Facultad de Ciencias

ANÁLISIS DE BAND-GAPS ELECTROMAGNÉTICOS EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR A FRECUENCIAS DE MICROONDAS

Trabajo Fin de Carrera
para acceder al título de

LICENCIADA EN FÍSICA

Autora: SANDRA PRADA MAZA

Director: ÁLVARO GÓMEZ GÓMEZ

OCTUBRE 2013

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que me han apoyado a lo largo del camino recorrido hasta aquí y que me han permitido llegar hasta la presentación de este trabajo fin de carrera; haciendo una mención especial a mis familiares y amigos, por su paciencia y por los ánimos que he recibido de ellos desde mis comienzos universitarios.

También quisiera dedicar unas líneas a mis compañeros de carrera, por compartir conmigo momentos, experiencias y conocimientos. Aquí, no puedo olvidarme de mis físicas, pilares fundamentales a lo largo de mi trayectoria universitaria, gracias a las cuales alcanzar esta meta ha sido un poco menos duro.

Por último, aunque no por ello menos importante, me gustaría mostrar mi agradecimiento a mi director de proyecto, Álvaro Gómez Gómez, por la paciencia y dedicación que ha mostrado conmigo en la realización de este trabajo, involucrándose en el desarrollo del mismo y consiguiendo que, en cierto modo, le quite el miedo a enfrentarme a nuevos problemas que se me planteen.

A todos ellos, muchas gracias.

ABSTRACT

A lo largo de este trabajo se ha analizado la propagación electromagnética a frecuencias de microondas a través de una guía de onda rectangular en banda X, con paredes perfectamente conductoras, que comprende láminas alternas de dos materiales diferentes (ambos positivos o uno positivo y otro negativo) según el modelo de Kronig-Penney. Se han obtenido y examinado las bandas de propagación permitidas y prohibidas para los modos TE^z y TM^z considerando, en primer lugar, la estructura anterior como ideal (infinitas celdas unidad), a partir de la imposición del teorema de Floquet-Bloch y, posteriormente, considerando la estructura real (número finito de celdas unidad), a partir de las matrices de scattering que caracterizan cada una de las discontinuidades entre dos medios distintos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN 1
1.1 ANTECEDENTES Y MOTIVACIÓN 1
1.2 INTRODUCCIÓN GENERAL 2
CAPÍTULO 2: ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO 5
2.1 INTRODUCCIÓN 5
2.2 FÍSICA DE LOS MATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO 7
2.3 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO 9
2.3.1 REFRACCIÓN NEGATIVA: LEY DE SNELL INVERSA 9
2.3.2 FOCALIZACIÓN CON UN MATERIAL CON $\mathbf{n < 0}$ 10
2.3.3 EFECTO DOPPLER INVERSO 12
2.3.4 OTROS EFECTOS 12
2.3.5 DISPERSIÓN 13
CAPÍTULO 3: METAMATERIALES 14
3.1 DISEÑO DE UN MATERIAL LH 14
3.2 APLICACIONES 16
3.2.1 SUPERLENTES 16
3.2.2 CLOAKING 17
3.2.3 MEDIOS DE ALTO ÍNDICE DE REFRACCIÓN 18
3.2.4 METAMATERIALES Y DEFENSA 19
CAPÍTULO 4: DESARROLLO MATEMÁTICO 20
4.1. POTENCIALES VECTOR 20
4.2 MODOS DE PROPAGACIÓN 21
4.3 ESTRUCTURA EBG IDEAL 22
4.4 ESTRUCTURA REAL 25
CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y ANÁLISIS 27
5.1 ESTRUCTURA IDEAL 27
5.1.1 Propagación a través de medios ordinarios no dispersivos y sin pérdidas 27
5.1.2 Inclusión de un material LH en la celda unidad 32
5.1.3 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad 35

5.2 ESTRUCTURA REAL 38
5.2.1 Propagación a través de medios ordinarios no dispersivos y sin pérdidas 38
5.2.2 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad (sin pérdidas) 39
5.2.3 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad (con pérdidas) 40
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES 42
REFERENCIAS 44

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES Y MOTIVACIÓN

Recientemente ha surgido un nuevo tipo de materiales, conocidos con el nombre de metamateriales, que se encuadran en el marco de los denominados medios complejos y que presentan una respuesta electromagnética inusual, diferente de la de los medios ordinarios que se encuentran en la naturaleza. Su fabricación consiste, como se explicará de forma más detallada en apartados posteriores, en la inclusión periódica de elementos electromagnéticamente pequeños, separados entre sí una distancia menor que la longitud de onda de la onda que se hace incidir sobre ellos. Por esta razón, desde el punto de vista electromagnético, los metamateriales pueden considerarse como medios homogéneos y ser caracterizados entonces por unos parámetros constitutivos efectivos de forma análoga a como se hace con cualquier medio ordinario habitual.

Dentro del grupo de los metamatariales se encuadran, a su vez, los llamados medios zurdos (predichos por Veselago en 1968 [1]), cuya característica principal es que presentan unos parámetros constitutivos con partes reales negativas, lo cual trae como consecuencia que las velocidades de fase y de grupo de las ondas que se propagan por ellos tienen sentidos opuestos (en contraposición con lo que ocurre en un material ordinario), dando lugar a aplicaciones verdaderamente llamativas tales como la fabricación de una superlente que posibilite superar el límite óptico de la difracción o de una capa de invisibilidad.

Es por ello que estos materiales se han convertido en una línea de investigación muy interesante dentro de la comunidad científica, hasta tal punto que el número de artículos publicados al respecto ha aumentado prácticamente de forma exponencial en los últimos años, como puede observarse en la siguiente gráfica:

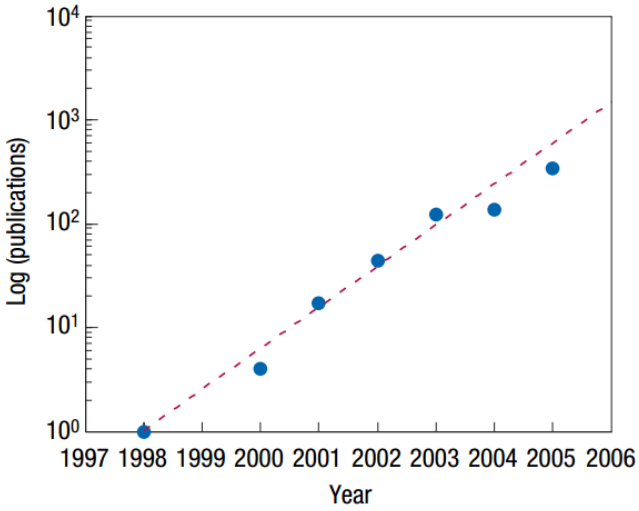


Figura 1: Evolución temporal del número de artículos publicados sobre la refracción negativa y materiales con refracción negativa, en escala logarítmica [2].

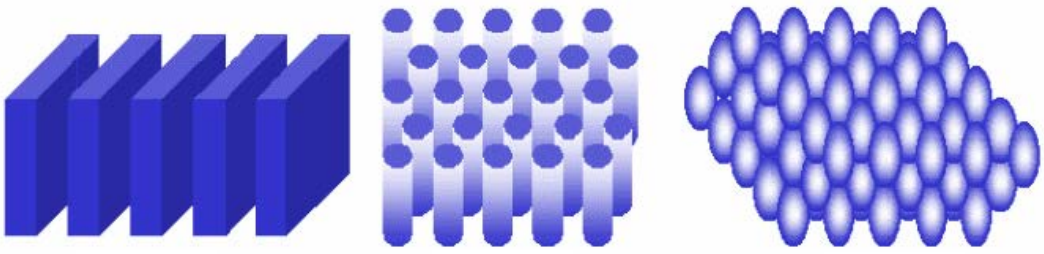
La transmisión de señales por guía de onda reduce la disipación de energía, por lo que estas estructuras son muy utilizadas en el terreno de las telecomunicaciones para el guiado de frecuencias como las microondas y las ondas de radiofrecuencia.

Obviamente, el ámbito de las microondas no ha quedado al margen de la aparición de los citados metamateriales, por lo que se ha decidido realizar en este trabajo un estudio de la propagación electromagnética a frecuencias de microondas en guía de onda rectangular dentro de la cual se han insertado de forma intercalada láminas de dos materiales diferentes, ordinarios o metamateriales, para analizar el efecto de la inclusión de este nuevo tipo de materiales en una estructura periódica.

1.2 INTRODUCCIÓN GENERAL

Se conoce con el nombre de Band Gaps Electromagnéticos (en inglés, EBG: Electronic Band Gaps) a aquellas estructuras periódicas fabricadas de forma artificial cuyo periodo es comparable a la longitud de onda de la señal que se propaga por la misma. Una de las características más relevantes que presenta este tipo de estructuras es que para determinados valores de la frecuencia de trabajo permiten el paso de las ondas electromagnéticas (passbands), mientras que existen otros rangos frecuenciales en los que la propagación está prohibida (stopbands), por lo que resultan ser de gran interés en el campo de la ingeniería de comunicaciones y microondas gracias a la posibilidad de su utilización como filtros de frecuencia.

La estructura Band Gap más simple que puede construirse es aquella formada mediante el intercalado de láminas de dos materiales diferentes a lo largo de una dirección determinada, 1-D EBG (Figura 2a). Existen, también, estructuras EBG 2-D (Figura 2b) y 3-D (Figura 2c) cuando se produce una variación periódica de algún parámetro macroscópico (de los parámetros constitutivos de los medios, típicamente) en 2 o 3 dimensiones, respectivamente.



a) b) c)

Figura 2: Estructuras EBG a) unidimensional, b) bidimensional y c) tridimensional [3]

A lo largo de este trabajo se ha analizado la aparición y las características de los Band Gaps que surgen en la propagación electromagnética a través de una guía de onda rectangular en banda X que contiene en su interior una estructura EBG 1-D, en función de la anchura de la celda unidad que compone la misma, la relación entre los parámetros constitutivos de los dos medios, etc…

Se tiene, entonces, una guía de onda rectangular (anchura = *a*, altura = *b*), cuyas cuatro paredes se consideran perfectamente conductoras, en cuyo interior se disponen de forma alterna (con periodicidad *d* a lo largo del eje *z*) láminas de dos medios materiales diferentes caracterizados por sus parámetros constitutivos efectivos (ε_{r1}, ε_{r2}, μ_{r1}, μ_{r2}), tal y como puede observarse en el esquema de la Figura 3.

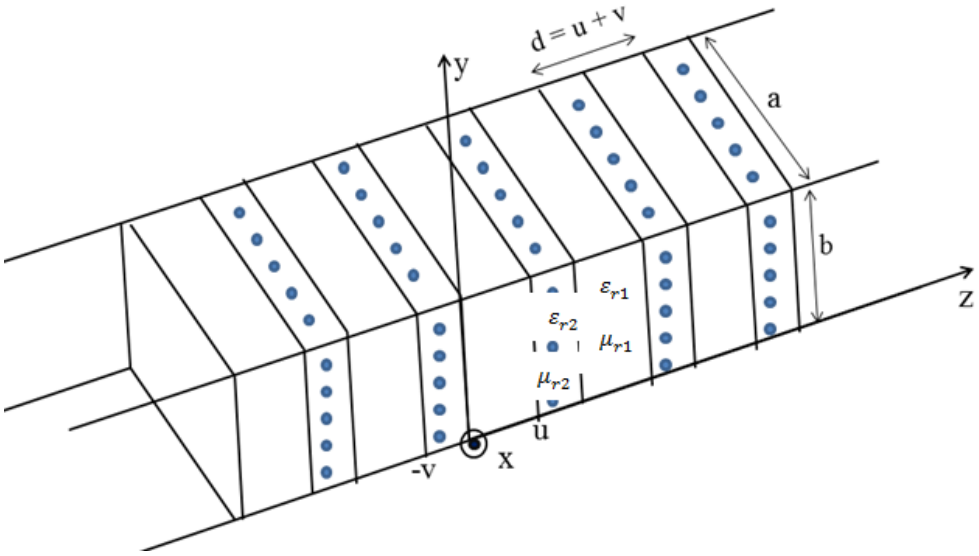


Figura 3: Esquema de la guía de onda sobre la cual se va a realizar el estudio de la propagación electromagnética.

Idealmente, estas estructuras periódicas se componen de un número infinito de celdas unidad, lo cual permite la imposición del teorema de Floquet-Bloch [4], que simplifica considerablemente la resolución matemática del problema (apdo. 4.3). Sin embargo, como resulta obvio, una estructura real de este tipo ha de contener un número finito de celdas unidad, por lo que no se puede aplicar el teorema de Floquet como en el caso anterior, si no que se emplearán técnicas analíticas diferentes (apdo. 4.4).

Una vez introducido el tema en estudio, la línea de actuación que se ha seguido ha sido la siguiente:

Primeramente, se han revisado las principales propiedades y aplicaciones de los metamateriales. A continuación, para el estudio de la estructura ideal, se han obtenido las soluciones del problema electromagnético con la ayuda de los potenciales vector $\vec{A}$ y $\vec{F}$ tanto para los modos TE^z como para los TM^z(ver apartado 4 de este informe). Estas ecuaciones se han implementado en Matlab para proceder al análisis de cuáles son las bandas permitidas y las bandas prohibidas una vez caracterizada la estructura EBG (dimensiones de la guía y parámetros constitutivos de los medios que componen la celda unidad) y dada la frecuencia de trabajo. Se han representado, además, los denominados Gap Maps en los que se muestran las bandas permitidas y las bandas de rechazo no sólo en función de la frecuencia sino también en función de otro parámetro (se ha escogido la anchura de uno de los medios que conforman la celda unidad, *u* en la Figura 3). Con el fin de comprobar si las soluciones obtenidas con nuestro programa son

correctas, se han reproducido algunos trabajos en los que se estudian problemas similares [5]-[6] y se ha verificado la concordancia de los resultados.

Una vez comprobado el correcto funcionamiento del programa, se ha procedido al estudio de la influencia de los diferentes parámetros (tamaño de la celda unidad, dimensiones de la guía, relación entre los parámetros constitutivos de los dos medios que componen la celda unidad, etc…) en la aparición y características (número de ellas, anchura, etc…) de las bandas de propagación no permitidas, que es el tema de interés en torno al cual se centra el desarrollo de este trabajo.

Para la estructura real, por su parte, debido a las restricciones que aparecen al contar con un número finito de celdas unidad, no puede llevarse a cabo el mismo desarrollo matemático. En este caso, se caracteriza cada discontinuidad (separación entre dos medios diferentes) por su matriz de scattering correspondiente. A continuación, ésta se traslada, se "une" con la matriz de la discontinuidad siguiente y se repite el proceso hasta que, finalmente, se obtiene una matriz de scattering total que caracteriza la estructura en su conjunto. Asimismo, se ha implementado un programa en Matlab que obtiene la matriz de scattering de la estructura en estudio y permite representar el coeficiente de transmisión asociado a la misma para poder analizar en qué rangos frecuenciales no existe propagación de la señal. Igual que en el caso anterior, se ha comprobado que los resultados proporcionados por dicho programa son correctos realizando una comparación de los mismos con los obtenidos en estudios similares [5]-[6].

Por último, se han comparado los resultados que se han obtenido para los dos casos (estructura EBG ideal y real).

Llegados a este punto, conviene señalar que a lo largo de todo el desarrollo del trabajo se ha considerado la propagación del campo electromagnético según la dirección del eje z (que se corresponde con el eje de la guía) y una dependencia temporal del mismo de la forma $e^{j\omega t}$, siendo ω la frecuencia angular y t la variable temporal.

