

# Desarrollo de nuevos diagramas tensión-deformación para el dimensionamiento en E.L.U. de elementos de hormigón estructural de alta resistencia

## *Development of new stress-strain diagrams to the design in U.L.S. of high strength structural concrete*

Germán Gutiérrez Martín  
(Universidad de Cantabria)



Miguel A. Vicente Cabrera  
(Universidad de Burgos)



Dorys C. González Cabrera  
(Universidad de Burgos)

### RESUMEN

Este artículo desarrolla tres nuevos diagramas tensión-deformación, alternativos a los propuestos en la actualidad por las diferentes normas europeas y americanas para el diseño de elementos de hormigón estructural de alta resistencia frente a esfuerzos de flexión compuesta. Los diagramas propuestos en este artículo presentan algunas diferencias sustanciales con respecto a los utilizados en la actualidad. La más importante es que estos diagramas incluyen, en su definición matemática la influencia de la forma de la sección en el comportamiento del hormigón de alta resistencia frente a esfuerzos de flexocompresión.

Estos diagramas son el resultado más importante de la campaña de ensayos llevada a cabo por los autores en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad de Cantabria.

### SUMMARY

*This paper develops three new stress-strain diagrams, alternativa to the actually proposed by the European and American Codes, to design structural concrete elements under combined bending and axial efforts. The diagrams proposed in this paper have some substantial differences with the ones actual use. The most important is that these new diagrams includes, in their mathematical definition, the influence of the cross-section shape in the behaviour of high strength concrete under bending compression.*

*These new diagrams are the main result of the testing campaign carried out by the authors at the Structures Laboratory of the University of Cantabria.*

### 1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo es el resultado de un ambicioso proyecto de investigación, cuyo objetivo último es la obtención de nuevos diagramas tensión-deformación para el dimensionamiento de elementos de hormigón estructural de Alta Resistencia en Estado Límite Último de agotamiento frente a sollicitaciones que producen tensiones normales. Ha sido financiado con fondos FEDER y ha contado con la colaboración de la empresa de prefabricados PRECON. La motivación principal de este trabajo de investigación es el conocer un poco más sobre los hormigones de alta resistencia y su posible respuesta en la práctica (1 a 15).

De este estudio han salido dos tesis doctorales (16 y 17), un artículo internacional (27) y las dos patentes que se exponen a continuación:

- Sistema universal de compresión excéntrica en probeta movable "P200200583".
- Procedimiento de ensayo de compresión excéntrica en probetas de hormigón "P200200582".

### 2. CAMPAÑA EXPERIMENTAL

En el Laboratorio de Estructuras de la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Cantabria se ha llevado a cabo una amplia campaña de ensayos sobre probetas de hormigón de alta resistencia.

El ensayo consistió en someter a las probetas de hormigón a una carga vertical creciente hasta rotura, situada en un punto tal de la sección que una de las fibras de la probeta (definida a priori, que llamaremos fibra de control) se mantenga, durante todo el ensayo, con deformación vertical nula.

Los parámetros de ensayo estudiados fueron los siguientes:

- *Resistencia a compresión del material.* Se utilizaron hormigones con resistencias medias a 28 días entre 55 y 105 MPa.
- *Forma de la probeta.* Se ensayaron probetas rectangulares, semicirculares, triangulares con deformación nula en arista y triangulares con deformación nula en cara.
- *Edad de rotura.* Se ensayaron a 3, 7, 28 y 90 días.

Para llevar a cabo el ensayo, se ha desarrollado una máquina capaz, de forma simultánea, de aplicar la carga vertical sobre la probeta y de moverla horizontalmente con objeto de cumplir, en todo momento, con la condición de deformación nula en fibra de control.

La información obtenida ha sido muy amplia, puesto que en la campaña de ensayos se analizaron 240 probetas con formas especiales, además de 60 probetas cilíndricas normalizadas de 100 x 200 mm para la caracterización de los hormigones. De cada ensayo y en todo momento se recogieron 4 parámetros fundamentales, que son: carga vertical, su posición, deformación en la fibra más comprimida y la deformación en la fibra de control.

El análisis del comportamiento del hormigón durante el ensayo es objeto de otro artículo. Para este trabajo, nos interesan fundamentalmente los valores obtenidos en el momento de la "rotura". En particular, de cada ensayo, se tomaron los siguientes parámetros:

- Carga de rotura
- Posición de la carga en rotura
- Deformación de la fibra más comprimida
- Resistencia del hormigón
- Módulo de Elasticidad Longitudinal

### 3. ANÁLISIS DE LA NORMATIVA EXISTENTE

Con los resultados obtenidos se ha procedido, en primer lugar, a chequear si los diagramas tensión-deformación propuestos por las más relevantes normas europeas y americanas (así como la diferente formulación relativa a deformación máxima en rotura y al módulo de elasticidad longitudinal) predicen adecuadamente los resultados obtenidos de los ensayos.

Se han elegido siete normas internacionales, las cuales se consideran representativas de la mayor parte de la normativa existente en la actualidad. Éstas son las que se indican a continuación (18-26):

- Instrucción Española del Hormigón Estructural (EHE)
- Código Modelo (MC90)
- Código Noruego (NS3473).
- Código Finlandés (MK 1983/1984. Suplemento DBY34)
- ACI 318-95
- Norma Holandesa (NEN)
- Norma Sueca (BBK79).

