltzer, G.; Ivanov, Y. Y.: “*Fault Detection in Gear Drives with Non-Stationary Rotational Speed - Part II: The Time-Frequency Approach*”. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 17, no. 2, pp. 273-283, (2003).
- [Michaelis, 2011] Michaelis, K. et ál.: “*Influence factors on gearbox power loss*”, Ind Lubr Tribol., 63(1):46-55 (2011).
- [Mitsuya, 1998] Mitsuya, Y. et ál.: “*Damping in vibration transfer through deep-groove ball bearings*”, Journal of Tribology, 124, pp. 413-420, (1998).
- [Montestruc, 2011] Montestruc, A. N.: “*Influence of Planet Pin Stiffness on Load Sharing in Planetary Gear Drives*”, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 133, no. 1, (2011).
- [Mucchi, 2010] Mucchi, E. et ál.: “*Elastodynamic analysis of a gear pump. Part II: Meshing phenomena and simulation results*”, Mechanical Systems and Signal Processing, vol 24 (7), pp 2180-2197, (2010).
- [Nataraj, 2008] Nataraj, C.; Harsha, S. P.: “*The effect of bearing cage run-out on the nonlinear dynamics of a rotating shaft*”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(4), pp. 822-838, (2008).

- [**Özgülven, 1988**] Özgülven, H. N.; Houser, D. R.: *“Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error”*, Journal of Sound and Vibration, 125(1), pp. 71-83, (1988).
- [**Palmgren, 1959**] Palmgren, A.: *“Ball and roller bearing engineering”*, 3^a Ed., Ed. SKF, (1959).
- [**Parker, 2000a**] Parker, R.G. et ál.: *“Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons”*, Journal of Sound and Vibration, 237(3), pp. 435-455, (2000).
- [**Parker, 2000b**] Parker, R.G.: *“Physical Explanation for the Effectiveness of Planet Phasing to Suppress Planetary Gear Vibration”*, Journal of Sound and Vibration, vol. 236, no. 4, pp. 561-573, (2000).
- [**Parker, 2000c**] Parker, R. G. et ál.: *“Dynamic Response of a Planetary Gear System using a Finite element/contact Mechanics Model”*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 122, no. 3, pp. 304-310, (2000).
- [**Parker, 2004**] Parker, R. G.; Lin, J.: *“Mesh Phasing Relationships in Planetary and Epicyclic Gears”*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 126, no. 2, pp. 365-370, (2004).
- [**Peeters, 2006**] Peeters, J.: *“Simulation of dynamic drive train loads in a wind turbine”*, Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, (2006).
- [**Pimsarn, 2002**] Pimsarn, M.; Kazerounian, K.: *“Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo-interference stiffness estimation method”*, Mechanism and Machine Theory, 37, pp. 769-786, (2002).
- [**Pimsarn, 2003**] Pimsarn, M.; Kazerounian, K.: *“Pseudo-interference stiffness estimation, a highly efficient numerical*

-
- method for force evaluation in contact problems*”, Engineering with Computers, 19, pp. 85-91, (2003).
- [Pimsarn, 2005a] Pimsarn, M.: *“Tooth profile modifications for optimum dynamic load in spur gears based on pseudo-interference stiffness estimation method”*, Ph.D. Thesis, University of Connecticut, (2005).
- [Pimsarn, 2005b] Pimsarn, M.; Kazerounian, K.: *“Tooth profile modifications for optimum dynamic load in spur gears based on pseudo-interference stiffness estimation method”*, Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE (2005).
- [Pintz, 1983] Pintz, A. et ál.: *“Dynamic effects of internal spur gear drives”*, NASA Technical Report, Document ID: 19830020181; Report Number: NAS 1.263692, NASA-CR-3692, (1983).
- [Ribrant, 2005] Ribrant, J.; Bertling, LM.: *“Survey of failures in wind power systems with focus on Swedish wind power plants during 1997-2005”*. IEEE Trans Energy Convers; 22(1):167-173, (2007).
- [Royston, 1998] Royston, T. J.; Basdogan, I.: *“Vibration transmission through self-aligning (spherical) rolling element bearings: Theory and experiment”*, Journal of Sound and Vibration, 215(5), pp. 997-1014, (1998).
- [Saada, 1995] Saada, A.; Velex, P.: *“Extended Model for the Analysis of the Dynamic Behavior of Planetary Trains”*, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 117, no. 2 A, pp. 241-247, (1995).
- [Sainsot, 2004] Sainsot, P. et ál.: *“Contribution of gear body deflections – A new bidimensional analytical formula”*, Journal of Mechanical Design, 126(4), pp. 748-752, (2004).

