Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Musimáticas: explorando las conexiones entre Matemáticas y Música en la educación secundaria

Musimáticas: exploring the connections between Mathematics and Music in secondary education

Alumna: Lucía Cavada de la Riva
Especialidad: Matemáticas
Directora: Neila Emma Campos González
Curso académico: 2024/2025
Fecha: junio 2025

Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de muchas personas que, de distintas formas, han estado presentes a lo largo de este camino.

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Neila, por su seguimiento en el desarrollo de este trabajo. Gracias por permitirme satisfacer una aspiración pendiente: descubrir la música desde las matemáticas.

A todos/as los que he conocido durante este curso, tanto en las prácticas como en la facultad, y que ya puedo llamar amigos/as. Gracias por compartir conmigo tantas horas de trabajo y por hacerme entender el valor de la complicidad entre quienes, como nosotros/as, se preparan para la futura docencia.

A mis padres – Belén y Fernando – y a mi abuela – Maritere – por su amor incondicional y por estar siempre a mi lado. Gracias por inculcarme, desde pequeña, el valor de la constancia y la curiosidad por aprender. Sois, y seréis siempre, mi *pilar de cimentación*.

A Javi, por su infinita paciencia y por acompañarme con tanto cariño a lo largo de estos años. Gracias por tu eterna *ayuda planificadora* y por celebrar cada pequeño logro conmigo.

A todas estas personas, gracias por ser parte del pentagrama musical donde se han podido componer estas líneas.

"La música es un ejercicio matemático inconsciente
en el que la mente no sabe que está calculando."
G. W. Leibniz (1646-1716) (Arbonés y Milrud, 2010).

Resumen

El presente Trabajo de Fin de Máster propone una intervención didáctica interdisciplinar entre las matemáticas y la música en el contexto de la Educación Secundaria Obligatoria, tendiendo un puente entre dos disciplinas tradicionalmente distantes. A partir del análisis histórico, epistemológico y pedagógico de la relación entre ambas materias, se diseña una propuesta didáctica titulada *Musimáticas*, compuesta por actividades manipulativas y cooperativas que permiten abordar contenidos del sentido numérico a través de experiencias musicales significativas. La propuesta se apoya en el uso de herramientas digitales como Chrome Music Lab y en la modelización matemática de fenómenos rítmicos y melódicos, promoviendo un aprendizaje contextualizado, actual, motivador y accesible. La intervención se implementa parcialmente en un aula de 1º de ESO, valorando su impacto a través de la observación y cuestionarios. Los resultados muestran una mejora en la comprensión de contenidos matemáticos, una mayor participación del alumnado que frecuentemente permanece al margen y una actitud más positiva hacia la asignatura. Así, se reivindica el potencial de la música como vehículo pedagógico para el aprendizaje de las matemáticas y se responde a la necesidad de recursos actualizados que integren estas disciplinas desde una perspectiva STEAM.

Palabras clave: modelización matemática, música, cinestésico, STEAM.

Abstract

This Master’s Thesis presents an interdisciplinary teaching intervention between mathematics and music within the context of secondary education, aiming to build a bridge between two traditionally distant disciplines. Based on a historical, epistemological, and pedagogical analysis of the relationship between both fields, a didactic proposal entitled “Musimáticas” is designed. It consists of manipulative and cooperative activities that address number sense through meaningful musical experiences. The proposal incorporates digital tools such as Chrome Music Lab and focuses on the mathematical modelling of rhythmic and melodic phenomena, promoting a contextualized, contemporary, engaging, and inclusive approach to learning. The intervention was partially implemented in a 1st-year secondary classroom, and its impact was assessed through observation and student questionnaires. The results show an improvement in students’ understanding of mathematical content, increased participation from students who usually remain disengaged, and a more positive attitude towards the subject. This work highlights the potential of music as a pedagogical vehicle for learning mathematics and addresses the need for updated resources that integrate these disciplines from a STEAM perspective.

Keywords: *mathematical modelling, music, kinesthetic, STEAM.*

Índice

1. Introducción

El presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) nace de un interés personal por construir un puente entre dos disciplinas "tradicionalmente" inconexas: las matemáticas y la música –la tradición de más de 2000 años dictará sentencia en las próximas líneas del trabajo–. A lo largo de la trayectoria académica de la autora, la doble inclinación siempre permaneció presente, combinando los estudios de Matemáticas y Piano. Sin embargo, la conexión, aunque reflexionada y planteada con designio, nunca se materializó. Este trabajo representa, por tanto, una oportunidad académica y personal para descubrir estas relaciones y recuperar ese diálogo histórico, dando forma a una propuesta didáctica en la que ambas áreas puedan encontrarse.

1.1. Motivación y objetivos del trabajo

Las matemáticas y la música son dos disciplinas que comparten una dimensión cultural y de fundamentación. A lo largo de la historia, se ha puesto de manifiesto cómo estas dos construcciones humanas, integradas en el pensamiento científico y artístico de pensadores de la Antigüedad, han evolucionado de forma conjunta. Hasta que la compartimentación de saberes –y quizás también el inconmensurable crecimiento del saber– desplazó el nexo y la relación fue relegada a un segundo plano, dificultando que, hoy en día, el alumnado pueda descubrir su valor formativo y cultural.

En el contexto de la educación secundaria, se observa una creciente desconexión entre el estudiante y las matemáticas, que es percibida como una disciplina abstracta y que, en muchos casos, genera ansiedad. Además, esta desafección repercute directamente en su rendimiento (Casals Ibáñez et al., 2014). A esto se suman los datos internacionales –como los ofrecidos por PISA (OCDE, 2023)– que sitúan a España en posiciones preocupantes respecto a la competencia matemática. En cambio, la música posee una capacidad de emoción y conexión con el estudiantado, arraigada en nuestra propia cultura y nuestras vivencias. Esta situación plantea un reto: ¿puede la música actuar como catalizador del aprendizaje significativo de las matemáticas?

Pese a la creciente apuesta por proyectos interdisciplinares, la mayoría de las iniciativas en los centros se limitan a proyectos que combinan únicamente materias de índole científico-tecnológica y la música y las matemáticas raramente se articulan juntas en un aula. Sin embargo, creemos que la primera puede actuar como puente para acercar al alumnado a la segunda desde una dimensión estética y emocional favoreciendo un aprendizaje cercano a sus intereses, en una sociedad en la que se hace cada vez más evidente la necesidad de introducir propuestas motivadoras.

La pregunta que impulsa este TFM no busca aportar descubrimientos revolucionarios sino rescatar las relaciones epistemológicas e históricamente fructíferas que han sido poderosamente olvidadas en el sistema educativo actual. En este sentido, se pretende poner en valor el legado de pensadores, matemáticos y músicos que, a lo largo de los siglos, han reivindicado la profunda interdependencia entre arte y ciencia. Apoyándonos en esto y para dar respuesta a la escasez de materiales didácticos actualizados que integran nuestras disciplinas –la mayor parte de los recursos no están adaptados al contexto educativo y digital del alumnado actual–, el trabajo culmina con una propuesta didáctica innovadora y accesible para quienes no se sientan seguros/as al impartir estos contenidos integrados. Tal y como apuntan Chao Fernández et al. (2015), aunque la interdisciplinariedad es una vía adecuada para mejorar la formación integral del alumnado, el profesorado a menudo se siente poco preparado para diseñar materiales que integren contenidos de distintas áreas. Se busca, por ende, superar esa barrera facilitando una propuesta que no solo fortalezca los conceptos matemáticos, sino que también fomente la creatividad, el trabajo en equipo y el uso de herramientas digitales interactivas.

Así pues, se plantean los siguientes objetivos generales del trabajo.

- Mostrar las conexiones históricas y actuales entre las matemáticas y la música.
- Comprender la importancia de las matemáticas en la música destacando su carácter universal, contribución y relevancia cultural en expresiones artísticas y no solo científicas.
- Promover actitudes positivas hacia el trabajo cooperativo utilizando dinámicas grupales como motor de aprendizaje.

- Fomentar un mayor interés por las matemáticas y una actitud más positiva y confiada hacia esta materia mediante las conexiones musico-matemáticas y la gamificación.
- Enriquecer el material didáctico para uso del profesorado de centros de educación secundaria con la intención de promover una integración músico-matemática.
- Desarrollar competencias digitales mediante el uso de herramientas interactivas aplicadas al análisis musical.
- Promover la capacidad de resolver problemas mediante una aplicación práctica de contenidos matemáticos en actividades musicales.

Desde un enfoque constructivista y contextualizado, aspiramos a transformar la percepción educativa de las matemáticas y a establecer vínculos entre la expresión numérica –sobre todo desde el sentido numérico– y la musical. Mostrar cuán comparables son la elegancia de una demostración y la armonía de un soneto de Liszt.

1.2. Justificación legislativa

El marco normativo vigente en el sistema educativo español, concretado en la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE), establece una nueva concepción curricular orientada al desarrollo de competencias clave y la integración de metodologías activas, inclusivas e interdisciplinares. Esta visión implica una ruptura con los modelos de enseñanza tradicionales basados en disciplinas compartimentadas y plantea un enfoque más global y contextualizado, fomentando proyectos como el que se desarrolla en este trabajo. El artículo 4 (Ley Orgánica 3/2020) recoge la necesidad de formar integralmente al alumnado, desarrollando sus competencias y habilidades para afrontar los retos de una sociedad cambiante. En esta línea, el perfil de salida del alumnado se define según ocho competencias clave, alineadas con las recomendaciones del Consejo de la Unión Europea (2018), entre las que destacamos la Competencia matemática y competencia en ciencia tecnología e ingeniería –STEM del inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics– y la Competencia Digital. Calvo Pesce et al. (2021) señalan, en el documento del CEMat, la importancia de utilizar la tecnología para modelizar situaciones reales. Estas dos competencias serán “clave” en el desarrollo de este trabajo. Aunque la competencia STEM no incorpora explícitamente la dimensión artística, la orientación interdisciplinar del aprendizaje competencial permite ampliar el horizonte de actuación hacia enfoques STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics).

A nivel autonómico, el Decreto 73/2022, que establece el currículo en Cantabria, profundiza en este planteamiento. En lo referente a las matemáticas, destacan como bloques competenciales: la resolución de problemas que conecten los conceptos matemáticos –como el mínimo común múltiplo– con situaciones reales –como la musical–, el razonamiento y prueba promoviendo el uso de herramientas digitales –como Chrome Music Lab–, la comunicación y representación en distintos lenguajes (digital, audiovisual), la conexión con otras disciplinas como la música y la dimensión socioafectiva incidiendo en la motivación del alumnado y la cooperación. Este trabajo responde no solo a estos principios sino también a los definidos por el Decreto 78/2019 y el marco del Diseño Universal para el Aprendizaje. Por tanto, la propuesta se diseña desde un enfoque inclusivo y garantizando la accesibilidad universal (Plan Cantabria.es Inclusión).

La integración músico-matemática que se propone en este trabajo responde a los principios fundamentales de las normativas estatal y autonómica, ya que se trabajan conceptos matemáticos de forma significativa y motivadora incorporando estrategias manipulativas y cinestésicas en distintos niveles de andamiaje, aprovechando el contexto cultural que nos ofrece la música.

1.3. Descripción del trabajo

El presente trabajo se estructura en dos dimensiones complementarias: una fundamentación teórica y una propuesta de implementación práctica en el aula. En este sentido, se tratará la conexión músico-matemática desde una perspectiva pedagógica, didáctica e histórica. En primer lugar, se justificará el trabajo desde un punto de vista interdisciplinar (STEAM), en un enfoque general, para después, en concreto, respaldar la tesis desde una revisión literaria de los beneficios de integrar matemáticas y música.

El punto de partida de nuestro trabajo –y por el que surge la reflexión personal– se encuentra en la concepción histórica de los vínculos de ambas disciplinas, dando continuidad a los apartados anteriores. Este análisis culminará con una revisión de las propuestas existentes en la literatura educativa que abordan específicamente esta integración.

El trabajo no se limita a mostrar una perspectiva teórica, sino que se concreta en una intervención práctica con clara vocación didáctica: la propuesta *Musimáticas*. En lugar de desligarlo de la práctica docente, más bien se ha pretendido aterrizar las ideas teóricas en realidades educativas concretas y coherentes. La propuesta, vinculada a las necesidades detectadas durante el periodo de prácticas de la autora en el centro educativo, se implementará parcialmente y la observación y valoración didáctica desprendidas de esta clausurarán el presente trabajo.

2. Marco teórico

El presente capítulo ofrece el fundamento conceptual desde una base pedagógica e histórica para sustentar nuestra tesis: la integración de las matemáticas y la música en el aula.

2.1. Interdisciplinariedad en la enseñanza secundaria

El enfoque por competencias, impulsado por las nuevas demandas de la sociedad de la información –avances tecnológicos, búsqueda de la igualdad y bienestar social–, ha promovido una transformación en la forma de concebir la enseñanza (Diego-Mantecón et al., 2022). Este nuevo enfoque propicia la interdisciplinariedad dado que las competencias en cualquier ámbito no dependen de poseer conocimientos aislados en una sola materia sino de la capacidad de aplicarlos desde múltiples perspectivas. Así, el estudio de los hechos del mundo –como resaltan Chao Fernández et al. (2015)– debe realizarse desde diversas ópticas, lo que incorpora un valor añadido a la interdisciplinariedad en el aula. Establecer una interdisciplinariedad entre materias en el aula configura similitudes entre ambas y con la realidad que se vive, lo que supone una experiencia didáctica más útil y motivadora (Chao Fernández et al., 2015).

En este contexto, emergió la corriente STEM y, posteriormente, STEAM, al incorporar la A de Arte. La idea original de STEM, que tiene sus inicios en los años 90 en Estados Unidos bajo el acrónimo SMET impulsado por la National Science Foundation, se orientó hacia la mejora del rigor académico y el desarrollo de habilidades para una sociedad en constante cambio. Sin embargo, inicialmente se concebía como una agrupación de disciplinas separadas, lo que evolucionó hacia un modelo de integración real, a partir de 2007, denominada "educación STEM integrada". Esta nueva orientación defiende la construcción de conocimiento a partir del contexto real en lugar de exigir al alumnado construir las conexiones por su cuenta (Kelley y Knowles, 2016). Este enfoque no se desliga de la intención de fomento de vocaciones científicas y del desarrollo de competencias tecnológicas sin sesgos de género.

La incorporación del Arte al acrónimo permite al estudiantado expresar conceptos científicos y matemáticos mediante herramientas artísticas como la música, la danza o el dibujo, favoreciendo una comprensión creativa del conocimiento (González-Martín et al., 2024). Desde esta perspectiva, STEAM no conforma una simple suma de disciplinas, sino que implica un replanteamiento de los objetivos educativos, más allá de la competitividad económica. Se convierte, así, en una respuesta educativa a los denominados “problemas perversos” del siglo XXI que requieren soluciones interdisciplinares y colaborativas (Colucci-Gray et al., 2019).

La interdisciplinariedad, al fomentar el pensamiento de alto orden y la motivación del estudiantado, no solo favorece la retención de conocimientos, sino que enriquece el sentido que el alumnado da a las matemáticas (An et al., 2013; Diego-Mantecón et al., 2022). Reconociendo que en el entorno escolar muchos docentes no son expertos en todos los campos, se vuelve esencial tender puentes entre profesorado de diversas disciplinas –codocencia o comunidades como OpenSTEAM–. En este caso, dada la formación en matemáticas y música de la autora de este trabajo, resulta natural integrar ambas áreas. Como indican Diego-Mantecón et al. (2022), la formación del docente es fundamental en la definición de objetivos y en la implementación de contextos de aprendizaje adecuados.

A nivel metodológico, la integración se concreta habitualmente en propuestas activas como el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) –desarrollada en proyectos como STEMforYouth, KIKS, OpenSTEAM– o la gamificación (Diego-Mantecón et al., 2022). Estas metodologías demuestran un gran potencial para reducir la ansiedad matemática y para promover una educación más democrática e inclusiva (An et al., 2013).

En la presente memoria se acentúa el uso de la gamificación y la modelización matemática. La primera emplea características de juegos en entornos educativos con el objetivo de lograr una mayor implicación y motivación (García-Ruiz et al., 2018). La segunda permite una transición bidireccional entre contextos del mundo real –conexión extra-matemática musical– y el matemático. Emplear el ciclo de modelización facilita la comprensión y refuerza la aplicabilidad del conocimiento: comprensión de la situación real, simplificación o estructuración del modelo, matematización, resultados matemáticos, interpretación llevada a la realidad y validación (Blum y Borromeo Ferri, 2009; Calvo Pesce et al., 2021; Ortiz-Laso et al., 2023). Este proceso, relevante en la presente propuesta, se complementa con el uso de diversas representaciones matemáticas –simbólica, numérica, verbal, manipulativa y gráfica– en lo que destacan las conexiones intra-matemáticas (representacional alterna).

La perspectiva contextualizada de STEAM se trabajará a través de la modelización matemática, que establece puentes significativos entre matemáticas y realidad en conexión con el entorno del alumnado, lo que favorece el interés por la materia. No solo contribuye al aprendizaje matemático sino también a comprender el mundo y a participar activamente de él (Blum y Borromeo Ferri, 2009).

2.2. Beneficios del aprendizaje interdisciplinar en matemáticas y música

Las matemáticas son una de las asignaturas que mayor ansiedad generan en el alumnado, percibidas como difíciles y deshumanizadas debido a su carácter abstracto, formal y complejo. Este rechazo suele incrementarse con el paso de los cursos, disminuyendo, a su vez, la motivación y el rendimiento (Mato Vázquez, 2010). Como señalan Mato y de la Torre (2020), "sin afecto no habría interés, necesidad y motivación para el aprendizaje, ni tampoco cuestionamientos y, sin estos, no hay desarrollo mental" (p.198). Con ello, se pone en evidencia la importancia de atender la componente emocional en el aprendizaje de las matemáticas, donde la motivación se sitúa como elemento clave.

En este sentido, Chao Fernández et al. (2015) recuerdan que "la escuela es un contexto enriquecedor en el desarrollo de los niños y niñas al permitirles construir su personalidad, ampliar sus experiencias y favorecer su socialización" (p. 1011). Por tanto, es esencial que las matemáticas contribuyan también a este desarrollo. El rendimiento académico en la materia no depende exclusivamente de factores cognitivos sino también de la autopercepción del alumnado como estudiantes de matemáticas por lo que es necesario proponer metodologías que despierten la curiosidad e imaginación y favorezcan actitudes positivas en el aprendizaje de la disciplina (Mato Vázquez, 2010).

Frente a la fría imagen de las matemáticas, la música se enseña en entornos lúdicos y humanos, en los que se fomenta la expresión compartida y la creatividad tanto dentro como fuera del aula –contadas veces se viven las matemáticas fuera del aula por interés personal–. Su naturaleza social y su fuerte componente emocional la convierten en un medio perfecto para fomentar la participación, la autoestima y el bienestar del alumnado. Tal y como apuntan Chao Fernández et al. (2015), la música "proporciona seguridad emocional y confianza, comparten canciones con los compañeros y compañeras, lo que les proporciona un clima de ayuda, de colaboración y de respeto" (p. 1012). Estas diferencias, unidas a apreciaciones como las de Conde Solano et al. (2011) sobre la "necesidad de crear propuestas curriculares interdisciplinarias que propicien la construcción de un aprendizaje significativo de las matemáticas" (p. 110), sugieren la posibilidad pedagógica de integrar ambas materias en propuestas interdisciplinares.

