SOBRE UNA CLASE DE RIESGOS DEPENDIENTES

José María Sarabia[1]*, Faustino Prieto[1]

Resumen

El análisis de riesgos dependientes ha recibido una gran atención en la estadística actuarial moderna. En el siguiente trabajo se presenta una clase general de riesgos dependientes, así como dos modelos específicos. La nueva clase se construye mediante la técnica estadística de las variables en común, de modo que los riesgos dependientes obtenidos son fáciles de simular. Se obtienen algunas de sus propiedades incluyendo las funciones de distribución y densidad multivariantes, momentos, distribuciones marginales, dependencia estadística, así como el modelo de riesgo individual. Se consideran extensiones basadas en clases dependientes. A continuación se estudian dos modelos específicos, denominados gamma-gamma y beta-beta. En el modelo gamma-gamma, se trabaja con riesgos distribuidos según variables aleatorias tipo gamma. Se estudian diversas propiedades, así como el modelo de riesgo individual. El segundo modelo es el denominado beta-beta, y permite trabajar con riesgos cuyo soporte es acotado. Finalmente, se propone un método de estimación basado en momentos y se incluye una aplicación numérica.

Palabras Clave: Riesgos dependientes, modelo de riesgo individual, distribuciones gamma y beta.

Abstract

The analysis of dependent risk has received a lot of attention in the modern actuarial statistics. In the following paper, a general class of dependent risks and two specific models are presented. The new class is built using the methodology of the common random variables, and then the dependent risks obtained are easy to simulate. We obtain some of its properties, including the

---

[1] Departamento de Economía. Universidad de Cantabria, Avda. de los Castros s/n, 39005-Santander.
E-mail: sarabiaj@unican.es (José María Sarabia); faustino.prieto@unican.es (Faustino Prieto).
[*] Autor para correspondencia: sarabiaj@unican.es .
Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia e Innovación (proyecto ECO2010-15455) por la financiación parcial de este trabajo.
Este artículo ha sido recibido en versión revisada el 20 de junio de 2011

joint cumulative distribution and the joint probability density multivariate functions, moments, marginal distributions, statistics dependence, as well as the individual risk model. Extensions based on dependent classes are considered. Then, we analyze two specific models, named gamma-gamma and beta-beta. In the gamma-gamma model, the risks are distributed according to gamma random variables. Several properties are studied, including the individual risk model. The second model, named beta-beta distribution, can be used to model data with bounded support. Finally, an estimation method based on moments is proposed and a numerical application with real data is included.

Key words: Dependent risks, individual risk model, gamma and beta distributions.

1 Introducción

El análisis de riesgos dependientes ha recibido una gran atención en la estadística actuarial moderna.

Los riesgos dependientes aparecen en diferentes ámbitos de la estadística actuarial. Dicha dependencia puede aparecer tanto en el tamaño de las reclamaciones, como en los tiempos entre reclamaciones y en las primas. En el contexto del modelo de riesgo colectivo, Sarabia y Guillén (2008) han considerado modelos de dependencia entre el número de reclamaciones y la cantidad reclamada, a partir de modelos basados en la técnica de la especificación condicional.

En la teoría clásica del riesgo, los riesgos individuales se suponen mutuamente independientes, debido principalmente a la facilidad de cálculo en las fórmulas del riesgo agregado. Sin embargo, existen diversas situaciones donde la hipótesis de independencia es cuestionable, por ejemplo, en situaciones donde los riesgos individuales están sujetos al mismo escenario físico o económico. En el trabajo de Valdez et al. (2009) aparecen descritos diversos modelos actuariales y financieros donde la hipótesis de dependencia es crucial en el cálculo de primas. Dichos autores establecen la dependencia entre riesgos por medio de clases de distribuciones multivariantes de tipo elíptico y esférico. Haciendo uso de estas clases, obtienen cotas y aproximaciones para sumas de variables aleatorias de naturaleza dependiente. Albrecher et al. (2011) han obtenido expresiones explícitas de la probabilidad de ruina, suponiendo diversos modelos de dependencia entre riesgos. Diferentes aspectos de la teoría actuarial de los riesgos dependientes han sido estudiados por Denuit et al. (2005), donde se consideran medidas, órdenes y modelos. En el ámbito de la modelización, es importante indicar que la dependencia de riesgos mediante modelos de cópulas ha aumentado considerablemente en los últimos años. Este tipo de modelización permite introducir dependencias en un conjunto de riesgos individuales, cuyas distribuciones marginales son conocidas. Nelsen (1999) es un texto introductorio sobre copulas y Kolev et al. (2006) recogen contribuciones recientes, así como diversas aplicaciones.

El análisis de la dependencia resulta también importante desde otros puntos de vista. En la práctica actuarial, resulta relevante tanto detectar la dependencia en los datos, como disponer de modelos que recojan adecuadamente dicha dependencia. En este sentido, Sarabia y Gómez-Déniz (2008) han estudiado diversos procedimientos estadísticos para establecer dependencias entre variables aleatorias.