CAPÍTULO 2: ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO

2.1 INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido, la permitividad dieléctrica (ε) y la permeabilidad magnética (μ) de un medio material son las cantidades que determinan la propagación de las ondas electromagnéticas a través del mismo, dado que son los únicos parámetros que aparecen en las ecuaciones de Maxwell y en la relación de dispersión (conexión entre la frecuencia angular, *ω*, de una onda monocromática y el módulo de su vector de onda, *k*), la cual, para medios isótropos, toma la siguiente forma [7]:

$$k = \frac{\omega n}{c} \tag{1}$$

siendo *n* el índice de refracción del medio, el cual se definirá más abajo y *c* la velocidad de la luz en el vacío ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

En este sentido, para poder tratar un medio material como homogéneo, es necesario que se cumpla la condición de homogeneidad efectiva, según la cual, el tamaño de la celda unidad que lo componga (*p*) ha de ser mucho menor que la longitud de onda de la onda guiada. Sin embargo, ya se comprueban buenos comportamientos y resultados cuando el tamaño de la celda es inferior a un cuarto de la longitud de onda:

$$p < \frac{\lambda}{4} \tag{2}$$

Cuando se verifica la condición anterior, la estructura se comporta como si fuera un material homogéneo, de forma que las ondas electromagnéticas la perciben como una estructura uniforme en la dirección de propagación, pudiéndosele atribuir unos parámetros constitutivos efectivos.

El índice de refracción de un medio, *n*, se define [8] como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío, *c*, y la velocidad de la luz en dicho medio, *v*: $\left(n = \frac{c}{v}\right)$, y puede obtenerse a partir de los parámetros constitutivos del mismo según la relación (4). Tanto $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ como $\mu = \mu_0 \mu_r$ son, en general, números complejos cuya parte imaginaria da cuenta de las pérdidas del material.

$$n^2 = \varepsilon_r \mu_r \tag{3}$$

$$n = \pm\sqrt{|\varepsilon_r \mu_r|} \tag{4}$$

En las dos expresiones anteriores, ε_r y μ_r son la permitividad y la permeabilidad relativas al vacío, respectivamente.

Para simplificar el razonamiento y salvo que se diga lo contrario, se va a considerar que las pérdidas son despreciables y que, por lo tanto, los parámetros constitutivos son reales. Así, de la ecuación (3) se deduce que una variación simultánea en el signo de los

dos parámetros constitutivos no cambiaría el producto de dicha expresión, lo cual, en un principio, podría interpretarse de varias maneras, tal y como se mencionan a continuación:

Por un lado, ante el desconocimiento inicial del tema, cabría pensar que en el caso de que los dos parámetros fueran negativos, se estuviera violando alguna ley fundamental de la naturaleza, por lo que no sería posible la existencia de ninguna sustancia con tales características. Podría considerarse también, por otro lado, que tal cambio de signos simultáneo no afectase a las propiedades de la sustancia, de forma que un material con unos determinados valores de ε y μ (ambos positivos) presentaría las mismas propiedades que otra con esos mismos parámetros pero de signo opuesto. Por último, habría que tener en cuenta también la idea de que tal material sí pudiera existir y sus propiedades fueran diferentes de las de otras sustancias que tuvieran los parámetros constitutivos de igual valor absoluto pero diferente signo. Fue VictorVeselago quien, en el año 1968, propuso teóricamente [1] la existencia de materiales con $\varepsilon < 0$ y $\mu < 0$ comprobando que, en efecto, es la tercera vía la que realmente se verifica.

En función del signo de sus parámetros constitutivos, se pueden clasificar los diferentes materiales como se muestra a continuación:

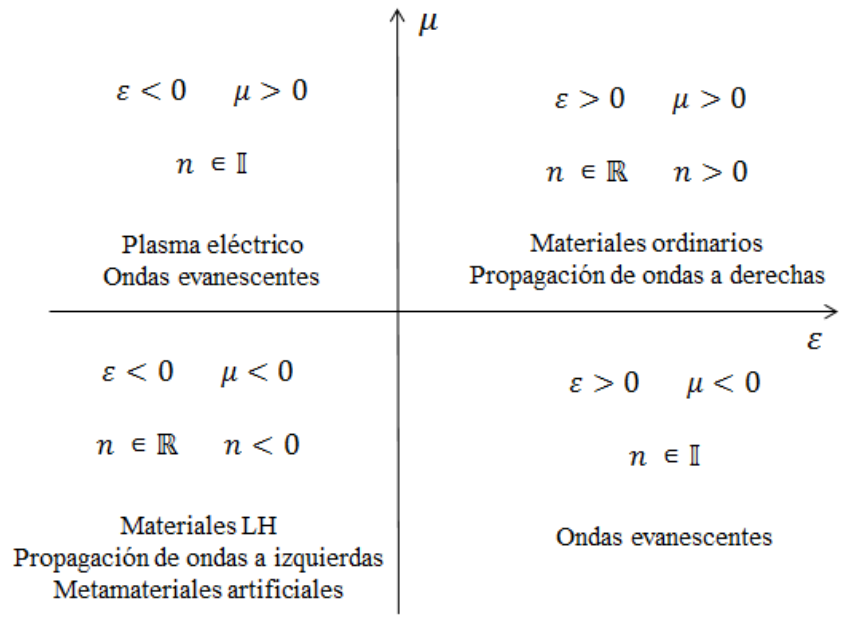


Figura 4: Clasificación de los materiales según sus parámetros constitutivos relativos.

Como puede observarse en el esquema anterior, en aquellos materiales que presentan índices de refracción imaginarios, es decir, aquellos en los que uno de los dos parámetros constitutivos es positivo y el otro negativo (cuadrantes 2º y 4º), no se producirá propagación, sino que se formarán ondas evanescentes que carecen de interés en nuestro estudio.

Por el contrario, los materiales que se incluyen en los cuadrantes 1º y 3º sí presentan propagación. Los materiales que tienen $\varepsilon > 0$ y $\mu > 0$, son, como ya se sabe, los materiales ordinarios, y los que presentan $\varepsilon < 0$ y $\mu < 0$ son los conocidos como materiales zurdos, letf-handed materials (LH material), NPV (Negative Phase Velocity) o DNG (Double Negative), cuyas propiedades se analizarán a continuación.

2.2 FÍSICA DE LOS MATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO

De las dos posibles soluciones que existen para (4), tradicionalmente se ha escogido siempre la del signo positivo; sin embargo, tras el descubrimiento de Veselago, analizando las propiedades de la propagación de una onda plana monocromática a través de un medio con $\varepsilon < 0$ y $\mu < 0$, se llega a la conclusión de que, en este caso, hay que optar por el signo negativo, como se expone a continuación.

Para analizar la propagación de las ondas electromagnéticas en este tipo de materiales y compararlo con la propagación en los medios convencionales, hay que estudiar cómo influye este cambio de signos en las ecuaciones de Maxwell, en las que ε y μ aparecen de forma separada, ya que si apareciera el producto de ambos, como se ha comentado con anterioridad, el signo de dicho producto no se vería afectado.

Si se consideran medios lineales, homogéneos e isótropos, las relaciones de constitución vienen dadas por [9]:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{5}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{6}$$

Suponiendo, además, medios sin pérdidas y sin fuentes, las ecuaciones de Maxwell para medios ordinarios (RH: Right-Handed) se reducen a:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H} \qquad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \vec{E} \tag{7}$$

mientras que para medios con $\varepsilon < 0$ y $\mu < 0$ vienen dadas por:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = -\omega |\mu| \vec{H} \qquad \vec{k} \times \vec{H} = \omega |\varepsilon| \vec{E} \tag{8}$$

Este cambio de signo que se observa en las ecuaciones anteriores se traduce en que, para medios ordinarios, con ε y μ ambos positivos, los vectores $\vec{E}, \vec{H}$ y $\vec{k}$ forman una terna dextrógira convencional, mientras que para medios LH, se forma un triedro "zurdo",

donde la regla de la mano derecha deja de cumplirse, como se muestra en la siguiente figura:

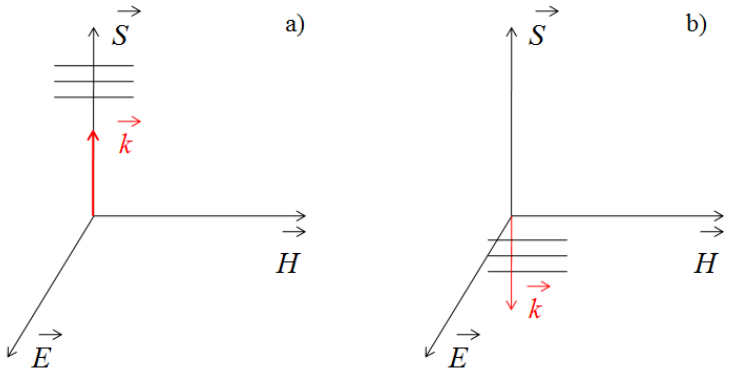


Figura 5: Representación de las direcciones relativas entre los campos eléctrico y magnético, el vector de onda y el vector de Poynting en un medio a) RH y b) LH.

En el esquema anterior, el vector $\vec{S}$ es el vector de Poynting, el cual se define como:

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \tag{9}$$

A diferencia de lo que ocurre con el vector de onda, el vector de Poynting lleva siempre la misma dirección que la dirección de propagación de la energía, y es, por lo tanto, paralelo a la velocidad de grupo, independientemente del tipo de medio que se esté tratando.

En el caso de materiales zurdos, como se observa en la Figura 5, se produce un cambio de sentido del vector de onda $\vec{k}$, que ahora es opuesto a la dirección del vector de Poynting.

Por su parte, la velocidad de fase viene dada por:

$$\vec{v}_p = \frac{\omega}{k}\vec{k} \tag{10}$$

Puesto que ω toma siempre valores positivos, para materiales ordinarios, en los que el vector de onda es positivo (propagación hacia el exterior de la fuente: ondas forward), la velocidad de fase es también positiva, o lo que es lo mismo, paralela a la dirección de propagación de la energía. Para materiales zurdos, por el contrario, la velocidad de fase lleva el sentido opuesto a la dirección de propagación de la energía (backward-wave propagation, en la literatura anglosajona), y es precisamente de este hecho de donde provienen los diferentes nombres que se le dan a estos materiales: zurdos, left-handed, NPV, etc…

Teniendo en cuenta este razonamiento y recordando la relación de dispersión (1), queda claro cuál es el signo que ha de escogerse en la ecuación (4): en un medio para el cual la velocidad de fase es negativa (ε y μ ambos negativos), n ha de ser negativo y viceversa.

A modo de resumen y de una forma más compacta, se tiene que:

$$n = s\sqrt{|\varepsilon_r \mu_r|} \tag{11}$$

donde $$s = \begin{cases} +1 & dieléctricos\ ordinarios \\ -1 & materiales\ LH \end{cases} \tag{12}$$

indica si el material es un medio ordinario o si, por el contrario, se trata de un material zurdo.

Del hecho de que, en materiales zurdos, las velocidades de fase y de grupo sean antiparalelas, se derivan importantes consecuencias como son la inversión de la Ley de la refracción de Snell, del efecto Doppler o de la radiación Cerenkov, por ejemplo. Algunas de ellas se analizarán más detalladamente en el apartado posterior.

2.3 PROPIEDADES DE LOS MATERIALES CON ÍNDICE DE REFRACCIÓN NEGATIVO

2.3.1 REFRACCIÓN NEGATIVA: LEY DE SNELL INVERSA

La inversión de la Ley de Snell es una de las propiedades más importantes que presentan los medios zurdos.

Por su parte, la Ley de la reflexión de Snell ($\theta_{incidente} = \theta_{reflejado}$) no se ve afectada por el hecho de que los medios que se estén tratando sean los dos RH, LH o uno de cada tipo, dado que hace referencia a ondas que se propagan en un mismo medio. Sin embargo, en el caso de la refracción y como propuso inicialmente Veselago [1], sí aparecen algunas modificaciones cuando la interfaz de separación es entre un medio RH y otro LH debido a la aparición de un signo negativo en el índice de refracción de este último [9].

Si bien en el caso de dos medios ordinarios la Ley de Snell se expresa como sigue:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{13}$$

de forma general, la relación anterior viene dada por:

$$s_1|n_1| \sin\theta_1 = s_2|n_2| \sin\theta_2 \tag{14}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de los medios desde el cual incide y en el cual se refracta la onda, respectivamente.

En la Figura 6 puede observarse como cuando la superficie de separación delimita dos medios RH se produce la refracción convencional (el rayo reflejado y refractado se encuentran en el mismo lado respecto a la normal), mientras que si la onda incide desde

un medio RH hacia otro LH, el ángulo de refracción es negativo, es decir, el rayo se refracta hacia el otro lado de la normal a la superficie (hacia el mismo desde el cual incide).

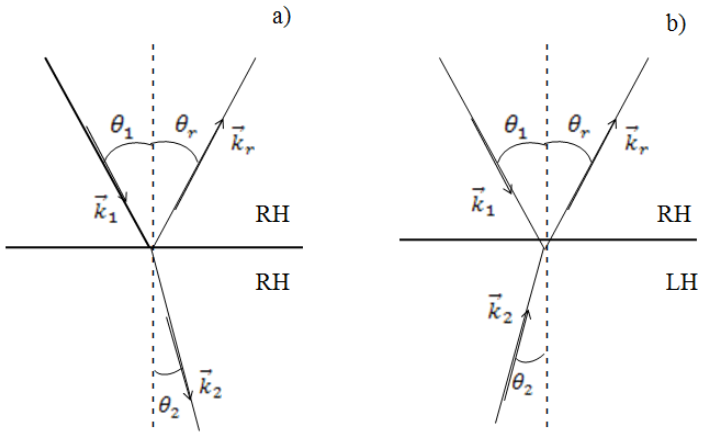


Figura 6: Esquema de la reflexión y refracción en la a) superficie de separación entre dos medios RH y b) superficie RH/LH.

Dicho de otra manera, y como puede observarse en la Figura 6, cuando se tienen dos medios RH las componentes normales de los vectores de onda de las ondas incidente y transmitida son paralelas, mientras que en el caso RH/LH son antiparalelas.

Un ejemplo gráfico en el que puede observarse este fenómeno de la refracción negativa se muestra en la Figura 7:

Figura 7: Comparación entre la refracción ordinaria (figura de la izq. en la cual se ha introducido la varilla en agua, $n = 1.3$), y la refracción negativa (derecha, $n = -1.3$) [10].

2.3.2 FOCALIZACIÓN CON UN MATERIAL CON n < 0

Otra de las propiedades de los materiales negativos que conviene resaltar es la doble focalización de una fina capa de material LH situada entre dos medios RH, como puede apreciarse en la Figura 8.

Dos rayos provenientes de la fuente (a una distancia *l* de la primera cara de la placa LH) con ángulos simétricos respecto de la normal a la lámina, se refractan con el mismo ángulo, encontrándose dentro de la lente LH a una distancia *s* de la primera cara de la misma. Tras sufrir una segunda refracción al atravesar la segunda cara de la lámina LH, ambos focalizarán a una distancia *d-l* de ésta, [9].

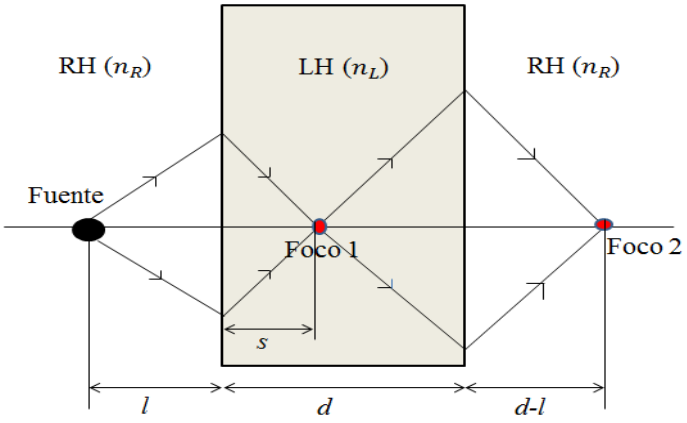


Figura 8: Esquema de la doble focalización de una lente zurda.

Para eliminar la aberración esférica (debido a la cual la imagen de un punto no es otro punto sino una mancha), es necesario que el índice del medio negativo sea igual, en valor absoluto, que el de los medios en los que está inmerso ($n_R = |n_L|$), ya que, en este caso, *s* = *l* para cualquier ángulo de incidencia.