Desde una perspectiva pedagógica, diversos marcos teóricos respaldan la utilidad de esta integración. Piaget (1970) sostenía que el conocimiento se construye activamente a partir de la interacción del alumno/a con su entorno mediante procesos de asimilación y acomodación. Así, conectar lo abstracto de las matemáticas con experiencias musicales tangibles puede favorecer la comprensión y retención de conceptos abstractos. De igual forma, Vygotsky (1978) destacaba el carácter social y cultural del aprendizaje, mediado por herramientas culturales y construido a partir de la interacción con los demás. La música, como materia colectiva, permite integrar metodologías interactivas y cooperativas en el aprendizaje matemático.

Sugerimos, por tanto, que vincular el razonamiento abstracto y complejo con la sensibilidad auditiva puede abrir rutas de aprendizaje enriquecedoras para todo el alumnado. De esta forma, los estudiantes que no tienen fortalezas en el plano lógico asimilarán los conceptos con mayor facilidad. Además, se ha demostrado que estudiantes con dificultades de habla o trastornos autistas pueden beneficiarse especialmente de esta vía de aprendizaje (An et al., 2013).

Chao Fernández et al. (2015) consideran que la ausencia de actividades músico-matemáticas se debe a la carencia de relevancia de la educación musical ante los ojos del profesorado. Lejos de tratar la música como un simple vehículo para enseñar matemáticas, esta propuesta busca establecer una simbiosis entre ambas materias, convirtiendo lo abstracto en tangible pero también dando luz sobre fenómenos musicales como el ritmo, la armonía o la afinación (González-Martín et al., 2024). Que el alumnado comprenda la matemática como lenguaje universal y aprecie parte de su expresión estética (Colucci-Gray et al., 2019).

Desde el punto de vista afectivo, esta relación recíproca no solo promueve aprendizajes más eficaces, sino que también incrementa la motivación intrínseca del alumnado, haciendo que persigan un conocimiento más profundo por iniciativa propia. Así, la música se presenta como un contexto emocionalmente estimulante y rico (An et al., 2013) para la modelización matemática. Cognitivamente, se cree que la música acelera el aprendizaje (Levitin, 2011), aumentando los niveles de atención, observación y memorización enseñando a pensar y a evaluar resultados (Conejo Rodríguez, 2012). Además, se manifiesta en un impacto positivo en los resultados de las pruebas matemáticas (An et al., 2013) – poco alentadoras según PISA (OCDE, 2023) –.

Además de estos valores, la música aporta beneficios a nivel social, psicomotriz y personal. Según Conejo Rodríguez (2012), la música "enriquece la formación integral del niño, no solo por su aspecto formativo sino también por su aporte en el sano desarrollo del individuo, de su personalidad" (p. 264). Mediante experiencias colectivas que dan sentido a las ideas matemáticas (Calvo Pesce et al., 2021), la música mejora la participación, la autoestima, la autonomía, el desarrollo del autocontrol y la toma de decisiones. Además, enseña a definir tareas y diferenciar roles, ofreciendo un medio de comunicación y expresión y favoreciendo la adquisición de hábitos como el uso adecuado del tiempo (Conejo Rodríguez, 2012).

Las herramientas manipulativas, en el ámbito matemático, permiten que el alumnado interactúe físicamente con objetos concretos, facilitando la visualización y contribuyendo a fortalecer el razonamiento lógico-matemático, el pensamiento crítico y la resolución de problemas (Matailo Vivar y Ramón Salcedo, 2023). Así, el contexto musical facilitará la aplicación de estas iniciativas que se reconocen como generadoras de interés y éxito (Abah et al., 2024).

2.3. Relación histórica entre matemáticas y música

Existe una conexión más profunda entre las matemáticas y la música de lo que podría pensarse a primera vista. A lo largo de la historia, ambas disciplinas han compartido una visión unificada del conocimiento, una interpretación común del mundo. Las dos son concepciones humanas creadas a partir de la vinculación creatividad – realidad. En este sentido, Vygotsky “pone en un mismo plano a la creación científica como a la artística, porque manifiesta que ambas se valen de la imaginación para cristalizarse tanto en descubrimientos científicos como en producciones artísticas” (Bustos, 2007, p. 98).

Aunque actualmente responden a materias diferenciadas, esta relación ha estado presente desde la antigüedad y ha evolucionado a lo largo de los siglos, influida por el pensamiento filosófico y científico de cada época. Ya en la Prehistoria los intentos de canto colectivo probablemente incluían relaciones interválicas –un intervalo es la distancia entre dos notas musicales– como el unísono o las octavas entre voces adultas e infantiles (Fauvel et al., 2006). En la Antigua Grecia, el término *musiké* (arte de las musas) hacía referencia a toda expresión artística incluyendo música, gimnasia o teatro (Arbonés y Milrud, 2010). Este enfoque integral se reflejaba en la educación clásica a través de las artes liberales, divididas en *Trivium* (gramática, dialéctica y retórica) y *Quadrivium* (aritmética, geometría, astronomía y música). Mientras que la aritmética concebía los “números en reposo”, la música representaba los “números en movimiento” –la geometría se correspondía con las “magnitudes en reposo” y la astronomía con las “magnitudes en movimiento”– (Chao Fernández et al., 2015; Pastor Martín, 2008).

Fue precisamente en este contexto en el que los pitagóricos, en el siglo VI a. C., establecieron la primera teoría matemática de la música (Chao Fernández et al., 2015). Se cuenta que Pitágoras, al pasar frente a una herrería, escuchó los sonidos armoniosos que producían algunos martillos golpeando un yunque y, aplicando el método científico, observó que este placer melódico podía expresarse mediante proporciones sencillas de sus pesos: dedujo una ley aritmética para los intervalos musicales entre martillos. Tras replicar la experiencia con cuerdas tensadas de igual masa, pero distinta longitud, determinó las proporciones entre las longitudes de cuerda que se correspondían con cada intervalo elemental: 2:1 (octava), 3:2 (quinta) y 4:3 (cuarta). Avanzando en la teoría a través de sus discípulos, llegó Platón, quien consiguió definir la *Escala del Timeo*, que luego dio origen a lo que hoy denominamos *Escala Pitagórica*, basada en múltiplos de 2 y 3 (Beato Sirvent, 2003).

La idea de construcción de la escala musical –conjunto de sonidos ordenados– pitagórica consistía en "interpolar", de manera iterativa, una cantidad apropiada de proporciones de frecuencias dentro de un intervalo de octava. Mientras que el número de notas podía ser arbitrario, los sonidos elegidos debían satisfacer un criterio estético de consonancia (Fauvel et al., 2006). Partiendo de un sonido determinado (longitud L) y los cuatro intervalos elementales consonantes $\left(L, 2L, \frac{3}{2}L, \frac{4}{3}L\right)$ –asociados a las cuatro estaciones– se podían obtener nuevos intervalos con los vecinos más próximos que, a su vez, se empleaban para generar nuevas notas. Por ejemplo, el intervalo entre una quinta $\left(\frac{3}{2}\right)$ y una cuarta $\left(\frac{4}{3}\right)$ es de una segunda mayor, denominado tono, con lo que se obtiene a través de las proporciones de las respectivas cuerdas –cuando se suman (resp. restan) intervalos se multiplican (resp. dividen) proporciones, lo que nos recuerda a las propiedades de la función logarítmica…–:

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}.$$

A través de este proceso quedaba construida la escala pitagórica (véase la Tabla 1), solo empleando operaciones con potencias de 2 y 3. No obstante, en este desarrollo apareció el intervalo de semitono –distancia entre las notas actuales mi y fa– con la proporción $\frac{256}{243}$, que, sin embargo, era más pequeño que medio tono, lo que degeneró en graves problemas con esta estructura musical:

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = 1{,}109857 \ldots < 1{,}125 = \frac{9}{8}.$$

Nota actual	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Proporción de longitud	L	$\frac{9}{8}L$	$\frac{81}{64}L$	$\frac{4}{3}L$	$\frac{3}{2}L$	$\frac{27}{16}L$	$\frac{243}{128}L$	$2L$
Intervalo con la nota anterior		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Tabla 1. Proporciones de longitud de la cuerda dada la unidad de longitud L (correspondiente a la nota do) e intervalos entre las notas consecutivas (Fauvel et al., 2006).

También se podía realizar la construcción pitagórica a partir de quintas sucesivas desde una nota fija con longitud L, empleando la proporción $3:2$ –que define los números elementales de este sistema musical 2 y 3–. Con las notas actuales, por ejemplo, a partir del do, se obtendrían sucesivamente las notas: sol, re, la, mi, si y fa, en lo que se conoce como círculo de quintas. No obstante, debido a la desavenencia con el intervalo de semitono, mientras que en un teclado moderno doce quintas perfectas equivalen a siete octavas, la escala pitagórica no consigue cerrar el círculo de quintas, lo que origina una "espiral de quintas" (Figura 1) con la consecuente construcción iterada e indefinida de notas en la escala (Fauvel et al., 2006).

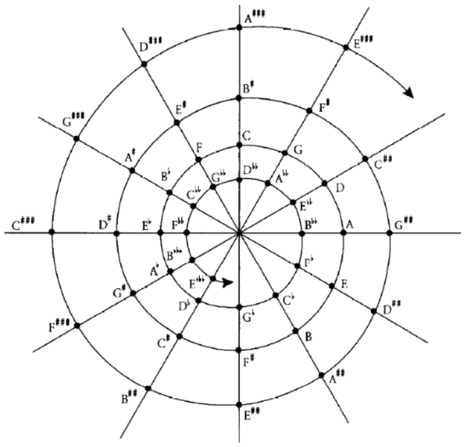


Figura 1. Espiral, en lugar del círculo de quintas, que aparece en la construcción de quintas sucesivas según el sistema pitagórico (Fauvel et al., 2006).

En consecuencia, el sistema pitagórico no es cerrado bajo transposiciones –cambios de tonalidad a los que se llega subiendo o bajando la pieza musical en un intervalo determinado–. Desde el punto de vista matemático, esto se debe a que las potencias de $\frac{3}{2}$ –que determinan la construcción de quintas– no pueden expresarse como potencias de 2 (intervalos de 8ª), es decir, no existen enteros n y m tales que (Fauvel et al., 2006).

$$3^n = 2^m.$$

Ecuación 1. Igualdad sin solución en los enteros para resolver el número de quintas que coincide con un número dado de octavas en la construcción de la escala musical pitagórica.

Esta incompatibilidad se denomina *coma pitagórica*, una pequeña diferencia entre notas que teóricamente deberían coincidir, como el re# y el mib. Esta disonancia fue tan evidente que el intervalo resultante entre sol# y mib recibió el nombre de *quinta del lobo* debido a su sonido tan desagradable. Esta cantidad se puede cuantificar mediante el cociente entre doce quintas justas $\left({}^{3}/_{2}\right)^{12} = 129.7463\ldots$ y siete octavas $2^7 = 128$ –que deberían coincidir para cerrar el círculo–, lo que da un valor aproximadamente de 1,0116, cercano, pero no idéntico a la unidad. Para resolver esta disonancia, matemáticos como Leibniz o Euler estudiaron el problema y se propusieron sistemas de afinación alternativos. Uno de ellos fue la Justa Entonación, definida en el siglo XVI por Giuseppe Zarlino que incorporaba nuevas proporciones basadas en un factor primo adicional: el 5. Así, por ejemplo, se sustituía la frecuencia ${}^{81}/_{64}$ por ${}^{5}/_{4}$ –véase la descripción de Fauvel et al. (2006)–, lo que permitía intervalos de tercera más consonantes. Sin embargo, este sistema tampoco resolvía el problema de la transposición (Liern Carrión, 2008a; 2009a).

La búsqueda de soluciones fue abordada por figuras como Newton o Mersenne. Este último, en 1630, propuso la creación de teclados que incorporaran diversas tonalidades (Fauvel et al., 2006). Aunque parece una quimera teórica, algunos de estos instrumentos llegaron realmente a construirse. Finalmente, las numerosas investigaciones dieron sus frutos y culminaron en la introducción del Sistema Bien Temperado, en el siglo XVIII. Esta solución deformaba todas las quintas en una misma cantidad y, por ende, distribuía los doce semitonos de la octava en intervalos iguales con una innovación: introduciendo proporciones irracionales. Así, cada semitono tenía una relación de tamaño igual a $2^{1/12}$, permitiendo la transposición sin disonancias perceptibles para el oído humano. Para alejar la solución de una original *teoricidad*, Bach compuso su obra culmen, “El clave bien temperado” (1722 y 1738-44), en la que incluyó preludios y fugas en todas las tonalidades mayores y menores de la escala cromática –como se denominó más adelante–, demostrando que la teoría podía convertirse en una realidad musical (Liern Carrion, 2009a).

Este sistema bien temperado, empleado hoy en día en todos los teclados musicales, resuelve de forma aproximada la Ecuación 1 con $n = 12, m = 19$, es decir, 12 quintas y 7 octavas, logrando cerrar el círculo de quintas. Se acepta, por tanto, la identificación de notas como el reb y do#, el si# con el do, o el fab con el mi. La escala resultante se compone de 12 semitonos equidistantes, en los que cada paso tiene un valor de $\sqrt[12]{2}$ y cada tono completo es $\sqrt[6]{2}$. De manera coherente, dos notas separadas por una octava cumplen $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$. La espiral, por fin, colapsa en un círculo y el problema del diseño del teclado se ha resuelto (Fauvel et al., 2006).

Hasta aquí, se ha manifestado que, en la Antigua Grecia, la armonía que producían dos sonidos tocados simultáneamente –intervalo armónico– o sucesivamente –intervalo melódico– estaba relacionada con la proporción entre la longitud de las cuerdas que emitían los sonidos. Sin embargo, la relación entre números y sonido fue más allá. Los pitagóricos creían que los cuerpos celestes generaban sonidos armónicos en sus movimientos en el espacio que resultaban imperceptibles para el oído humano (Arbonés y Milrud, 2010). Esta idea, denominada *música de las esferas*, fue retomada por Kepler en el Renacimiento, quien calculó las velocidades angulares de los planetas en su órbita elíptica para asignarles sonidos basados en las proporciones entre el perihelio y el afelio. De esa manera, asignó intervalos y escalas musicales (Figura 2) a los planetas del sistema solar. Por ejemplo, Saturno se correspondía con una tercera mayor, Júpiter con una tercera menor, Marte con una quinta y la Tierra con un semitono (Arbonés y Milrud, 2010). En este caso, la escala musical empleada fue la Justa Entonación, que permitía trabajar con los números 2, 3 y 5 (Liern Carrión, 2011).

Figura 2. Escalas musicales asignadas por Kepler a cada planeta según las velocidades angulares perihelio – afelio (Arbonés y Milrud, 2011).

De forma paralela, en China también se atribuía a la música un orden cósmico. Ling Lun y Confucio defendían que, “dado que el número 3 es el del cielo y el 2 el de la tierra, los sonidos en proporción 3:2 armonizaban como el cielo y la tierra” (Liern Carrión, 2011). Así, la consonancia entre sonidos se interpretaba como una metáfora del equilibrio universal.

Estos fundamentos numéricos se fueron refinando con el paso del tiempo, pero el concepto de consonancia aún generaba controversias. El matemático Euler, en el siglo XVIII, introdujo el concepto de grado de suavidad (*Gradus Suavitatis*) como medida de consonancia de un intervalo musical, siguiendo, aproximadamente, una especie de “ley no escrita” con la que comulgaban numerosos pensadores: cuanto más simple es la proporción entre las frecuencias de sonido (o longitudes), o expresada con números menores, mayor es el grado de placer que presenta (“Teorema” de Tyndall) (Liern Carrión, 2008a; 2012). Este modelo o ley también concuerda con “fórmulas” posteriores, como la de Birkhoff $\left(M = \frac{O}{C}\right)$, donde O expresa el orden estético o regularidad y C se corresponde con la complejidad, es decir, a mayor complejidad menor belleza (Arbonés y Milrud, 2012; Chao Fernández et al., 2015)

El grado de suavidad (GS), que puede extenderse al cálculo en acordes y melodías completas, permite obtener una medida de la consonancia interválica a partir de una casuística de circunstancias –véanse descritas por Liern Carrión (2012)– que tienen que ver con números primos, alcanzando la medida general para cualquier intervalo musical con proporción a:b –véase la expresión en el Anexo I–. Por tanto, a mayor GS menor consonancia y, por ende, menor placer estético del sonido.

Una de las grandes preguntas que Euler consiguió resolver con esta construcción fue “¿por qué la razón 8:5 resulta más consonante al oído que la 7:4?”: mientras que GS(8:5) = 8, GS(7:4) = 9. Así, el unísono (1:1) y la octava (2:1) resultan ser los intervalos más consonantes, seguidos por la quinta (3:2) y la cuarta (4:3) –después vendrían la tercera mayor (5:4), la sexta mayor (5:3), la tercera menor (6:5)– (Liern Carrión, 2012).

Además de la organización y la afinación de los sonidos, el ritmo musical también encierra estructuras matemáticas. Los tiempos relativos de las figuras musicales (redonda, blanca, negra…) –tomando como unidad el tiempo de la redonda– siguen una progresión geométrica de razón ½:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 0,1, \ldots$$

Los compases, cuya notación se generalizó en el Barroco, se representan mediante fracciones, donde el denominador indica el tipo de figura y el numerador cuántas completan cada división del compás. Estas representaciones permiten trabajar aspectos matemáticos como las operaciones o equivalencia de fracciones (véase el Anexo I). En ocasiones, se introducen alteraciones del ritmo que implican transformaciones matemáticas. Por ejemplo, el puntillo consiste en aumentar en la mitad la duración de una figura, lo que equivale a multiplicar su valor por 3/2. De igual modo, los grupillos introducen subdivisiones rítmicas. El tresillo, por ejemplo, implica que tres figuras iguales se ejecuten en el tiempo de dos, por lo que se multiplican por 2/3. Este mismo principio se aplica a otras agrupaciones como el cuatrillo, cinquillo o seisillo (Liern Carrión, 2008b).

2.4. Estado del arte de la enseñanza músico-matemática integrada

A pesar del auge de enfoques interdisciplinares como STEAM, estas continúan centrándose, comúnmente, en combinaciones de materias científico-tecnológicas, dejando de lado las posibilidades que la música puede ofrecer. La existencia de materiales y propuestas didácticas que integren matemáticas y música es escasa –o desactualizada– en el contexto europeo general y, particularmente, en el español (Casals Ibáñez et al., 2014; Viladot et al., 2018). Este vacío justifica la necesidad de plantear propuestas como la que se presenta en este trabajo.