#### Instrucción Española del Hormigón Estructural (EHE)

Para el dimensionamiento frente a tensiones normales de elementos de hormigón estructural, la norma española EHE propone, como diagramas tensión-deformación del hormigón, los dos que se exponen a continuación:

- Diagrama parábola-rectángulo (EHE-1) (Figura 1): Está formado por una parábola de segundo grado y un segmento rectilíneo. La expresión matemática del diagrama es la que se indica a continuación.

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \eta \cdot (2 - \eta) & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{cl} \\ 0,85 \cdot f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{cl} \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

siendo:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cl}}, \text{ con } \varepsilon_{cl} = 0,002; \varepsilon_{cu} = 0,0035 \cdot \frac{50}{f_{ck}}$$

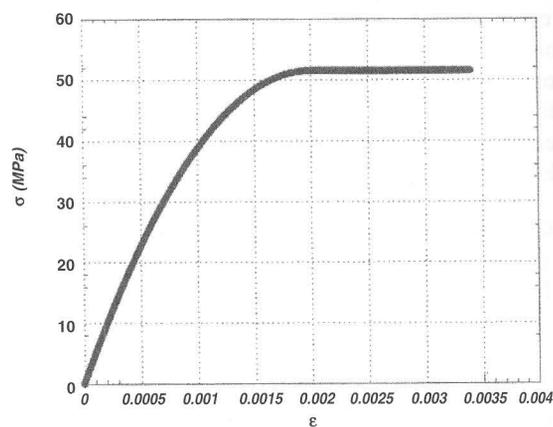


Figura 1. Diagrama tensión-deformación EHE-1.

- Diagrama rectangular (EHE-2) (Figura 2) cuya expresión es:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \varepsilon < (1 - \lambda) \cdot \varepsilon_{cu} \\ 0,85 \cdot f_{cd} & \text{si } (1 - \lambda) \cdot \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

$$\text{siendo } \lambda = \left(1 - \frac{f_{ck} 250}{3}\right)$$

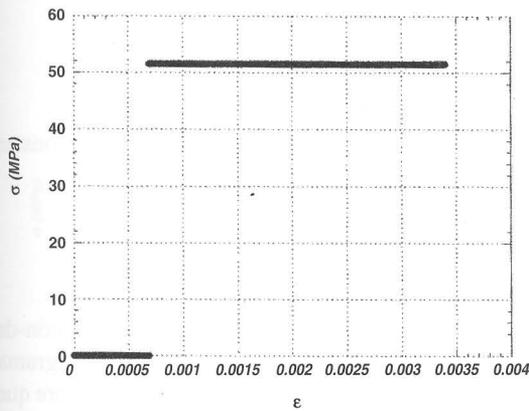


Figura 2. Diagrama tensión-deformación EHE-2.

Por su parte, para el módulo de elasticidad, la norma española admite, para los hormigones de alta resistencia, la misma expresión que la desarrollada para los hormigones convencionales:

$$E_c = 10000 \cdot (f_{ck} + 8)^{\frac{1}{3}}$$

### Código Modelo (MC-90)

El Código Modelo propone dos diagramas tensión-deformación:

- Diagrama parabólico (MC-1) (Figura 3): La expresión matemática del diagrama es la que se indica a continuación:

$$\text{Rama ascendente: } \sigma(\varepsilon) = f_{ck} \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta}$$

$$\text{Rama descendente: } \sigma(\varepsilon) = \frac{f_{ck}}{\left[1 + \left(\frac{\eta - 1}{\eta_2 - 1}\right)^2\right]}$$

siendo:

$$k = \frac{E_{ci}}{\frac{f_{cm}}{0,0022}}$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}, \text{ con } \varepsilon_{c1} = -0,7 \cdot f_{cm}^{0,31} / 1000$$

$$\eta_2 = \frac{(\varepsilon_{c1} + t)}{\varepsilon_{c1}}, \text{ tomando } t \text{ los valores recogidos en [20]}$$

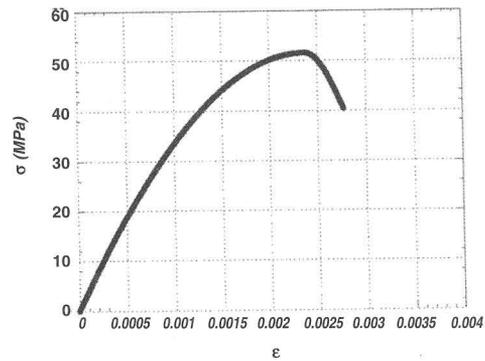


Figura 3. Diagrama tensión-deformación MC-1.

- Diagrama parábola - rectángulo (MC-2) (Figura 4), cuya expresión matemática es la siguiente:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}\right)^n\right] & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1} \\ 0,85 \cdot f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

siendo:

$$\varepsilon_{c1} = 0,002 - 0,5 \cdot (f_{ck} - 50) \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0025 + 0,002 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{100}\right)$$

$$n = 2 - 0,008 \cdot (f_{ck} - 50)$$

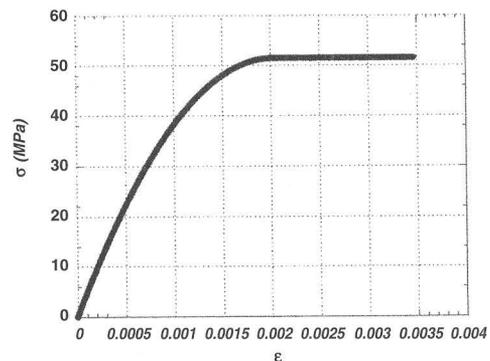


Figura 4. Diagrama tensión-deformación MC-2.