En el siguiente trabajo se presenta una clase general de riesgos dependientes, así como dos modelos específicos. La nueva clase se presenta en la Sección 2 y se construye mediante la técnica estadística de las variables en común, de modo que el proceso de simulación es directo. En la Sección 3, se estudian algunas de sus propiedades incluyendo las funciones de distribución y densidad multivariantes, distribuciones marginales, dependencia estadística, momentos mixtos, así como el modelo de riesgo individual. A continuación se estudian dos modelos específicos, denominados gamma-gamma y beta-beta. El modelo gamma-gamma se estudia en la Sección 4. En dicho modelo se trabaja con riesgos distribuidos según distribuciones gamma. Se estudian diversas propiedades y el modelo de riesgo individual. El segundo modelo es el denominado beta-beta, y se estudia en la Sección 5. Este modelo permite trabajar con riesgos cuyo soporte es acotado. Finalmente, se propone un método de estimación basado en momentos y se incluye una aplicación numérica.

2 Definición de la Clase

En esta sección definimos la nueva clase de riesgos dependientes. La clase se define a partir de una clase inicial de m riesgos, que pueden ser tanto independientes como dependientes. Consideremos un conjunto de m riesgos, definidos en términos de variables aleatorias no negativas de tipo continuo $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$. Sean $F_{12\dots m}(z_1,\dots,z_m)$ y $f_{12\dots m}(z_1,\dots,z_m)$, las funciones de distribución y de densidad conjunta, respectivamente.

Consideremos ahora un riesgo común definido en términos de una variable aleatoria U con función de distribución $F_U(u)$ y función de densidad $f_U(u)$, que es independiente de las variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$. La nueva clase $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ se define como,

$$(X_1, X_2, \ldots, X_m) = (Z_1 h(U), Z_2 h(U), \ldots, Z_m h(U)), \tag{1}$$

siendo $h(\cdot)$ una función monótona de la variable U. Si la clase inicial $Z_i, i = 1, 2 \ldots m$ es de riesgos independientes, el riesgo en común U genera una clase de riesgos que siempre son dependientes. Notar que la simulación de la clase (1) es directa, a partir de la simulación de datos de los Z_i y del riesgo común U.

Un primer modelo basado en la distribución lognormal puede construirse en el caso de $h(u) = u$. Si suponemos que tanto los riesgos individuales Z_i como el riesgo común U siguen distribuciones de tipo lognormal independientes, entonces la distribución conjunta del vector $(X_1, \ldots, X_m)$ es lognormal multivariada, cuyas correlaciones entre variables son siempre positivas.

3 Propiedades Básicas

En esta sección nos ocuparemos de las propiedades básicas de la clase (1), con $h(u) = u$. Si denotamos por $G_{12\ldots m}(x_1, \ldots, x_m)$ la función de distribución conjunta, condicionando sobre la variable aleatoria U se obtiene que,

$$G_{12\ldots m}(x_1, x_2 \ldots, x_m) = \int_0^\infty F_{12\ldots m}(x_1/u, x_2/u, \ldots, x_m/u) dF_U(u), \tag{2}$$

y en el caso de independencia de los riesgos iniciales de Z_i, la expresión (2) se convierte en:

$$G_{12\ldots m}(x_1, x_2 \ldots, x_m) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^m F_i(x_i/u) dF_U(u), \tag{3}$$

donde $F_i(z_i)$ representa la función de distribución marginal Z_i. Notar que (3) puede interpretarse como una mezcla de distribuciones de escala, donde la escala es común a todos los riesgos.

Si derivamos parcialmente (2) respecto $x_1, x_2 \ldots, x_m$, obtenemos la función de densidad conjunta, que viene dada por,

$$g_{12\ldots m}(x_1, x_2 \ldots, x_m) = \int_0^\infty u^{-m} f_{12\ldots m}(x_1/u, x_2/u, \ldots, x_m/u) dF_U(u), \tag{4}$$

o bien

$$g_{12\ldots m}(x_1, x_2 \ldots, x_m) = \int_0^\infty u^{-m} \prod_{i=1}^{m} f_i(x_i/u) dF_U(u), \tag{5}$$

en el caso de independencia de los riesgos iniciales, siendo $f_i(z_i)$ las funciones de densidad de los $Z_i,\ i = 1, 2 \ldots m$.

Por la propia definición del vector $(X_1, \ldots, X_m)$, cualquier subvector de dimensión $r < m$, tiene la función de distribución y de densidad de la misma forma. De este modo, la función de densidad marginal de $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ viene dada por

$$g_{X_i}(x_i) = \int_0^\infty f_{Z_i}(x_i/u) dF_U(u). \tag{6}$$

3.1 Dependencia Estadística

La dependencia estadística del modelo se puede obtener por medio del concepto de variables aleatorias asociadas. Puesto que las variables $X_1, \ldots, X_m$ son funciones crecientes de los riesgos independientes $U, Z_1, \ldots, Z_m$, se deduce que $X_1, \ldots, X_m$ son variables aleatorias asociadas, de acuerdo con la definición de Esary, Proschan y Walkup (1967). Como una consecuencia de este resultado las covarianzas entre parejas de riesgos son siempre no negativas, y por tanto sólo son igualmente posibles coeficientes de correlación lineal no negativos.

3.2 Momentos Mixtos

A partir de la definición del vector $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ es posible obtener los momentos mixtos de orden $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, donde $r_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$ en función de los momentos de los riesgos Z_i y de los momentos del riesgo común $h(U)$, donde se supone que todos estos riesgos son mutuamente independientes. Se verifica que,

$$E\left[X_1^{r_1} \cdots X_1^{r_m} \right] = E\left[h(U)^r \right] \prod_{i=1}^{m} E\left[Z_i^{r_i} \right],$$

donde $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, y se supone que todos los momentos de los riesgos existen.