Si bien existen algunas experiencias que han abordado de forma parcial las conexiones entre música y matemáticas, estas tienden a limitarse a actividades con un enfoque más algorítmico, con menor atención a los intereses y contextos reales del alumnado y, además, desactualizados sin integrar herramientas digitales en su desarrollo que faciliten un aprendizaje significativo y un despliegue de la competencia digital. En esta línea, resultan especialmente escasas aquellas propuestas que, como la aquí planteada, trabajen contenidos fundamentales del sentido numérico –que supone un reto importante en los primeros cursos de la educación secundaria– desde metodologías activas y enfoques emocionalmente significativos, como el uso de canciones conocidas o herramientas digitales.

Mostramos a continuación algunas de las propuestas existentes en la literatura, que sirven como punto de partida para nuestra intervención. A partir de ellas, buscamos actualizar enfoques, enriquecer las metodologías con herramientas digitales y aportar mayor cercanía con el alumnado, mejorando así su implicación y motivación en el aprendizaje matemático a través de la música.

Uno de los referentes fundamentales en el ámbito educativo es la obra de Bach, cuyas técnicas compositivas, como el contrapunto, permiten ser analizadas desde una perspectiva matemática accesible al alumnado. En obras como el *canon del cangrejo* o sus preludios y fugas se pueden trabajar conceptos como simetrías y traslaciones (Liern Carrión, 2009a). En esta línea, Navarra y de Cian (1994) proponen el análisis de frisos musicales desde una perspectiva geométrica centrada en la identificación de repeticiones, traslaciones y simetrías.

La aplicabilidad de la música no se afinca necesariamente en el ámbito conceptual. Diversos estudios destacan el "Efecto Mozart", que plantea escuchar ciertas composiciones clásicas para mejorar las capacidades espaciotemporales, la comprensión, la concentración y el razonamiento lógico-matemático, además de contribuir a un ambiente de aula más positivo y estimulante (Ordoñez Morales et al., 2011).

Relacionado con este autor, existe el "Juego de dados musical". A partir de la combinatoria de dos dados permite componer numerosos valses, trabajando conceptos probabilísticos (Pastor Martín, 2008). Por supuesto, la razón áurea o la sucesión de Fibonacci también han sido empleados en piezas musicales de Bartók, Debussy, Beethoven o Schubert, ofreciendo un puente entre ambos lenguajes para el alumnado (Chao Fernández et al., 2015).

También se han propuesto metodologías activas y manipulativas para el aula. Orff creó una serie de instrumentos, como xilófonos, para trabajar figuras geométricas (Chao Fernández et al., 2015). En esta línea y como propuesta contemporánea, en Castro Urdiales, enmarcado en el proyecto STEAMTeach, el alumnado de 1º de ESO diseñó instrumentos aplicando conceptos matemáticos e integrando contenidos de geometría, física y tecnología (Colegio Menéndez Pelayo, s.f.). Continuando con la estela interactiva, Kodály desarrolló una notación musical mediante gestos manuales y Wuytack creó el musicograma para dibujar lo que oímos –se puede relacionar con el arte de Kandisky–, que otorga numerosas posibilidades de trabajo en el aula (Chao Fernández et al., 2015).

En cursos superiores de la educación secundaria se han vinculado matemáticas y música en el estudio de la geometría analítica y las funciones. En este sentido, Liern Carrión (2009b) propone la transcripción de patrones flamencos, como el fandango o la bulería, en lenguaje binario para medir la similitud entre ritmos. También, Pastor Martín (2008) aborda el concepto de logaritmo en la percepción sonora –ley de Weber-Fechner–. Asimismo, Liern Carrión (1994) propone tratar las frecuencias de las escalas musicales como vectores (intensidad, tono, timbre) para trabajar en espacios vectoriales como $\mathbb{R}^{\mathbb{2}}$ o superiores. En 4º de ESO, Pol i Llompart (2007) sugiere combinar contenidos de geometría, funciones y física en el estudio de la espiral de Arquímedes aplicada al mecanismo de las cajitas de música. Desde aquí, trabajando estructuras helicoidales se pueden establecer vínculos con la biología –como la estructura del ADN–.

Desde el punto de vista físico de la música, se han propuesto diversas conexiones entre funciones periódicas y sonidos musicales, abordando fenómenos como los batimientos o los armónicos. Liern Carrión (2010) plantea la posibilidad de analizar la calidad de afinación de un instrumento mediante la superposición de ondas y recurre al análisis de Fourier para descomponer funciones periódicas. Incluso se ha explorado el tratamiento de las funciones matemáticas en relación con la música en obras como las de Chopin, interpretando funciones constantes, periódicas a trozos… lo que abre las puertas a trabajar conceptos de continuidad o derivabilidad en contextos musicales.

3. Propuesta didáctica *Musimáticas*

Musimáticas pretende explorar la relación interdisciplinar entre las matemáticas y la música, permitiendo al estudiantado redescubrir los conceptos matemáticos aprendidos a lo largo de la primera etapa del curso 1º de ESO a través de experiencias musicales. La finalidad principal de esta iniciativa busca fomentar una mayor comprensión de conceptos relacionados, en mayor medida, con el sentido numérico, y generar actitudes positivas hacia las matemáticas, mediante un trabajo participativo y dinámico. A través de cuatro actividades motivadoras, se trasladará el aprendizaje de esta relación histórica matemático-musical y, en general, poco cultivada a los centros de educación secundaria.

3.1. Justificación de la propuesta

Las matemáticas, a menudo, son percibidas como una asignatura descontextualizada, abstracta y desmotivadora en la etapa de secundaria. Por otro lado, la música es una materia que, comúnmente, atrae al alumnado debido a su carácter emocional y personal que contribuye a despertar el interés y participación del estudiantado. Es entonces cuando surge la idea de un aprendizaje integrado, buscando en la música una vía accesible y creativa para facilitar la comprensión de los conceptos matemáticos y promover el interés y disfrute de las matemáticas. De esta manera, la propuesta nace de la iniciativa de transformar la perspectiva tradicional de ambas materias focalizándonos en una sinergia y mostrando una visión de las matemáticas más allá de la teórica, vista como expresión cultural y artística aludiendo a una mayor atracción y cercanía con el alumnado.

Esta experiencia didáctica, basada en enfoques metodológicos interdisciplinares y en un aprendizaje cooperativo y contextualizado, así como alineados con el currículo actual, pretende acercar la enseñanza de las matemáticas a la realidad e interés del alumnado, no solo con la intención de fortalecer el aprendizaje de los conceptos matemáticos, sino para trabajar la creatividad, el trabajo en equipo y el uso de herramientas digitales.

En este sentido, la propuesta incluye la utilización de herramientas digitales como Chrome Music Lab que potencian, por medio de una implementación sencilla, un aprendizaje interactivo y audiovisual. El Comité Español de Matemáticas destaca la importancia de las herramientas tecnológicas como recursos esenciales para ayudar a la profundización de la competencia matemática aprovechando su versatilidad y también para hacer frente a los retos del siglo XXI de la generación digital (Calvo Pesce et al., 2021). Estas herramientas, además de contribuir a la versatilidad metodológica, permiten avanzar en la matematización de la realidad (Calvo Pesce et al., 2021) siguiendo el enfoque de Ortiz-Laso et al. (2023). Por ello, esta propuesta apuesta por modelizar fenómenos musicales mediante herramientas matemáticas, favoreciendo una comprensión significativa de la disciplina.

Por último, cabe mencionar que el sentido numérico y, en concreto, el dominio de las fracciones representa un reto en el aprendizaje del alumnado de 1º de ESO, como se ha podido constatar tanto en observaciones prácticas en el centro de secundaria como en comentarios con otros docentes. La introducción de este nuevo conjunto de números, tras estudiar los naturales y enteros, contradice sus intuiciones y experiencias previas con lo que se debe dar significado a estos conceptos novedosos (Calvo Pesce et al., 2021). Es aquí donde la música se presenta como una herramienta útil para abordar estos desafíos. Teniendo en cuenta que el sentido espacial es el más trabajado en el área músico-matemática para la educación secundaria, nuestra propuesta resulta ser un innovador recurso para ser aplicado en el aula.

3.2. Objetivos didácticos

Los objetivos de aprendizaje que se pretenden conseguir con esta propuesta didáctica se han definido atendiendo a los niveles de la taxonomía de Bloom (Krathwohl, 2002; Wilson, 2020), así como a los niveles de demanda cognitiva establecidos por Smith y Stein (1998), con el fin de garantizar una progresión coherente en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

- Identificar las conexiones entre patrones rítmicos y conceptos matemáticos como el mínimo común múltiplo y las fracciones.

- Discriminar diferentes modos de representación de fracciones, además de en forma de decimal, razón o partes de la unidad, mediante compases rítmicos, partes de figuras musicales y conjuntos de estas.
- Practicar operaciones fraccionarias y de números naturales en los contextos musicales de la consonancia de sonidos y de compases rítmicos.
- Apreciar las aplicaciones de las fracciones y la proporcionalidad en la estructura rítmica y melódica musical.
- Juzgar la belleza de una canción musical mediante el grado de suavidad de Euler ejecutando operaciones entre fracciones y números primos.

3.3. Relación con el currículo educativo

La presente propuesta didáctica se enmarca en un alineamiento integral con el currículo educativo establecido por la LOMLOE (Ley Orgánica 3/2020) para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en Cantabria. Este currículo define los saberes básicos, las competencias específicas y los criterios de evaluación como pilares esenciales para garantizar un aprendizaje significativo e inclusivo como se indica en el Decreto 73/2022. En este apartado se justifican dichos elementos claves en el marco de esta propuesta y estos se detallan en el Anexo V y en el Anexo VI.

3.3.1. Saberes básicos

La propuesta didáctica se fundamenta en el desarrollo de los siguientes saberes básicos o sentidos matemáticos especificados en el currículo pertenecientes a la primera etapa de la ESO (Decreto 73/2022).

En primer lugar, se desarrolla el sentido numérico. Los patrones rítmicos y la composición a partir de figuras musicales están estrechamente ligados al estudio de las fracciones, sus diversas representaciones y operaciones con ellas. Además, no solo en el ámbito rítmico, en el melódico también hay relación. En este sentido, se trabaja, además, directamente con razones y proporciones y con las factorizaciones en primos para resolver problemas de consonancia musical.

En segundo lugar, el sentido algebraico también se aborda desde la búsqueda de las representaciones fraccionarias de los intervalos musicales a partir de las sucesivas particiones de la longitud de las cuerdas ya que supone un estudio de las regularidades en el comportamiento de los sonidos que emanan de las cuerdas. Por otro lado, también se trabaja con fórmulas como el grado de suavidad de Euler, del que se puede observar su generalización a partir de casos concretos.

En menor medida, el sentido estocástico tiene una ligera presencia en la propuesta ya que, a la hora de obtener las consonancias de diversas canciones reconocidas, se hace uso de medidas de localización como la media o la mediana. Por último, a lo largo de las diversas actividades, se trata de promover actitudes positivas hacia las matemáticas, utilizando la música como medio para reducir la ansiedad matemática y fomentar también el trabajo cooperativo por lo que el sentido socioafectivo será fundamental.

Por lo que se refiere a los saberes básicos de la asignatura de Música, esta propuesta didáctica contribuye a adquirir los siguientes (Decreto 73/2022). Dado que se llevará a cabo un análisis matemático de ciertas canciones modernas incluyendo el uso de recursos digitales para la visualización y descripción de las piezas musicales, se desarrollará el saber “Escucha y percepción”. También se trabajará el saber “Interpretación, improvisación y creación escénica” ya que identificaremos elementos básicos del lenguaje musical como los compases, la armadura, las figuras y las notas musicales y los intervalos simples y su representación en forma de fracción o razón. La escritura musical en pentagrama y su reproducción tanto con la voz o con el cuerpo como con herramientas digitales será fundamental en la propuesta didáctica. Por último, con la intención de aproximarnos a los intereses del alumnado, trabajaremos con canciones modernas que no solo reflejen sus gustos y personalidades, sino que permitan también analizar estructuras musicales relevantes como el ritmo y la melodía. Estas servirán como recurso motivador desarrollando el saber “Contextos y culturas”.

3.3.2. Competencias específicas y criterios de evaluación

La propuesta está alineada, a su vez, con las competencias específicas asegurando una conexión con los objetivos del perfil de salida del alumnado (Decreto 73/2022). Estas se recogen en el apartado Anexo VI, junto a los criterios de evaluación, correspondientes a las asignaturas de Matemáticas y Música.

3.3.3. Contribución al perfil de salida

Prestando atención a las competencias específicas que se trabajan en la propuesta tanto de la asignatura de Matemáticas como de Música, es posible detallar la manera en la que la propuesta contribuye al desarrollo del perfil de salida del alumnado fomentando un aprendizaje competencial. En la sección Anexo VII, se puntualizan los descriptores operativos desempeñados asociados a las competencias clave y su distribución en la propuesta.

3.4. Diseño de la propuesta: actividades y metodología

La propuesta didáctica se plantea como una experiencia interdisciplinar entre las materias de matemáticas y música para el alumnado de 1º de ESO, centrada en el desarrollo competencial por medio de metodologías activas. El diseño parte del convencimiento de que la música, lejos de trivializarse, puede ser un vehículo valioso para el aprendizaje profundo y motivador de conceptos matemáticos como el mínimo común múltiplo, las fracciones, los números primos o la proporcionalidad. Así, pretendemos contribuir a incrementar el interés por las matemáticas de la ESO que se sitúa como una de las materias más detestadas. ¿Es posible transmitir el lenguaje musical como una forma bella de operar con fracciones y así conectar con el adolescente desde lo emocional y lo estético?

La secuencia de actividades se estructurará en 3 sesiones de la siguiente forma. Cada actividad comenzará con una fase introductoria cuyo fin es el de activar los conocimientos previos y generar interés por la temática. Además, a lo largo de la propuesta trabajarán en todo momento en grupos cooperativos de 3 o 4 personas, que favorecerá una construcción del aprendizaje conjunta. En la primera sesión se trabajará con las figuras musicales y los ritmos a través de las dos primeras actividades (1 y 2). En la segunda y tercera sesiones, nos adentraremos en la parte más melódica de la música trabajando los conceptos de la consonancia y la disonancia en las dos últimas actividades (3 y 4). La estructura de la propuesta sigue una disposición creciente en complejidad y contextualización. Cabe señalar que, en cierta forma, la primera actividad de cada una de las partes actúa como una introducción más sencilla para activar la participación y contextualizar los contenidos facilitando la transición hacia la segunda actividad en la que se trabajan los conceptos con mayor profundidad. A cada grupo se le entregará como material una guía de la actividad con las instrucciones a seguir en el desarrollo de las actividades. Los recursos se muestran en los apartados Anexo I, Anexo II y Anexo III.

A lo largo de todas las actividades se introducirá el recurso complementario Chrome Music Lab. Esta herramienta consiste en una aplicación web con diversos apartados. Los que serán útiles en la propuesta son: “Rhythm”, “Strings” y “Shared Piano”, que serán descritos en cada actividad en las siguientes líneas. Con el objetivo de reforzar la accesibilidad, este recurso permitirá que el alumnado sin acceso a instrumentos musicales pueda explorar los conceptos trabajados en la propuesta, democratizando, así, el acceso a experiencias musicales activas y generando una propuesta más inclusiva.

Por lo que se refiere a la primera sesión, se diferencian dos actividades. Ambas seguirán una metodología cinestésica, ya que combinaremos estímulos visuales, auditivos y corporales, y también manipulativa a través de ritmos corporales y de tarjetas que deben ser agrupadas. El aprendizaje cinestésico se centra en el movimiento, la experiencia física y la manipulación de objetos para interiorizar el conocimiento aprendido de forma activa. Desde luego, el aprendizaje cooperativo, constructivista y por descubrimiento se priorizará en el desarrollo de la sesión. Por último, se aplicará una metodología de gamificación dado que la sesión finalizará con un juego de agrupamientos.

La primera actividad pretende retomar y profundizar en el concepto de mínimo común múltiplo, observando su aplicación en el contexto musical. Tras introducir el compás musical, mediante unos ejercicios rítmicos y dividiendo la clase en tres grupos, se visualizarán los tiempos en los que coinciden los compases de *3 por 4* y de *4 por 4.* El primer grupo se encargará de seguir el primer ritmo dando palmadas cada tres tiempos, el segundo grupo seguirá el segundo tiempo dando chasquidos cada cuatro tiempos y el tercer grupo se encargará de contar los tiempos en los que coinciden palmadas y chasquidos, empezando a contar en el 0 –véase un esquema en la sección Anexo I–. Seguidamente, se mostrará que su solución coincide con el cálculo del mínimo común múltiplo de 3 y de 4 –y sus múltiplos sucesivos–, obteniendo un método fácil y general para obtener la sincronización de compases musicales en casos más complejos de realizar corporalmente, comprobando su validez, con el alumnado, en ritmos de *2 por 4* y *5 por 4,* por ejemplo. De esta actividad puede surgir también trabajar con la sincronización de compases con distinto denominador. En este caso, al igual que en la operación de suma de fracciones, se compararán los compases reduciendo a común denominador primero para después realizar el mismo procedimiento que en el caso de denominador común. Este aprendizaje es muy útil a la hora de interpretar obras pianísticas ya que en ocasiones es necesario sincronizar con ambas manos un cinquillo (5 figuras) y un tresillo (3 figuras) en un mismo tiempo. A través de esta actividad, se pretende alcanzar una profunda comprensión del mínimo común múltiplo con la ayuda del carácter audiovisual, cinestésico y "sinestésico" de la música – combinar la percepción por varios sentidos corporales – para incrementar el orden en la taxonomía de Bloom (Krathwohl, 2002; Wilson, 2020) que, en ocasiones, en el aula ordinaria queda reducido a un orden memorístico o mecánico. Por otro lado, el profesorado podrá utilizar el recurso Chrome Music Lab, en el apartado de "Rhythm", para ejemplificar la sincronización de compases en casos como, por ejemplo, en el que la dinámica en el aula se complique. En suma, esta actividad, con su carácter auditivo y corporal, actúa como elemento de activación y motivación por el aspecto interpretativo y contextualizador de los contenidos que se irán abordando.