El código modelo propone, para el módulo de elasticidad longitudinal, la siguiente expresión matemática:

$$E_c = 22000 \cdot \left(\frac{f_{ck} + 8}{10}\right)^{0,3}$$

### Código Noruego (NS3437)

El código noruego propone un diagrama tensión-deformación bilineal, con la siguiente expresión matemática (Figura 5).

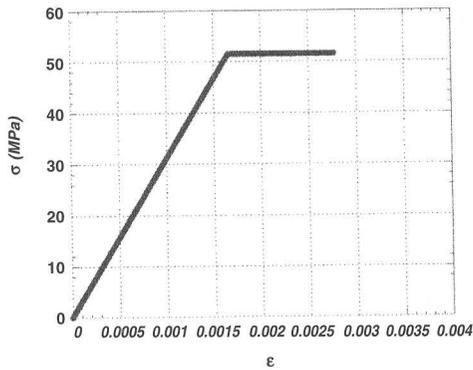


Figura 5. Diagrama tensión-deformación NS3437.

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{cm}} \cdot \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{cm} \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{cm} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

siendo:

$$\varepsilon_{cm} = \frac{f_{cd}}{E_c}$$

$$\varepsilon_{cu} = \left( 2,5 \cdot (0,004 \cdot f_{cd} + 1,9) \cdot 10^{-3} - 1,5 \right) \cdot \varepsilon_{cm}$$

Por su parte, el valor del módulo de elasticidad longitudinal en compresión del hormigón puede ser deducido de la siguiente fórmula:

$$E_c = 9500 \cdot f_{ck}^{0,3}$$

### Código Finlandés (MK B4 1983/84. Suplemento DBY 34)

El código finlandés presenta un suplemento en el que se dan pautas de diseño para los hormigones de alta resistencia. El diagrama tensión-deformación propuesto es trilineal, con la siguiente expresión (Figura 6).

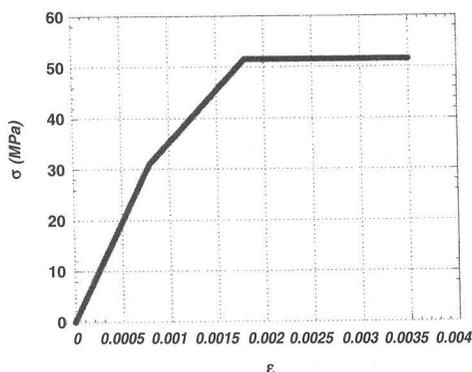


Figura 6. Diagrama tensión-deformación DBY 34.

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{c0} \\ 0,6 \cdot f_{ck} + \frac{0,4 \cdot f_{ck}}{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c0}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{c0}) & \text{si } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1} \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

siendo:

$$\varepsilon_{c1} = 0,002 - 0,5 \cdot (f_{ck} - 50) \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0025 + 0,002 \cdot \left( 1 - \frac{f_{ck}}{100} \right)$$

$$n = 2 - 0,008 \cdot (f_{ck} - 50)$$

Para el módulo de elasticidad propone un valor constante e igual a 38.700 MPa.

### ACI 318-02

La norma americana admite, como diagrama tensión-deformación del hormigón en compresión, cualquier diagrama (de tipo rectangular, trapezoidal, parabólico, etc.) siempre que sus resultados sean concordantes con los resultados experimentales. Para facilitar el cálculo, la norma americana propone un diagrama rectangular con la siguiente expresión matemática (Figura 7).

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \varepsilon < (1-\lambda) \cdot \varepsilon_{cu} \\ 0,85 \cdot f_{cd} & \text{si } (1-\lambda) \cdot \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

estando  $\lambda$  definido en [23]

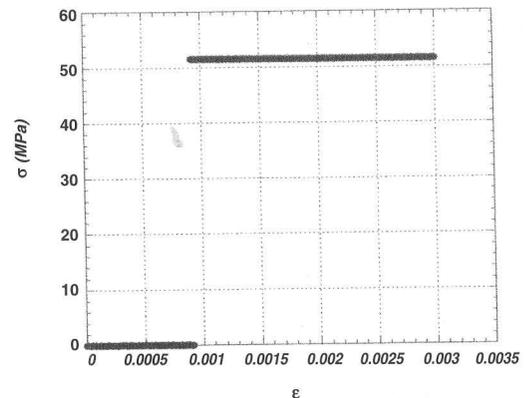


Figura 7. Diagrama tensión-deformación ACI.

Para el módulo de elasticidad longitudinal, el ACI propone la siguiente expresión:

$$E_c = 3320 \cdot \sqrt{f_{ck}} + 6900$$

### Norma Holandesa (NEN)

El diagrama tensión-deformación propuesto es de tipo bilineal con la siguiente expresión (Figura 8).