- [Seager, 1975] Seager, D. L.: “*Conditions for the Neutralization of Excitation by the Teeth in Epicyclic Gearing*”, J Mech Eng Sci, vol. 17, no. 5, pp. 293-298, (1975).
- [Seol, 1996] Seol, I. H.; Litvin, F. L.: “*Computerized design, generation and simulation of meshing and contact of worm-gear drives with improved geometry*”, Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, 138(1-4), pp. 73-103, (1996).
- [Sheveleva, 2007] Sheveleva, G. I. et ál.: “*Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears*”, Mechanism and Machine Theory, 42(2), pp. 198-215, (2007).
- [Singh, 2010] Singh, A.: “*Load Sharing Behavior in Epicyclic Gears: Physical Explanation and Generalized Formulation*”, Mechanism and Machine Theory, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 511-530, (2010).
- [Singh, 2011] Singh, A.: “*Epicyclic Load Sharing Map - Development and Validation*”, Mechanism and Machine Theory, vol. 46, no. 5, pp. 632-646, (2011).
- [Sirichai, 1999] Sirichai, S.: “*Torsional properties of spur gears in mesh using nonlinear finite element analysis*”, Ph.D. Thesis, Curtin University of Technology, (1999).
- [Smith, 1999] Smith, J.D.: “*Gear Noise and Vibration*”. Marcel Dekker Inc. (1999)
- [Theodossiades, 2001] Theodossiades, S.; Natsiavas, S.: “*On geared rotordynamic systems with oil journal bearings*”, Journal of Sound and Vibration, 243(4), pp. 721-745, (2001).
- [Theodossiades, 2007] Theodossiades, S. et ál.: “*Gear teeth impacts in hydrodynamic conjunctions promoting idle gear rattle*”, Journal of Sound and Vibration, 303, pp. 632-658, (2007).

-
- [**Tiwari, 2000**] Tiwari, M.: “*Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings*”, Journal of Sound and Vibration, 238(5), pp. 757-779, (2000).
- [**Umezawa, 1973**] Umezawa, K.; Ishikawa, J.: “*Deflection due to contact between gear teeth with finite width*”, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers, 16(97), pp. 1085-1093, (1973).
- [**Umezawa, 1984**] Umezawa, K. et ál.: “*Simulation on rotational vibration of spur gears*”, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers, 27(223), pp. 102-109, (1984).
- [**Umezawa, 1986a**] Umezawa, K. et ál.: “*Vibration of Power Transmission helical gears (Approximate equation of tooth stiffness)*”, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers, 29(251), pp. 1605-1611, (1986).
- [**Umezawa, 1986b**] Umezawa, K. et ál.: “*Vibration of three axes gear system*”, Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers, 29(249), pp. 950-957, (1986).
- [**Vaishya, 2000**] Vaishya, M.; Houser, D. R.: “*Modeling and analysis of sliding friction in gear dynamics*”, Proceedings of ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences DETC, (2000).
- [**Vaishya, 2003**] Vaishya, M.; Singh, R.: “*Strategies for modeling friction in gear dynamics*”, Journal of Mechanical Design, 125, pp. 383-393, (2003).
- [**Vance, 1988**] Vance, J. M.: “*Rotordynamics of Turbomachinery*”, John Wiley & Sons, (1988).
- [**Vedmar, 1981**] Vedmar, L.: “*On the design of external involute helical gears*”, Transactions of machine elements division, Lund Technical University, (1981).
- [**Vedmar, 1998**] Vedmar, L.; Henriksson, B.: “*A general approach for determining dynamic forces in spur gears*”, Journal of Mechanical Design, 120 pp. 593-598, (1998).