La segunda actividad, una de las centrales, consiste en un juego de fracciones y ritmos. Mediante una dinámica de gamificación, el alumnado por grupos cooperativos deberá relacionar y agrupar tarjetas que contienen operaciones encadenadas con fracciones, conjuntos de figuras musicales, compases y partes de la redonda de manera gráfica –véase Anexo I, Anexo II y Anexo III–. La actividad comenzará con un breve repaso por los tipos de figuras musicales (redonda, blanca, negra…) y sus equivalencias para, a continuación, representar dichos paralelismos de manera numérica con el uso de fracciones. Así, se les indicará que pueden representar la redonda con un 1, la blanca con un ½ por ser la mitad, y así sucesivamente. También se recordará el concepto del puntillo –que aumenta la duración de una figura en la mitad de su valor original– y se mostrará su representación fraccionaria. Se fomentarán preguntas previas mediante un cuestionamiento guiado para que interioricen el concepto, como ¿cuántas semicorcheas caben en una corchea? o ¿cuántas corcheas caben en una semicorchea? Con estas preguntas, avanzan en la comprensión de la fracción como una relación, lo que servirá como paso intermedio para las siguientes actividades en las que estudiaremos los conceptos de razón y proporción. Después de realizar un ejemplo de cálculo del compás mediante operaciones con fracciones para un pentagrama concreto, daremos paso al juego. Con esta actividad se pretende que el alumnado relacione las distintas representaciones de las fracciones más allá de las tradicionales: decimal y partes de la unidad. Transmitiendo la idea de que existen distintas representaciones de una misma idea: simbólicas, gráficas, verbales y manipulativas, se consigue trabajar no solo con conexiones intra-matemáticas en el sentido representacional alterno, sino también con conexiones extra-matemáticas: compases y figuras musicales en un pentagrama. Esta dinámica lúdica y manipulativa favorece la comprensión visual de las fracciones y resulta más interactivo, ideal para alumnado cinestésico, adaptándose a diversos estilos de aprendizaje. Además, es ágil y rápido de implementar en el aula y facilita el aprendizaje cooperativo. Este no solo se asegurará a la hora de resolver las agrupaciones de tarjetas lo más rápido posible en equipos heterogéneos, sino que se potenciará la interdependencia positiva entre equipos, con lo que se incluirá una tarjeta de otro equipo entre las tarjetas asignadas a cada equipo para que también deba existir una comunicación respetuosa con el resto de los grupos promoviendo un clima de ayuda mutua en el aula y no solo competitivo.

La segunda sesión consistirá en desarrollar la tercera actividad. Como continuidad de la propuesta, profundizamos en la relación matemático-musical y nos trasladamos del ritmo a la melodía, abordando el concepto de la consonancia y sirviendo de puente para la última actividad, central de esta segunda parte de la propuesta. Comenzaremos con una explicación más teórica sobre la posibilidad de "medir matemáticamente" la belleza sonora, siguiendo una metodología de aprendizaje por descubrimiento. Se explicará cómo Pitágoras descubrió la correlación entre longitudes de cuerdas e intervalos melódicos introduciendo los conceptos de razón y proporción de longitudes, contextualizando, así, el problema a través de una parte histórica fundamental y motivadora, dando a conocer también figuras históricas esenciales. Fomentando en todo momento un cuestionamiento guiado y un modelo cinestésico, el alumnado explorará las razones matemáticas existentes entre intervalos musicales simples utilizando un monocordio digital en la herramienta Chrome Music Lab con el apartado de "Strings". Por medio de un afinador online, el alumnado podrá identificar los sonidos que emanan de cada cuerda y observando las relaciones entre sus longitudes, encontrar la representación fraccionaria de los intervalos simples, según el sistema de Justa Entonación o el Pitagórico. Algunas de las razones podrán obtenerse por medio de productos y cocientes de fracciones teniendo en cuenta que la suma o resta de dos intervalos siempre da como resultado otro intervalo simple o compuesto.

La tercera y última sesión finalizará la propuesta yendo un paso más allá de la actividad anterior. La actividad cuarta invitará al alumnado a descubrir que la belleza sonora puede tener una base matemática, introduciendo en primer lugar el concepto de grado de suavidad de Euler. Esta herramienta permite estimar la "sencillez melódica" en una pieza musical valorando aquellos intervalos más sencillos o cuyas representaciones fraccionarias contienen números menores, como más consonantes o agradables a los oídos ("Teorema" de Tyndall). Comenzarán obteniendo los grados de suavidad para cada uno de los intervalos musicales que en la actividad previa se construyeron, trabajando con diversos conceptos como el mínimo común múltiplo, las potencias, las operaciones combinadas de números naturales, los números primos y las fracciones irreducibles. Tras calcular los grados de suavidad, se fomentarán reflexiones grupales sobre si los grados inferiores se corresponden de manera exitosa con los intervalos más agradables al oído utilizando el recurso de Chrome Music Lab con “Shared Piano”, comprobando, así, la validez de sus soluciones. Finalmente, se planteará un reto reflexivo: el alumnado deberá posicionarse en torno a una pregunta aparentemente subjetiva: ¿cuál de estas dos canciones es más “bella”? El profesorado mostrará dos canciones en el recurso de YouTube y a partir de aquí, divididos en dos equipos, cada uno apoyará una canción y obtendrá el grado de suavidad medio de cada canción para descubrir cuál de las dos resulta ser más “bella”. El profesorado simplificará el ejercicio reduciendo la canción a un pentagrama clave, como el estribillo o la frase más reconocible, y podrá interpretar esta parte de la pieza en el recurso “Shared Piano” de Chrome Music Lab. También el alumnado podrá tararear o cantar dicha estrofa. Tras la identificación de los intervalos simples que aparecen en el pentagrama con sus respectivas fracciones y grados de suavidad, calcularán la media y la mediana de las suavidades de todos los intervalos, trabajando así el concepto de medida de localización. El equipo que obtenga el menor grado de consonancia habrá defendido la canción más “bonita” según las matemáticas. Las canciones que se han seleccionado para la propuesta son “Quevedo: Bzrp Music Sessions, Vol.52” de Quevedo y Bizarrap del año 2022 y “Despechá” de Rosalía del año 2022. También se añaden “Potra Salvaje” de Isabel Aaiún, del año 2024 y “Shakira: Bzrp Music Sessions, Vol.53” de Shakira y Bizarrap del año 2024, para que el profesorado pueda escoger la pareja de canciones de entre estas cuatro dependiendo del contexto de su propio alumnado. Las cuatro canciones son reconocibles y escuchadas por el alumnado de 1º de ESO con lo que podemos asegurar la motivación e interés por la actividad ya que se sentirán más involucrados a la hora de posicionarse por una u otra canción.

En conclusión, al trabajar desde una perspectiva interdisciplinar se consigue profundizar en los contenidos matemáticos y musicales mediante un contexto significativo, como es el musical, que favorece un enriquecimiento mutuo entre ambas materias. En esta propuesta conseguimos satisfacer las distintas dimensiones del aprendizaje, mediante una integración de contenidos y promoviendo un trabajo colaborativo como eje metodológico central, además del cinestésico y constructivista. Más allá del dominio técnico de los contenidos matemático-musicales, perseguimos un objetivo más ambicioso: acercar las matemáticas al alumnado desde un enfoque competencial, contextualizado y creativo, derribando esa línea que separa a quienes se sienten cómodos y quienes no con las matemáticas. La propuesta pretende contribuir a que el alumnado descubra que las matemáticas son también útiles en otras disciplinas y aplicables en su vida cotidiana, transfiriendo y reinterpretando los saberes matemáticos a través del lenguaje musical y viceversa.

3.5. Atención a la diversidad

Musimáticas está diseñada desde un enfoque inclusivo y flexible, de acuerdo con los principios de calidad y equidad educativa establecidos en la LOMLOE (Ley Orgánica 3/2020). El proyecto permite, por lo tanto, atender a la diversidad del alumnado desde el punto de vista de las capacidades, ritmos de aprendizaje, contextos culturales y personales o intereses.

En primer lugar, las actividades en las que planteamos la gamificación de agrupamiento de tarjetas, el análisis de las canciones, la creación de ritmos y pentagramas musicales, así como las herramientas digitales de Chrome Music Lab se caracterizan por su carácter manipulativo, audiovisual y cooperativo. Esto favorece el acceso a los contenidos por parte de todo el alumnado, especialmente de aquel con barreras para el aprendizaje y la participación tradicionales o del alumnado cinestésico, como se comentó en el apartado anterior (3.4). Las fichas y materiales que se les otorgará al alumnado contendrán los resúmenes de las explicaciones teóricas y aspectos necesarios para llevar a cabo todas las actividades, además de incluir recuadros para ordenar con claridad sus respuestas. El juego permite flexibilidad reduciendo el número de tarjetas involucradas para reducir el tiempo y dificultad de la actividad en la medida de lo necesario.

Además, las actividades de estudio de consonancia consisten en trabajar con un monocordio digital (Chrome Music Lab). De esta manera, permitimos al alumnado con pocas posibilidades de adquirir los materiales para la construcción del monocordio o de instrumentos musicales, estudiar las mismas ideas y conceptos que se pueden extraer de un monocordio físico con facilidad. Al fin y al cabo, la propuesta didáctica emplea recursos digitales interactivos, esquemas de apoyo visual en las fichas de trabajo y el uso del ritmo corporal o vocal que permiten al alumnado experimentar con los conceptos matemáticos y musicales en un contexto práctico y accesible.

Por otro lado, visualizamos diversos niveles de andamiaje y enfoques metodológicos para adaptar la complejidad cognitiva de las actividades. El análisis de la consonancia puede realizarse de manera más sencilla, comparando sonidos agradables y desagradables, y de forma más avanzada, calculando las razones e interpretando el Grado de Suavidad de Euler. También, se pueden incorporar pistas adicionales para quienes lo necesiten en la actividad de gamificación o en el análisis de la consonancia. Por ejemplo, en la actividad 2, en lugar de realizar preguntas como ¿cuántas corcheas caben en una semicorchea? se puede comenzar con preguntas como ¿qué parte de corchea cabe en una semicorchea? De esta forma, se otorgan pistas al alumnado sobre si la respuesta es un número entero o fraccionario para, a continuación, transmitir la idea de que las fracciones también tienen entidad de número, interiorizando el concepto en profundidad. Para el alumnado con NEAE se prevén apoyos visuales reforzados, con un mayor uso de representaciones gráficas frente al cálculo simbólico. Al mismo tiempo, el alumnado con altas capacidades puede profundizar en conexiones matemático-musicales más complejas, como la comparación de la consonancia entre los distintos sistemas de entonación de Justa Entonación y el Sistema Pitagórico o la introducción, en las últimas dos actividades, del sistema del clave bien temperado trabajando con potencias y raíces de dos.

Asimismo, se fomentan los procesos de autonomía y autorregulación mediante el trabajo en un equipo heterogéneo, con la posibilidad de valorar las distintas aportaciones individuales. Se fomentará, en este sentido, la flexibilidad en la asignación de roles dentro de los equipos, de modo que cada estudiante pueda participar desde sus fortalezas. Por ejemplo, quien tenga mayor soltura en el cálculo puede encargarse de las operaciones mientras que quien destaque en lo musical puede encargarse de los ritmos e interpretaciones, asegurando que todos/as comprendan en detalle todas las partes de la actividad. Finalmente, las dinámicas cooperativas fomentan la inclusión y la cohesión grupal y permiten que cada estudiante encuentre un espacio desde el que aportar y aprender.

3.6. Temporalización y desarrollo en el aula

Musimáticas se desarrollará a lo largo de tres sesiones consecutivas, aunque esta temporalización puede variar dependiendo del ritmo del grupo y de los tiempos disponibles en la programación docente. Si bien está pensada para ser implementada principalmente en el marco de la asignatura de Matemáticas, se plantea desde un enfoque coordinado de codocencia con el profesorado de Música. Con esta secuencia de sesiones se explorará la conexión entre ambas disciplinas mediante una metodología activa, motivadora y cooperativa, donde el alumnado trabajará habilidades sociales como la autonomía, el liderazgo compartido, la toma de decisiones común, la comunicación asertiva y el respeto entre grupo de iguales, para alcanzar un objetivo común en cada actividad.

La estructura temporal de las sesiones será de una primera sesión para llevar a cabo las actividades rítmicas 1 y 2, una segunda sesión para introducir la consonancia con la actividad 3 y la tercera y última sesión en la que se trabajará la cuarta actividad sobre medidas estéticas.

Dado que será primordial el trabajo cooperativo, el aula se organizará en grupos de 3 o 4 personas, lo que facilita la cercanía física, el contacto visual y la interacción verbal entre los miembros del equipo. Esta disposición espacial favorece la construcción de un sentido de responsabilidad compartida y, además de reforzar el sentido de grupo, facilita la toma de decisiones y la planificación conjunta. Cada grupo tendrá un ordenador o tableta, destinado al uso de Chrome Music Lab y del afinador digital, y una ficha de trabajo (Anexo II) por lo que será fundamental tener claro el reparto de roles para garantizar que todos los miembros estén involucrados en todo el proceso y que no se divida el trabajo de forma fragmentada. También, cada grupo dispondrá de un paquete de tarjetas, esenciales para la segunda actividad lúdica (Anexo III). Si el aula dispone de recursos audiovisuales, como una pantalla digital, se recomienda su uso para proyectar ejemplos musicales, interpretar los ritmos y melodías, reproducir las canciones y guiar al alumnado a través de las actividades. El profesorado ejerce una labor de guía y mediación, supervisando los procesos y resolviendo dudas, pero también otorgando autonomía al alumnado. Su intervención se concentrará especialmente en los momentos iniciales a cada actividad, para activar los conocimientos previos y transmitir los nuevos mediante las explicaciones breves de carácter teórico, contextualizando la propuesta.

3.7. Recursos materiales

Para el desarrollo de la propuesta didáctica se han empleado diversos recursos materiales, tanto físicos como digitales, diseñados fundamentalmente para favorecer un aprendizaje activo, visual, manipulativo e inclusivo.

Entre los recursos físicos se incluyen las tarjetas manipulativas con fracciones, figuras musicales, compases y representaciones gráficas empleadas en la actividad 2 de emparejamiento. Se muestran las tarjetas en el Anexo III. Además, se han preparado unas fichas de trabajo con espacios para registrar sus cálculos y observaciones durante las actividades. Asimismo, se adjunta una guía de actividad para el profesorado que estructura las tareas, pasos y resultados esperados por el alumnado. Remitimos a las secciones Anexo I y Anexo II.

Por lo que se refiere al recurso digital, emplearemos la plataforma interactiva Chrome Music Lab, que permitirá explorar en profundidad los conceptos musicales relacionados con las actividades 1, 3 y 4. En concreto, se utilizarán las herramientas de “Shared Piano”, “Rhythm” y “Strings”, además de un afinador online. Se considera fundamental para el desarrollo de la actividad 3 que cada equipo cuente con un dispositivo digital (ordenador o tableta).

4. Experiencia didáctica

En este capítulo se recoge el desarrollo de la puesta en práctica de una parte de *Musimáticas* en un contexto educativo real. Creemos que conectar la fundamentación teórica con la práctica docente es una tarea esencial. Describiremos el contexto social del centro educativo, el desarrollo de la implementación y las observaciones recogidas en el proceso. Esto nos permitirá valorar la viabilidad y el impacto de nuestra propuesta.

4.1. Contexto socioeducativo del centro y características del grupo

La experiencia se ha llevado a cabo en el IES Torres Quevedo, ubicado en el barrio de Cazoña, en Santander, Cantabria, durante el periodo de prácticas del Máster de la autora. Es un centro público que ofrece enseñanzas de ESO (ordinario, bilingüe inglés y trilingüe inglés – francés) y Bachillerato –con modalidades de Ciencias y Tecnología, Música y Artes Escénicas, Humanidades y Ciencias Sociales, General y Artes Plásticas, Imagen y Diseño–. Con esta información, podemos apreciar que el centro educativo apuesta por una educación musical significativa, es decir, no comprende la disciplina musical como una materia secundaria.

El centro está situado en un entorno urbano con niveles socioeconómicos y culturales muy variados, lo que implica un alumnado muy heterogéneo. Esta diversidad no solo se manifiesta en los niveles de competencia académica sino también en los estilos y expectativas de su aprendizaje.

En cuanto al grupo participante, la propuesta se ha implementado en un curso de 1º de ESO, compuesto por 19 estudiantes. La diversidad del centro ha estado patente en el propio grupo con dos alumnos y una alumna con NEAE por: condiciones personales vinculadas al desarrollo, de ITSE y por dificultades de lectoescritura, respectivamente. En este sentido, consideramos que poner en práctica *Musimáticas* en un centro y grupo tan diversos puede enriquecer enormemente la propuesta didáctica. Además, el comportamiento general del grupo es adecuado, lo que facilita la tarea del docente.

4.2. Impacto esperado en el aprendizaje del alumnado

La propuesta *Musimáticas* está diseñada para generar un impacto positivo en el alumnado tanto desde un ámbito cognitivo como afectivo. Así, se espera que esta experiencia favorezca una mejora en la comprensión de conceptos matemáticos relacionados con el sentido numérico, especialmente. Estos son contenidos que generaron dificultades en la segunda evaluación de 1º de ESO, con lo que se considera que su tratamiento desde este enfoque manipulativo y audiovisual puede resultar beneficioso.

El IES Torres Quevedo es un centro que cuenta con una trayectoria consolidada en el uso de metodologías activas, como el programa Telekino Lab, y apuesta, según la filosofía del centro, por proyectos de innovación educativa que puedan responder a la diversidad de aprendizajes. En este sentido, el instituto es un contexto favorable para integrar la propuesta y se espera que el alumnado esté familiarizado con este tipo de dinámicas de aula.

Asimismo, el carácter flexible y manipulativo de *Musimáticas* puede contribuir a atender a la diversidad del grupo, permitiendo distintos ritmos de aprendizaje. En el plano afectivo, partimos de una observación clara: el grupo, en general, muestra interés por la música mientras que manifiesta una baja motivación hacia las matemáticas. Esta situación se convierte en una oportunidad pedagógica orientada a vincular el aprendizaje matemático con la práctica musical emocional, mejorando la actitud hacia las matemáticas.

4.3. Desarrollo de la experiencia

El centro educativo nos concedió una sesión de tutoría con el grupo de 1º de ESO, en el mes de abril, para implementar parte de *Musimáticas*. Esta oportunidad permitió valorar parcialmente la propuesta, por lo que expresamos una sincera gratitud al instituto. No obstante, cabe mencionar que la limitación temporal condiciona, innegablemente, el alcance de la intervención dado que solo se pudo poner en práctica la primera sesión de las tres propuestas, correspondiente a la primera parte de *Musimáticas* rítmica.

Durante esta sesión, el alumnado participó en las dos primeras actividades de la propuesta: en la primera exploran rítmicamente el mínimo común múltiplo y en la segunda realizan un emparejamiento de tarjetas manipulativo relacionando fracciones, compases, figuras musicales y representaciones gráficas de forma lúdica. La dinámica se llevó a cabo en grupos cooperativos en la segunda actividad: un grupo de 3 personas y el resto de 4, mientras que en la primera se dividió la clase en 3 equipos. Los grupos reducidos estaban previamente organizados por la tutora dado que en las materias usualmente realizan un proyecto por trimestre, en los que suelen trabajan cooperativamente. Como usualmente la disposición del aula está orientada hacia la pizarra en parejas, se dedicaron los primeros minutos de la sesión a distribuir las mesas en los grupos mencionados, asegurando que pudieran disponer de suficiente espacio para desarrollar el emparejamiento de tarjetas colaborativamente. De esta forma, se pretendía favorecer la interacción visual y verbal entre los integrantes. La sesión de 55 minutos se desarrolló un martes a tercera hora, justo antes del recreo por lo que, aunque no estaban cansados del todo, sí comenzaron a mostrar ciertos signos de dispersión.