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_{cd}}{\varepsilon_{c1}} \cdot \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{c1} \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$$

siendo:

$$\epsilon_{cl} = (1,75 + 0,00375 \cdot (f_{ck} - 65)) \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{cu} = (3,5 - 0,025 \cdot (f_{ck} - 65)) \cdot 10^{-3}$$

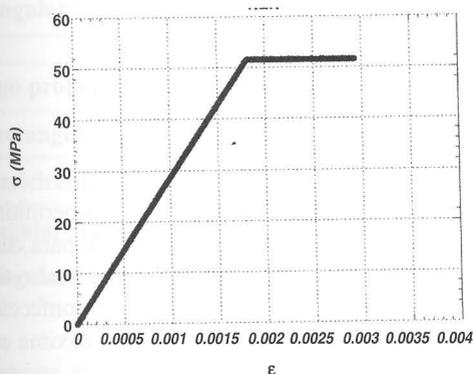


Figura 8. Diagrama tensión-deformación NEN.

Para la determinación del módulo de elasticidad longitudinal, la norma holandesa propone la siguiente expresión simplificada:

$$E_c = 35900 + 40 \cdot f_{ck}$$

**Norma Sueca (BBK 79)**

Para el cálculo en flexión, la norma sueca propone un diagrama parabólico-bilineal. Se trata de un diagrama bastante complejo, compuesto por un tramo lineal hasta una tensión igual al 60% de la tensión de rotura. A continuación se dispone un tramo parabólico hasta alcanzar la máxima resistencia a compresión, y finalmente, un tramo lineal horizontal. La expresión matemática del mismo es la que se expone a continuación (Figura 9):

$$\sigma(\epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} E_c \cdot \epsilon \quad \text{si } 0 \leq \epsilon < \epsilon_{c0} \\ f_{cd} \cdot \left[ \begin{array}{l} \left(0,6 \cdot \eta - 1,4\right) \cdot \left(\frac{\epsilon - \epsilon_{c0}}{\epsilon_{cl} - \epsilon_{c0}}\right)^3 + \\ + \left(2,4 - 1,2 \cdot \eta\right) \cdot \left(\frac{\epsilon - \epsilon_{c0}}{\epsilon_{cl} - \epsilon_{c0}}\right)^2 + \\ + 0,6 \cdot \frac{\epsilon - \epsilon_{c0}}{\epsilon_{c0}} + 0,6 \end{array} \right] \\ f_{cd} \quad \text{si } \epsilon_{cl} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{array} \right.$$

siendo:

$$\eta = \frac{\epsilon}{\epsilon_{cl}}$$

$$\epsilon_{c0} = \frac{0,6 \cdot f_{cd}}{E_c}$$

$$\epsilon_{cl} = 0,02$$

$$\epsilon_{cu} = 0,0035$$

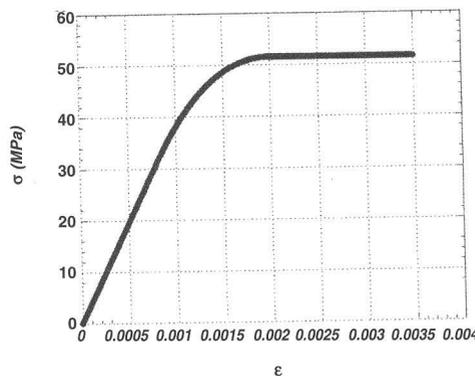


Figura 9. Diagrama tensión-deformación BBK 79.

Para la determinación del módulo de elasticidad longitudinal, la norma sueca propone la siguiente expresión:

$$E_c = 28500 + 125 \cdot f_{ck}$$

**Método de comparación**

El método de evaluación de cada uno de los diagrama recogidos en la diferente normativa se realizó según se expone a continuación:

Con objeto de poder comparar en profundidad los resultados, se definen cuatro parámetros, que son:

- Carga excéntrica / Carga centrada ( $P_e/P_c$ )
- Excentricidad / Canto ( $e/h$ )
- Deformación máxima en rotura
- Módulo de elasticidad longitudinal

Para determinar el valor teórico de la carga excéntrica de rotura, según los diagramas, se parte de la hipótesis de que, en el momento de la rotura, la distribución de tensiones sobre la probeta se ajusta a lo dispuesto por el diagrama objeto de estudio (Figura 10). Integrando el volumen de tensiones bajo el diagrama se obtiene el valor de la carga teórica de rotura.

$$P_e = \int_0^h \sigma(x) \cdot b(x) \cdot dx$$

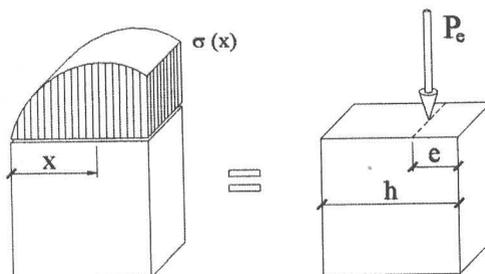


Figura 10. Método de comparación.

El valor teórico de la carga se obtiene directamente multiplicando el valor de la resistencia del hormigón por el área de la probeta.

$$P_c = f_{ck} \cdot A_c$$

Por su parte, el centro de gravedad del volumen de tensiones nos define la posición de la carga.

$$e = \frac{\int_0^h \sigma(x) \cdot b(x) \cdot (h-x) \cdot dx}{\int_0^h \sigma(x) \cdot b(x) \cdot dx}$$