INTERCAMBIO DEL EFECTO DE CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA EN LENTES ZURDAS.

Llegados a este punto, es preciso señalar también que si se tiene una lente fabricada con un material zurdo, se intercambia el efecto de convergencia de la misma.

Así, como es bien sabido, una lente convexa convencional hace converger los rayos provenientes del infinito y paralelos a su eje óptico en un punto del mismo, mientras que las lentes cóncavas o divergentes, como su propio nombre indica, hacen divergir los rayos al atravesarla. Si las lentes están hechas de un material LH, los comportamientos se invierten totalmente, tal y como se muestra en la Figura 9.

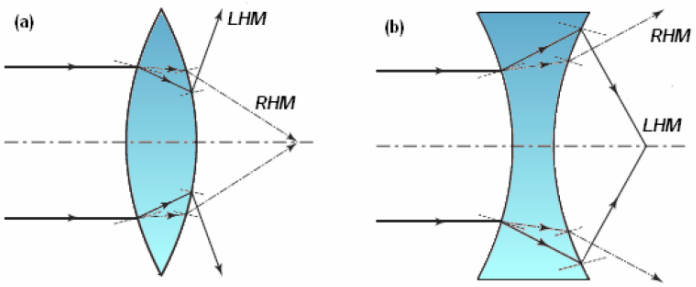


Figura 9: Esquema del intercambio de convergencia y divergencia en lentes zurdas [9].

2.3.3 EFECTO DOPPLER INVERSO

El efecto Doppler es el fenómeno de variación de la frecuencia de cualquier tipo de onda percibida por un objeto en movimiento relativo respecto a la fuente emisora. Sin embargo, para los medios LH se observa un comportamiento opuesto al del caso de medios ordinarios.

Supóngase que se tiene un detector de radiación (B) que se mueve con velocidad v respecto a una fuente (A) que emite con una frecuencia ω_0. La frecuencia que recibiría el detector (ω) viene dada por la expresión:

$$\omega = \omega_0 \left(1 - s\frac{v}{u}\right) \tag{15}$$

siendo la velocidad v positiva cuando se aleja de la fuente y negativa en caso contrario; u es la velocidad del flujo de energía, por lo que siempre es positiva. El parámetro s indica si el medio es RH ($s = 1$) o LH ($s = -1$).

Teniendo en cuenta estas indicaciones, de la ecuación anterior se deduce que, en medios LH, y en contraposición a lo que ocurre en los medios convencionales, si el observador se aleja de la fuente percibirá una frecuencia mayor que la emitida por la fuente $\omega > \omega_0$ mientras que si se acerca, la frecuencia percibida será menor $\omega < \omega_0$.

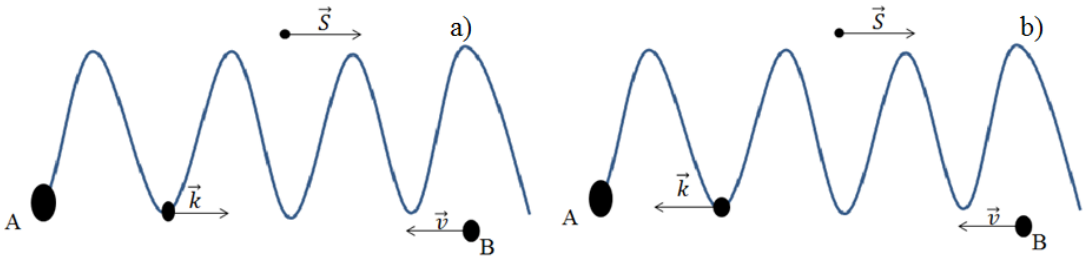


Figura 10: Efecto Doppler en un medio a) RH y b) LH.

2.3.4 OTROS EFECTOS

Además de los fenómenos que se han mencionado hasta aquí, es preciso indicar (aunque no se expliquen con detalle para no extender demasiado la memoria) que existen otros efectos que también se invierten para medios zurdos como son:

- El efecto Goos-Hänchen inverso [11].
- Inversión de la radiación Vavilov-Cerenkov [1].
- Inversión de los coeficientes de Fresnel [9].

2.3.5 DISPERSIÓN

La energía electromagnética viene dada, en general, por [1]:

$$W = \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega}E^2 + \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega}H^2 \tag{16}$$

y se reduce a la siguiente expresión cuando el medio es no dispersivo:

$$W = \varepsilon E^2 + \mu H^2 \tag{17}$$

Teniendo en cuenta ambas expresiones, puede afirmarse que ε y μ únicamente pueden tomar valores negativos de forma simultánea siempre y cuando haya dispersión de frecuencia dado que en caso contrario, de acuerdo con la ecuación (17), la energía total sería negativa.

Dicho de otra manera, para que la energía dada por la ecuación (16) sea positiva, se requiere que:

$$\frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} > 0, \qquad \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} > 0 \tag{18}$$

Estas restricciones no impiden que, en general, ε y μ puedan tomar valores negativos simultáneamente, sino que únicamente implican que para que esto pueda cumplirse es necesario que ε y μ dependan de la frecuencia, por lo que puede concluirse señalando que los medios LH son medios dispersivos.

Una vez aquí, cabe señalar que en este trabajo primero se ha considerado una situación más idealista en la que se ha analizado la propagación a través de medios sin dispersión y, posteriormente, se ha analizado el caso de medios dispersivos, para comparar los resultados.

CAPÍTULO 3: METAMATERIALES

El término "metamaterial" fue introducido en el año 1999 por Rodger M. Walser, de la Universidad de Texas, quien definió estos materiales como aquellos "*compuestos macroscópicos hechos por el hombre que poseen una arquitectura celular tridimensional periódica diseñada para producir una combinación optimizada, no disponible en la naturaleza, de dos o más respuestas a una excitación concreta*" [12].

De forma general, los metamateriales pueden definirse como aquellos medios artificiales que presentan propiedades electromagnéticas diferentes de las encontradas en los materiales naturales. Dentro de ellos se encuentran los ya mencionados materiales NPV (por lo que, aunque no sea del todo correcto, a lo largo de esta memoria se utilizará indistintamente el término metamaterial para referirse a los NPV).

Tras varios años de investigación, en la actualidad se sabe que, aunque son muy poco comunes, los materiales con permitividad eléctrica ó permeabilidad magnética negativas, por separado, pueden encontrase en la naturaleza. Así, por ejemplo, entre los materiales que poseen valores de ε negativos (a frecuencias ópticas) se encuentran la plata, el oro y el aluminio; mientras que materiales con μ negativa incluyen materiales con resonancia ferromagnética o sistemas antiferromagnéticos. Es precisamente por esta razón por la que no existen los metamateriales en la naturaleza. La permitividad eléctrica negativa se encuentra en algunos materiales a frecuencias muy elevadas: frecuencias ópticas en metales o frecuencias del infrarrojo para semiconductores, mientras que, por su parte, los sistemas de resonancia magnética ocurren a frecuencias bajas, de forma que los fenómenos eléctricos y magnéticos no ocurren de manera natural en el mismo rango de frecuencias, impidiendo la posibilidad de encontrar en la naturaleza materiales NPV [13].

Los metamateriales están formados, como posteriormente se explicará, por estructuras electrónicamente pequeñas situadas de manera periódica, de modo que sus propiedades no dependen de los átomos que forman sus materiales, sino de cómo responden al campo electromagnético los "meta-átomos" que lo forman, es decir, dependen del diseño de su estructura.

3.1 DISEÑO DE UN MATERIAL LH

Como ya se ha comentado a lo largo de esta memoria, si bien fue Veselago el primero en predecir la existencia de materiales con los dos parámetros constitutivos negativos, no fue hasta el año 2000 cuando D. R. Smith et al. [14] propusieron la primera estructura que daría lugar a un material zurdo.

Para ello, se basaron en los trabajos previos realizados por Pendry [15]-[16], en los que éste proponía estructuras que permitían conseguir, por separado, una permitividad y una permeabilidad negativas en el rango de las microondas.

Por un lado, para conseguir una permitividad eléctrica negativa, Pendry [15] propuso una estructura formada por delgados cables (TW: Thin Wire, Figura 11a) colocados verticalmente de forma que, al aplicar un campo eléctrico paralelo a la dirección de los cables se inducen unas corrientes en el conductor que hacen que aparezcan unos momentos dipolares eléctricos equivalentes. Al obtener los parámetros constitutivos de este material artificial, se comprueba que presenta un comportamiento como el de los plasmas y metales a frecuencias ópticas: $\varepsilon < 0$ y $\mu > 0$.

Por otro lado, la permeabilidad negativa se consigue [16] con resonadores de anillo abierto (SRR: Split-Ring Resonator, Figura 11b). Cuando uno de estos anillos es atravesado por un campo magnético perpendicular al plano del mismo, se inducen corrientes resonantes en el anillo que generan momentos dipolares magnéticos equivalentes. Dado un conjunto de anillos que cumplen la condición de homogeneidad, se comprobó que los parámetros constitutivos efectivos que caracterizan dicha estructura eran tales que $\varepsilon > 0$ y $\mu < 0$ (comportamiento ferromagnético).

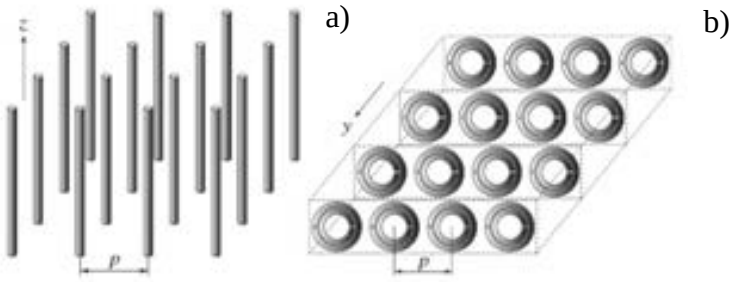


Figura 11: Estructuras propuestas por Pendry para conseguir material con índice de refracción negativo: a) TW y b) SRRs.

Cada una de estas dos estructuras presenta un índice de refracción imaginario, dándose lugar a ondas evanescentes sin propiciarse la propagación. La aportación que realizaron Smith et al. [17] fue unir ambas estructuras para obtener un índice de refracción real que sí permitiera la propagación.

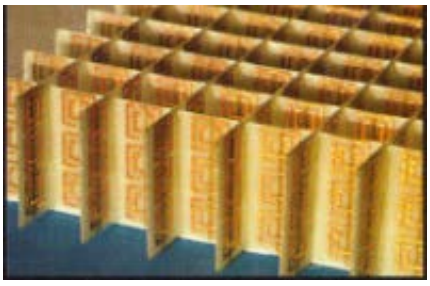


Figura 12: Estructura compuesta TW-SRR utilizada en el experimento.

Así, se diseñó una estructura a partir de los mencionados elementos constituyentes y se consiguió una banda frecuencial, más concretamente, en torno a los 10.5 GHz, donde tanto ε como μ eran negativos.

Se midió el ángulo de dispersión del haz transmitido a través de un prisma fabricado con el material de la Figura 12, utilizando el dispositivo que se muestra en la Figura 13 y se determinó el índice de refracción efectivo de acuerdo con la Ley de Snell.

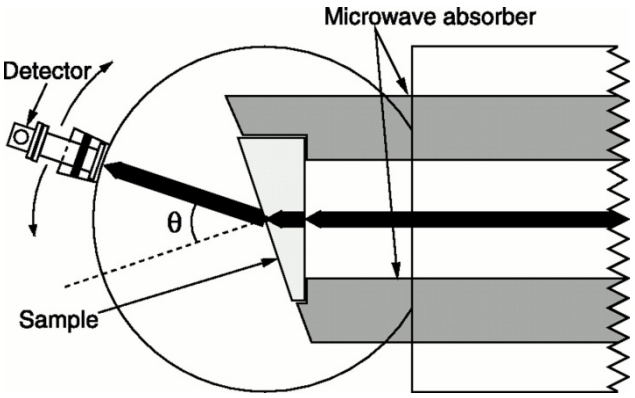


Figura 13: Esquema del dispositivo experimental utilizado para demostrar la existencia de un material con índice de refracción negativo.

Con dicho experimento se confirmaron las predicciones de las ecuaciones de Maxwell de que, para aquellas frecuencias a las cuales tanto la permitividad como la permeabilidad sean negativas, el índice de refracción ha de tomarse como $n = -\sqrt{|\varepsilon_r \mu_r|}$.

3.2 APLICACIONES

3.2.1 SUPERLENTES

Uno de los ejemplos de aplicación de los materiales con refracción negativa son las superlentes, cuya característica principal es que permiten superar el límite óptico de la difracción.

Cuando la radiación electromagnética se encuentra en su camino con un obstáculo de tamaño del mismo orden que la longitud de onda de la radiación, se produce el fenómeno de difracción. En el caso de ondas lumínicas, la difracción produce una distorsión que limita la calidad de la imagen de forma que, por muy potente que sea el microscopio (u otro instrumento óptico que se utilice) llega un momento en el que no se puede examinar con más detalle la imagen. Este es el conocido como *límite de difracción*: la distancia más pequeña a la que se pueden observar dos puntos separados en una imagen.

Para superar el límite de la difracción (el cual, como se ha mencionado, está limitado por la longitud de onda de la radiación incidente) es necesario atrapar las denominadas ondas evanescentes (detalles finos) que se forman en las superficies de los objetos, las cuales desaparecen muy rápidamente a medida que se alejan de la superficie del cuerpo. Las lentes con índice de refracción positivo no son capaces de captar el campo cercano

y trasladarlo hasta la imagen. Sin embargo, en [18], Pendry llega a la conclusión de que un material con índice de refracción $n = -1$ da lugar a una lente perfecta que no produce reflexión y transmite las ondas evanescentes al igual que las ondas planas.

En el año 2005, se presentaron los primeros resultados de superresolución en el rango del visible [19]. Utilizando una lámina de plata de 35 nm de espesor como lente perfecta, se consiguió superar el límite de difracción obteniéndose una imagen con detalles menores que la longitud de onda incidente empleada (365 nm).

Figura 14: Imagen de la palabra NANO tomada con un haz iónico enfocado (izquierda), con medios ópticos sin superlente (centro) y con una lámina de plata de 35 nm de espesor actuando como superlente (derecha).

Otro ejemplo de comprobación de este fenómeno se tiene en [20], donde se estudia la focalización de un metamaterial bidimensional formado por anillos SRRs en forma de laberinto y TW de cobre, que presenta un índice de refracción negativo en la banda frecuencial comprendida entre 6 y 6.4 GHz. Se obtuvo una resolución $\lambda/4$.

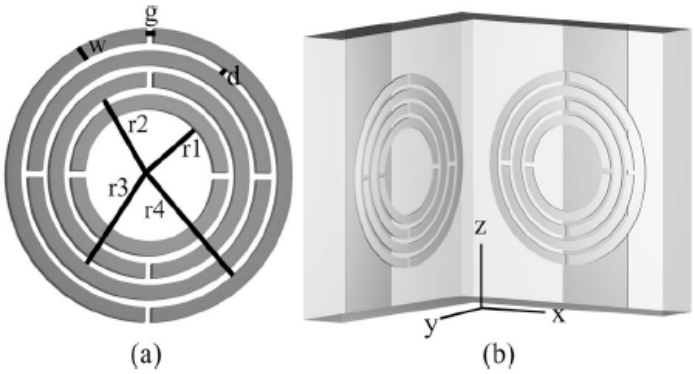


Figura 15: a) SRRs en forma de laberinto; b) Celda unidad que conforma el material zurdo utilizado en [20].

3.2.2 CLOAKING

El cloaking es un conjunto de técnicas que tiene por objetivo lograr la invisibilidad de los objetos al ser recubiertos con una capa de algún material o sustancia.

Anteriormente al descubrimiento de los metamateriales las técnicas existentes para lograr este propósito eran bastante escasas. Algunas, por ejemplo, conseguían eliminar las reflexiones absorbiendo el mayor número posible de ondas incidentes aprovechando la adaptación de impedancias y reduciendo las reflexiones en cuerpos opacos. Sin embargo, estos métodos no logran eliminar la dispersión trasera que deja un objeto cuando es atravesado por una onda electromagnética como la luz.