3.3 Modelo de Riesgo Individual

El modelo de riesgo individual (Klugman et al, 2004; Sarabia et al, 2006), representa la pérdida agregada para un número fijo de riesgos. Este modelo se suele utilizar para el cálculo de las pérdidas en n contratos de seguros. Para la clase de riesgos (1) antes definida tenemos,

$$S_m = h(U) \sum_{i=1}^{m} Z_i \ .$$

Si la distribución de riesgos $\sum_{i=1}^{m} Z_i$ es conocida, es posible conocer la distribución del riesgo individual S_m como un producto de variables aleatorias. Notar que el conocimiento de la distribución de S_m es crucial para el cálculo de primas y reservas.

A pesar de que la distribución de S_m puede ser complicada, es posible disponer de las correspondientes fórmulas para sus momentos. Suponiendo nuevamente independencia entre los Z_i y U, tenemos que,

$$E\left[S_m^r\right]=E\left[h(U)^r\right]\sum_S c_{r,r_1,\ldots,r_m}\prod_{i=1}^m E\left[Z_i^{r_i}\right],$$

donde $c_{r,r_1,\ldots,r_m}=r!/(r_1!\cdots r_m!)$, y S es el conjunto de números naturales r_i, $i=1,2,\ldots,m$ tales que $\sum_{i=1}^m r_i=r.$

4 Modelo Gamma-Gamma

El modelo gamma-gamma es el modelo (1) donde tanto los riesgos Z_i como U siguen distribuciones de tipo gamma. Supongamos entonces que los riesgos iniciales Z_i siguen distribuciones tipo gamma con función de densidad

$$f_{Z_i}(z_i;\alpha_i,\sigma_i)=\frac{z_i^{\alpha_i-1}\exp(-z_i/\sigma_i)}{\sigma_i^{\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)},\quad z_i>0,\quad i=1,2,\ldots,m,$$

donde $\alpha_i,\sigma_i>0, i=1,2\ldots m$ y representaremos mediante $Z_i\approx G(\alpha_i,\sigma_i).$ Suponemos que el riesgo común U sigue también una distribución gamma con parámetro de forma α_0 y parámetro de escala uno, de modo que $U\approx G(\alpha,1).$ Haciendo uso de la fórmula (5), la función de densidad viene dada por,

$$g_{12\ldots m}(x_1,x_2\ldots,x_m)=\int_0^\infty u^{-m}\prod_{i=1}^m\frac{(x_i/u)^{\alpha_i-1}\exp(-x_i/u\sigma_i)}{\sigma_i^{\alpha_i}\Gamma(\alpha_i)}\cdot\frac{u^{\alpha_0-1}\exp(-u)}{\Gamma(\alpha_o)}d$$

Para el cálculo de la expresión anterior, haremos uso de la identidad:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\exp\left(-x-\frac{b}{x}\right)dx=2b^{a/2}K_a\left[2\sqrt{b}\right],$$

donde $b>0$ y $K_n\left[z\right]$ representa la función modificada de Bessel de segunda especie.

Haciendo uso de la fórmula anterior se obtiene la función de densidad conjunta,

$$g_{12\ldots m}(x_1, x_2 \ldots, x_m) = \frac{2}{\Gamma(\alpha_0)} \prod_{i=1}^{m} \frac{(x_i/\sigma_i)^{\alpha_i - 1}}{\sigma_i \Gamma(\alpha_i)} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\sigma_i} \right)^{A/2} K_A \left[2\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\sigma_i}} \right] \quad (7)$$

donde $x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$ y $A = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. La función de densidad de las marginales X_i (fórmula (6)) viene dada por,

$$g_{X_i}(x_i; \alpha_i, \sigma_i) = \frac{2(x_i/\sigma_i)^{(\alpha_0 + \alpha_i)/2 - 1}}{\sigma_i \Gamma(\alpha_0) \Gamma(\alpha_i)} K_{\alpha_0 - \alpha_i} \left[2\sqrt{\frac{x_i}{\sigma_i}} \right], \quad x_i > 0, \qquad (8)$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$. La clase de densidades univariadas (8) ha sido identificada por Johnson et al. (1994) sin incluir el parámetro de escala. Kotz y Srinivasan (1969) obtuvieron la distribución en términos de transformadas de Mellin. Una variable aleatoria X_i con función de densidad (8) será denotada por $X_i \approx GG(\alpha_0, \alpha_i, \sigma_i), i = 1, 2, \ldots, m.$

La Figura 1 muestra la función de densidad conjunta y los contornos para $m = 2$ riesgos y para valores seleccionados de los parámetros.