Para la determinación del módulo de elasticidad se toma una pareja de valores  $P_e$ ,  $\epsilon_{max}$  en un instante cualquiera del ensayo que corresponda a un comportamiento elástico del hormigón. Aplicando la teoría clásica de la Resistencia de Materiales, se deduce la siguiente expresión, de la que se despeja el valor del módulo de elasticidad:

$$\frac{P}{\epsilon_{max}} = \frac{E_c \cdot A}{1 + \frac{v'}{v}}$$

En [17] aparecen recogidas todas las gráficas de comparación. Del análisis en profundidad de todos estos datos se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Para la relación carga excéntrica / carga centrada se observa cómo este parámetro disminuye con la edad de rotura así como con la resistencia del hormigón; tendencia que está de acuerdo con los resultados obtenidos de las normas. Se pueden encontrar concordancias aceptables a nivel local entre los resultados experimentales y los determinados por las normas, es decir, para ciertos rangos de resistencia, edades y determinadas formas; no siendo posible encontrar alguna norma que se ajuste a los resultados experimentales en todo el rango analizado.
- Para la relación excentricidad / canto se constata en los gráficos expuestos como, para las probetas semicirculares y triangulares con deformación nula en cara, este parámetro crece con la edad de rotura, mientras que para las probetas rectangulares y triangulares con deformación nula en arista, disminuye. Por el contrario, los códigos internacionales estudiados ofrecen un valor descendente de la relación excentricidad/canto con la edad de rotura, independientemente de la forma de la sección.
- Para la deformación máxima en rotura por flexocompresión se ha comprobado como ésta disminuye con la edad de rotura y con la resistencia del hormigón. El módulo de elasticidad longitudinal por el contrario aumenta. Estos resultados están de acuerdo en líneas generales con los valores propuestos en las normas. Sin embargo, se ha podido apreciar una singularidad, y es el hecho de la influencia de la forma de la sección en los resultados; influencia ésta no tenida en cuenta por ninguna de las normas analizadas.

#### 4. AJUSTE NUMÉRICO DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

A continuación se procede al desarrollo de fórmulas de ajuste de los parámetros experimentales más interesantes,

entre los que se encuentran los cuatro analizados anteriormente. Los parámetros objeto de ajuste son:

- Relación Carga excéntrica/Carga centrada en rotura
- Relación excentricidad/canto en rotura
- Deformación máxima en rotura
- Módulo de elasticidad longitudinal
- Resistencia a compresión

El desarrollo de las fórmulas de ajuste va a permitir poder estimar, de forma fiable, el parámetro deseado para cualquier edad, cualquier resistencia y cualquiera de los cuatro tipos de probetas estudiados. En particular, van a ser confeccionadas expresiones para determinar la deformación máxima en rotura, el módulo de elasticidad longitudinal y la resistencia a compresión del hormigón, alternativas a las propuestas actualmente por las diferentes normas internacionales.

Las fórmulas obtenidas dependen, en términos generales, de los siguientes tres factores:

- Forma de la probeta
- Edad de rotura
- Resistencia característica a los 28 días del hormigón

A continuación se presentan las fórmulas de ajuste desarrolladas para cada uno de los parámetros:

#### Relación carga excéntrica/carga centrada

$$P_e / P_c = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}^{\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)}$$

Tipo probeta	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Rectangular	2.1513	-0.4291
Semicircular	2.3007	-0.6230
Triangular-Arista	1.9622	-0.3448
Triangular-Cara	1.4917	-0.2620

Tipo probeta	$\beta_1$	$\beta_2$
Rectangular	-0.28373	0.0567
Semicircular	-0.2716	0,0700
Triangular-Arista	-0.2144	0.0353
Triangular-Cara	-0.2059	0,0376

#### Relación excentricidad/canto

$$e / h = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}^{\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)}$$

Tipo probeta	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Rectangular	0.9592	-0.2231
Semicircular	0.0093	0.0966
Triangular-Arista	2.7156	-1.2751
Triangular-Cara	0.0068	0.1404

Tipo probeta	$\beta_1$	$\beta_2$
Rectangular	-0.1762	0.0492
Semicircular	0.3154	-0.0947
Triangular-Arista	-0.5150	0.2175
Triangular-Cara	0.2961	-0.1016

## Deformación máxima en rotura

$$\varepsilon_c = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}^{\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)}$$

Tipo probeta	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Rectangular	0.0431	-0.0143
Semicircular	0.0179	0.0015
Triangular-Arista	0.0378	-0.0121
Triangular-Cara	0.0287	0.0017

Tipo probeta	$\beta_1$	$\beta_2$
Rectangular	-0.6063	0.1008
Semicircular	-0.2996	-0.0740
Triangular-Arista	-0.5560	0.0751
Triangular-Cara	-0.3603	-0.0469

## Módulo de Elasticidad Longitudinal

$$E_c = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot \log(f_{ck})$$

Tipo probeta	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Rectangular	-124600	-3928
Semicircular	-107090	-38369
Triangular-Arista	-110730	-8661
Triangular-Cara	-91659	-66689

Tipo probeta	$\beta_1$	$\beta_2$
Rectangular	82923	3767
Semicircular	75117	24790
Triangular-Arista	81617	5449
Triangular-Cara	64678	42330

## Resistencia del hormigón

$$f_c = -2.46 + 1.98 \cdot \log(t) + (0.57 + 0.27 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

## 5. DESARROLLO DE NUEVOS DIAGRAMAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN

A continuación se exponen tres diagramas tensión-deformación, alternativos a los existentes en la actualidad en el diseño y cálculo de elementos de hormigón estructural de alta resistencia frente a sollicitaciones normales.