La idea básica para conseguir la invisibilidad perfecta puede apreciarse en la Figura 16, donde se observa como la luz (cuya trayectoria viene representada por las líneas negras) no entra en contacto con el objeto esférico si no que es desviada alrededor del mismo siguiendo su trayectoria original, de forma que no es reflejada ni refractada, lográndose así el efecto de la invisibilidad.

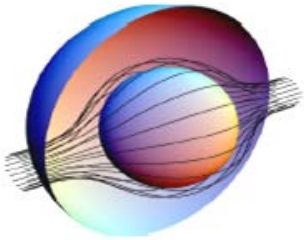


Figura 16: Cloaking [22]

En el año 2006, John Pendry y su equipo de investigadores del Imperial College de Londres [21], consiguieron que un pequeño anillo de cobre fuese invisible a las microondas usando metamateriales.

Como ya se ha señalado anteriormente, para que un metamaterial presente refracción negativa, los detalles de su estructura deben ser de un tamaño menor que la longitud de onda de la radiación empleada. La longitud de onda de las microondas varía aproximadamente desde 1 mm hasta unos 30 cm, por lo que conseguir estructuras menores que estos tamaños es relativamente sencillo con la tecnología actual. Sin embargo, la cosa se complica si se quiere hacer lo mismo con la luz visible ya que, como se sabe, la longitud de onda en este rango varía aproximadamente entre los 450 y los 750 nm. Aún con esto, en el año 2007 se dio a conocer el primer metamaterial que operaba en el rango del visible [23].

El siguiente paso sería la creación de un metamaterial que fuera invisible para todas las longitudes de onda a la vez y no para una sola de ellas. Si pensamos en alguna aplicación útil, es posible que lo que primero que nos venga a la cabeza sea la famosa capa de Harry Potter que hacía invisible al mago cuando quería. Para que una capa así funcionara, el índice de refracción dentro del metamaterial debería ajustarse constantemente a los movimientos de la capa, lo cual, hoy por hoy, es inviable.

Más realista es la idea de que la primera “capa” de invisibilidad sea una estructura sólida de forma que se le pudiera asignar un valor fijo al índice de refracción en su interior. Además, esta “capa” sería muy frágil al estar elaborada con metamateriales extremadamente delicados. Otro problema que presenta la capa de invisibilidad es que, si hace invisible al que se encuentra dentro, el efecto también tendría lugar en sentido contrario.

Esta idea ya está siendo estudiada y un grupo de la Universidad de Jiao Tong de Shangai ha propuesto que ciertos materiales en contacto con la “capa invisible” permitirían que entrara luz en ella de forma que si se acoplasen dos pequeños trozos de estos materiales a la altura de los ojos sería suficiente para poder ver desde dentro [24].

3.2.3 MEDIOS DE ALTO ÍNDICE DE REFRACCIÓN

Investigadores del Instituto Avanzado de Ciencia y Tecnología en Corea [25] publicaron en el 2011 un experimento donde han creado, mediante el uso de metamateriales, un medio con el índice de refracción más grande jamás conseguido

(n=38,6), en el rango de los THz (este tipo de radiación atraviesa ropa, papel y plástico, pero nunca metal o agua). Se trata de un polímero con inserciones de aluminio que podría tener importantes aplicaciones en el diagnóstico del cáncer (ya que el tejido cancerígeno es más acuoso que el tejido sano) o en controles de seguridad, evitando falsas alarmas.

3.2.4 METAMATERIALES Y DEFENSA

El rango de frecuencias en THz (que comprende las frecuencias entre 30 GHz y 3 THz, aproximadamente) podría emplearse para el desarrollo de diversas aplicaciones en defensa tales como la detección e identificación de explosivos a distancia mediante espectroscopía o la detección de amenazas ocultas bajo la ropa u otros objetos por medio de escáneres de terahercios. Sin embargo, actualmente el desarrollo de dispositivos en THz resulta complejo desde el punto de vista tencnológico.

Así, algunos investigadores consideran que los metamateriales podrían resultar relevantes en el desarrollo de tales dispositivos como puede ser la síntesis de materiales magnéticos en THz que podrían emplearse para desarrollar nuevos dispositivos para sensado biológico, huella biomolecular, etc.

Recientemente, el Sistema de Observación y Prospección Tecnológica (SOPT) del Ministerio de Defensa ha publicado un estudio [26] acerca de los metamateriales y sus aplicaciones en defensa, donde se recogen estas ideas y otras utilidades que tendrían los metamateriales en dicho ámbito (cabe destacar la gran importancia que tendría en este entorno el logro de la invisibilidad a cualquier frecuencia que se ha comentado en el apartado anterior).

CAPÍTULO 4: DESARROLLO MATEMÁTICO

4.1. POTENCIALES VECTOR

Cualquier problema de propagación del campo electromagnético presenta una solución única que se obtiene a partir de la resolución de las ecuaciones de Maxwell y de la posterior imposición de las condiciones de contorno propias del problema que se esté abordando. Ahora bien, en ocasiones ocurre que la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell y la implantación de las condiciones de frontera resulta ser un procedimiento muy laborioso y complicado, por lo que, a veces, suelen utilizarse determinados potenciales auxiliares como ayuda en el cálculo de los campos eléctrico y magnético.

En nuestro caso, se va a hacer uso del par de vectores $\vec{A}$ y $\vec{F}$ (potencial vector magnético y eléctrico, respectivamente) como herramientas matemáticas en la resolución del problema electromagnético que se quiere analizar.

Considerando un medio homogéneo, lineal, isótropo y en ausencia de fuentes, dichos potenciales vectores satisfacen las siguientes ecuaciones de onda [27]:

$$\nabla^2\vec{A} + k^2\vec{A} = 0 \tag{19}$$

$$\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = 0 \tag{20}$$

Una vez obtenida la expresión general para el potencial $\vec{A}$, el campo electromagnético asociado a éste viene dado por:

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{21}$$

$$\vec{E}_A = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) \tag{22}$$

De forma análoga, a partir de la solución para $\vec{F}$ puede obtenerse el campo electromagnético vinculado al mismo:

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{23}$$

$$\vec{H}_F = -j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) \tag{24}$$

El campo total viene dado por la suma de los campos asociados a ambos potenciales $\vec{A}$ y $\vec{F}$, resultando:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\times\vec{F} \tag{25}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{A} - j\omega\vec{F} - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) \tag{26}$$

4.2 MODOS DE PROPAGACIÓN

Dado un problema electromagnético genérico de valores de contorno, existen numerosas configuraciones de campo electromagnético (conocidas con el nombre de *modos*) que verifican tanto las ecuaciones de Maxwell como las condiciones de frontera. Los más utilizados son los modos *TEM*, *TE* y *TM*.

Los modos *TEM* son aquellos cuyo campo electromagnético no tiene ninguna componente en la dirección de propagación de la energía. De igual forma, los modos TE ó TE^z (TM ó TM^z) no tienen componente del campo eléctrico (magnético) en la dirección de propagación, esto es, el campo eléctrico (magnético) está contenido en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

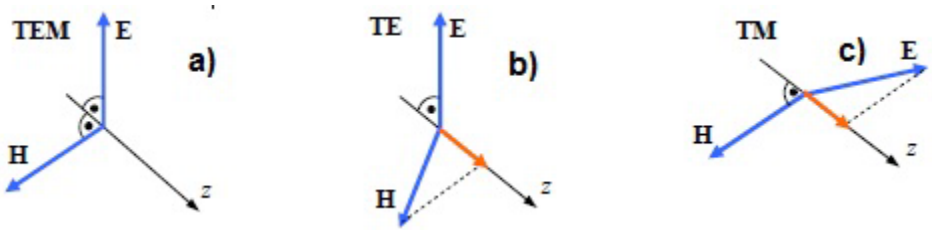


Figura 17: Representación de las direcciones de los campos eléctrico y magnético para una determinada dirección de propagación, *z*: a) modo TEM; b) TE; c) TM.

Cuando la componente nula del campo eléctrico (magnético) no es la misma que la dirección de propagación, los modos se denotan simplemente como $TE^i(TM^i)$, donde el superíndice $i = x, y$ indica la dirección en la que el campo es cero.

Además, existe otro tipo de modos que pueden expresarse como combinación lineal de los modos anteriores y que poseen, en general, las seis componentes del campo electromagnético no nulas; son los denominados *modos híbridos*.

4.3 ESTRUCTURA EBG IDEAL

En el caso de la estructura EBG ideal (infinitas celdas unidad), resulta evidente que tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética son periódicas a lo largo del eje z y su perfil recuerda al modelo Kronig-Penney en la teoría de bandas en física del estado sólido [4]. La distribución binaria de los parámetros constitutivos en cada celda unidad viene dada, entonces, por:

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0\sigma_{r1} & si\ 0 \le z \le u \\ \sigma_0\sigma_{r2} & si - v \le z \le 0 \end{cases} \tag{27}$$

donde $\sigma_0 = \varepsilon_0$, $\sigma_{ri} = \varepsilon_{ri}$ para el caso de la permeabilidad y $\sigma_0 = \mu_0$; $\sigma_{ri} = \mu_{ri}$ para la permeabilidad (i = 1, 2).

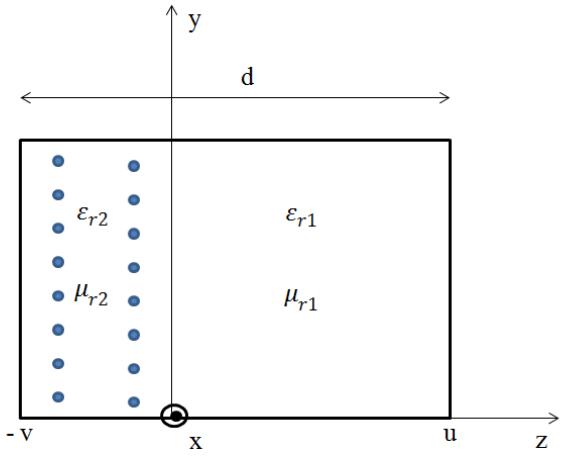


Figura 18: Perfil de una de las celdas unidad que componen la estructura EBG.

MODOS TE^z

Para los modos TE^z, las componentes del campo electromagnético a partir del potencial vector $\vec{F}$ vienen dadas por [27]:

$$E_x = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad H_x = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z}$$

$$E_y = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad H_y = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z}$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \beta_{nm}^2\right) F_z \tag{28}$$

siendo F_z la componente z del potencial vector $\vec{F}$, la cual debe satisfacer la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 F_z(x,y,z) + \beta^2 F_z(x,y,z) = 0 \tag{29}$$

que se reduce a:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta^2\right)F_z=0 \tag{30}$$

La ecuación (30) se resuelve mediante el método de separación de variables, de forma que, en general, la solución para F_z viene dada por:

$$F_z(x,y,z)=f(x)g(y)h(z) \tag{31}$$

La variación del campo electromagnético en la dirección *z* viene dada por la superposición de dos ondas viajeras, una hacia el sentido de las *z* positivas y otra en sentido contrario ($A(x,y)e^{-j\beta z}+B(x,y)e^{j\beta z}$). Además, se debe tener en cuenta que las paredes de la guía se consideran perfectamente conductoras, por lo que la componente tangencial del campo eléctrico en las mismas ha de ser nula [27]:

$$E_x|_{y=0}=E_x|_{y=b}=0 \tag{32}$$

$$E_y\big|_{x=0}=E_y\big|_{x=a}=0 \tag{33}$$

Con todo esto se tiene que la solución para F_z en la celda unidad viene dada por:

$$\begin{cases}F_{1z}=\sum_{m,n}A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_{1mn}z}+\sum_{m,n}B_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{j\beta_{1mn}z}\\ F_{2z}=\sum_{m,n}C_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_{2mn}z}+\sum_{m,n}D_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{j\beta_{2mn}z}\end{cases} \tag{34}$$

donde los subíndices *m* y *n* hacen referencia al modo de propagación y los subíndices 1 y 2 representan cada uno de los dos medios que conforman la celda unidad.

Una vez que se tiene la expresión de F_z, a partir de las ecuaciones (28) se obtienen las diferentes componentes del campo electromagnético. Imponiendo las condiciones de continuidad de las componentes tangenciales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en la superficie de separación entre los dos medios que componen la celda unidad ($z=0$) se obtienen las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}}(A_{mn}+B_{mn})-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}(C_{mn}+D_{mn})=0 \tag{35}$$

$$\frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}(A_{mn}-B_{mn})-\frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}(C_{mn}-D_{mn})=0 \tag{36}$$

Por otro lado, como se está estudiando en primer lugar el caso ideal, ha de aplicarse el teorema de Floquet-Bloch a todas las componentes tangenciales del campo:

$$E_x(x,y,z)|_{z=u}=E_x(x,y,z)|_{z=-v}e^{j\gamma d}$$

$$E_y(x,y,z)\big|_{z=u}=E_x(x,y,z)|_{z=-v}e^{j\gamma d}$$

$$H_x(x,y,z)\big|_{z=u} = H_x(x,y,z)\big|_{z=-v} e^{j\gamma d}$$
$$H_y(x,y,z)\big|_{z=u} = H_y(x,y,z)\big|_{z=-v} e^{j\gamma d} \quad (37)$$

donde γ es el denominado número de onda de Bloch.

Con las dos primeras ecuaciones del conjunto (37) se obtiene:

$$\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(A_{mn}e^{-j(\beta_1+\gamma)u}+B_{mn}e^{j(\beta_1-\gamma)u}\right)-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(C_{mn}e^{j(\beta_2+\gamma)v}+D_{mn}e^{-j(\beta_2-\gamma)v}\right)=0 \quad (38)$$

Y con las dos últimas se llega a la relación:

$$\frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}\left(A_{mn}e^{-j(\beta_1+\gamma)u}-B_{mn}e^{j(\beta_1-\gamma)u}\right)-\frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}\left(C_{mn}e^{j(\beta_2+\gamma)v}-D_{mn}e^{-j(\beta_2-\gamma)v}\right)=0 \quad (39)$$

El sistema de ecuaciones formado por las cuatro ecuaciones obtenidas de la imposición de las condiciones de contorno (35, 36, 38 y 39) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{r1}} & \frac{1}{\varepsilon_{r1}} & -\frac{1}{\varepsilon_{r2}} & -\frac{1}{\varepsilon_{r2}} \\ \frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} & -\frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} & -\frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} & \frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} \\ \frac{1}{\varepsilon_{r1}}e^{-j(\beta_1+\gamma)u} & \frac{1}{\varepsilon_{r1}}e^{j(\beta_1-\gamma)u} & -\frac{1}{\varepsilon_{r2}}e^{j(\beta_2+\gamma)v} & -\frac{1}{\varepsilon_{r2}}e^{-j(\beta_2-\gamma)v} \\ \frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}e^{-j(\beta_1+\gamma)u} & -\frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}e^{j(\beta_1-\gamma)u} & -\frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}e^{j(\beta_2+\gamma)v} & \frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}e^{-j(\beta_2-\gamma)v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para que el sistema de ecuaciones anterior tenga solución diferente de la trivial, ha de verificarse que el determinante de la matriz sea cero. Imponiendo esta limitación y operando, se obtiene la siguiente relación de dispersión:

$$\cos\big(\gamma(u+v)\big) = \cos(\beta_1 u)\cos(\beta_2 v) - \frac{\beta_1^2\mu_{r2}^2+\beta_2^2\mu_{r1}^2}{2\beta_1\beta_2\mu_{r1}\mu_{r2}}\sin(\beta_1 u)\sin(\beta_2 v) \quad (41)$$

de donde puede despejarse el valor de γ:

$$\gamma = \frac{1}{u+v}\cos^{-1}(L_{TE_{mn}^z}) \quad (42)$$

con

$$L_{TE_{mn}^z} = \cos(\beta_1 u)\cos(\beta_2 v) - \frac{\beta_1^2\mu_{r2}^2+\beta_2^2\mu_{r1}^2}{2\beta_1\beta_2\mu_{r1}\mu_{r2}}\sin(\beta_1 u)\sin(\beta_2 v) \quad (43)$$

Una vez aquí, es importante señalar que la propagación está permitida únicamente cuando γ tome un valor real, estando prohibida en caso contrario. Para que esto sea así y

de acuerdo con la definición (42), se tiene que la propagación se producirá siempre y cuando se verifique la siguiente condición: $\left|L_{TE_{mn}^{z}}\right| \leq 1$.