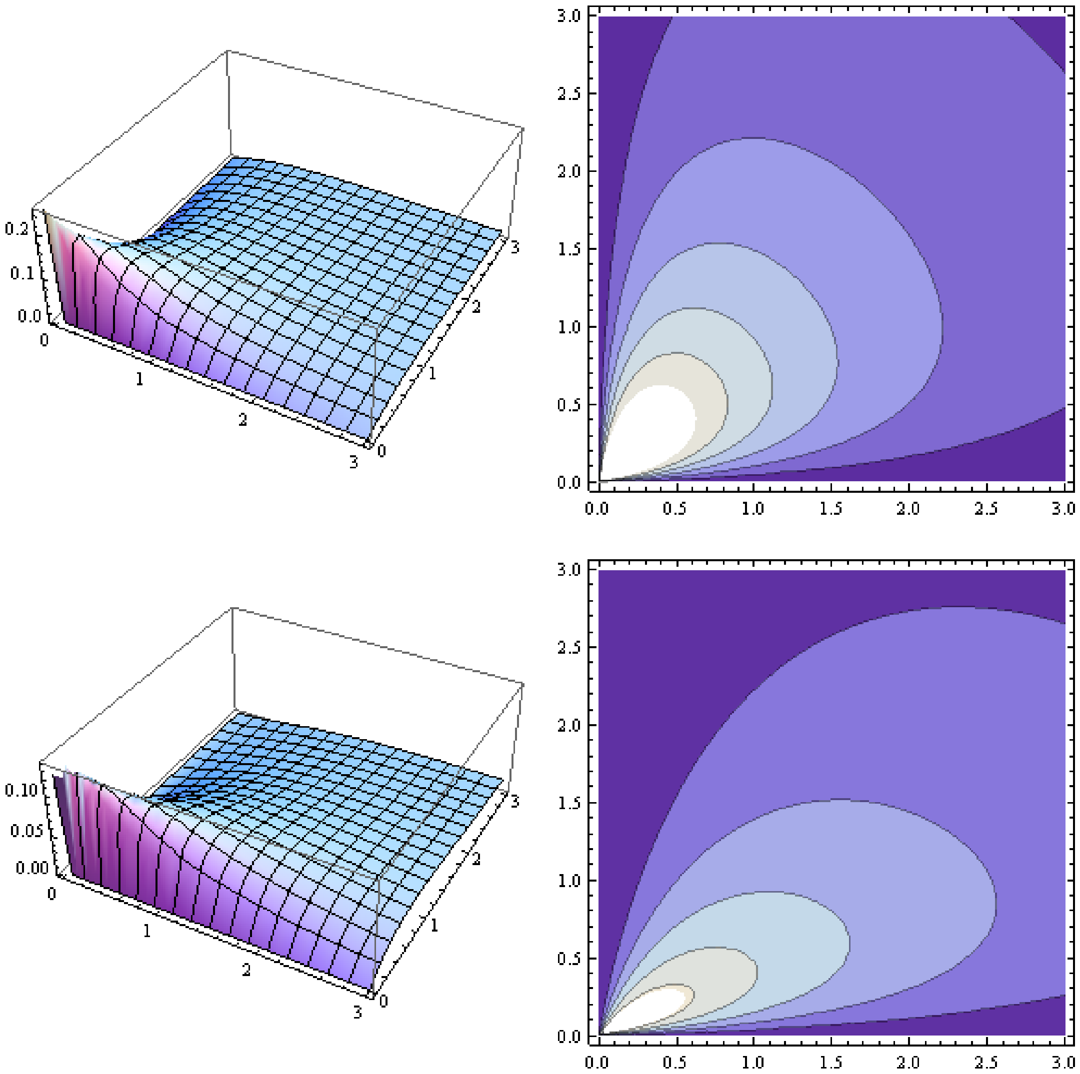


Figura 1: Función de densidad conjunta y contornos del modelo gamma-gamma para $m=2$ riesgos, para $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (2,2,2)$ (arriba), y para $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (2,3,2)$ (abajo).

4.1 Momentos Mixtos

Vamos a obtener los momentos mixtos de orden $r=\sum_{i=1}^{m} r_i$, donde $r_i>0,\ i=1,2,\ldots,m$, del vector gamma-gamma $(X_1,X_2,\ldots,X_m)$. Suponemos que Z_i y U son independientes. Tenemos que,

$$E\left[X_1^{r_1}\cdots X_1^{r_m}\right]=\frac{\Gamma(r+\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)}\prod_{i=1}^{m}\frac{\Gamma(r_i+\alpha_i)\sigma_i^{r_i}}{\Gamma(\alpha_i)},$$

con $r=\sum_{i=1}^{m} r_i$, y $r_i>0,\ i=1,2,\ldots,m$.

4.2 Vector de Medias y Matriz de Covarianzas

El vector de medias y la matriz de covarianzas se puede obtener de forma cerrada. Las medias de las variables X_i vienen dadas por,

$$\mu_{X_i}=E(X_i)=\alpha_0\alpha_i\sigma_i,\quad i=1,2,\ldots,m. \tag{9}$$

Por otro lado, los términos de la matriz de covarianzas son:

$$\sigma_{X_i}=\operatorname{var}(X_i)=\alpha_0\alpha_i(1+\alpha_0+\alpha_i)\sigma_i^2, \tag{10}$$

$$\sigma_{X_i,X_j}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\alpha_0\alpha_i\alpha_j\sigma_i\sigma_j,\quad i\neq j. \tag{11}$$

Haciendo uso de (10) y (11), se obtiene la matriz de correlaciones, cuyos elementos no diagonales son

$$\rho_{X_i,X_j}=corr(X_i,X_j)=\sqrt{\frac{\alpha_i\alpha_j}{(1+\alpha_0+\alpha_i)(1+\alpha_0+\alpha_j)}},\quad i\neq j, \tag{12}$$

Según (12), únicamente son posibles correlaciones no negativas, tal como hemos probado en un apartado anterior. Notar que si $\alpha_i,\alpha_j\to\infty$ entonces $\rho_{X_i,X_j}\to 1$ y si $\alpha_i\to 0$ entonces $\rho_{X_i,X_j}\to 0$.