- [Vedmar, 2003] Vedmar, L.; Andersson, A.: “*A method to determine dynamic loads on spur gear teeth and on bearings*”, Journal of Sound and Vibration, 267(5), pp. 1065-1084, (2003).
- [Velex, 1996a] Velex, P.; Maatar, M.: “*A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour*”, Journal of Sound and Vibration, 191(5), pp. 629-660, (1996).
- [Velex, 1996b] Velex, P.; Flamand, L.: “*Dynamic Response of Planetary Trains to Mesh Parametric Excitations*”, Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, vol. 118, no. 1, pp. 7-14, (1996).
- [Velex, 2000] Velex, P.; Cahouet, V.: “*Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics*”, Journal of Mechanical Design, 122, pp. 515-522, (2000).
- [Velex, 2002] Velex, P.; Sainsot, P.: “*An analytical study of tooth friction excitations in errorless spur and helical gears*”, Mechanism and Machine Theory, 37(7), pp. 641-658, (2002).
- [Viadero, 2007] Viadero, F. et ál.: “*A model of spur gears supported by ball bearings*”, Computational Methods and Experimental Measurements XIII, pp.711-722, (2007).
- [Viadero, 2013] Viadero, F. et ál.: “*Non-Stationary Dynamic Analysis of a Wind Turbine Power Drivetrain: Offshore Considerations*”, Applied Acoustics, Article in Press, (2013).
- [Vijayakar, 1988] Vijayakar, S. et ál.: “*Linearization of multibody frictional contact problems*”, Computers and Structures, 29(4), pp. 569-576, (1988).

-
- [Vijayakar, 1991] Vijayakar, S.: “*A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem*”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 31, pp. 525-545, (1991).
- [Wang, 2003] Wang, J.: “*Numerical and experimental analysis of spur gears in mesh*”, Ph.D. Thesis, Curtin University of Technology, (2003).
- [Wang, 2006] Wang, J., Howard, I.M.: “*Error analysis on finite element modeling of involute spur gears*”, *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 128 (1), pp. 90-97, (2006).
- [Weber, 1949] Weber, C.: “*The Deformation of Loaded Gears and the Effect on Their Load Carrying Capacity*”, Sponsored Research (Germany), British Department of Scientific and Industrial Research, Report No. 3 (1949).
- [Wensing, 1998] Wensing, J. A.: “*On the dynamics of ball bearings*”, Ph.D. Thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands, (1998).
- [Wink, 2005] Wink, C. H.; Serpa, A. L.: “*Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error*”, *Proceedings of IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 219, pp. 501-509, (2005).
- [Wink, 2007] Wink, C. H.; Serpa, A. L.: “*Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth*”, *Mechanism and Machine Theory*, 43(1), pp. 80-94, (2007).
- [Wojnarowski, 2003] Wojnarowski, J.; Onishchenko, V.: “*Tooth wear effects on spur gear dynamics*”, *Mechanism and Machine Theory*, 38(2), pp. 161-178, (2003).
- [Wu, 2008] Wu, X.; Parker, R. G.: “*Modal Properties of Planetary Gears with an Elastic Continuum Ring*”

- Gear*", Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, vol. 75, no. 3, pp. 0310141-03101412, (2008).
- [Yamamoto, 1955] Yamamoto, T.: "*On the vibration of a shaft supported by bearing having radial clearance*", Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineering, 21, pp. 182-192, (1955).
- [Yang, 1985] Yang, D. C. H.; Sun, Z. S.: "*A rotary model for spur gear dynamics*", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in design, 107, pp. 529-535, (1985).
- [Yang, 1987] Yang, D. C. H.; Lin, J. Y.: "*Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics*", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in design, 109, pp. 189-196, (1987).
- [Yuksel, 2004] Yuksel, C.; Kahraman, A.: "*Dynamic Tooth Loads of Planetary Gear Sets having Tooth Profile Wear*", Mechanism and Machine Theory, vol. 39, no. 7, pp. 695-715, (2004).
- [Zhang, 2007] Zhang, J. et ál.: "*The modified pitch cone design of the hypoid gear: Manufacture, stress analysis and experimental test*", Mechanism and Machine Theory, 42 (2), pp. 147-158, (2007).
- [Zhi-Ling, 2012] Zhi-Ling, Y. et ál.: "*Expert System of Fault Diagnosis for Gear Box in Wind Turbine*". Systems Engineering Procedia, 4(0):189-195 (2012).