MODOS TM^z

Las componentes del campo electromagnético para los modos de propagación TM^z son [27]:

$$E_x = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \qquad H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \qquad H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$E_z = -\frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta^2\right) A_z \qquad H_z = 0 \tag{44}$$

Procediendo de forma análoga al caso anterior (pero a partir ahora de la expresión general del potencial vector $\vec{A}$), imponiendo las condiciones de contorno sobre las paredes metálicas de la guía, las condiciones de continuidad en la superficie de separación $z = 0$ y tras aplicar el teorema de Bloch, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}} & -\frac{\beta_1}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}} & -\frac{\beta_2}{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}} & \frac{\beta_2}{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}} \\ \frac{1}{\mu_{r1}} & \frac{1}{\mu_{r1}} & -\frac{1}{\mu_{r2}} & -\frac{1}{\mu_{r2}} \\ \frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} e^{-j(\beta_1+\gamma)u} & -\frac{\beta_1}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} e^{j(\beta_1-\gamma)u} & -\frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} e^{j(\beta_2+\gamma)v} & \frac{\beta_2}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}} e^{-j(\beta_2-\gamma)v} \\ \frac{1}{\mu_{r1}} e^{-j(\beta_1+\gamma)u} & \frac{1}{\mu_{r1}} e^{j(\beta_1-\gamma)u} & -\frac{1}{\mu_{r2}} e^{j(\beta_2+\gamma)v} & -\frac{1}{\mu_{r2}} e^{-j(\beta_2-\gamma)v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{mn} \\ J_{mn} \\ K_{mn} \\ L_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Cuya solución da lugar a la siguiente relación de dispersión:

$$L_{TM_{nm}}^{z} = \cos(\beta_1 u)\cos(\beta_2 v) - \frac{\beta_1^2\varepsilon_{r2}^2 + \beta_2^2\varepsilon_{r1}^2}{2\beta_1\beta_2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}\sin(\beta_1 u)\sin(\beta_2 v) \tag{46}$$

que puede reducirse a:

$$\gamma = \frac{1}{u+v}\cos^{-1}(L_{TM_{mn}^{z}}) \tag{47}$$

Al igual que antes, para que γ tome un valor real y exista propagación de la señal, ha de verificarse que: $\left|L_{TM_{mn}^{z}}\right| \leq 1$.

4.4 ESTRUCTURA REAL

La estructura real se compone de un número finito de celdas unidad, por lo que carece entonces de periodicidad longitudinal. En este caso, cada discontinuidad se trata como

la separación entre dos guías de onda semiinfinitas llenas, cada una, con uno de los dos materiales que componen la celda unidad y se caracteriza por una matriz de scattering 2x2, como ocurre en un circuito de dos puertos.

La matriz de scattering de la discontinuidad $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ viene dada por:

$$S^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} & S_{12}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \\ S_{21}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} & S_{22}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \end{bmatrix} \tag{48}$$

cuyos componentes vienen dados por:

$$S_{11}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = -S_{22}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \frac{(Z_2 - Z_1)}{(Z_2 + Z_1)}$$

$$S_{12}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = 1 + S_{22}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

$$S_{21}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = 1 + S_{11}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

Para la discontinuidad $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ se tiene:

$$S^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} S_{11}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} & S_{12}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \\ S_{21}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} & S_{22}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$S_{11}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = -S_{22}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = -S_{11}^{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$$

$$S_{12}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = 1 + S_{22}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$$

$$S_{21}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1} = 1 + S_{11}^{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$$

Una vez que se tiene la primera matriz de scattering, se traslada hasta la siguiente discontinuidad y se une con la matriz de scattering de la misma, repitiendo este proceso para todas las discontinuidades que presente la estructura EGB que se esté estudiando en cada caso. Así, se obtiene finalmente una matriz de scattering total que caracteriza la estructura EGB en su conjunto y a partir de la cual se pueden obtener los coeficientes de reflexión (diagonal principal) y transmisión (diagonal secundaria) de dicha estructura [6].

CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y ANÁLISIS

A lo largo de todo el análisis se ha considerado una guía de onda rectangular en banda X (a = 22.86 mm y b = 10.16 mm). El resto de parámetros se indicará debidamente en cada caso analizado.

5.1 ESTRUCTURA IDEAL

Una vez llevado a cabo el desarrollo teórico, se ha analizado en primer lugar la estructura EBG ideal a partir de la implementación en Matlab de las funciones $L_{TE^z_{mn}}$ y $L^z_{TM_{mn}}$ dadas por las ecuaciones (43) y (46). Se ha estudiado la propagación electromagnética en diferentes situaciones: como punto de partida se ha considerado la propagación a través de medios ordinarios que no presentan pérdidas ni dispersión (todos los parámetros constitutivos reales y positivos) para, posteriormente, introducir medios con índice de refracción negativo y medios dispersivos.

5.1.1 Propagación a través de medios ordinarios no dispersivos y sin pérdidas

En la Figura 19 se muestra la variación de las funciones $L_{TE_{10}}$ y $L_{TM_{11}}$ frente a la frecuencia. En dicha figura, se han señalado con las líneas rojas los valores +1 y -1, que delimitan los valores de las funciones $L_{TE^z_{mn}}$ y $L^z_{TM_{mn}}$ en los que existe propagación. Teniendo esto en cuenta, la propagación estará permitida únicamente en aquellas bandas para las cuales las funciones representadas se encuentren entre dichas líneas, mientras que estará prohibida en caso contrario.

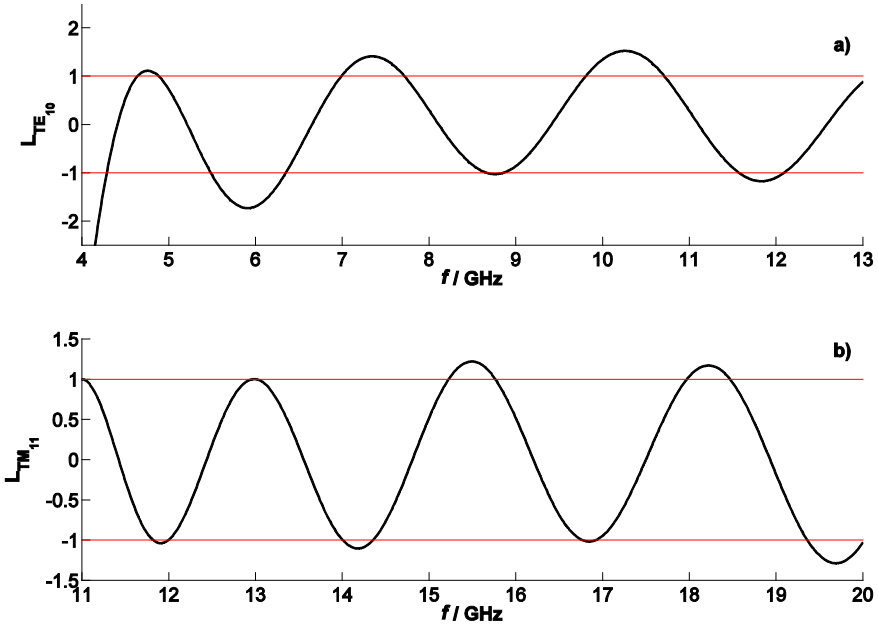


Figura 19: Variación de a) $L_{TE_{10}}$ y b) $L_{TM_{11}}$ con la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para una anchura de la celda unidad $d = 45$ mm ($u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$). Además, $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\varepsilon_{r2} = 16$; $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = 1$.

En la Figura 20 se muestra la variación de la función $L_{TE_{10}}$ con la frecuencia y el perfil del módulo del coeficiente de transmisión correspondiente, a partir del cual pueden determinarse cuáles son las bandas de rechazo.

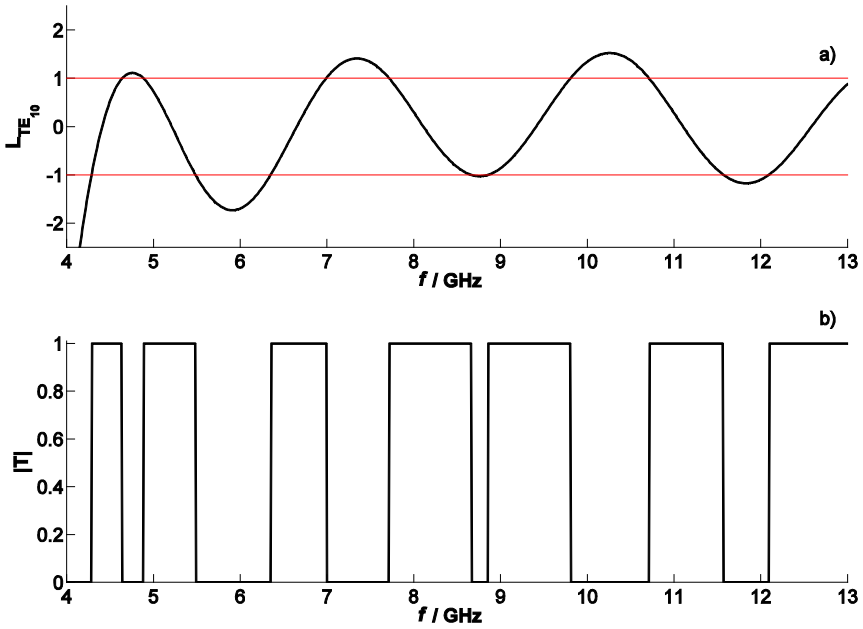


Figura 20: Variación de: a) $L_{TE_{10}}$ con la frecuencia en el mismo caso que en la Figura 19 (a) y b) módulo del coeficiente de transmisión correspondiente.

En la Figura 20 se puede observar cómo cuando los valores de la función $L_{TE_{10}}$ sobrepasan las líneas de +1 por arriba, o -1 por debajo, el coeficiente de transmisión se anula, la propagación está prohibida, como se viene señalando a lo largo de la memoria.

Una vez aquí, es preciso mencionar que, para una guía de onda rectangular de dimensiones $a > b$, como es el caso que se está tratando, el modo de propagación fundamental es el modo TE_{10}, por lo que de aquí en adelante nuestro estudio se centrará básicamente en el análisis de la propagación del mismo.

A continuación se ha estudiado la dependencia de los band gaps con el contraste de permitividades $\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)$ existente entre los dos medios que componen la celda unidad para el modo fundamental TE_{10}. Así, en la Figura 21 se muestra la variación de la función $L_{TE_{10}}$ a medida que aumenta el valor de ε_{r2} tomando fijo el de ε_{r1} y la anchura de la celda, d.

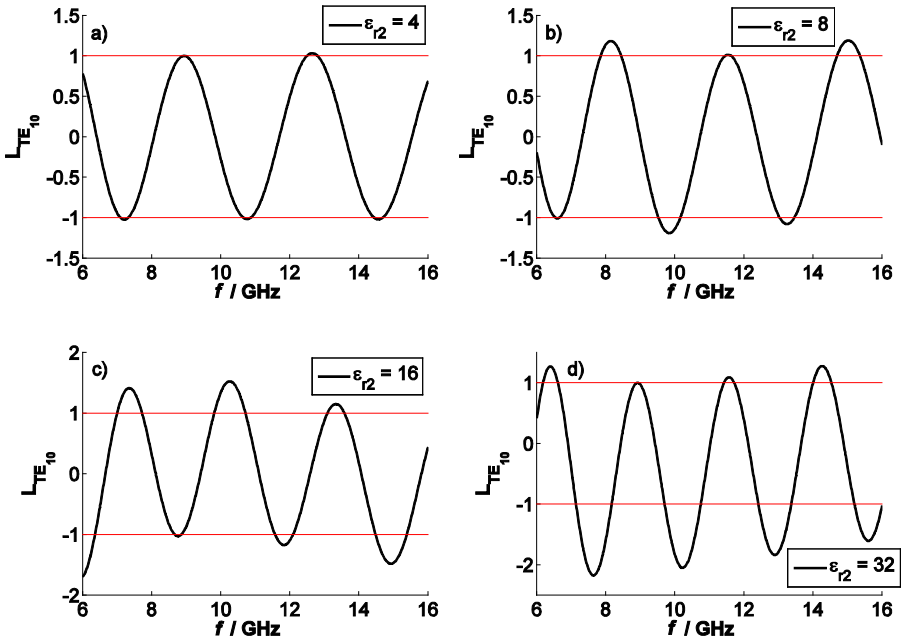


Figura 21: Variación de $L_{TE_{10}}$ con la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para una anchura de la celda unidad $d = 45$ mm ($u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$) y cuatro valores diferentes de ε_{r2}. Además, $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.

En la figura anterior puede observarse cómo, a medida que se incrementa la relación $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$, se produce una compresión de las bandas de propagación permitidas y prohibidas. Dicho de otra manera y como consecuencia de lo señalado anteriormente, a medida que aumenta el cociente de permitividades disminuye la anchura de los band gaps, produciéndose entonces un mayor número de ellos.

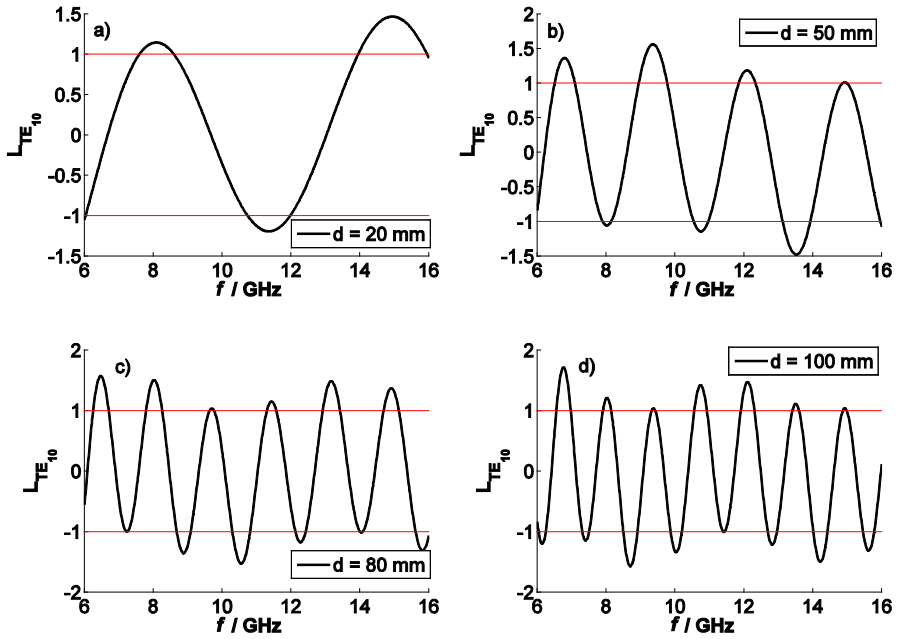


Figura 22: Variación de $L_{TE_{10}}$ con la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para diferentes valores de la anchura de la celda unidad, d. En todos los casos se han mantenido las relaciones $u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$ y se ha tomado $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\varepsilon_{r2} = 16$; $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = 1$.

Se ha estudiado también la dependencia de la función $L_{TE_{10}}$ con la anchura de la celda unidad, *d*, que compone la estructura EBG. Para ello, se han fijado los valores de los parámetros constitutivos de los dos medios que componen la celda unidad y se ha ido variando la anchura de la misma. Inspeccionando los resultados obtenidos, los cuales se recogen en la Figura 22, puede apreciarse claramente como aumenta el número de bandas prohibidas (aunque, como en el caso anterior, más estrechas lógicamente) a medida que se ensancha la celda unidad.