4.3 Modelo de Riesgo Individual Gamma-Gamma

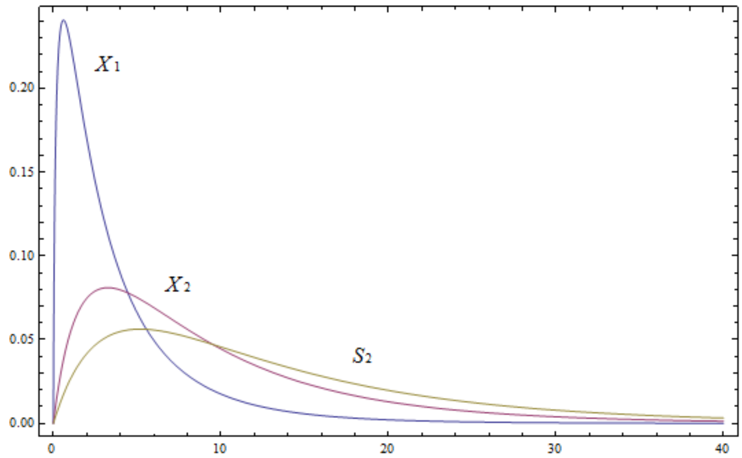
Consideremos el modelo de riesgos dependientes gamma-gamma con función de densidad conjunta definida en (7). El modelo de riesgo individual viene dado por,

$$S_m = U \sum_{i=1}^{m} Z_i \ ,$$

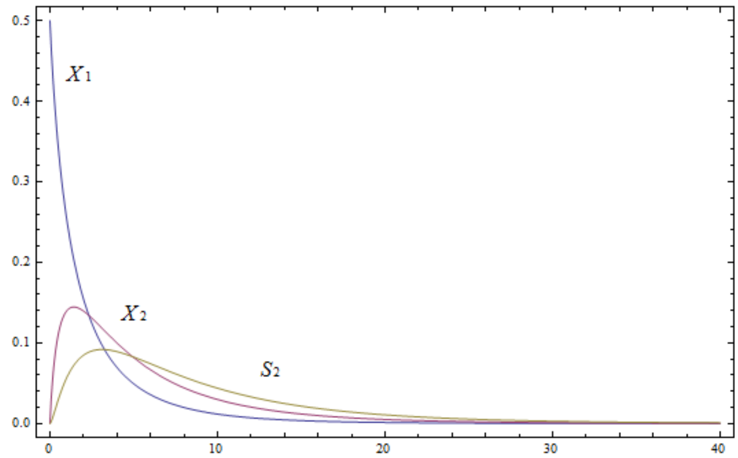
donde $Z_i \approx G(\alpha_i, \sigma_i), i = 1, 2, \ldots, m$ y $U \approx G(\alpha_0, 1).$ De acuerdo con las hipótesis habituales, si las
Z_i son independientes entre sí e independientes del riesgo común U, con $\sigma_i = 1, i = 1, 2, \ldots, m$, entonces $\sum_{i=1}^{m} Z_i \approx G\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i, 1\right).$ Por tanto, haciendo uso de los resultados del apartado anterior, tenemos que

$$S_m \approx GG\left(\alpha_0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, 1\right).$$

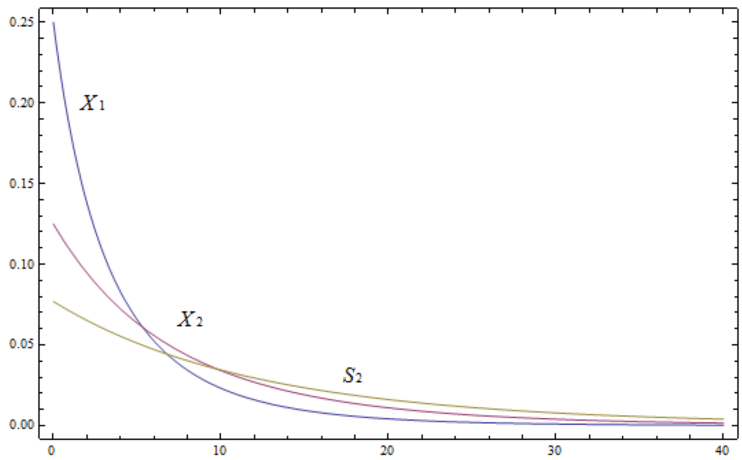
La Figura 2 muestra las funciones de densidad marginales de dos riesgos dependientes X_1 y X_2, así como el riesgo agregado S_2, bajo tres configuraciones diferentes de los parámetros. Notar que son posibles situaciones de no modalidad y unimodalidad.



X_1
X_2
S_2



X_1
X_2
S_2



X_1
X_2
S_2

Figura 2: Funciones de densidad marginales de dos riesgos dependientes X_1 y X_2, así como el riesgo agregado S_2, bajo tres configuraciones diferentes de los parámetros: $(\alpha_0, \alpha_1) = (2,2)$ (arriba), $(\alpha_0, \alpha_1) = (3,1)$ (medio), $(\alpha_0, \alpha_1) = (1,5)$ (abajo).