Los diagramas dependen de tres parámetros, a saber,  $k_1$ ,  $k_2$ , y  $k_3$ , los cuales presentan valores diferentes en función del tipo de sección, la edad del hormigón y su resistencia. Para obtener los valores de estos tres parámetros se aplica la condición de que, para todos los tipos de probetas, todas las edades de rotura y todas las resistencias, la distribución tensional sobre la probeta que cada diagrama propone reproduzca exactamente tanto el valor de la carga experimentalmente medido, como su posición.

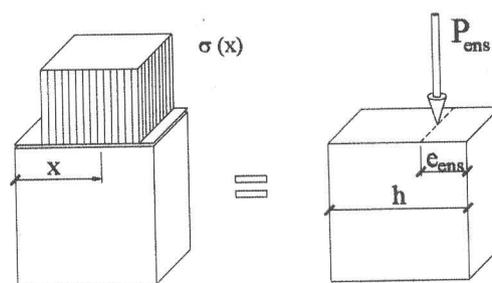


Figura 11. Procedimiento de evaluación de los nuevos diagramas.

Del equilibrio de fuerzas y de momentos sobre la sección sólo es posible obtener dos de los tres parámetros. El tercero de ellos se ajusta de manera que los resultados obtenidos sean coherentes.

## Diagrama tensión-deformación 1

La forma del diagrama queda recogida en la Figura 12

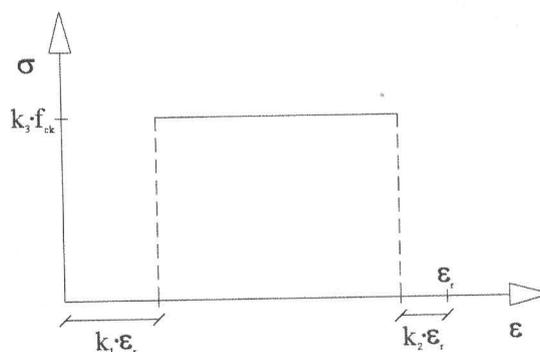


Figura 12. Diagrama tensión-deformación 1.

La expresión numérica del diagrama es la siguiente:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \leq \varepsilon < k_1 \cdot \varepsilon_r \\ k_3 \cdot f_{ck} \rightarrow k_1 \cdot \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq (1 - k_2) \cdot \varepsilon_r \\ 0 \rightarrow (1 - k_2) \cdot \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{cases}$$

### Diagrama tensión-deformación 2

La forma del diagrama 2 queda recogida en la Figura 13

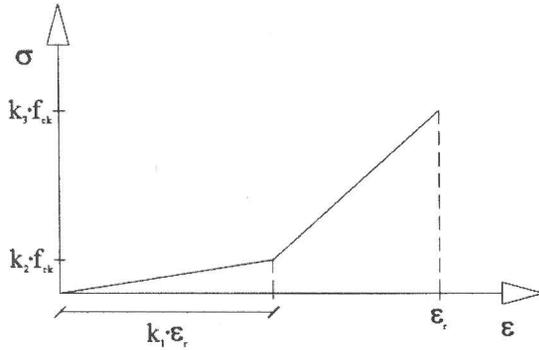


Figura 13. Diagrama tensión-deformación 2.

La expresión numérica del diagrama es:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{k_2 \cdot f_{ck}}{k_1 \cdot \varepsilon_r} \cdot \varepsilon \rightarrow 0 \leq \varepsilon < k_1 \cdot \varepsilon_r \\ k_2 \cdot f_{ck} + \frac{(k_3 - k_2) \cdot f_{ck}}{(1 - k_1) \cdot \varepsilon_r} \cdot (\varepsilon - k_1 \cdot \varepsilon_r) \rightarrow k_1 \cdot \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{cases}$$

### Diagrama tensión-deformación 3

A diferencia de los diagramas anteriores, el diagrama 3 es de aplicación únicamente a probetas rectangulares y triangulares con deformación nula en arista. Por la propia configuración del diagrama, la distancia desde el centro de gravedad del volumen de tensiones hasta la fibra más comprimida es siempre superior que la que habría en caso de comportamiento perfectamente elástico y lineal. Sin embargo, los resultados expe-

### Diagrama tensión-deformación 1

$$k_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>
Rectangular	-0,0295	0,1077	0,0000	0,0000	0,3833	0,3375
Semicircular	0,7437	-0,1436	0,0000	0,0000	2,2965	-0,2214
Triangular-Arista	-0,7815	0,4789	0,2343	-0,1433	0,8427	-0,0077
Triangular-Cara	0,7720	-0,1879	0,0000	0,0000	3,4044	-0,7609

rimentales han desvelado que, para las probetas semicirculares y triangulares con deformación nula en cara, esa distancia es incluso menor que la que corresponde a un comportamiento elástico y lineal.

La forma del diagrama 3 viene recogida en la Figura 14.

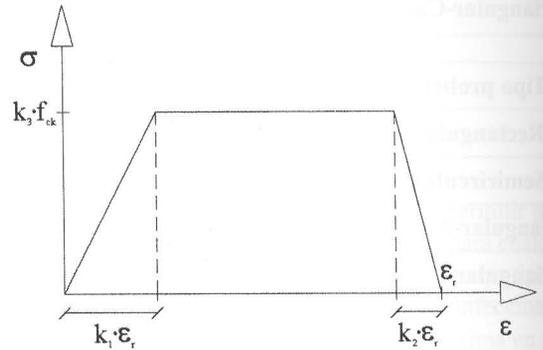


Figura 14. Diagrama tensión-deformación 3.