Hasta ahora se ha representado la variación de la función $L_{TE_{10}}$en función únicamente de la frecuencia para diferentes valores de los parámetros constitutivos y/o de la anchura de la celda unidad. Ahora, se va a dar un paso más allá y se va a analizar la variación de $L_{TE_{10}}$ como función de dos parámetros: la frecuencia y la anchura de uno de los medios que compone la cela unidad (u en la Figura 18). Estas representaciones gráficas reciben el nombre de Gap Maps y resultan muy útiles en el diseño de filtros de frecuencia ya que nos permiten obtener, dadas las necesidades que se requieran, cuáles han de ser las características (d, ε_r) de la estructura a diseñar.

Así, en la Figura 23 se muestra la variación de (a) la función $L_{TE_{10}}$ con respecto a la frecuencia y a la anchura del primero de los medios que componen la celda unidad, *u* y (b) el módulo del coeficiente de transmisión.

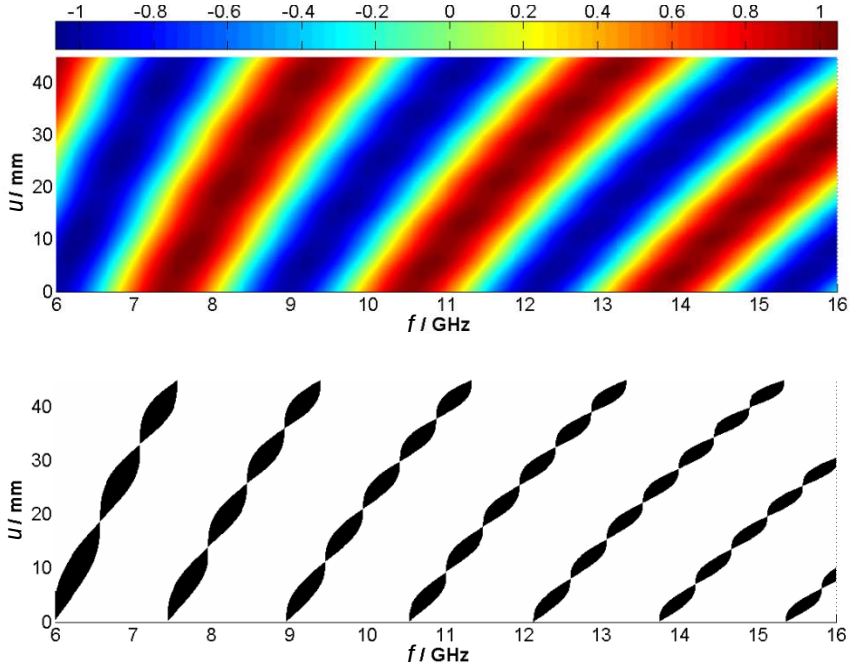


Figura 23: a) Variación de la función $L_{TE_{10}}$ en una guía de onda rectangular (Figura 3) con la frecuencia y la anchura de uno de los medios integrantes de la celda unidad, *u*. b) Variación del módulo del coeficiente de transmisión. Se ha tomado $d = 45$ mm ; $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\varepsilon_{r2} = 4$; $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.

En la Figura 23 (b), las zonas negras se corresponden con las bandas de propagación prohibidas ($|T| = 0$) y las zonas blancas con las permitidas ($|T| = 1$). Obviamente, como se observa inspeccionando el código de colores de la imagen superior y como

cabía esperar según lo señalado con anterioridad, las zonas que en la gráfica de abajo aparecen en negro son aquellas para las que $\left|L_{TE_{10}}\right| > 1$.

Seguidamente, se ha representado la variación del módulo del coeficiente de transmisión en función de la frecuencia y de u, como antes, para cuatro valores diferentes de ε_{r2}.

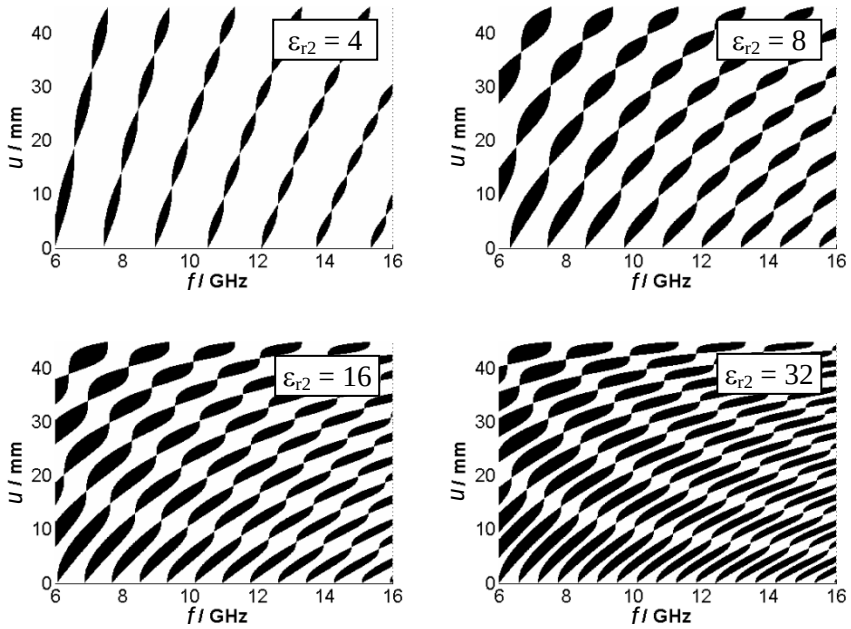


Figura 24: Módulo del coeficiente de transmisión (en negro las bandas prohibidas y en blanco las permitidas) para el modo fundamental TE_{10} en función de la frecuencia y de *u* para diferentes valores de ε_{r2}. Además, $d = 45$ mm, $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.

A medida que aumenta el cociente $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$ se observa que aumenta el número de bandas prohibidas (en negro), como lo hacían cuando se consideraba un único valor de u.

Como último punto en el estudio de la estructura EBG ideal compuesta por medios convencionales, se ha analizado la aparición de bandas prohibidas en función de la frecuencia y de *u*, como antes, para diferentes anchuras de la celda unidad, tomando unos parámetros constitutivos de los dos medios que la componen fijos. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 25, en la cual puede observarse, tal y como cabía esperar, que a medida que se aumenta el valor de la anchura de la celda unidad, aparece un mayor número de bandas prohibidas y éstas se van estrechando.

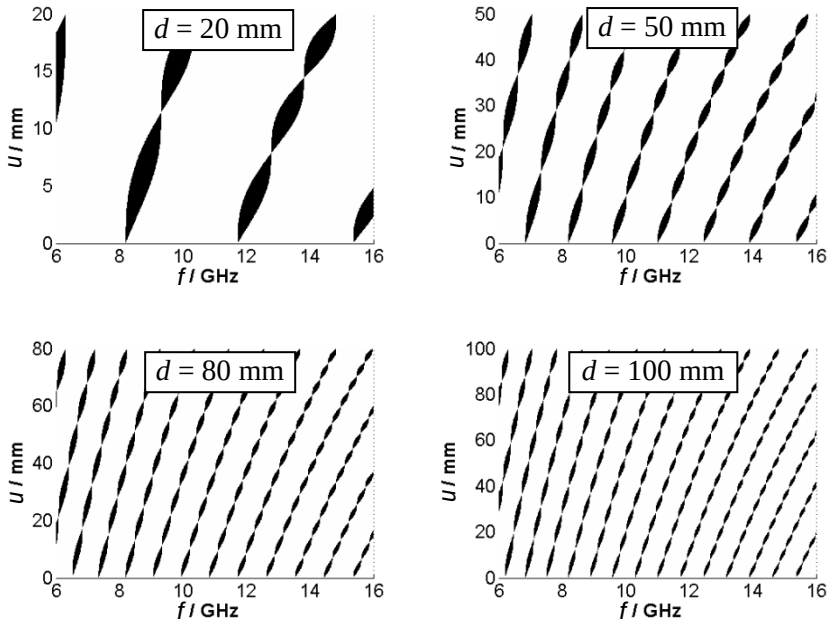


Figura 25: Módulo del coeficiente de transmisión (en negro las bandas prohibidas y en blanco las permitidas) para el modo fundamental TE_{10} en función de la frecuencia y de *u* para diferentes valores de d. Además, $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\varepsilon_{r2} = 4$; $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$.

5.1.2 Inclusión de un material LH en la celda unidad

Una vez que se ha analizado la estructura EBG compuesta por medios convencionales, el siguiente paso que se ha dado ha sido introducir uno de los dos materiales con índice de refracción negativo ($\varepsilon_{r2} < 0$ y $\mu_{r2} < 0$) para llevar a cabo un análisis similar.

Así, en la Figura 26 se ha representado la variación de la función $L_{TE_{10}}$y del módulo de su coeficiente de transmisión frente a la frecuencia cuando el segundo medio que compone la celda unidad presenta un índice de refracción $n = -1$.

De igual forma a lo que ocurría en la Figura 20, cuando se cumple la condición $\left|L_{TE_{10}}\right| \geq 1$, el coeficiente de transmisión se anula.

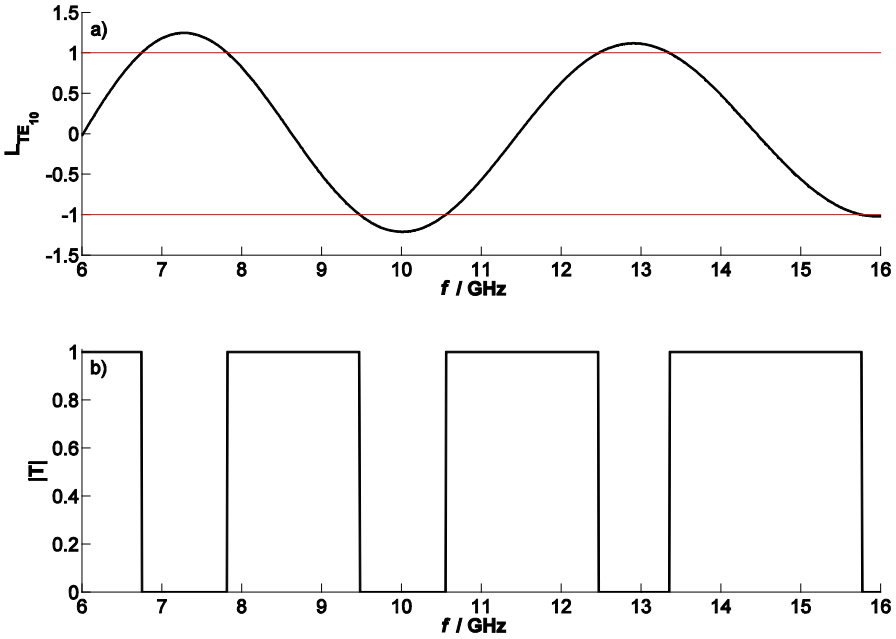


Figura 26: Variación de: a) $L_{TE_{10}}$ con la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para una anchura de la celda unidad $d = 45$ mm ($u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$) y b) módulo del coeficiente de transmisión correspondiente. Se ha tomado: $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\varepsilon_{r2} = -1$; $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = -1$.

De forma análoga a como se hizo en el apartado anterior, a continuación se ha estudiado la propagación del modo TE_{10} para diferentes valores de la permitividad relativa del medio 2. Así, en la Figura 27 se muestra la variación de dicha función con la frecuencia para cuatro valores distintos de ε_{r2}.

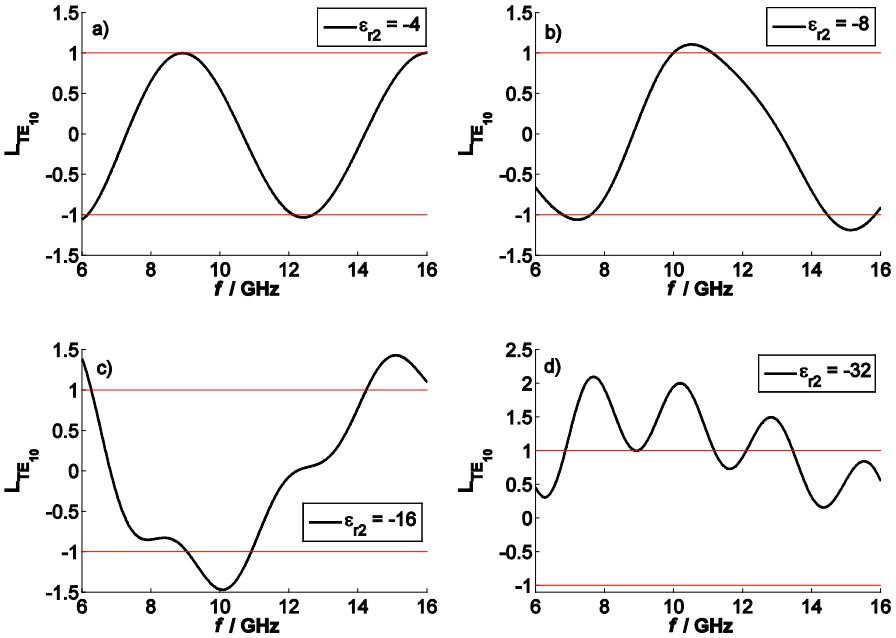


Figura 27: Variación de $L_{TE_{10}}$ en función de la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para cuatro valores de ε_{r2}. La anchura de la celda unidad es $d = 45$ mm con $u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$ y el resto de parámetros : $\varepsilon_{r1} = 2.5;\ \mu_{r1} = 1; \mu_{r2} = -1$.

Examinando la gráfica anterior puede deducirse que, al igual que ocurría en el caso de los dos medios ordinarios RH, a medida que se incrementa el valor de ε_{r2}, dejando el resto de parámetros fijos, las bandas se comprimen. Sin embargo, comparando las Figuras 21 y 27 se observa que en este caso, la representación de la función $L_{TE_{10}}$presenta más irregularidades a medida que aumenta ε_{r2}, de forma que las bandas prohibidas no aparecen de forma tan "periódica" a como lo hacían en el caso anterior en el que todos los parámetros constitutivos eran positivos.

Seguidamente, se han tomado unos valores fijos para los parámetros constitutivos y se ha ido modificando el valor de la anchura de la celda unidad.

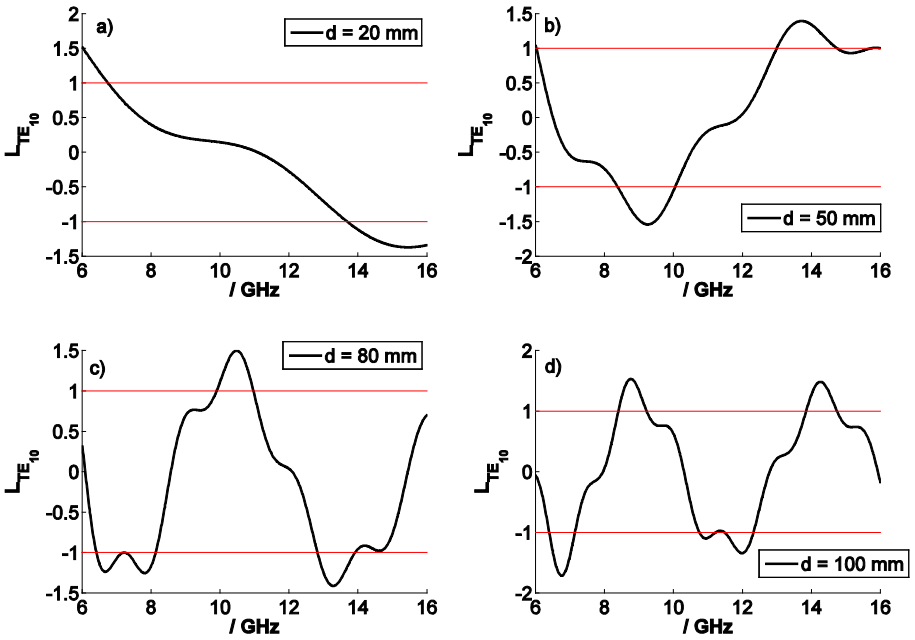


Figura 28: Variación de $L_{TE_{10}}$ en función de la frecuencia en una guía de onda rectangular (Figura 3) para cuatro valores de la anchura de la celda unidad. En los cuatro casos se han mantenido las relaciones: $u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$ y $\varepsilon_{r1} = 2.5; \varepsilon_{r2} = -16;\ \mu_{r1} = 1; \mu_{r2} = -1$.