Los momentos de S_m pueden obtenerse a partir de la fórmula general contenida en la subsección 3.3. Tenemos que,

$$E\left[S_m^r\right] = \frac{\Gamma(r+\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)} \sum_S c_{r,r_1,\ldots,r_m} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(r_i+\alpha_i)\sigma_i^{r_i}}{\Gamma(\alpha_i)},$$

donde $c_{r,r_1,\ldots,r_m} = r!/(r_1!\cdots r_m!)$, y S es el conjunto de números naturales r_i, $i = 1,2,\ldots,m$ tales que $\sum_{i=1}^m r_i = r.$

4.4 Extensiones basadas en Clases Dependientes

El modelo gamma-gamma considerado ha partido de un vector de riesgos independientes $(Z_1,\ldots,Z_m)$, al que posteriormente se le ha incluido un riesgo común U de carácter multiplicativo. Como hemos señalado en la Sección 2, es posible partir de una clase de riesgos dependientes, y de este modo disponer de una mayor flexibilidad en el ajuste de riesgos dependientes. En este caso debemos partir de una distribución multivariante con marginales tipo gamma. Entre la diversas posibilidades (ver Kotz, Balakrishnan y Johnson, 2000), una opción es trabajar con la distribución gamma multivariada propuesta por Mathai y Moschopoulos (1991). Dicha distribución multivariante se puede definir en términos de la función generatriz de momentos multivariada,

$$M_{Z_1,\ldots,Z_m}(t_1,\ldots,t_m) = \left(1 - \sum_{i=1}^m \sigma_i t_i\right)^{-\alpha_0} \prod_{i=1}^m (1-\sigma_i t_i)^{-\alpha_i}.$$

Las distribuciones marginales del modelo anterior son de tipo gamma, de modo que $Z_i \approx G(\alpha_0 + \alpha_i, \sigma_i), i = 1,2,\ldots,m.$ A continuación, haciendo uso de la función de densidad conjunta de $(Z_1,\ldots,Z_m)$ y de la fórmula (4), se obtiene la nueva función de densidad conjunta. Notar que los momentos mixtos de esta nueva distribución son más complicados que los obtenidos en la Sección 4.1.

El modelo de riesgo individual de esta nueva clase se puede obtener haciendo uso del Teorema 2.1 de Mathai y Moschopoulos (1991). Para ello, y en una primera etapa, se trata de considerar la distribución de la convolución $Z_1+\cdots+Z_m$. Dicha distribución es una mezcla infinita de distribuciones tipo gamma, donde los parámetros de forma de las componentes se distribuyen según una determinada variable aleatoria de tipo discreto. En una segunda etapa, se obtiene la distribución del producto de la convolución $Z_1+\cdots+Z_m$ por el riesgo común U, que da lugar a una nueva mezcla infinita de variables aleatorias del tipo (8).

5 El Modelo Beta-Beta

El modelo beta-beta supone que tanto los riesgos iniciales como el riesgo común, siguen distribuciones tipo beta, con determinadas configuraciones de los parámetros. Se dice que un riesgo Z sigue una distribución beta con parámetros a y b, si su función de densidad viene dada por,

$$f_Z(z;a,b)=\frac{z^{a-1}\left(1-z\right)^{b-1}}{B\left(a,b\right)},\quad 0<z<1,$$

donde $a,b>0$ y $B(a,b)$ representa la función beta. Una variable aleatoria con distribución beta la denotaremos por $Z\approx Be(a,b)$. Para la construcción del modelo suponemos que los riesgos iniciales siguen distribuciones beta, de modo que $Z_i\approx Be(a_0+b_0,b_i)$, con $a_0,b_0,b_i>0$, para $i=1,2,\ldots,m.$ Por otro lado, suponemos que el riesgo U es independiente de los Z_i y está distribuido de acuerdo con $U\approx Be(a_0,b_0)$. La función de densidad conjunta de $(X_1,\ldots,X_m)$ viene dada por,

$$g_{12\ldots m}(x_1,x_2\ldots,x_m)=\int_0^1 u^{-m}\prod_{i=1}^{m}\frac{(x_i/u)^{a_0+b_0-1}(1-x_i/u)^{b_i-1}}{B\left(a_0+b_0,b_i\right)}\cdot\frac{u^{\alpha_0-1}(1-u)^{b_0-1}}{B\left(a_0,b_0\right)}$$

A diferencia del modelo anterior, la función de densidad conjunta anterior no puede escribirse en general en términos de funciones conocidas. Sin embargo, haciendo uso de los resultados de Kotlarski (1962), las funciones de densidad marginales de los riesgos X_i son de tipo beta, de modo que,

$$X_i \approx Be\left(a_0, b_0 + b_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

5.1 Momentos Mixtos

Si $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, con $r_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$, vamos a obtener los momentos mixtos de orden r del vector beta-beta $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Suponemos como antes que Z_i y U son riesgos independientes. Se verifica que,

$$E\left[X_1^{r_1} \cdots X_1^{r_m}\right] = \frac{B\left(\alpha_0 + r, b_0\right)}{B\left(\alpha_0, b_0\right)} \prod_{i=1}^{m} \frac{B\left(\alpha_0 + b_0 + r_i, b_i\right)}{\Gamma\left(\alpha_o + b_0, b_i\right)}.$$