La expresión numérica del diagrama es:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{k_3 \cdot f_{ck}}{k_1 \cdot \varepsilon_r} \cdot \varepsilon \rightarrow 0 \leq \varepsilon < k_1 \cdot \varepsilon_r \\ k_3 \cdot f_{ck} \rightarrow k_1 \cdot \varepsilon_r \leq \varepsilon \leq (1 - k_2) \cdot \varepsilon_r \\ \frac{k_3 \cdot f_{ck}}{k_2 \cdot \varepsilon_r} \cdot (\varepsilon_r - \varepsilon) \rightarrow (1 - k_2) \cdot \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{cases}$$

Una vez definidos matemáticamente los tres diagramas se procede a obtener, para cada una de las formas de las probetas, cada una de las edades y cada una de las resistencias, el valor de k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub> y k<sub>3</sub>. En [17] se encuentran recogidos los valores numéricos obtenidos.

Para poder manejar los datos de forma cómoda, se procede a realizar un ajuste numérico de los mismos, determinando una expresión matemática para cada uno de los parámetros que dependen de los siguientes factores:

- Forma de la probeta.
- Edad de rotura
- Resistencia característica a los 28 días del hormigón

A continuación se muestran las expresiones obtenidas para cada uno de los tres diagramas.

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>
Rectangular	0,0021	-0,0007	0,0000	0,0000	0,0015	-0,0016
Semicircular	-0,0030	0,0010	0,0000	0,0000	-0,0125	0,0031
Triangular-Arista	0,0098	-0,0042	-0,0023	0,0014	-0,0035	0,0017
Triangular-Cara	-0,0033	0,0013	0,0000	0,0000	-0,0215	0,0077

## Diagrama tensión-deformación 2

$$k_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>
Rectangular	0,1198	0,0551	0,8000	0,0000	0,1004	0,5565
Semicircular	0,6153	-0,1008	0,1000	0,0000	3,9910	-0,0208
Triangular-Arista	-0,2171	0,4840	1,3079	0,0073	-0,0085	0,2877
Triangular-Cara	0,3761	-0,0140	-0,4573	0,4087	5,5406	-0,7242

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>
Rectangular	0,0035	-0,0003	0,0000	0,0000	0,0020	-0,0019
Semicircular	-0,0015	0,0005	0,0000	0,0000	-0,0160	0,0025
Triangular-Arista	0,0089	-0,0037	-0,0058	0,0021	0,0033	-0,0035
Triangular-Cara	0,0009	0,0001	0,0069	-0,0020	-0,0263	0,0060

## Diagrama tensión-deformación 3

$$k_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

$$k_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot \log(t)) + (\beta_1 + \beta_2 \cdot \log(t)) \cdot f_{ck}$$

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>
Rectangular	-0,2472	0,3344	0,0000	0,0000	0,3684	0,3492
Semicircular	-1,2507	0,7490	0,5221	-0,3194	0,8696	-0,0313

Tipo probeta	k <sub>1</sub>		k <sub>2</sub>		k <sub>3</sub>	
	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>
Rectangular	0,0045	-0,0012	0,0000	0,0000	0,0015	-0,0014
Semicircular	0,0173	-0,0070	-0,0052	0,0032	-0,0038	0,0021

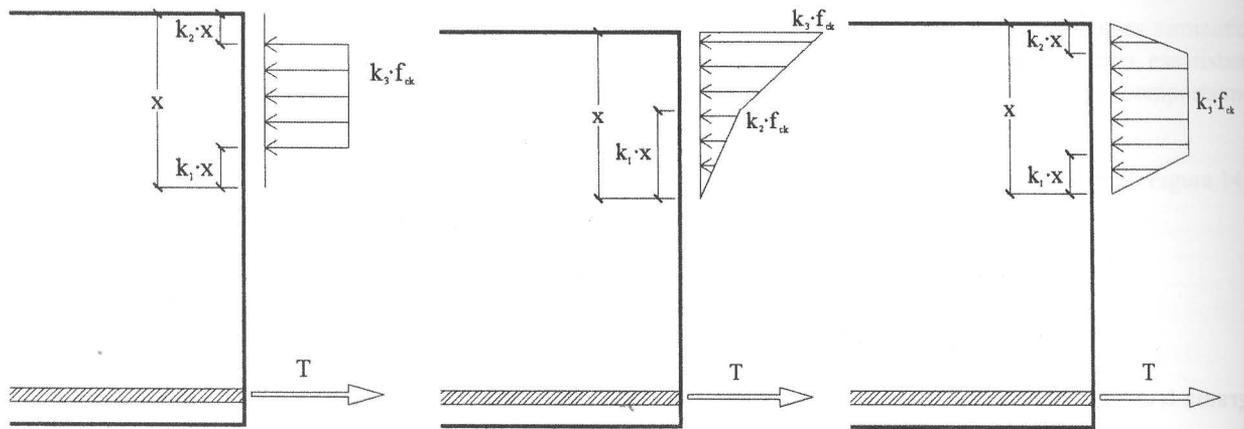


Figura 15. Esquemas de aplicación de los nuevos diagramas tensión-deformación.

## 6. PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN DE LOS NUEVOS DIAGRAMAS

El modo de utilización de estos nuevos diagramas es muy similar al de los diagramas actuales; aunque existen algunas diferencias dignas de mención.

En primer lugar se hace necesario conocer la forma de la sección de nuestro elemento estructural, la resistencia característica del hormigón a los 28 días y la edad del mismo.