En vista de la Figura 28, puede afirmarse que se obtienen las mismas conclusiones que para el caso de medios RH, dado que también aquí las bandas prohibidas se comprimen a medida que se ensancha la celda unidad.

Por último, en la Figura 29, se han representado los Gap Maps en los que se muestra la variación de $L_{TE_{10}}$en función de la frecuencia y de la anchura del primer medio que forma la celda unidad para diferentes valores de ε_{r2}.

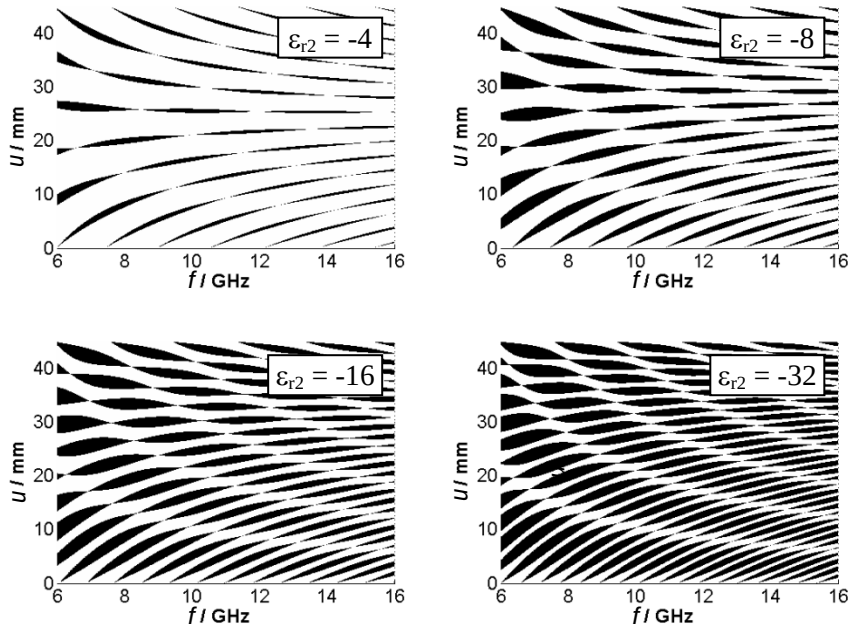


Figura. 29: Módulo del coeficiente de transmisión (en negro las bandas prohibidas y en blanco las permitidas) para el modo fundamental TE_{10} en función de la frecuencia y de *u* para diferentes valores de ε_{r2}. Además, $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = 1$; $\mu_{r2} = -1$ y $d = 45$ mm.

Como puede derivarse de la Figura 29, al ir aumentando el valor del cociente $\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}$ los band gaps se comprimen, aparecen más bandas, pero en este caso su anchura crece.

5.1.3 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad

Tras estudiar la estructura supuesta sin pérdidas ni dispersión, se ha pasado a analizar una situación más realista en la que los parámetros constitutivos de uno de los medios que componen la celda unidad (el segundo en nuestro caso) son dispersivos.

Para ello se ha tomado una dependencia frecuencial de la forma [28]:

$$\varepsilon_{r2}(\omega) = 1 + \frac{31.41^2}{5.65^2 - \omega^2 - j\gamma\omega} + \frac{62.83^2}{72.25^2 - \omega^2 - j\gamma\omega} \tag{50}$$

$$\mu_{r2}(\omega) = 1 + \frac{18.85^2}{5.67^2 - \omega^2 - j\gamma\omega} \tag{51}$$

donde ω es la frecuencia angular (en GHz) y γ es la constante de amortiguamiento que da cuenta de las pérdidas.

Considerando una estructura ideal (de longitud infinita), como es el caso que se está examinando, se tomará un valor $\gamma = 0$ dado que si hubiera pérdidas en el material la onda electromagnética se iría amortiguando y no podría aplicarse el Teorema de Floquet de la misma forma a como se ha hecho en el apartado anterior.

En la Figura 30 se ha representado el valor de $L_{TE_{10}}$ en función de la frecuencia para cuatro valores diferentes de la anchura de la celda unidad, *d*.

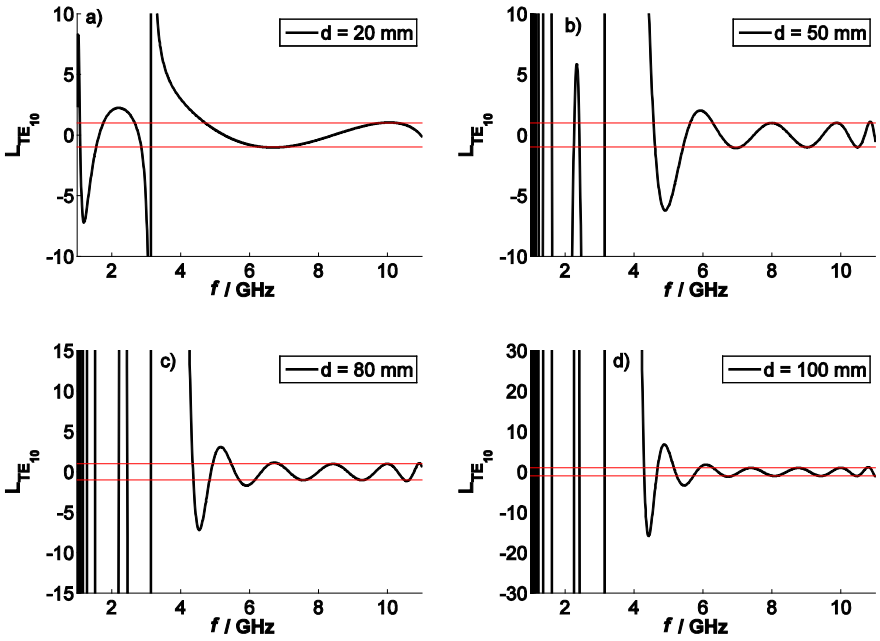


Figura 30: Variación de $L_{TE_{10}}$ en función de la frecuencia para cuatro valores diferentes de *d*, manteniéndose las relaciones: $u = 0.8\ d$ y $v = 0.2\ d$. Los parámetros constitutivos del medio 1 son: $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = 1$ y para el medio 2 los dados por las expresiones (50) y (51).

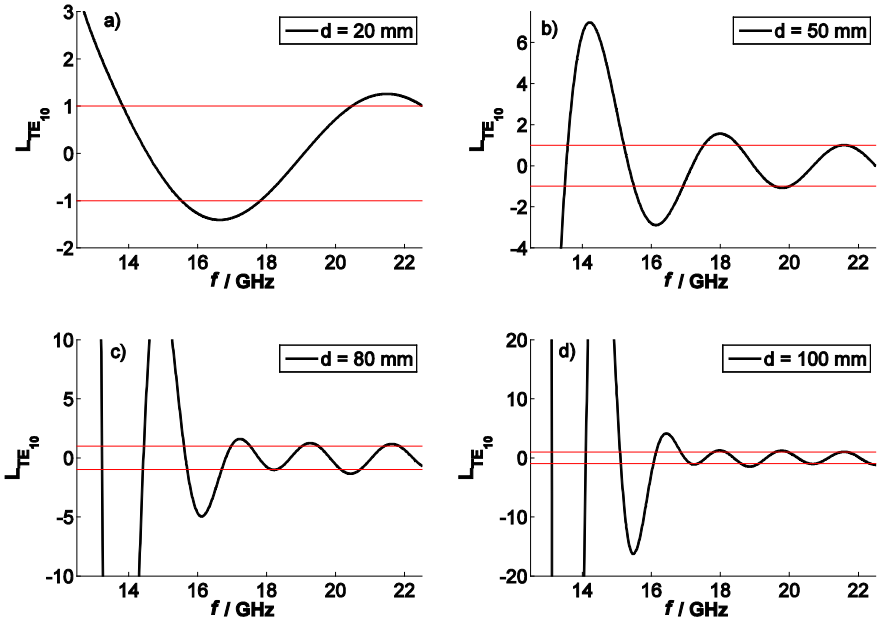


Figura 31: Igual que la Figura 30, en otro rango de frecuencias.

Como puede apreciarse, en las Figuras 30 y 31 se representa la variación de $L_{TE_{10}}$ frente a la frecuencia en los cuatro mismos casos, pero en dos rangos frecuenciales diferentes: en la primera se ha representado el rango de frecuencias comprendido entre 1 y 11 GHz y en la segunda entre 12.5 y 22.5 GHz. Se ha hecho esta separación ya que, debido a la expresión (50) que da el valor de ε_{r2} en función de la frecuencia, para valores de ésta en torno a 11.5 GHz se anula el denominador del tercer sumando al producirse el fenómeno de la resonancia.

Posteriormente, y al igual que se ha hecho en los casos anteriores, se han representado los Gap Maps de $L_{TE_{10}}$en función de la frecuencia y de la anchura u del medio 1, para cuatro valores diferentes de *d*.

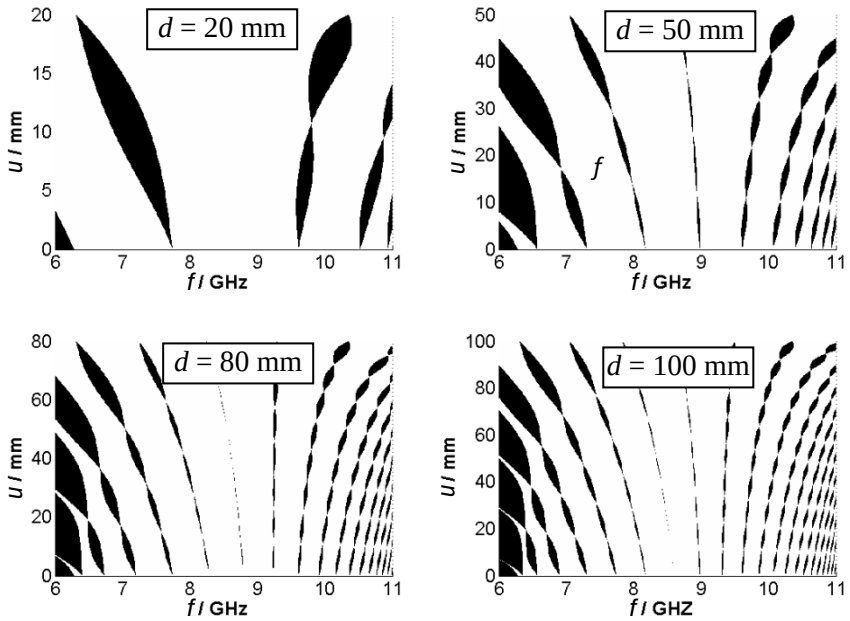


Figura 32: Módulo del coeficiente de transmisión (en negro las bandas prohibidas y en blanco las permitidas) para el modo fundamental TE_{10} en función de la frecuencia y de *u* para diferentes valores de d, manteniéndose las relaciones: $u = 0.8\ d$ y $v = 0.2\ d$. Los parámetros constitutivos del medio 1 son $\varepsilon_{r1} = 2.5;\ \mu_{r1} = 1$ y para el medio 2 los dados por las expresiones (50) y (51).

Como viene siendo habitual, a medida que se incrementa el tamaño de la celda unidad aparecen más bandas de propagación prohibidas, que se van estrechando.

En este caso, se ha tomado un rango de frecuencias comprendido entre 6 GHz y 11GHz, dado que a partir de este último valor aproximadamente, se produce el fenómeno de la resonancia, de igual forma a como ocurría, tal y como se ha señalado antes, en el caso en el que se consideraba un valor de *u* fijo.

Así, si se toma un rango frecuencial algo mayor, que incluya este valor para el cual se da la resonancia, se obtiene la siguiente figura:

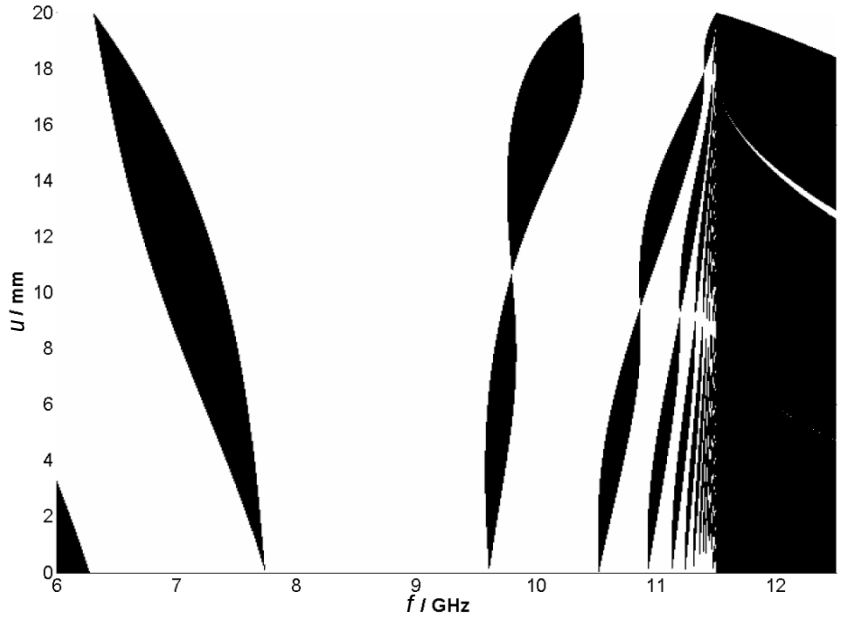


Figura 33: Igual que la Figura 32 a) en un rango de frecuencias algo mayor.

5.2 ESTRUCTURA REAL

Hasta este momento se ha llevado a cabo un estudio más o menos detallado de la propagación electromagnética a través de la estructura EBG ideal. El último paso que se ha dado en nuestro trabajo ha sido el análisis de la propagación en una estructura EBG real, formada por un número finito de celdas.

Para el estudio de estas estructuras se ha implementado en Matlab un programa que permite obtener las matrices de scattering de cada discontinuidad que presenta la estructura real y la matriz de scattering total que caracteriza ésta en su conjunto, de acuerdo con el desarrollo matemático seguido en el apartado 4.4.

En primer lugar, se ha realizado una comparativa de la propagación a través de una estructura ideal y otra real, representando el coeficiente de transmisión para la estructura ideal y comparándole con el obtenido a partir de las matrices de scattering de la estructura real para diferentes valores del número de celdas unidad de ésta.

Además, como primera aproximación al problema que se está abordando, se ha realizado esta comparativa para medios ordinarios y posteriormente se ha introducido el efecto de la dispersión.

5.2.1 Propagación a través de medios ordinarios no dispersivos y sin pérdidas

En la Figura 34 se muestra la comparación entre el módulo del coeficiente de transmisión, $|T|$, de la estructura ideal y de la estructura real para cuatro valores distintos del número de celdas unidad que componen esta última. Las características de la guía y de la celda unidad se detallan en el pie de figura.