5.2 Vector de Medias y Matriz de Covarianzas

Las medias y las varianzas de los riesgos X_i se obtienen directamente a partir de (13). Tenemos que,

$$\mu_{X_i} = E(X_i) = \frac{a_0}{a_0 + b_0 + b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

y

$$\sigma_{X_i} = \mathrm{var}(X_i) = \frac{a_0\left(b_0 + b_i\right)}{\left(a_0 + b_0 + b_i + 1\right)\left(a_0 + b_0 + b_i\right)^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Los elementos no diagonales de la matriz de covarianzas vienen dados por,

$$\sigma_{X_i, X_j} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{a_0 b_0}{\left(a_0 + b_0 + 1\right)\left(a_0 + b_0 + b_i\right)\left(a_0 + b_0 + b_j\right)}, \quad i \neq j.$$

donde nuevamente sólo son posibles correlaciones no-negativas.

5.3 Modelo de Riesgo Individual Beta-Beta

La distribución del modelo de riesgo individual S_m es la distribución del producto de las variables aleatorias U y $\sum_{i=1}^{m} Z_i$, , donde U y Z_i siguen distribuciones tipo beta independientes. En el caso general, dicha distribución puede resultar intratable. En el caso $m=2$, la fórmula de la función de densidad puede ser obtenida explícitamente. La convolución de dos variables aleatorias tipo beta ha sido obtenida por Pham-Gia y Turkkan (1994), en términos de la función de Appell. La función de Appell es la función hipergeométrica en dos variables. A continuación se trata de obtener la distribución del producto de la variable aleatoria anterior por una variable aleatoria beta. La fórmula final será por tanto la integral de una expresión donde aparece la función de Appell.

Sin embargo, y a pesar de las dificultades anteriores, los momentos de S_m se pueden obtener explícitamente. Dichos momentos vienen dados por:

$$E\left[S_m^r\right]=\frac{B\left(\alpha_0+r,b_0\right)}{B\left(\alpha_0,b_0\right)}\sum_S c_{r,r_1,\dots,r_m}\prod_{i=1}^{m}\frac{B\left(\alpha_0+b_0+r_i,b_i\right)}{B\left(\alpha_0+b_0,b_i\right)},$$

donde $c_{r,r_1,\dots,r_m}=r!/(r_1!\cdots r_m!)$, y S es el conjunto de números naturales r_i, $i=1,2,\dots,m$ tales que $\sum_{i=1}^{m} r_i=r.$

5.4 Extensiones basadas en Clases Dependientes

De modo similar al modelo gamma-gamma, podemos considerar una nueva clase beta-beta, partiendo de un vector de riesgos dependientes $(Z_1,\dots,Z_m)$ cuyas distribuciones marginales sean ahora de tipo beta. En este caso, la elección más clara es la distribución de Dirichlet, cuya función de densidad conjunta viene definida por la fórmula:

$$f_{12\ldots m}(z_1,\ldots,z_m)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=0}^{m}\theta_i\right)}{\prod_{i=0}^{m}\Gamma(\theta_i)}\prod_{i=1}^{m}z_i^{\theta_i-1},$$

donde $z_1,\ldots,z_m\geq 0$, $z_1+\cdots+z_m\leq 1$ y $\theta_i\geq 0, i=0,1,\ldots,m$. Haciendo uso de la función de densidad conjunta de $f_{12\ldots m}(z_1,\ldots,z_m)$ y de la fórmula (4), se obtiene la función de densidad conjunta de la nueva clase beta-beta. Nuevamente, los momentos mixtos de esta nueva distribución son más complicados que los obtenidos en la Sección 5.1.

6 Estimación

En esta sección se proponen estimadores de momentos para el modelo Gamma-Gamma en el caso $m=2$. Para la estimación de los parámetros usaremos las medias y varianzas de las distribuciones marginales, junto con el coeficiente de correlación lineal. Consideremos entonces una variable aleatoria bivariada (X_1,X_2) con función de densidad (7), y una muestra de n riesgos dependientes $(x_{1i},x_{2i}), i=1,2,\ldots,n.$ Denotaremos mediante $m_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ y $s_i^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-m_i)^2, i=1,2$ las medias y varianzas muestrales, respectivamente. Se trata de estimar los parámetros $\alpha_i, i=0,1,2$ y $\sigma_i, i=0,1,2$. Haciendo uso de los momentos teóricos (9) y (10) y resolviendo el sistema $E(X_i)=m_i, \mathrm{var}(X_i)=s_i^2, i=1,2,$ obtenemos los estimadores,

$$\hat{\alpha}_i=\frac{(1+\alpha_0)m_i^2}{\alpha_0 s_i^2-m_i^2},\quad i=1,2, \tag{14}$$

$$\hat{\sigma}_i=\frac{\alpha_0 s_i^2-m_i^2}{(\alpha_0+\alpha_0^2)m_i},\quad i=1,2, \tag{15}$$

Para la estimación de α_0 consideramos el coeficiente de correlación lineal entre (X_1,X_2) dado

en (12), así como la correspondiente versión muestral r_{12}. Finalmente, considerando la relación
$corr(X_1, X_2) = r_{12}$, y haciendo uso de (14), obtenemos el estimador:

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{m_1 m_2}{r_{12} s_1 s_2}. \tag{16}$$

Los estimadores puntuales (14), (15) y (16) son consistentes y asintóticamente normales.