En primer lugar, comenzamos a preguntar al alumnado si conocían alguna relación entre la música y las matemáticas. La mayoría manifestó sorpresa ante la pregunta. Un alumno indicó que le sonaba que había una relación entre la secuencia de figuras musicales (redonda, blanca, negra…) y la división por dos en el tiempo de duración de cada una. Aprovechamos esta idea que afirmaron un par de alumnos más para retomarla, repasando los conceptos que habían introducido con más lentitud asegurando que todo el alumnado lo comprendía. Por ello, se decidió flexibilizar la primera sesión y comenzar con el juego de emparejamiento, conectando así con sus conocimientos previos de la asignatura de Música.

Así, tras entregarles las fichas de trabajo (Anexo II), se les explicó cómo podíamos asociar las figuras musicales y sus silencios con distintas fracciones, siguiendo la idea que habían comentado sobre la secuencia. Además, recordamos el concepto de puntillo y se les pidió que mostraran cómo se escribirían las fracciones para estos casos, dependiendo de la figura que llevara el puntillo. Nos sorprendió lo rápido que siguieron las explicaciones y lo mucho que recordaban de la asignatura de Música. Seguidamente, realizamos un ejemplo concreto en un compás de *2 por 4,* como aparece en las fichas de trabajo.

A continuación, se les entregó las tarjetas y de lo primero de lo que se percataron fue de los colores mezclados con otros grupos, con lo que rápidamente todos/as se comunicaron para recolocarlos adecuadamente. Aunque el número de tarjetas preparadas era de 36, decidimos incluirles 18 de ellas para que tuvieran tiempo suficiente.

Mientras lo iban resolviendo, nos dedicamos a resolver dudas en todos los grupos, pasando por toda el aula y observando cómo trabajaban. Además, se trató de fomentar que todo el grupo participara activamente. En un inicio ellos/as mismos se repartieron unos roles determinados: quién se encargaba de las operaciones, quién de las representaciones o quién de las figuras musicales, dependiendo de sus fortalezas individuales. Aun así, tratamos de animarlos a realizar cambios de roles.

Tras haber transcurrido algo más de media sesión, dimos por finalizado el juego, en el que todos los grupos salvo uno habían conseguido resolverlo. Así que, por último, dedicamos el resto de la sesión a la actividad 1 trabajando el mínimo común múltiplo. Para ello, reagrupamos los 5 equipos iniciales en 3 y se decidió que los grupos en los que participaba el alumnado con NEAE, que trabaja mejor en entornos cinestésicos, fueran los que se encargaran de dar palmadas y chasquidos, lo que les permitió mantenerse más implicados y participativos. Como docente, la autora tomó el papel de "directora musical" para organizar los ritmos de compás y también a ayudar al equipo que se responsabilizaba de contar los tiempos. El alumnado se motivó e ilusionó con este tipo de actividad ya que no están acostumbrados a tareas corporales y audiovisuales en la asignatura de matemáticas. Lo que más costó fue coordinar a los grupos ya que las palmadas y chasquidos sonaban con mucha desorganización. Tras tres o cuatro tiempos, las palmadas se mezclaban con los chasquidos y resultaba imposible ordenar los sonidos para llegar al tiempo 12. Por ello, se decidió incluir el ritmo dado por el recurso Chrome Music Lab como ayuda de fondo para que el alumnado siguiera a cada uno de los músicos de la pantalla con los chasquidos y palmadas. Así, conseguimos ir ordenando los sonidos hasta que detectamos que coincidían en el tiempo 12.

Rápidamente, supieron que coincidía con el mínimo común múltiplo porque es un cálculo algorítmico que tienen interiorizado, con lo que les sorprendió ver que esta forma de calcular el mínimo común múltiplo tan tangible era tan útil, a su vez. En cuanto a los múltiplos de 12, empleamos el ChromeMusicLab para que pudieran comprobar la coincidencia de ritmos en todos ellos.

Para asegurar la participación de todo el alumnado se emplearon algunas medidas determinadas en el transcurso de la actividad. Primero, se situó al ANEAE en un lugar de trabajo cercano a la docente, para facilitar la escucha y lejos de las ventanas o puertas para evitar que los estímulos externos lograran modificar su nivel de atención. Además, se trató de simplificar las instrucciones y el lenguaje, teniendo en cuenta también las peculiaridades propias del castellano del país de origen del alumno ITSE (Perú). Durante las explicaciones, empleamos las fichas de trabajo como apoyo visual con imágenes y esquemas. Asimismo, se subrayaron las palabras clave en la ficha de la alumna con NEAE para facilitar su comprensión. Nos parece fundamental valorar el error como forma de aprendizaje en todo momento y, al tratarse de una gamificación, estas actividades permiten el tiempo que necesite cada uno/a sin problema. Emplear materiales manipulativos y realizar tareas cinestésicas no solo imprime ese carácter lúdico, sino que facilita a estos alumnos con NEAE a trabajar en la materia con mayor facilidad.

4.4. Evaluación de la experiencia

La evaluación de la propuesta se basa, fundamentalmente, en la observación directa durante el desarrollo de la sesión y en la valoración personal recogida por el propio alumnado participante al finalizar la sesión de manera anónima. Esta se plantea como una evaluación de la primera parte de la propuesta, en el contexto concreto del grupo participante, y con un carácter formativo y reflexivo, que nos permite observar una tendencia en la percepción del alumnado sobre la experiencia.

En primer lugar, el nivel de participación fue considerablemente alto, en especial en la actividad 1 durante la segunda parte de la sesión, que resultó ser más dinámica y próxima a lo que el alumnado está acostumbrado en la asignatura de Música, pero no en la de Matemáticas, lo que supuso un cambio de perspectiva por parte del estudiante. Aunque también se implicaron en la actividad 2, se detectó una ligera bajada motivacional, probablemente porque esta requería una mayor concentración y esfuerzo.

La mayor parte de los errores conceptuales provino de la actividad de emparejamiento. Algunos/as no identificaban que el compás de *4 por 4*, se correspondía con la operación que tenía como resultado 1. En general, las principales dificultades estuvieron relacionadas con el olvido de los procedimientos de cálculo con fracciones tanto a la hora de obtener los compases de los pentagramas como en las tarjetas con, únicamente, operaciones, pese a haber trabajado el tema hacía apenas un par de semanas en clase. Tuvieron problemas, especialmente, con las sumas y restas de fracciones de distinto denominador y, también, en el producto y cociente de estas, con lo que hubo que recordar cómo se realizaban. Las tarjetas de representaciones gráficas con las partes de la redonda resultaron ser las más sencillas para ellos/as, aunque cometían errores de despiste por no contar bien. A la hora de combinar los compases con los pentagramas, les ayudaba interpretar junto a la docente el movimiento corporal del compás.

Además, se detectaron algunos errores de estrategia, como centrarse exclusivamente en una de las categorías de las tarjetas en lugar de comprobar el conjunto completo. Creo que esto se debe a que tienden a compartimentar los contenidos en disciplinas: por un lado, trabajan las matemáticas y por otro la música. Esto refleja que es necesario seguir trabajando en la interconexión de saberes y en una visión interdisciplinar de los conceptos.

Aunque en la actividad 1 no se detectaron tantos errores de “olvido mecánico”, dado que el cálculo del mínimo común múltiplo de 3 y 4 lo recordaban con facilidad, sí creemos que no tenían interiorizada una comprensión profunda del significado de este. En un inicio, asumieron que los ritmos iban a coincidir en el tiempo séptimo ya que 3+4=7. Consideramos que la actividad consiguió corregir este error, dado que la confusión inicial sirvió como punto de partida para aclarar el razonamiento a través de la experiencia cinestésica. Esta situación reforzó la necesidad de trabajar el sentido numérico en la etapa educativa.

A nivel metodológico, la sesión cumplió con las expectativas. El alumnado con mayores necesidades participó muy activamente. Probablemente, el empleo de estrategias cinestésicas, manipulativas y cooperativas facilitó la comprensión de los conceptos y permitió atender a la diversidad del aula.

Por lo que se refiere a la valoración personal, con ella se pretendía recoger opiniones del alumnado con respecto a aspectos cognitivos, como la comprensión de los conceptos y la utilidad de los materiales. También, sobre aspectos afectivos, como la motivación. En la figura, a continuación, recogemos los resultados obtenidos para los/as 19 alumnos/as del grupo (Figura 3).

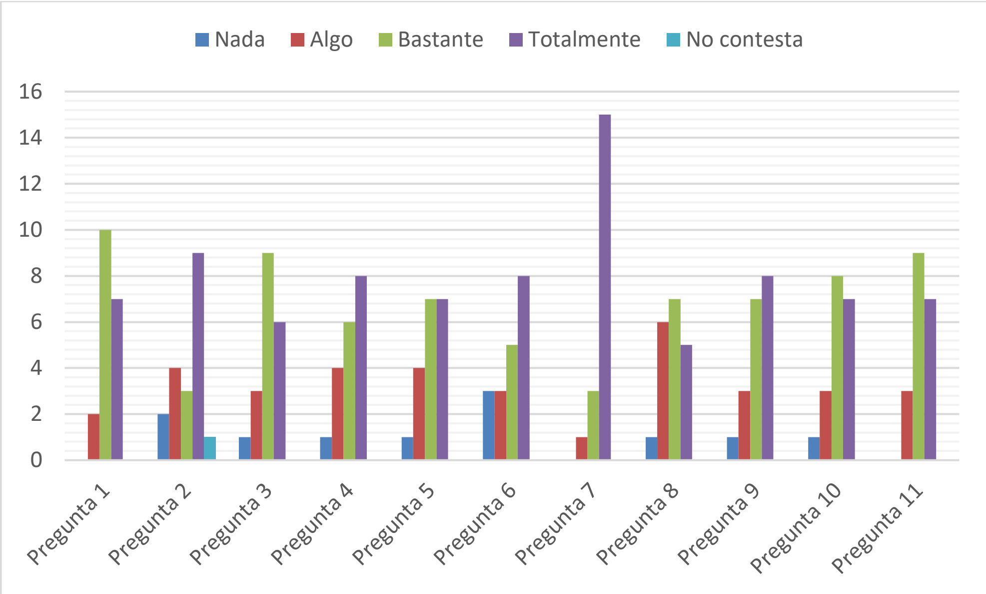


Figura 3. Resultados obtenidos mediante la valoración personal del alumnado tras la realización de la sesión. Las preguntas están definidas en Anexo IV.

La valoración refleja una percepción mayoritariamente positiva. Podemos apreciar que la mayoría del alumnado considera que los contenidos fueron claramente explicados (P1). No obstante, las respuestas menos seguras podrían explicarse por el carácter poco convencional de la actividad. A diferencia de los ejercicios mecánicos a los que están habituados en matemáticas, esta propuesta estaba diseñada para fomentar la reflexión.

Por otro lado, aunque en la resolución de dudas (P2) las respuestas fueron positivas, hubo una ligera dispersión. Desde nuestra perspectiva, al tratarse de una sesión conducida únicamente por una docente, la gran cantidad de alumnos/as dificultó una atención individualizada. En determinados momentos, tanto en la primera actividad como en la segunda, la necesidad de supervisión en varios grupos generó una carga elevada de gestión, como se comenta en la sección 4.5.

Las actividades fueron valoradas como motivadoras e interesantes por la mayoría del alumnado (P3, P5). Sin embargo, nuestras observaciones apuntan a diferencias en el grado de implicación entre la primera actividad y la segunda. Mientras que la primera (actividad 2), fue más conceptual y reflexiva por lo que supuso mayor esfuerzo en el alumnado, la segunda (actividad 1) generó una participación más activa por su carácter rítmico y atractivo. Quizás la posible incorporación de la segunda parte de la propuesta podría afectar significativamente a la percepción del alumnado en estos aspectos, ya que incluir música actual puede resultar positivo. Podemos observar una clara relación con el deseo de repetir este tipo de actividades (P9). Aunque refuerza la opinión positiva de las actividades, cabe considerar que ante propuestas metodológicas menos convencionales puede existir cierta inseguridad por parte del alumnado, al no tratarse de tareas bien conocidas como en las pruebas tradicionales.

Dos de los objetivos principales de esta propuesta eran visibilizar la conexión entre las matemáticas y la música y mejorar la relación afectiva con las primeras. En este sentido, destaca significativamente el cambio en la percepción del alumnado tras la sesión. Mientras que previo a la experiencia solo 8 de los/as 19 estudiantes consideraban que las disciplinas tenían relación (P6) –y el resto tenían ligera o ninguna idea–, después de la sesión 15 alumnos/as marcaron que la relación era “totalmente” evidente (P7) –y nadie opina que no existe relación–. Esto supone uno de los logros clave del proyecto, al contribuir a derribar la barrera disciplinaria. Consideramos que la segunda parte podría reforzar aún más esta idea, dado que los elementos que se trabajan son más desconocidos en el alumnado. Algunas de las respuestas abiertas indican claramente esta apertura de mente hacia la gran capacidad de las matemáticas para albergar conocimiento que, intuitivamente puede resultar muy dispar, y hacia una actitud más positiva hacia ellas (Figura 4).

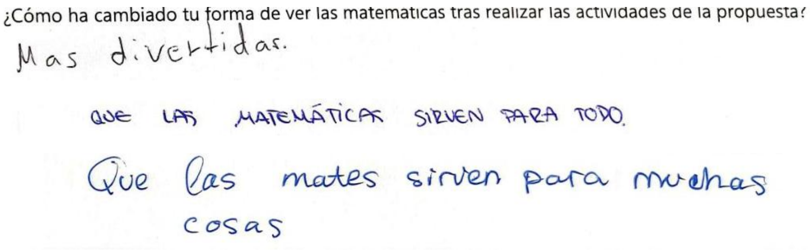


Figura 4. Respuestas del alumnado sobre su opinión de las matemáticas tras la sesión.

En relación con el uso de las fichas de guía, la utilidad fue percibida como moderadamente alta (P4). Algunos/as reconocieron que no recurrieron a ellas tanto porque habían comprendido con claridad las explicaciones dadas al inicio de la sesión, dado que nos aseguramos de que las indicaciones fueran claras teniendo en cuenta que el alumnado presenta, en general, ciertas dificultades de comprensión lectora, aun con materiales visuales. No obstante, el alumnado que sí empleó las fichas afirmó que les habían resultado útiles para recordar las equivalencias entre figuras musicales y fracciones.

El trabajo en equipo obtuvo una valoración más desigual (P8), lo que puede estar relacionado con la heterogeneidad de los grupos, organizados con anterioridad por la tutora. Algunas de las respuestas abiertas (Figura 5) muestran que ciertos estudiantes sintieron que asumían un mayor peso en las tareas matemáticas, mientras que otros se centraban en las musicales. Aunque creemos que puede ser interesante promover un reparto de las tareas según las afinidades o fortalezas de cada integrante, esto generó ciertos desequilibrios en el reparto de responsabilidades. Por ello, destacamos la importancia de una distribución rotativa de los roles, que se intentó fomentar durante la sesión, reforzando también la idea de que todos/as deben comprender el conjunto de las actividades y no solo una de las partes.

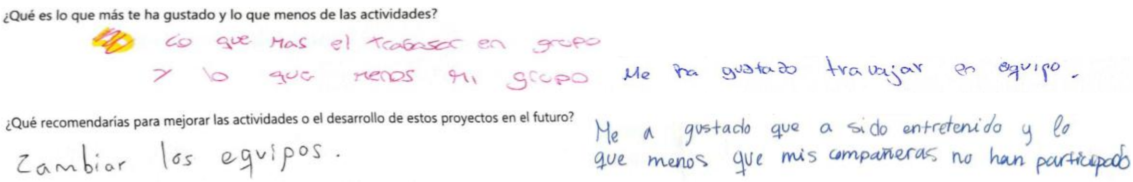
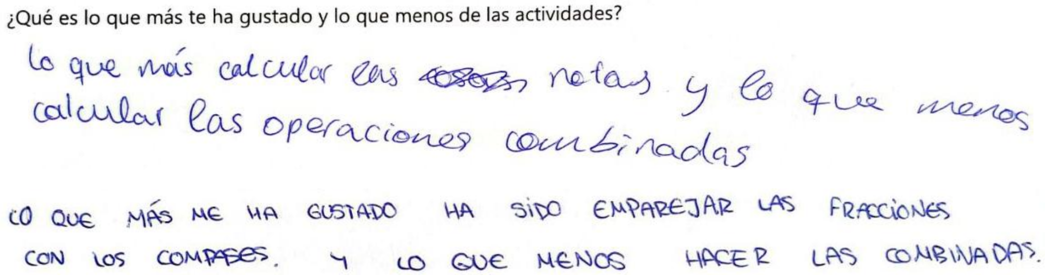


Figura 5. Respuestas abiertas del alumnado sobre el trabajo en equipo tras la sesión.

La mayoría del alumnado valoró que la propuesta les ayudó a comprender mejor los contenidos trabajados (P10), recordando, especialmente, las operaciones fraccionarias y profundizando en el concepto de mínimo común múltiplo. No obstante, con más sesiones se podría haber profundizado aún más en la asimilación de los contenidos. En cuanto a la percepción de novedad (P11), si bien muchos/as estudiantes encontraron original el enfoque de la propuesta, puede que el hecho de que el centro educativo trabaje desde metodologías activas como Telekino Lab en ciertas asignaturas provocara que no les sorprendiera tanto la innovación metodológica –aunque la relación interdisciplinar (P6, P7) sí les resultara diferente–. Sin embargo, el enfoque sí fue percibido como poco habitual dentro de la asignatura de matemáticas, en la que las clases continúan siendo mayoritariamente tradicionales. Esta ruptura permite otorgar un valor diferencial a la propuesta, acercando emocionalmente la asignatura al alumnado.

Probablemente, debido a la compartimentación de las disciplinas que se comentó anteriormente, por la que el alumnado tiende a trabajar primero con las tarjetas "matemáticas" y después con las "musicales", en sus comentarios escritos (Figura 6) manifestaron disfrutar más de los aspectos musicales que de los conceptos matemáticos, que requirieron un mayor esfuerzo cognitivo.


¿Qué es lo que más te ha gustado y lo que menos de las actividades?

lo que más calcular las notas y lo que menos calcular las operaciones combinadas

LO QUE MÁS ME HA GUSTADO HA SIDO EMPAREJAR LAS FRACCIONES CON LOS COMPASES. Y LO QUE MENOS HACER LAS COMBINADAS.

Figura 6. Respuestas abiertas del alumnado en la valoración personal sobre la actividad 2.

4.5. Dificultades en su implementación y posibles mejoras

Durante el desarrollo de las actividades, aunque se pudo observar cierto entusiasmo y sorpresa, el grado de implicación fue limitado en algunas ocasiones, quizás debido a que se trataba de una actividad que no iba a ser evaluada en sus calificaciones de la asignatura de matemáticas. Esto produjo cierto desinterés, aunque disfrutaran de las tareas.

Además, desde el punto de vista práctico, hubo ciertos problemas con la organización en la actividad 1: algunos/as perdían la cuenta de los pulsos y se desincronizaba el ritmo global, especialmente al simultanear ambos compases. También pudo influir que tuvo lugar justo antes del recreo, lo que aumentó el nerviosismo y la dispersión. Finalmente, pudimos reajustar la estrategia usando el recurso digital Chrome Music Lab, como estaba previsto, y concluir satisfactoriamente la actividad.