Asimismo se hace necesario decidir qué diagrama se va a utilizar.

Con estos datos se estima el valor de los parámetros  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  a través de las fórmulas de ajuste anteriormente recogidas.

A continuación el modo de análisis es el mismo que el utilizado en la actualidad. Planteando equilibrio sobre la sección se determina el valor de la profundidad de la fibra neutra y de la tracción en la armadura (Figura 15).

### Agradecimientos

Quisiéramos agradecer sinceramente la financiación recibida de los fondos de la Unión Europea, el apoyo recibido por el Laboratorio de Estructuras de la Universidad de Cantabria y por la Universidad de Burgos. Asimismo agradecemos la colaboración de las empresas PRECON, S.A., BETTOR-MBT y SIKA.

## 7. CONCLUSIONES

Las conclusiones más relevantes del presente trabajo de investigación son:

- Se han constatado diferencias entre los resultados de los ensayos y las normas internacionales analizadas, en lo que se refiere a comportamiento en rotura de elementos de hormigón de alta resistencia bajo esfuerzos de flexo-compresión.

- Se han desarrollado fórmulas de estimación de algunos parámetros del hormigón, como son, deformación máxima en rotura, módulo de elasticidad y resistencia a compresión. Tanto la deformación máxima en rotura como el módulo de elasticidad incluyen en su formulación la influencia de la forma de la sección.
- Se han desarrollado tres diagramas tensión-deformación, alternativos a los existentes, de aplicación al dimensionamiento en flexión compuesta de elementos de hormigón estructural de alta resistencia. Su característica más importante es que incluyen en su definición matemática la calidad del hormigón, la edad de rotura y la forma de la sección.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Mchenry, D.; Handon, N. W.; Hognestad, E. "Concrete stress distribution in ultimate strength design". *Journal of the American Concrete Institute*. Diciembre, 1995.
2. Mattock, A.H.; Kriz, L. B. y Hognestad, E. "Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design". *Journal of the ACI*. Febrero, 1961.
3. Rüsç, H. "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. Festigkeit und Verformung des exzentrisch gedrückten Rechteckquerschnittes aus unberwehrtem Beton bei kurzzeitiger Lasteinwirkung". Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1995.
4. Rüsç, H.; Kordina, K.; Stöckl, S. "Festigkeit der Biegedruckzone. Vergleich von Prismen- und Balkenversuchen". Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1967.
5. Rasch, C. "Spannungs-Dehnungs-Linien des Beton und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit". Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1962.
6. Griffith, A.A. "The theory of rupture". Proceedings of the First International Conference of Applied Mechanics, 1924.

7. Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P.E. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements". *Cement Concrete Res*, 1976.
8. Bazant, J.P.; Planas, J. "Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials". Ed. CRC Press, 1998.
9. Markeset, G. "Failure of concrete under compressive strain gradients". NTH Universitetet i Trondheim, 1993.
10. Markeset, G. "Eccentrically loaded prisms of high strength concrete". 4th International Symposium on Utilization of High Strength/High Performance Concrete. París, 1996.
11. Meyer, J. "Improving the ductility of high performance concrete". Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Leipzig, LACER, núm. 3, 1998.
12. Meyer, J.; Sint, A. "Calculation of the load-deformation behaviour of over-reinforced concrete beams with the BDZ Model", Universität Leipzig. LACER, núm. 4, 1999.
13. Foster, S.J.; Attard, M.M. "Experimental tests on eccentrically loaded high strength concrete columns". *ACI Structural Journal*. Marzo, 1997.
14. Ahmad, S.J.; Shah, S.P. "High Performance Concretes and Applications". Edward Arnold Publications, 1994.
15. Shah, S.P.; Swartz, S.E.; Ouyang, C. "Fracture Mechanics of Concrete". Wiley Interscience, 1995.
16. Vicente M.A. "Estudio del comportamiento en flexo-compresión de los hormigones de alta resistencia". Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica. Universidad de Cantabria, Febrero, 2001.
17. González, D.C. "Desarrollo de nuevos diagramas tensión-deformación para el dimensionamiento en E.L.U. de elementos de hormigón estructural de alta resistencia". Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Burgos. Noviembre, 2002.
18. "EHE Instrucción de Hormigón Estructural". Comisión permanente del Hormigón Estructural, 1999.
19. "Código Modelo para Hormigón Estructural". CEB-FIP. 1990.
20. "High Performance Concrete. Recommended Extensions to the Model Code 90. Research Needs". CEB Bulletin d'Information 228. Julio, 1995.
21. NS-3473E. Concrete Structures. Design rules". 1992.
22. "RAK MK Finnish code for concrete structures". RAK.MK.B.4.1983/84. Supplement 1989. Finland.
23. "Building code requirements for structural concrete (ACI318-02) and commentary (ACI 318R-02)". ACI Manual of Concrete Practice. 2002.
24. "NEN Netherlands code for concrete structures". Supplement to ENE 6720, NEN 5950 and NEN 6722, 1994.
25. "BBK 79. Sweden code for concrete structures". 1979.
26. "ACI-363R/92. State-of-the-Art Report on High-Strength Concrete (Reapproved 1997)". ACI Manual of Concrete Practice, 1999.
27. Arenas, J.J.; Gutiérrez, G.; Vicente, M.A.; González, D.C. "Behaviour of high strength concrete under combined bending and compression". *ACI Journal of Materials*. Aceptado para publicar.