6 Aplicación

Como ilustración de los modelos planteados, hemos considerado los datos bivariados de pérdidas y de alae (allocated loss adjustment expenses), que aparecen en Klugman et al. (2004), capítulo 12. Se trata de un conjunto de $n = 24$ datos bivariados, con un grado de dependencia pequeño. Los datos están bastante concentrados, excepto cuatro valores extremos. Se ha considerado el modelo gamma-gamma. Haciendo uso de las fórmulas (14), (15) y (16), se han obtenido los estimadores puntuales $\hat{\alpha}_0 = 3.88157$, $\hat{\alpha}_1 = 0.396004$, $\hat{\alpha}_2 = 0.504208$, $\hat{\sigma}_1 = 14.9089$, $\hat{\sigma}_2 = 2711.64$. La Figura (4) muestra los datos junto con los contornos del modelo ajustado. Los contornos de la función de densidad muestran la concentración de los datos en torno al origen.

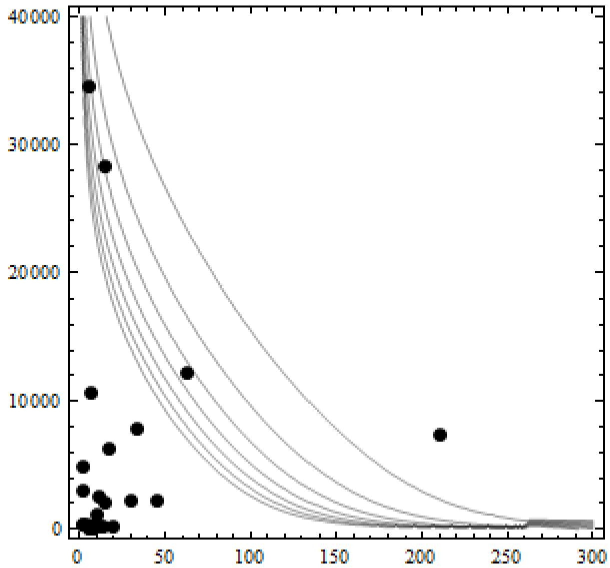


Figura 4: Datos bivariados de pérdidas (eje de ordenadas) y alae (eje de abscisas), junto con los contornos del modelo gamma-gamma ajustado.

6 Conclusiones

En el presente trabajo se ha propuesto una clase general de riesgos dependientes, así como dos modelos específicos. La construcción de la clase se basa en las variables en común, y su método de simulación es sencillo. Se han estudiado diversas propiedades estadísticas de la clase, así como el modelo de riesgo individual. Se han estudiado dos modelos específicos, denominados gamma-gamma y beta-beta. En el modelo gamma-gamma, se han utilizado riesgos distribuidos según variables aleatorias tipo gamma. Se han estudiado diversas propiedades, además del modelo de riesgo individual. El segundo modelo es el denominado beta-beta, que permite trabajar con riesgos con soporte es acotado. Se ha propuesto un método de estimación basado en momentos y se ha incluido una aplicación numérica.

Referencias

Albrecher, H., Constantinescu, C. y S. Loisel (2011). Explicit ruin formulas for models with dependence among risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 48, 265-270.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. y R. Kaas (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks. Measures, Orders and Models*. John Wiley, Chichester.

Esary, J.D., Proschan, F. y D.W. Walkup (1967). Association of random variables, with applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38, 1466-1474.

Johnson, N.L., Kotz, S. y N. Balakrishnan (1994). *Continuous Univariate Distribution*. Volume 1. Second Edition. John Wiley, New York.

Klugman, S.A., Panjer, H.H. y G.E. Willmot (2004). *Loss Models. From Data to Decisions*, Second Edition. John Wiley, New York.

Kolev, N., Anjos, U. y B.M. Mendes (2006). Copulas: a review and recent developments. *Stochastic Models*, 22, 617-660.

Kotlarski, I. (1962). On groups of *n* independent random variables whose product follows the beta distribution. *Colloquium Mathematicum*, 9, 325-332.

Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*, Vol. 1, Second edition. John Wiley, New York.

Kotz, S. y R. Srinivasan (1969). Distribution of product and quotient of Bessel function variates. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, 201-210.

Mathai A.M., Moschopoulos P.G. (1991). On A Multivariate Gamma. *Journal of Multivariate Analysis*, 39, 135-153.

Nelsen, R.B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag, New York.

Pham-Gia, T., Turkkan, N. (1994). Reliability of a standby system with beta-distributed components lives. *IEEE Transactions on Reliability*, 43, 71-75.

Sarabia, J.M. y E. Gómez-Déniz (2008). Construction of multivariate distributions: a review of some recent results (with discussion). *SORT, Statistics and Operations Research Transactions*, 32, 3-36.

Sarabia, J.M., Gómez, E. y F. Vázquez (2006). *Estadística Actuarial: Teoría y Aplicaciones*. Pearson-Prentice Hall, Madrid.

Sarabia, J.M. y M. Guillén (2008). Joint modelling of the total amount and the number of claims by conditionals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43, 466-473.

Valdez, E.A., Dhaene, J., Maj, M. y S. Vanduffel (2009). Bounds and approximations for sums of dependent log-elliptical random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 385-397.