Desde el punto de vista docente, se identificaron algunas limitaciones en la aplicación de la propuesta. En primer lugar, la sesión fue conducida por una única persona, lo que dificultó poder atender con profundidad a todos los grupos en todo momento. Esta situación tiene rango de mejora, implementando una docencia compartida, por ejemplo, entre los/as docentes de matemáticas y música. Esto permitiría una atención más personalizada en la actividad 2 y una mejor organización en la actividad 1, de forma que cada docente se encargara de las palmadas y los chasquidos, respectivamente.

Por último, el hecho de haber podido implementar solo la primera parte de la propuesta ha condicionado el alcance de su impacto. La segunda y tercera sesiones, centradas en el análisis de la belleza matemática de canciones conocidas, podría haber potenciado aún más la dimensión emocional del aprendizaje matemático y la percepción de la utilidad de los contenidos, desplegando, así, todo el potencial de la propuesta.

5. Conclusiones y futuras líneas de trabajo

En este trabajo se ha desarrollado una intervención didáctica basada en metodologías activas, como la gamificación y el aprendizaje cooperativo y manipulativo, con el propósito de explorar el alcance pedagógico de la interconexión entre diferentes áreas de conocimiento. En concreto, se ha focalizado en el flujo de relaciones entre las matemáticas y la música desde una perspectiva histórica, epistemológica y pedagógica, con la intención de tender un puente entre dos materias tradicionalmente separadas en el contexto escolar. Para ello, se ha tenido en cuenta la evidencia histórica entre estas disciplinas, especialmente, en la tradición iniciada por los pitagóricos de modelar la música a través de las matemáticas. Sin embargo, aquí se ha planteado un giro metodológico partiendo, así, de la música como recurso para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos, especialmente entre el alumnado de secundaria que, por su contexto social y cultural, se presupone que muestra mayor cercanía y sensibilidad hacia el lenguaje musical. Este enfoque se ha alineado con el modelo STEAM, que aboga por una enseñanza interdisciplinar, contextualizada y significativa, destacando a la música como una disciplina cercana y emocionalmente significativa como afirmaban Chao Fernández et al. (2015).

Entre los contenidos abordados, el trabajo se ha centrado en aquellos que tienen en su seno el concepto de razón o proporción, concebidos en el sentido numérico que resulta ser uno de los bloques más complejos para el alumnado de la primera etapa de la ESO. Así, por ejemplo, las fracciones y muchas de sus operaciones que todo alumno/a de educación secundaria debe aprender pueden ser transmitidos a través de conceptos y, sobre todo, de experiencias basadas en la música. Particularmente, este hecho favorece metodologías menos mecánicas o “tradicionales” y permite innovar con prácticas dinámicas y de mayor integración dentro del espacio educativo. Prueba de ello son las diferentes actividades propuestas en este TFM y que han sido discutidas y analizadas a lo largo del texto. No obstante, es interesante observar que, pese a que nos hemos centrado en el sentido numérico con el trabajo de fracciones y números primos, también se puede extender el enfoque a otros temas del currículo de educación secundaria en matemáticas. Como trabajo futuro, pensamos que sería buena idea intentar elaborar una propuesta similar para otros temas que se basen en el concepto de razón, por ejemplo, en geometría con el teorema de Tales o la semejanza de triángulos. Esto muestra que existe una línea de investigación dentro de la didáctica de las matemáticas donde se puede usar la música para introducir conceptos abstractos a un alumnado más allá de las fracciones.

Desde el punto de vista del contraste entre un tipo de clase más “tradicional” y una clase marcada por metodologías activas, las conclusiones que se extraen son notablemente significativas. En primer lugar, se ha logrado una participación más integral ya que aquellos alumnos/as que habitualmente muestran un interés menor o más pasivo han estado mucho más activos en las actividades propuestas en este trabajo. Esta apreciación se encuentra en línea con las ideas transmitidas en el marco teórico (sección 2) sobre una esperada mejora de la participación de todo el alumnado (Conejo Rodríguez, 2012), incluyendo aquel que suele mostrar más dificultades en el ámbito lógico-matemático (An et al., 2013) y para el que, específicamente, las iniciativas manipulativas y cinestésicas han resultado claves, facilitando la visualización de los conceptos matemáticos como indicaban Matailo Vivar y Ramón Salcedo (2023).

En segundo lugar, pese a que, en última instancia, la clase no deja de ser una clase de matemáticas, es decir, el alumnado muestra agotamiento después de un tiempo –e incluso falta de interés en determinados momentos debido a que la implementación no fue calificada en su asignatura–, el punto de arranque y motivación inicial fue claramente mayor que en una clase magistral convencional. Este hecho tiene sentido basándonos en las manifestaciones de Conejo Rodríguez (2012) sobre el aumento del nivel de atención y observación. En esta línea, ha resultado especialmente reconfortante comprobar cómo, aunque en un grupo reducido, se ha transformado la percepción que el alumnado tenía de las matemáticas. Han podido descubrir que esta disciplina va más allá de reglas abstractas y problemas arduos, y que guarda una estrecha y significativa relación con el lenguaje de la música imprimiéndole un valor más humano y creativo. En concordancia con lo aseverado por Kelley y Knowles (2016), mientras que la mayoría del grupo no había establecido estos vínculos por sí mismos, hemos conseguido favorecer la construcción de conexiones de manera conjunta. Así, este trabajo ha demostrado que establecer estas conexiones explícitas en el aula enriquece el sentido que los estudiantes otorgan a las matemáticas, tal y como afirmaban An et al. (2013) y Diego-Mantecón et al. (2022).

En tercer lugar, llevar esta propuesta a la práctica ha sido gratificante ya que, en muchas ocasiones, lo diseñado sobre el papel puede no ser viable cuando se enfrenta a la realidad del aula. Precisamente, una de las tareas fundamentales del docente es planificar con coherencia, teniendo siempre en cuenta las particularidades y necesidades del contexto educativo en el que se va a intervenir. La teoría, por tanto, contrasta con la práctica, especialmente por las dificultades que entraña la implementación de este tipo de actividades. En este sentido, los resultados han evidenciado que un solo docente no puede atender de forma eficaz todas las demandas del alumnado que surgen en el transcurso de la sesión. Esta limitación, si no se gestiona adecuadamente, puede acentuar la pérdida de interés por parte del alumnado que se bloquea en algún momento de la actividad, dificultando su implicación en el desarrollo de la propuesta.

Al mismo tiempo, la cuarta y última conclusión radica en los retos que plantea el trabajo en grupo, especialmente cuando hay un reparto de roles. Tal y como señalaba Conejo Rodríguez (2012) en nuestro marco teórico (sección 2), hemos podido observar que se trata de una competencia fundamental y que requiere ser guiada adecuadamente en el aula. No poder resolver con éxito los conflictos que surgen en los grupos, tanto porque el reparto no se ajusta a las preferencias o capacidades del alumnado como porque este no sea equitativo y genere una sensación de frustración en los/as compañeros/as, provoca un crecimiento de la desconcentración y, con ello, una pérdida del objetivo pedagógico de la propuesta. Estos resultados invitan a reflexionar sobre la necesidad de formación específica en gestión de dinámicas cooperativas para que el profesorado disponga de medios para intervenir, así como sobre la pertinencia de incorporar codocencia en propuestas interdisciplinares de tal complejidad. Por lo tanto, de nuevo, la implementación es mucho más costosa que la de una clase “tradicional” o convencional.

A título personal, este trabajo ha ayudado a la autora a profundizar en el bonito desarrollo matemático asociado a la música, donde pese a contar con formación en ambas materias, nunca lo había visto con tanto detalle. De esta ampliación de conocimientos por parte de la autora se valora, sobre todo, el punto de la creatividad y originalidad apreciada en todo el modelaje matemático que rodea la teoría numérica musical. Existe un consenso generalizado en el que cada vez es más importante apostar por una educación basada en la creatividad, la originalidad y en el denominado "pensamiento lateral" para un presente y futuro donde el acceso al conocimiento es cada vez más asequible –y a la vez tan dificultoso de disgregar–. Así, la autora reivindica aquí el papel de la creatividad como competencia clave para el siglo XXI y de las matemáticas como herramienta privilegiada para fomentarla en la mejora de la educación integral. Por tanto, la simbiosis músico-matemática y, en concreto, la propuesta *Musimáticas* aquí diseñada pueden servir para favorecer el interés por el conocimiento, aportando una perspectiva más humana, estética y emocional hacia el aprendizaje de las matemáticas, particularmente a nivel intuitivo que, sin lugar a duda, es punto de partida para aquellos/as que aprenden algo nuevo.

6. Referencias

Abah, J., Chinaka, T. W. y Ogbiji, E. O. (2024). Effect of Kinesthesic Learning on Students' Interest and Achievement in Mathematics. *Mathematics Education Journal, 8*(2), 120-136.

An, S., Capraro, M. M. y Tillman, D. A. (2013). Elementary Teachers Integrate Music Activities into Regular Mathematics Lessons: Effects on Students' Mathematical Abilities. *Journal for Learning Through the Arts, 9*(1), 1–19.

Arbonés, J. y Milrud, P. (2010). *La armonía es numérica: música y matemáticas.* RBA Coleccionables.

Blum, W y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Beato Sirvent, J. (2003). Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* (44), 39-44.

Bustos, M. A. (2007). Un itinerario reflexivo, semántico y didáctico, sobre interdisciplinariedad en Educación Musical: dos informes de investigación. *Em Pauta, 18*(30), 39-56.

Calvo Pesce, C., Carillo de Albornoz Torres, A., de la Fuente Pérez, A., de León Rodríguez, M., González López, M. J., Gordaliza Ramos, A., Guevara Casanova, I., Lázaro del Pozo, C., Monzó del Olmo, O., Moreno Verdejo, A.J., Rodríguez Muñiz, L. J., Rodríguez Taboada, J. y Serradó Bayés, A. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria.* Comité Español de

Matemáticas (CEMat). https://hdl.handle.net/10481/101997

Casals Ibáñez, A., Carrillo Aguilera, C. y González-Martín, C. (2014). La música también cuenta: Combinando matemáticas y música en el aula [Music also matters: Combining math and music in the classroom]. *Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, 34*, 1-17.

Chao Fernández, R., Mato Vázquez, M.D., y López Chao, A. M. (2015). ¿Se trabajan de forma interdisciplinar música y matemáticas en educación infantil? *Educação e Pesquisa, 41*(4), 1009-1022.

Colegio Menéndez Pelayo. (s.f.). *Música y matemáticas: Una combinación perfecta* [Archivo PDF]. https://www.steamteach.unican.es/matematicas-y-musica-una-combinacion-perfecta/

Colucci-Gray, L., Burnard, P., Gray, D. y Cooke, C. (2019). A Critical Review of STEAM. *Oxford Research Encyclopedia of Education.*

Conde Solano, L. A., Figueras Mourut de Montpellier, O., Pluvinage, F. C. B. y Liern Carrión, V. (2011). El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza. *Suma,* (68), 109-116.

Conejo Rodríguez, P. A. (2012). El valor formativo de la música para la educación en valores. *DEDiCA. Revista de Educaçao e Humanidades,* (2), 263-278.

Consejo de la Unión Europea. (2018). *Recomendación del Consejo de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente* (2018/C 189/01). Diario Oficial de la Unión Europea, C 189, 1-13.

Decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la

Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria*. Boletín Oficial de Cantabria, 151*, de 5 de agosto de 2022.

Decreto 78/2019, de 24 de mayo, de ordenación de la atención a la diversidad en los centros públicos y privados concertados que imparten enseñanzas no universitarias en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria, 106*, de 3 de junio de 2019.

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., y Blanco, T. F. (2022). Reflexiones del Open STEAM Group sobre el impacto del enfoque integrado del contenido en el aprendizaje de las matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 81-94). SEIEM.

Fauvel, J., Flood, R. y Wilson, R. J. (Eds.). (2006). *Music and mathematics: From Pythagoras to fractals.* Oxford University Press.

García-Ruiz, R., Bonilla-del-Río, M. y Diego-Mantecón, J. M. (2018). Gamificación en la escuela 2.0: una alianza educativa entre juego y aprendizaje. En A. Torres-Toukoumidis y L. M. Romero-Rodríguez (Coords.), *Gamificación en Iberoamérica: Experiencias desde la comunicación y la educación* (pp. 71-95). Editorial Universitaria Abya-Yala.

González-Martín, C., Prat Moratonas, M. y Forcada Royo, J. (2024). *Music and mathematics: Key components and contributions o fan integrated STEAM teaching approach. International Journal of Music Education,* Advance online publication. https://doi.org/10.1177/02557614241248267

Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrates STEM education. *International Jorunal of STEM Education, 3*(1), 11.

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory Into Practice, 41*(4), 212-218.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, de 30 de diciembre de 2020. 122868-122953.

Levitin, D. (2011). *Tu cerebro y la música.* RBA.

Liern Carrión, V. (1994). La música y sus materiales: Una ayuda para las clases de matemáticas. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* (14-15), 60-64.

Liern Carrión, V. (2008a). La música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (58), 137-143.

Liern Carrión, V. (2008b). Las fracciones de la música. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (59), 129-134.

Liern Carrión, V. (2009a). Las matemáticas de Johann Sebastian Bach. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (61), ,113-118.

Liern Carrión, V. (2009b). Las matemáticas y la música popular. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (62), 107-113.

Liern Carrión, V. (2010). Matemáticas para afinar instrumentos musicales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (65), 99-104.

Liern Carrión, V. (2011). ¿Qué ha sido de la música de las esferas? *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (67), 111-118.

Liern Carrión, V. (2012). Euler y su interés por la música. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (70), 93-98.

Matailo Vivar, N. V. y Ramón Salcedo, I. F. (2023). La importancia de los recursos didácticos manipulativos en el razonamiento lógico-matemático. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 7*(2), 10317-10329.

Mato Vázquez, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 18*(1), 19-32.

Mato, M.D. y de la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5*(1), 197-208.

Navarra, G. y de Cian, S. (1994). De los frisos gráficos a los frisos musicales. Un análisis geométrico de dos modelos: una actividad interdisciplinar entre matemáticas, artes figurativas y música. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* (2), 43-56.

Ordoñez Morales, E., Sánchez Reinoso, J. S., Sánchez Maldonado, M. M., Romero Haro, C. E. y Bernal Iñiguez, J. D. (2011). Análisis del Efecto Mozart en el desarrollo intelectual de las personas adultas y niños. *Ingenius: Revista de Ciencia y Tecnología,* (5), 45-54.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). (2023). *Informe PISA 2022: Resultados de España.* https://www.oecd.org/es/publications/2024/06/pisa-2022-results-volume-iii-country-notes_72b418f8/spain_3980e9e2.html

Ortiz-Laso, Z., Diego-Mantecón, J. M., Lavicza, Z. y Blanco, T. F. (2023). Teacher growth in exploiting mathematics competencies through STEAM projects. *ZDM – Mathematics Education, 55*(7), 1283-1297.

Pastor Martín, A. (2008). Matemáticas en la música. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* (59), 17-21.

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child.* Viking Press.

Pol i Llompart, J. L. Joyas matemáticas de una caja de música. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (55), 49-54.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Viladot, L., Hilton, C., Casals, A., Saunders, J., Carrillo, C., Henley, J., González-Martín, C., Prat, M. y Welch, G. (2018). The integration of music and mathematics education in Catalonia and England: Perspectives on theory and practice. *Music Education Research, 20*(1), 71-82.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wilson, L. O. (2020). *Bloom's taxonomy revised – Understanding the revised version of Bloom's taxonomy* [Archivo PDF]. The Second Principle. https://thesecondprinciple.com/wp-content/uploads/2020/08/Blooms-revised-2020-PDF-version.pdf

7. Anexos

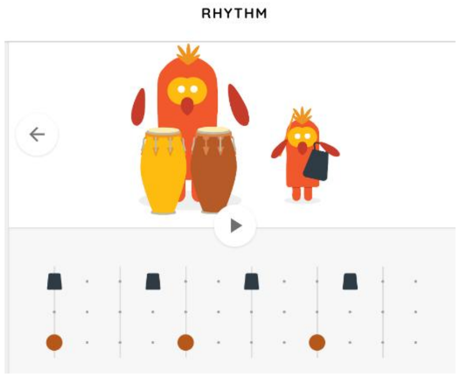
7.1. Anexo I. Guía didáctica *Musimáticas* para el profesorado

MUSIMÁTICAS: Guía Didáctica para el Profesorado

¿Creéis que las matemáticas y la música están relacionadas? Vamos a descubrir cómo los ritmos, las notas y los números están más conectados de lo que imaginas.

🎼➕🔢

Los compases en música nos indican el ritmo de la pieza musical y se expresan como fracciones, por ejemplo, el *3 por 4* o el *4 por 4*.



Actividad 1: Mínimo Común Múltiplo con ritmo

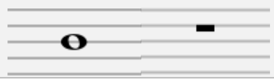
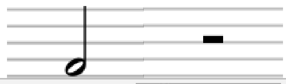
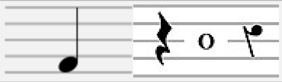
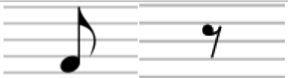
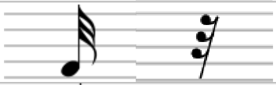
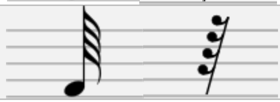
Objetivo: esta actividad pretende que los estudiantes descubran cómo los ritmos musicales pueden coincidir en determinados momentos gracias al cálculo del mínimo común múltiplo (MCM).

Desarrollo de la actividad: divide la clase en tres grupos:

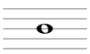
- Grupo 1: seguirá el ritmo *3 por 4* con palmadas cada tres tiempos.
- Grupo 2: seguirá el ritmo *4 por 4* con chasquidos cada cuatro tiempos.
- Grupo 3: marcan el ritmo contando en voz alta la sucesión numérica 0,1,2,3… y detectando en qué números coinciden los grupos 1 y 2.

De esta forma, el grupo 1 deberá dar palmadas en los números 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24… y el grupo 2 deberá chasquear los dedos en los números 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24.
Tras la representación, el grupo 3 contestará a la pregunta ¿cada cuántos pulsos coinciden los compases?
Seguidamente, deberán calcular el MCM de los números 3 y 4 y comprobar que coincide con la primera coincidencia de ritmos (las sucesivas son múltiplos enteros de este). Discutiremos en común si se puede aplicar este método a otros ritmos, como *2 por 4* y *5 por 4*.
Esta actividad permitirá al estudiantado redescubrir el concepto de mínimo común múltiplo de manera visual y auditiva mediante conocimientos musicales.
El profesorado podrá representar ambos compases en el siguiente recurso virtual “Chrome Music Lab – Rhythm”, para que el alumnado detecte la coincidencia de manera directa, también en el caso de que la dinámica en el aula se complique:
Material: Chrome Music Lab - https://musiclab.chromeexperiments.com/Rhythm/

Los compases se completan con figuras musicales, cada una de las cuales tiene un valor en forma de fracción. ¡Podemos usar las matemáticas para componer ritmos!