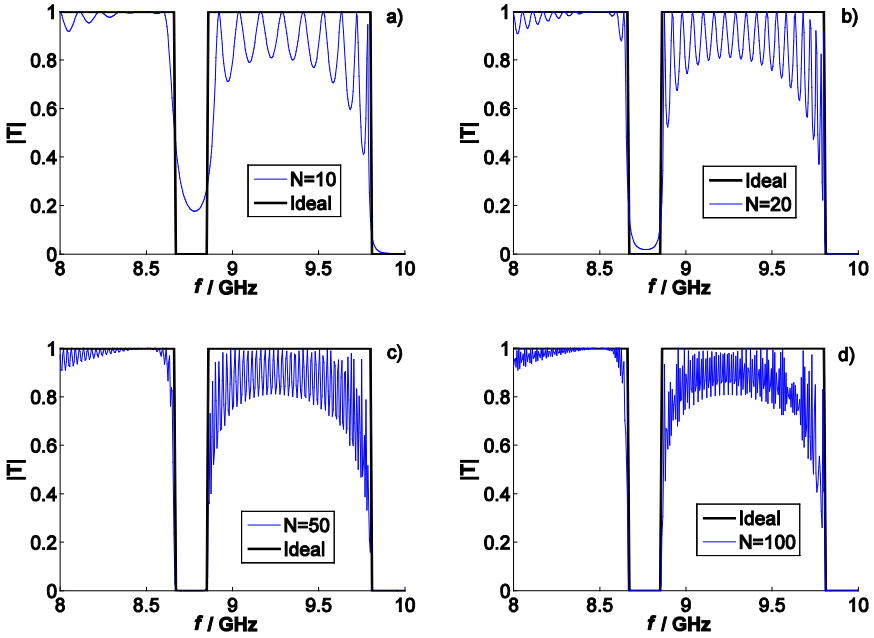


Figura 34: Comparación del módulo del coeficiente de transmisión de la estructura ideal (línea negra) y real (azul). Se ha tomado: $\varepsilon_{r1} = 2.5; \varepsilon_{r2} = 16;\ \mu_{r1} = 1; \mu_{r2} = 1$ y $d = 45$ mm ($u = 0.8\ d$ y $v = 0.2\ d$).

En vista de la Figura 34, puede concluirse que, a medida que aumenta el número de celdas unidad que conforman la estructura real, N, el perfil que sigue el módulo del coeficiente de transmisión de la misma presenta un mayor rizado y se va aproximando al descrito por el de la estructura ideal, como resulta coherente esperar.

5.2.2 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad (sin pérdidas)

En este apartado se han tomado unos parámetros constitutivos para el segundo medio dependientes de la frecuencia según las ecuaciones (50) y (51). Se ha considerado que carece de pérdidas ($\gamma = 0$) para poder realizar la comparativa con la estructura ideal.

Al igual que en el apartado anterior, en la Figura 35 presenta el módulo del coeficiente de transmisión frente a la frecuencia para las dos estructuras que se están estudiando, aumentando progresivamente el número de celdas que conforma la estructura real.

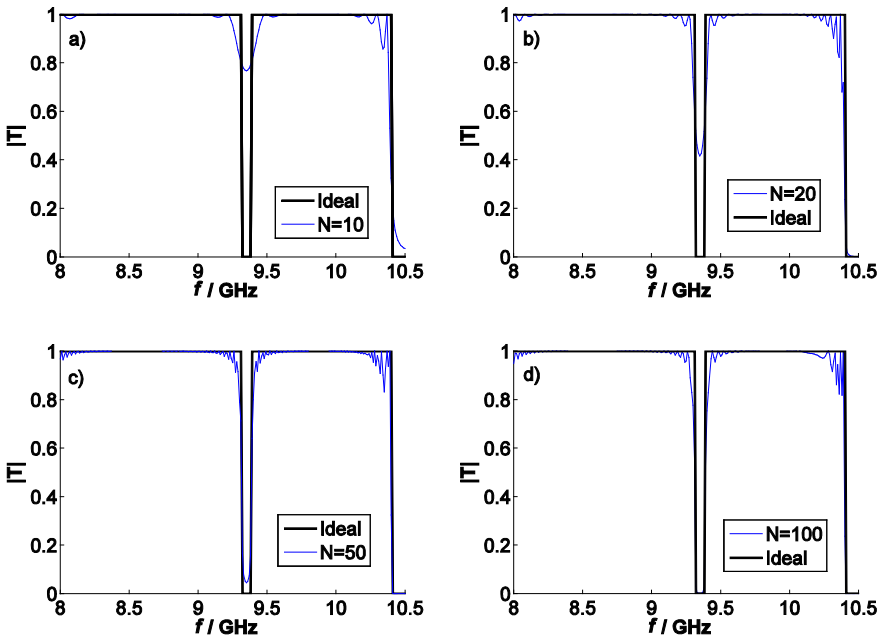


Figura 35: Comparación del módulo del coeficiente de transmisión de la estructura ideal (línea negra) y real (azul). Se han tomado los siguientes datos: $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = 1$, ε_{r2} y μ_{r2} vienen dados por las ecuaciones (50) y (51) , $d = 45$ mm, con $u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$.

De la Figura 35 se deducen las mismas conclusiones que antes. A medida que se incrementa *N*, el perfil del coeficiente de transmisión de la estructura real se aproxima más al dibujado para la estructura idea. Dicho de otra manera, en vista de la gráfica anterior, puede afirmarse que la respuesta electromagnética de la estructura real converge a la de la estructura ideal a medida que se incrementa el número de celdas unidad que componen la primera.

5.2.3 Inclusión de un medio dispersivo en la celda unidad (con pérdidas)

Como último punto de nuestro estudio, se ha examinado la propagación electromagnética en una estructura real, considerando que el segundo medio que conforma la celda unidad es un medio dispersivo y que, además, presenta pérdidas, y se ha comparado dicho comportamiento con el de la misma estructura sin pérdidas.

Así, se ha obtenido el perfil del módulo del coeficiente de transmisión de una estructura EBG real compuesta por $N = 100$ celdas en función de la frecuencia para cuatro valores de γ diferentes. Los resultados obtenidos se encuentran superpuestos en la gráfica 36.

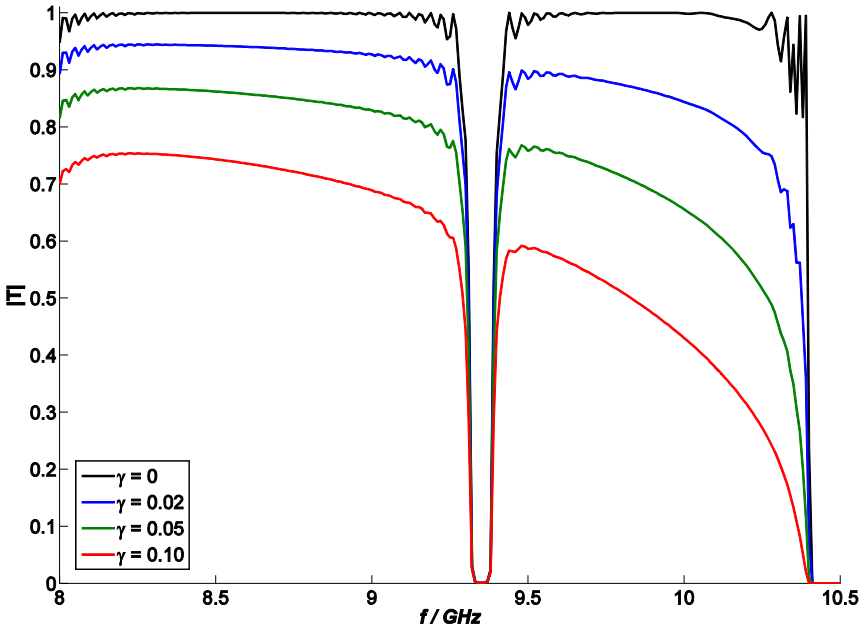


Figura 36: Representación del perfil del módulo del coeficiente de transmisión para una estructura real formada por N = 100 celdas para cuatro valores diferentes de γ. Se ha tomado: $\varepsilon_{r1} = 2.5$; $\mu_{r1} = 1$, ε_{r2} y μ_{r2} vienen dados por las ecuaciones (50) y (51), $d = 45$ mm, con $u = 0.8\,d$ y $v = 0.2\,d$.

En la gráfica anterior puede apreciarse claramente cómo, a medida que se aumentan las pérdidas, el perfil se diferencia más del correspondiente al caso sin pérdidas, como resulta lógico. Se aprecia, además, que las bandas prohibidas situadas aproximadamente en torno a los 9.4 y 10.5 GHz, se mantienen en todos los casos y que el efecto de las pérdidas se acrecenta a medida que aumenta el valor de la frecuencia (para frecuencias mayores el módulo del coeficiente de transmisión se separa más del perfil del caso $\gamma = 0$).

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado la propagación electromagnética a través de una guía de onda rectangular llena con láminas de dos materiales diferentes según el modelo de Kronig-Penney.

En primer lugar, se ha considerado el caso de la estructura ideal (compuesta por infinitas celdas unidad) y se ha analizado la aparición de bandas de propagación permitidas y bandas de rechazo en función de los diferentes parámetros geométricos de la guía y de los parámetros constitutivos de los dos medios componentes de la celda unidad.

Considerándose, como punto de partida, una celda formada por la combinación de dos medios ordinarios (RH), sin pérdidas y sin dispersión, el estudio de la variación de las funciones L_{TE} con la frecuencia nos ha llevado a las siguientes conclusiones: por un lado, a medida que se incrementa el valor de ε_{r2} manteniendo fijo el resto de parámetros, se observa una compresión de las bandas de propagación permitidas y prohibidas, las cuales, por consiguiente, aumentan en número; por otro lado, si se examina el caso en el que se varía la anchura de la celda unidad, *d*, se aprecia el mismo fenómeno: a medida que se ensancha la celda aparece un mayor número de band gaps.

Seguidamente, se ha analizado la variación de las funciones L_{TE} no solo con la frecuencia sino también con la anchura de uno de los medios que conforman la celda unidad de la estructura EBG para diferentes valores de ε_{r2} y d. Estas representaciones gráficas se conocen con el nombre de Gap Maps y en ellas puede apreciarse claramente el gran potencial que tienen las estructuras EBG como filtros de frecuencia. En este sentido, a la vista de tales representaciones en las que se muestra en negro las bandas de rechazo ($|T| = 0$) y en blanco las bandas de paso ($|T| = 1$) pueden obtenerse las características de la estructura a diseñar en función de las necesidades que se requieran, por lo que estos Gap Maps resultan muy útiles en el diseño de filtos.

Tras introducir uno de los dos medios LH, se observan resultados análogos a los comentados anteriormente, con la salvedad de que las bandas permitidas y prohibidas no aparecen de forma tan "periódica" a como lo hacen en el caso de los dos medios positivos, si no que muestran un perfil más irregular, lo cual nos lleva a pensar que más que el signo de los parámetros constitutivos, en este sentido lo que importa es el valor de la relación $\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)$.

Por otro lado, se ha estudiado también la estructura real (formada por un número finito de celdas unidad) y se ha comparado los resultados obtenidos con los conseguidos para el caso ideal.

Así, comparando el perfil del módulo del coeficiente de transmisión obtenido para la estructura real con el que se tiene para la estructura ideal, se aprecia que, la respuesta

electromagnética de la estructura real converge a la de la ideal a medida que el número de celdas unidad que componen la primera de ellas aumenta.

Finalmente, se ha estudiado también el efecto de las pérdidas sobre el coeficiente de transmisión en la estructura EBG real. En este aspecto, se ha comprobado que, tal y como cabía esperar, a medida que aumentan las pérdidas en uno de los materiales, el perfil del módulo del coeficiente de transmisión se distancia más del correspondiente al caso sin pérdidas. Cabe señalar, además, que las bandas prohibidas en las que $|T|$ se anula, permanecen en el mismo lugar independientemente de si el medio presenta o no pérdidas y del valor de éstas, observándose una disminución del módulo del coeficiente de transmisión con respecto al caso sin pérdidas a medida que aumenta el valor de la frecuencia.

.

REFERENCIAS

[1] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε y μ”, *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, p. 509, 1968.

[2] V. G. Veselago y E. E. Narimanov, “The left hand of brightness: past, present and future of negative index materials”, *Nature materials*, vol. 5, pp. 759-762, Octubre 2006.

[3] Jordi Bonache Albacete, “Filtros de microondas basados en metamateriales y en resonadores concentrados”, Tesis Doctoral, Diciembre 2006.

[4] C. Kittel, “Introducción a la Física del estado sólido”, 3ª ed., Ed. Reverté, 1997.

[5] Á. Gómez, M. L. Martínez-Ricci, R. A. Depine y A. Lakhtakia, “Photonic band gap materials comprising positive-phase-velocity and negative-phase-velocity layers in waveguides”, *Journal of modern optics*, vol. 56, no. 15, pp. 1688-1697, Septiembre 2009.

[6] M. A. Solano, Á. Gómez, A. Lakhtakia y Á. Vegas, “Rigorous analysis of guided wave propagation of dielectric electromagnetic band-gaps in a rectangular waveguide”, *International Journal of electronics*, vol. 92, no. 2, pp. 117-130, Febrero 2005.

[7] D. K. Cheng, “Field and wave electromagnetics”, 2ª ed., Ed. Addison-Wesley, p. 375, 1989.

[8] J. Casas, “Óptica, Cap. 1”, 7ª ed., p. 4.

[9] C. Caloz y T. Itoh, “Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications, Cap. 2”, John Wiley and Sons, 2006.

[10] G. Dolling, M. Wegener, S. Linden y C. Hormann, “Photorealistic images of objects in effective negative-index materials”, *Optics express*, vol. 14, no. 5, pp. 1842-1849, Marzo 2006.

[11] P. R. Berman, “Goos-Hänchen shift in negatively refractive media”, *Physical Review* E, vol. 66, no. 6, 067603, Diciembre 2002.

[12] C. A. Balanis, “Advanced engineering electromagnetics, Cap. 5”, 2ª ed., John Wiley and Sons, 2012.

[13] J. B. Pendry y D. R. Smith, “Reversing light: Negative refraction”, *Physics today*, Diciembre 2003

[14] D. R. Smith, Willie J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser y S. Schultz, “Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity”, *Physical Review Letters*, vol. 84, no. 18, pp. 4184-4187, Mayo 2000.

[15] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins y W. J. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena”, *IEEE Transactions on*

Microwave Theory and Techniques, vol.47, no.11, pp. 2075-2084, Noviembre 1999.

[16] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins y W. J. Stewart, "Low frequency plasmons in thin wire structures", *Journal of Physics: Condensed matter*, vol. 10, no. 22, pp. 4785-4809, Junio 1998.

[17] R. A. Shelby, D. R. Smith y S. Schultz, "Experimental verification of a negative index of refraction", *Science*, vol. 292, no. 5514, pp. 77-79, Abril 2001.

[18] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens", *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 18, pp. 3966-3969, Octubre 2000.

[19] H. Lee, Y. Xiong, N. Fang, W. Srituravanich, S. Durant, M. Ambati, C. Sun y X. Zhang, "Realization of optical superlens imaging below the diffraction limit", *New Journal of Physics*, vol. 7, Diciembre 2005.

[20] I. Bulu, H. Caglayan, y E. Ozbay, "Experimental demonstration of subwavelength focusing of electromagnetic waves by labyrinth-based two-dimensional metamaterials", *Optics letters*, vol. 31, no. 6 , Marzo 2006.

[21] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr y D. R. Smith, "Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies", *Science*, vol. 314, no. 5801, pp. 977-980, Noviembre 2006.

[22] J. B. Pendry, D. Schurig y D. R. Smith, "Controlling Electromagnetic Fields", *Science*, Vol. 312, no. 5781, pp. 1780-1782, Junio 2006.

[23] Henri J. Lezec, Jennifer A. Dionne and Harry A. Atwater, "Negative refraction at visible frequencies", *Science*, vol. 316, Abril 2007.

[24] H. Chen, X. Luo, H. Ma and C. T. Chan, "The anti-cloak", *Optics express*, vol. 16, no. 19, Septiembre 2008.

[25] M. Choi, S. H. Lee, Y. Kim, S. B. Kang, J. Shin, M. H. Kwak, K. Y. Kang, Y. H. Lee, N. P. and B. Min "A terahertz metamaterial with unnaturally high refractive index", *Nature*, vol. 470, pp. 369-373, Febrero 2011.

[26] Sistema de observación y prospectiva tecnológica (SOPT), "Los metamateriales y sus aplicaciones en defensa", Ministerio de Defensa, Marzo 2011.

[27] C. A. Balanis, "Advanced engineering electromagnetics, Cap. 8", 2ª ed., John Wiley and Sons, 2012.

[28] Jensen Li, Lei Zhou, C. T. Chan, y P. Sheng, "Photonic Band Gap from a stack of positive and negative index materials", Physical Review Letters, vol. 90, no. 8, Febrero 2003.