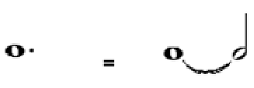
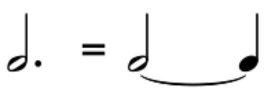
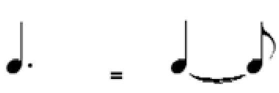
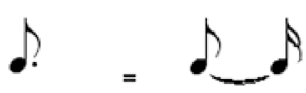
Nombre	Figura y silencio	Fracción asociada
Redonda		1
Blanca		$\frac{1}{2}$
Negra		$\frac{1}{4}$
Corchea		$\frac{1}{8}$
Semicorchea		$\frac{1}{16}$
Fusa		$\frac{1}{32}$
Semifusa		$\frac{1}{64}$

Las equivalencias serán siguiendo potencias de 2:

Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
	2 	4 	8 	16 	32 	64 

Por tanto, el compás $\frac{3}{4}$ se completa con 3 negras $3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$ o 6 corcheas $6 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$ y el $\frac{4}{4}$ con 4 negras $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$ u 8 corcheas $8 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)$.

El puntillo aumenta la mitad del valor de la figura.

			
$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Conociendo el valor de cada figura, podemos construir combinaciones de figuras mediante la suma de fracciones formando un compás completo. Y al revés, podemos conocer el compás de una pieza musical tan solo sumando los valores de sus figuras.

Ejemplo:
Podemos construir un compás $\frac{2}{4}$ de manera que la suma de las fracciones que representan cada figura sea $\frac{2}{4}$.

La suma de las fracciones de cualquiera de los tres compases es (el 1 por 2 no existe como compás musical):

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2+1+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}.$$

El alumnado podría tararear rítmicamente sus soluciones.

El profesorado deberá dejar claro que fracciones equivalentes, aunque otorgan una cantidad de figuras equivalente, no siempre representan un mismo patrón rítmico. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ contienen ambas 3 negras, pero el primer compás es ternario y el segundo binario.

Actividad 2: Juego de fracciones y compases

Objetivo: esta actividad pretende que el alumnado relacione distintas representaciones de las fracciones, mediante compases y figuras musicales siguiendo una metodología de gamificación, trabajando, a su vez, las operaciones con fracciones.

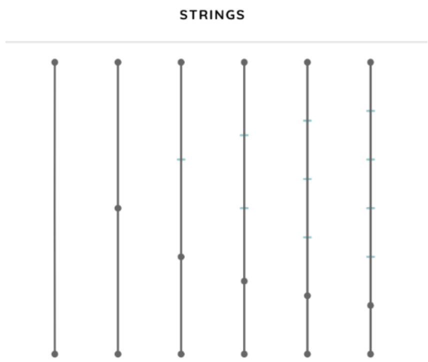
Materiales: se necesitarán los siguientes tipos de tarjetas (Anexo III).

- Tarjetas con compases musicales $\left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{8}, \dots\right)$.
- Tarjetas con operaciones combinadas de fracciones.
- Tarjetas con figuras musicales en un pentagrama.
- Tarjetas gráficas con partes de la redonda.

Desarrollo de la actividad: en grupos de 3 o 4 personas, se les entregará un sobre con sus tarjetas (cada grupo tendrá un color diferente) y, tras una explicación inicial, aquel que agrupe las tarjetas correctamente lo más rápido posible ganará. Las tarjetas se agruparán en conjuntos de 4 tarjetas: compás, operación combinada, figuras musicales y gráficas con partes de redonda.
Además, dado que cada grupo poseerá un color propio, en los sobres tendrán una tarjeta de color diferente perteneciente a otro de los grupos de la clase por lo que deberán comunicarse y trabajar en equipo para poder emparejar sus tarjetas rápidamente, desarrollando actitudes positivas de cooperación.

El placer estético de una obra es una cuestión subjetiva. Ahora bien, ¿existe algún modo de aproximarnos a una medida objetiva de belleza? Nos ayudaremos de las matemáticas para lograrlo. Lejos de ser una idea descabellada, la razón áurea es un ejemplo de cómo las matemáticas modelan la belleza.

Y ¿por qué algunas combinaciones de sonidos nos suenan mejor que otras? Las fracciones no solo representan las figuras musicales, como hemos visto, sino también las distancias entre pares de notas, que llamamos intervalos. Pitágoras descubrió que los intervalos formaban razones entre las longitudes de las cuerdas que hacían sonar dichas notas. De esta forma, observó que cuando tocamos una cuerda (con un cierto sonido) de una cierta longitud (longitud unidad 1) y la dividimos por la mitad (longitud ½), la nota que suena es la misma una octava por encima. Esto es, la razón 2:1 se corresponde con un intervalo de octava. Si, a continuación, dividimos la cuerda original en 3 partes, la distancia entre la octava (1/2) y la cuerda dividida en una tercera parte (1/3) es una quinta justa, que se corresponde con la razón 3:2. Continuando con sucesivas particiones de la cuerda, obtenemos las fracciones correspondientes a los intervalos musicales simples.



Actividad 3: Consonancias y cuerdas

Objetivo: esta actividad pretende que el alumnado explore las razones (fracciones) matemáticas en los intervalos musicales simples y su relación con las longitudes de las cuerdas vibrantes que producen el sonido, imitando el trabajo con un monocordio mediante aplicaciones web.

Materiales: se mostrará la comparación de longitudes de cuerda y los sonidos que emanan de ellas según las distintas razones matemáticas utilizando la aplicación web Chrome Music Lab - Strings - https://musiclab.chromeexperiments.com/Strings/.

Desarrollo de la actividad: el alumnado, por parejas, iniciará la aplicación web Strings - Chrome Music Lab y un afinador online (como onlinemictest.com) usando un portátil o tablet. Así, identificando los sonidos con el afinador, investigarán los intervalos de octava, unísono, quinta justa, tercera mayor y tercera menor a través de las razones matemáticas en las longitudes de las cuerdas que, seguidamente, representarán con fracciones. Finalmente, pondrán en común las reflexiones grupales acerca de las medidas matemáticas de sonidos agradables, sentando las bases para la Actividad 4.
Se espera que el alumnado detecte los siguientes sonidos provenientes de las cuerdas de Chrome Music Lab y sus longitudes (no necesariamente sus frecuencias, aunque guardan la misma proporción):

- Cuerda original 1: Do2 - 65,6 Hz
- Cuerda ½: Do3 - 130,9 Hz
- Cuerda 1/3: Sol3 - 196,3 Hz

- Cuerda 2/3: Sol2 - 98,1 Hz
- Cuerda ¼: Do4 - 262,4 Hz
- Cuerda 1/5: Mi4 - 330,1 Hz
- Cuerda 1/6: Sol4 - 390,1 Hz

A continuación, obteniendo las razones (cocientes) entre las longitudes de las notas tendrán representados los intervalos como fracciones – según el sistema de Justa Entonación-, con los que se trabajará en la Actividad 4. Para el resto de los intervalos, pueden obtenerse sus fracciones a partir de los productos (o divisiones) de las fracciones correspondientes a los intervalos con los que estos se forman, trabajando así el producto y división de fracciones.

Ejemplo:

El intervalo Do-Mi es de tercera mayor, con lo que se corresponde con la fracción 5/4. El intervalo Mi-Sol es de tercera menor, con 6/5. Por lo tanto, el intervalo sumando estos dos, Do-Sol, que es de quinta justa, se corresponde con

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Intervalo	Fracción (Justa Entonación y Sistema Pitagórico)
Unísono	1
Octava / 8ª	2:1
Quinta justa / 5ª	3:2
Cuarta justa / 4ª	4:3
Tercera mayor / 3ª M	5:4 o 81:64
Tercera menor / 3ª m	6:5 o 32:27
Sexta mayor / 6ª M	5:3 o 27:16
Sexta menor / 6ª m	8:5 o 128:81
Séptima menor / 7ª m	9:5 o 16:9
Séptima mayor / 7ª M	15:8 o 243:128
Segunda mayor o Tono / 2ª M	9/8
Segunda menor / 2ª m	16:15 o 256:243

Dos sonidos son consonantes cuando su sonido es agradable. Por el contrario, son disonantes si es desagradable. Matemáticos y músicos de la antigüedad pensaban que la consonancia de intervalos tenía que ver con las fracciones simples, es decir, cuanto más pequeños son los números que las representan, más consonantes son los intervalos (“Teorema de Tyndall”).

Euler interpretó esta idea de consonancia en una función que denominó *gradus suavitatis* o grado de suavidad (GS). A menor GS de un intervalo entonces más consonante es. Los pasos para obtener el GS de un intervalo $\frac{a}{b}$ son:

1) Obtener la fracción irreducible equivalente $\frac{p}{q}$.
2) Obtener el mínimo común múltiplo: $N = mcm(p, q)$.
3) Descomponer N en factores primos: $N = p_1^{k1} \dots p_n^{kn}$.
4) El grado de suavidad es: $GS = k_1(p_1 - 1) + \cdots + k_n(p_n - 1) + 1$.

Ejemplo:

El grado de Suavidad de la 5ª justa: $GS(3{:}\,2) = (3-1) + (2-1) + 1 = 4$.
El grado de Suavidad de la 4ª justa: $GS(4{:}\,3) = 2 \cdot (2-1) + (3-1) + 1 = 5$.

Esto significa que la 5ª justa es más consonante que la 4ª justa.

Añadimos una columna a la tabla anterior (intervalos y fracciones) con el grado de suavidad de cada uno de ellos.

Intervalo	Fracción (Justa Entonación y Sistema Pitagórico)	Gradus Suavitatis (GS) (Justa Entonación y Sistema Pitagórico)
Unísono	1	1
Octava / 8ª	2:1	2
Quinta justa / 5ª	3:2	4
Cuarta justa / 4ª	4:3	5
Tercera mayor / 3ª M	5:4 o 81:64	7 o 15
Tercera menor / 3ª m	6:5 o 32:27	8 o 12
Sexta mayor / 6ª M	5:3 o 27:16	7 o 11
Sexta menor / 6ª m	8:5 o 128:81	8 o 16
Séptima menor / 7ª m	9:5 o 16:9	9
Séptima mayor / 7ª M	15:8 o 243:128	10 o 18
Segunda mayor o Tono / 2ª M	9:8	8
Segunda menor / 2ª m	16:15 o 256:243	11 o 19

En la siguiente actividad seguiremos el sistema de entonación justa que, al incluir el número 5 como factor produce intervalos más consonantes, además de ser más fácil de visualizar en el monocordio (Actividad 3) – el piano sigue el sistema bien temperado que es más complicado de visualizar -.

Actividad 4: Proporciones y consonancia

Objetivo: esta actividad pretende que el alumnado explore los conceptos de razones, potencias, mínimo común múltiplo (trabajado en la Actividad 1) y números primos en el cálculo del grado de suavidad de un intervalo musical. En este sentido, trabajarán también operaciones combinadas de números enteros y fracciones, la media estadística y los redondeos.

Materiales: en esta actividad serán útiles el recurso del Piano – Chrome Music Lab para comprobar el grado de agradabilidad al oído de los distintos intervalos según el grado de suavidad euleriano https://musiclab.chromeexperiments.com/Shared-Piano/#9xisbw6Qh, y la aplicación web https://www.mathematik.com/Piano/index.html creada por Oliver Knill para realizar los cálculos del GS interválicos directamente.

Desarrollo de la actividad: en primer lugar, el alumnado obtendrá los grados de suavidad de cada uno de los intervalos siguiendo los pasos que indicará el profesorado, trabajando con conceptos de números primos, naturales, fracciones irreducibles, mínimo común múltiplo y potencias. Mediante el recurso Piano – Chrome Music Lab, el profesorado les mostrará cuán consonante es cada intervalo, tras haber obtenidos los GS, fomentando reflexiones grupales sobre si los intervalos estudiados suenan para ellos y ellas más agradables o menos, siguiendo también el grado de suavidad.
Seguidamente, el profesorado mostrará las dos canciones de las que se analizará la consonancia a partir de las fracciones interválicas en el recurso de YouTube. A continuación, el alumnado, individualmente, decidirá qué canción decide apoyar o cuál cree que suena más bonita. Así, serán ellos y ellas quienes se encarguen de defender su propia canción mediante argumentos matemáticos. Las canciones deben ser cercanas al alumnado para motivar su participación.
En esta propuesta trabajaremos con las siguientes:

Quevedo: Bzrp Music Sessions, Vol. 52 – Quevedo y Bizarrap, 2022

https://musiclab.chromeexperiments.com/Shared-Piano/saved/#pcIBXi-t-PDdE38M5I8

Despechá – Rosalía, 2022

https://musiclab.chromeexperiments.com/Shared-Piano/saved/#7Tzx1vtgiThA9DExUmA
Analizaremos los estribillos más reconocidos de ambas canciones. El profesorado podrá interpretar con el recurso del Piano – Chrome Music Lab el pentagrama concreto del que se medirá la consonancia. También el alumnado podrá tararear o cantar dicha estrofa.
Tras introducir brevemente el *Gradus Suavitatis* de Euler como indicamos en la teoría previa,

los dos equipos procederán a identificar los intervalos musicales con sus respectivas fracciones y a calcular la media de las suavidades de todos los intervalos. El equipo que obtenga el menor grado habrá defendido la canción más bonita según las matemáticas.

Se espera que el alumnado obtenga los siguientes intervalos, fracciones y suavidades:

- Quevedo: Bzrp Music Sessions, Vol. 52 – Quevedo y Bizarrap, 2022

Intervalos	2ª m	Unísono	Unísono	2ª m	2ª m	2ª M	2ª M	3ª M	3ª m	4ª
Fracciones	16/15	1	1	16/15	16/15	9/8	9/8	5/4	6/5	4/3
GS	11	1	1	11	11	8	8	7	8	5

La media de los grados de suavidad será:

$$\frac{1}{10} \cdot (11 + 1 + 1 + 11 + 11 + 8 + 8 + 7 + 8 + 5) = 7{,}1.$$

- Despechá – Rosalía, 2022

Intervalos	Unísono	Unísono	2ª M	2ª m	3ª m	6ª m	2ª m	Unísono	Unísono	Unísono
Fracciones	1	1	9/8	16/15	6/5	8/5	16/15	1	1	1
GS	1	1	8	11	8	8	11	1	1	1

Intervalos	2ªM	2ªM	Unísono	Unísono	Unísono	Unísono	Unísono	3ª M	2ªM
Fracciones	9/8	9/8	1	1	1	1	1	5/4	9/8
GS	8	8	1	1	1	1	1	7	8

La media de los grados de suavidad:

$$\frac{1}{19} \cdot (1 + 1 + 8 + 11 + 8 + 8 + 11 + 1 + 1 + 1 + 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 8) = 4{,}6.$$

Se debe dejar claro que, a la hora de obtener los intervalos y sus grados de suavidad, no deben incluirse como intervalos las notas ligadas ni aquellas que tengan silencios entre ellas ya que no se produce consonancia ni disonancia al no sonar unidas entre sí. Además, se pueden trabajar también los conceptos aprendidos en la Actividad 2, con la representación fraccionaria del compás y de las figuras que lo forman en cada una de estas canciones.

Dejamos indicadas dos canciones adicionales que puede ser útil para el profesorado.

- Potra Salvaje – Isabel Aaiún, 2024

https://musiclab.chromeexperiments.com/Shared-Piano/saved/#PpQoodJLoUjOu551gvK

Intervalos	Unísono	Unísono	Unísono	2ª M	3ª m	2ª m	3ª m	3ª m	3ª m
Fracciones	1	1	1	9/8	6/5	16/15	6/5	6/5	6/5
GS	1	1	1	8	8	11	8	8	8
Intervalos	3ª m	3ª m	3ª m	2ª M	2ª M	2ª M	Unísono	2ª M	2ª m
Fracciones	6/5	6/5	6/5	9/8	9/8	9/8	1	9/8	16/15
GS	8	8	8	8	8	8	1	8	11

La media de los grados de suavidad:

$$\frac{1}{18} \cdot (1+1+1+8+8+8+11+8+8+8+8+8+8+8+8+8+1+8+11) = 7{,}2.$$

- Shakira: Bzrp Music Sessions, Vol. 53 – Shakira y Bizarrap, 2024

https://musiclab.chromeexperiments.com/Shared-Piano/saved/#y-qKzMklGWYL5Aqnosx

Intervalos	2ª M	2ª m	5ª	3ª m	Unísono	2ª M	2ª M
Fracciones	9/8	16/15	3/2	6/5	1	9/8	9/8
GS	8	11	4	8	1	8	8
Intervalos	2ª m	2ª M	2ª M	2ª m	6ª M	2ª M	2ª m
Fracciones	16/15	9/8	9/8	16/15	5/3	9/8	16/15
GS	11	8	8	11	7	8	11

La media de los grados de suavidad:

$$\frac{1}{14} \cdot (8+11+4+8+1+8+8+11+8+8+11+7+8+11) = 8.$$

7.2. Anexo II. Ficha de trabajo *Musimáticas* para el alumnado

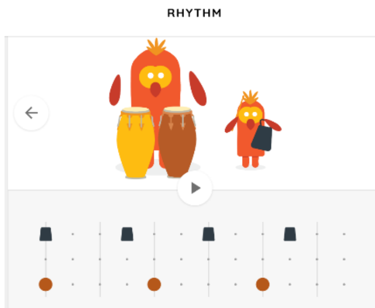
♫ MUSIMÁTICAS ♫

Nombre del grupo: ______________________________

¿Creéis que las matemáticas y la música están relacionadas?

Los compases en música nos indican el ritmo de la pieza musical y se expresan como fracciones, por ejemplo, el *3 por 4* o el *4 por 4*.

Actividad 1: Mínimo Común Múltiplo con ritmo

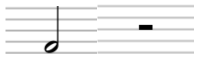
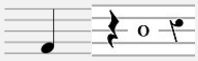
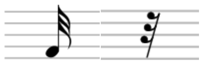


- Grupo 1: seguirá el ritmo *3 por 4* con palmadas cada tres tiempos.
- Grupo 2: seguirá el ritmo *4 por 4* con chasquidos cada cuatro tiempos.
- Grupo 3: marcan el ritmo contando en voz alta 0,1,2,3… y detectando en qué números coinciden los grupos 1 y 2.

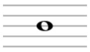
¿Cada cuántos pulsos coinciden los compases?

¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 3 y 4? ¿Coincide?

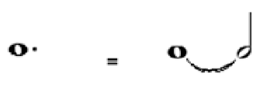
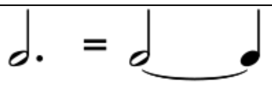
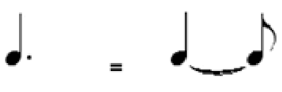
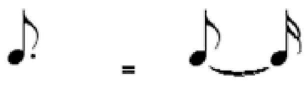
Los compases se completan con figuras musicales, cada una de las cuales tiene un valor en forma de fracción. ¡Podemos usar las matemáticas para componer ritmos!

Nombre	Figura y silencio	Fracción asociada
Redonda		1
Blanca		$\frac{1}{2}$
Negra		$\frac{1}{4}$
Corchea		$\frac{1}{8}$
Semicorchea		$\frac{1}{16}$
Fusa		$\frac{1}{32}$
Semifusa		$\frac{1}{64}$

Las equivalencias serán siguiendo potencias de 2:

Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
	2 	4 	8 	16 	32 	64 

El puntillo aumenta la mitad del valor de la figura.

			
$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Ejemplo:

Podemos construir un compás $\frac{2}{4}$ de manera que la suma de las fracciones que representan cada figura sea $\frac{2}{4}$.

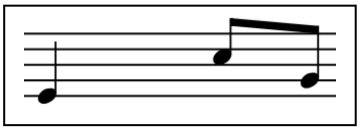
La suma de las fracciones de cualquiera de los tres compases es:

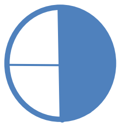
Actividad 2: Juego de fracciones y compases

Ejemplo: agrupar de 4 en 4 las tarjetas.

$$\frac{2}{4}$$

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{4}$$





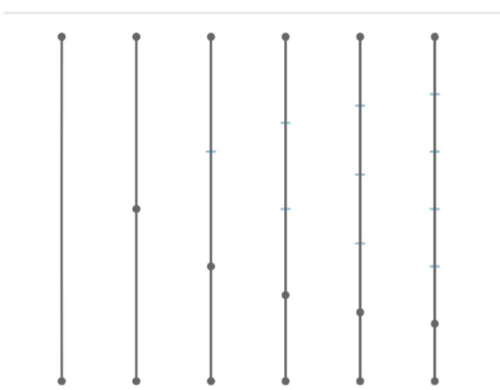
Compás **Operación combinada** **Figuras musicales** **Gráfica**

Actividad 3: Consonancias y cuerdas

Pitágoras descubrió que cuando tocamos una cuerda de una cierta longitud y la dividimos por la mitad (longitud ½), la nota que suena es la misma una 8ª por encima. Así que, la razón 2:1 es el intervalo de octava. Pero si la dividimos en tres partes, tenemos un intervalo de 5ª con razón 3:2.

Detecta con un afinador las notas que emanan de cada cuerda y completa la tabla con los intervalos correspondientes. Ten en cuenta que la suma de intervalos se traduce en un producto de razones.

- Cuerda original:
- Cuerda ½:
- Cuerda 1/3:
- Cuerda 2/3:
- Cuerda ¼:
- Cuerda 1/5:
- Cuerda 1/6:



Intervalo	Fracción
Unísono	
Octava / 8ª	
Quinta justa / 5ª	
Cuarta justa / 4ª	
Tercera mayor / 3ª M	
Tercera menor / 3ª m	
Sexta mayor / 6ª M	
Sexta menor / 6ª m	
Séptima menor / 7ª m	
Séptima mayor / 7ª M	
Segunda mayor o Tono / 2ª M	
Segunda menor / 2ª m	

¿Crees que podemos medir matemáticamente la belleza de una canción?

Dos sonidos son consonantes cuando su sonido es agradable. Se cree que cuanto más pequeños son los números de la fracción que representa el intervalo, más consonante suena. Euler dio los pasos para "calcular" la consonancia de un intervalo $\frac{a}{b}$:, es el *gradus suavitatis* o grado de suavidad (GS). Por ejemplo, si el intervalo es 15:4,

1) Obtener la fracción irreducible equivalente: $\frac{15}{4}$.
2) Obtener el mínimo común múltiplo: $N = mcm(15,4) = 60$.
3) Descomponer N en factores primos: $N = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$.
4) El grado de suavidad es: $GS = 1(3-1) + 1(5-1) + 2(2-1) = 8$.

A menor GS de un intervalo entonces más consonante es.

Ejemplo:

El grado de suavidad de la 5ª justa: $GS(5:4) =$

El grado de suavidad de la 4ª justa: $GS(4:3) =$.

Esto significa que la   es más consonante que la

Intervalo	Fracción	Gradus Suavitatis (GS)
Unísono	1	
Octava / 8ª	2:1	
Quinta justa / 5ª	3:2	
Cuarta justa / 4ª	4:3	
Tercera mayor / 3ª M	5:4	
Tercera menor / 3ª m	6:5	
Sexta mayor / 6ª M	5:3	
Sexta menor / 6ª m	8:5	
Séptima menor / 7ª m	9:5	
Séptima mayor / 7ª M	15:8	
Segunda mayor o Tono / 2ª M	9:8	
Segunda menor / 2ª m	16:15	

Actividad 4: Proporciones y consonancia

Vamos a calcular matemáticamente, con el grado de suavidad, la consonancia de dos canciones. ¡Elegid una y que gane la más consonante según las matemáticas!

- Quevedo: Bzrp Music Sessions, Vol. 52 – Quevedo y Bizarrap, 2022

Intervalos										
Fracciones										
GS										

El GS medio es:

- Despechá – Rosalía, 2022

Intervalos										
Fracciones										
GS										

Intervalos									
Fracciones									
GS									

El GS medio es:

- Potra Salvaje – Isabel Aaiún, 2024

Intervalos									
Fracciones									
GS									
Intervalos									
Fracciones									
GS									

El GS medio es:

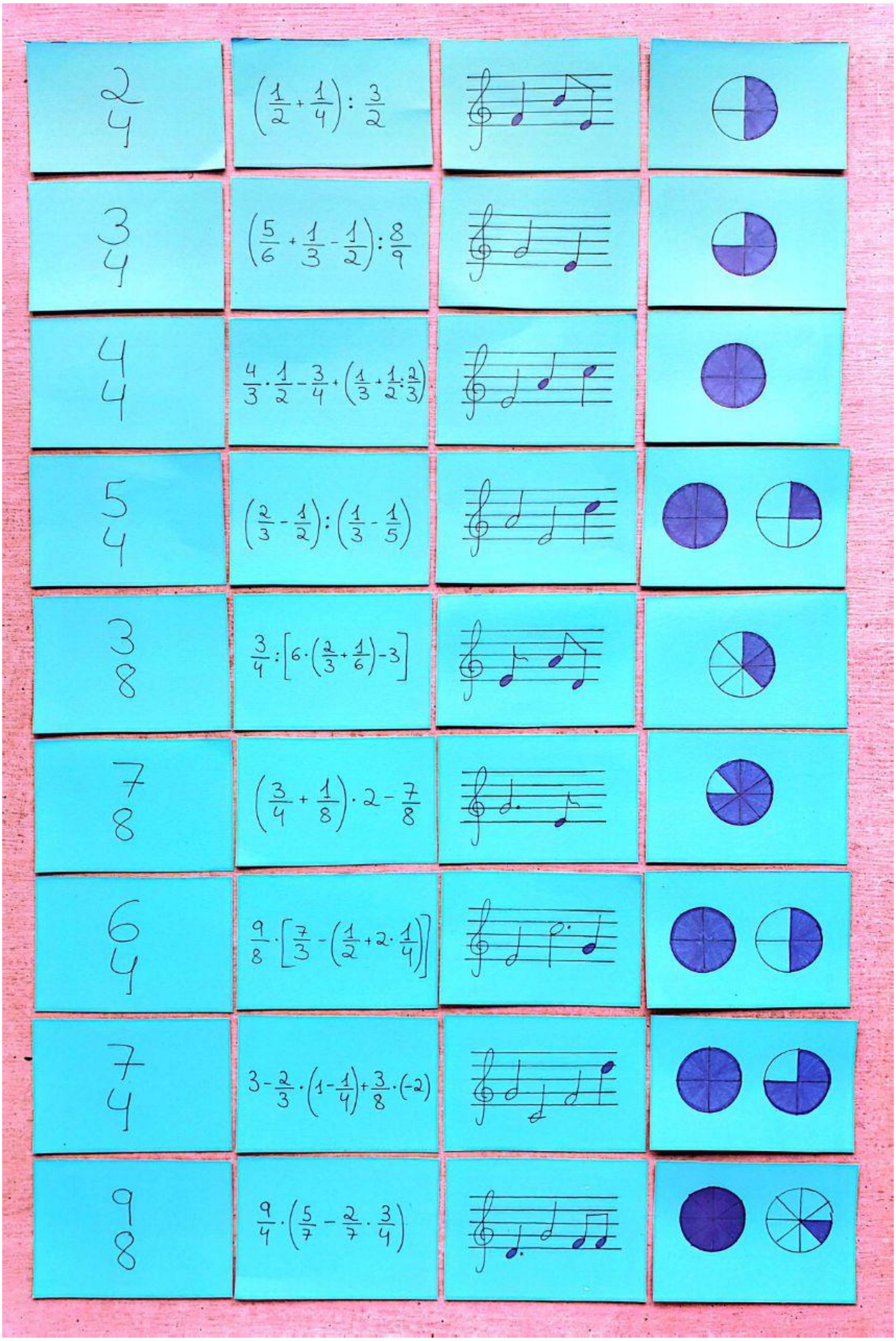
- Shakira: Bzrp Music Sessions, Vol. 53 – Shakira y Bizarrap, 2024

Intervalos							
Fracciones							
GS							
Intervalos							
Fracciones							
GS							

El GS medio es:

7.3. Anexo III. Tarjetas actividad 2 “Juego de fracciones y compases”


(2/3 - 1/2) : (1/3 - 1/5)
3 - 2/3 · (1 - 1/4) + 3/8 · (-2)
7
8



7.4. Anexo IV. Cuestionario de valoración personal

🎵 MUSIMÁTICAS: Valoración personal 🎵

Se pide que respondas a las siguientes cuestiones valorando tu experiencia, de manera anónima. Marca con una ❌ la opción que mejor represente tu experiencia.

	Nada	Algo	Bastante	Totalmente
¿Crees que los contenidos se explicaron con claridad?				
¿Se resolvieron bien tus dudas y preguntas durante las actividades?				
¿Te sentiste motivado/a para participar en las actividades?				
¿Crees que las fichas y la página web musical han sido útiles?				
¿Te ha parecido una experiencia interesante?				
Antes de las actividades, ¿pensabas que las matemáticas y la música tenían relación?				
Ahora, ¿crees que las matemáticas y la música tienen relación?				
¿Crees que tus compañeros/as y tú habéis trabajado bien en equipo?				
¿Te gustaría seguir trabajando con actividades de este estilo?				
¿Sientes que las actividades te han ayudado a comprender mejor los contenidos de matemáticas y de música?				
¿Te ha parecido novedosa la forma en que se han trabajado las matemáticas en relación con la música?				

¿Qué es lo que más te ha gustado y lo que menos de las actividades?

¿Cómo ha cambiado tu forma de ver las matemáticas tras realizar las actividades de la propuesta?

¿Qué recomendarías para mejorar las actividades o el desarrollo de estos proyectos en el futuro?

🎵 ¡Gracias por participar! 🎵

7.5. Anexo V. Saberes básicos

7.5.1. Matemáticas

Sentido numérico				
2. Cantidad				
Realización de estimaciones con la precisión requerida.	Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana con la precisión requerida.	Diferentes formas de representación de números enteros, fracciones y decimales, incluida la recta numérica: selección y utilización de la representación más adecuada de una misma cantidad para cada situación o problema.		
3. Sentido de las operaciones				
Estrategias de cálculo mental con números naturales, enteros, fracciones y decimales.	Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas.	Relaciones recíprocas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas	Efecto de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales.	Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo, adaptando las estrategias a cada situación, valorando si los resultados son razonables.
4. Relaciones				
Números enteros, fracciones, decimales y raíces: comprensión y representación de cantidades con ellos.	Relación de conjeturas, generalización y justificación de relaciones entre números.	Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas diversas, incluido el uso de la calculadora.	Identificación de patrones y regularidades numéricas.	
5. Razonamiento proporcional				
Reconocimiento de relaciones de proporcionalidad numérica y de relaciones no proporcionales.	Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.			

Sentido algebraico	
1. Patrones	
Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.	Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización.

Sentido estocástico
1. Organización y análisis de datos
Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.

Sentido socioafectivo	
1. Creencias, actitudes y emociones	
Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.	Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
2. Trabajo en equipo y toma de decisiones	
Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.	Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.

7.5.2. Música

Escucha y percepción	
Obras musicales y dancísticas: análisis, descripción y valoración de sus características básicas. Géneros de la música y la danza. Destacando el patrimonio musical de Cantabria.	Herramientas digitales para la recepción musical.

Interpretación, improvisación y creación escénica			
La partitura: identificación y aplicación de grafías, lectura y escritura musical.	Elementos básicos del lenguaje musical: parámetros del sonido, intervalos. Tonalidad: escalas musicales, la armadura y acordes básicos. Texturas. Formas musicales a lo largo de los periodos históricos y en la actualidad.	Proyectos musicales y audiovisuales: empleo de la voz, el cuerpo, los instrumentos musicales, los medios y las aplicaciones tecnológicas.	Herramientas digitales para la creación musical. Secuenciadores y editores de partituras.

Contextos y culturas		
Historia de la música y de la danza occidental: periodos, características, géneros, voces, instrumentos y agrupaciones.	Músicas populares, urbanas y contemporáneas.	El sonido y la música en los medios audiovisuales y las tecnologías digitales.

7.6. Anexo VI. Competencias específicas y criterios de evaluación

7.6.1. Matemáticas

Competencia especifica 1
Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
Descriptores operativos
STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4.
Criterios de evaluación
1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas
1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias

Competencia específica 2
Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.
Descriptores operativos
STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3
Criterios de evaluacion
2.2. Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).

Competencia especifica 4
Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
Descriptores operativos
STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3.
Criterios de evaluación
4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.

Competencia especifica 5
Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
Descriptores operativos
STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1.
Criterios de evaluación
5.1. Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
5.2. Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas

Competencia especifica 6
Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.
Descriptores operativos
STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1.
Criterios de evaluación
6.2. Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados.

Competencia especifica 9
Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.
Descriptores operativos
STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3.
Criterios de evaluación
9.1. Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.

9.2. Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

Competencia especifica 10
Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.
Descriptores operativos
CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.
Criterios de evaluación
10.1. Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados.

7.6.2. Música

Competencia especifica 1
Analizar obras de diferentes épocas y culturas, identificando sus principales rasgos estilísticos y estableciendo relaciones con su contexto, para valorar el patrimonio musical y dancístico como fuente de disfrute y enriquecimiento personal.
Descriptores operativos
CCL2, CCL3, CP3, CD1, CD2, CPSAA3, CC1, CCEC1 y CCEC2.
Criterios de evaluación
1.1. Identificar los principales rasgos estilísticos de obras musicales y dancísticas de diferentes épocas y culturas, evidenciando una actitud de apertura, interés y respeto en la escucha o el visionado de las mismas.

Competencia especifica 2
Explorar las posibilidades expresivas de diferentes técnicas musicales y dancísticas, a través de actividades de improvisación, para incorporarlas al repertorio personal de recursos y desarrollar el criterio de selección de las técnicas más adecuadas a la intención expresiva.
Descriptores operativos
CCL1, CD2, CPSAA1, CPSAA3, CC1, CE3, CCEC3.
Criterios de evaluación
2.1. Participar, con iniciativa, confianza y creatividad, en la exploración de técnicas musicales y dancísticas básicas, por medio de improvisaciones pautadas, individuales o grupales, en las que se empleen la voz, el cuerpo, instrumentos musicales o herramientas tecnológicas.

Competencia especifica 3
Interpretar piezas musicales y dancísticas, gestionando adecuadamente las emociones y empleando diversas estrategias y técnicas vocales, corporales o instrumentales, para ampliar las posibilidades de expresión personal.
Descriptores operativos
CCL1, CD2, CPSAA1, CPSAA3, CC1, CE1, CCE3.
Criterios de evaluación
3.1. Leer partituras sencillas, identificando de forma guiada los elementos básicos del lenguaje musical, con o sin apoyo de la audición.

7.7. Anexo VII. Contribución al perfil de salida

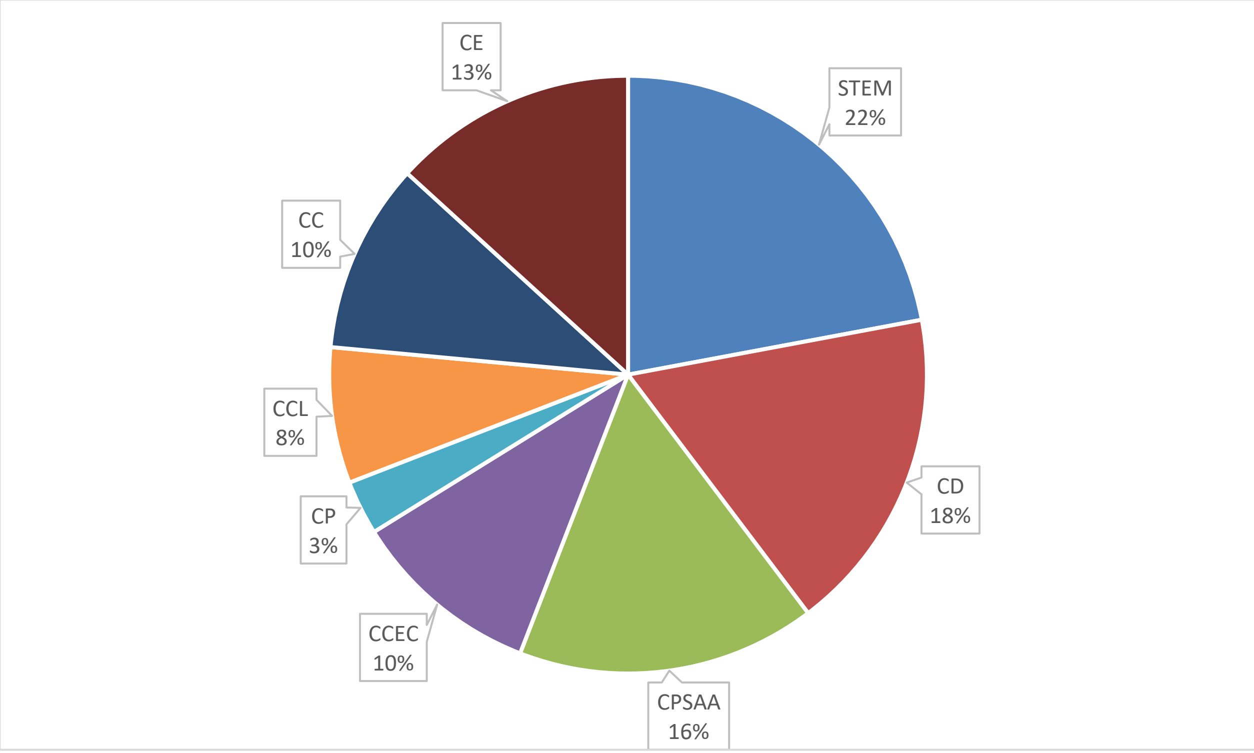


Figura 7. Distribución de la aparición de los descriptores operativos en la propuesta Musimáticas.

Competencia matemática y en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM)
STEM1
Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
STEM2
Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
STEM3
Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.

STEM4
Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
STEM5
Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.
Competencia digital (CD)
CD1 (a través de Música)
Realiza búsquedas en internet atendiendo a criterios de validez, calidad, actualidad y fiabilidad, seleccionando los resultados de manera crítica y archivándolos, para recuperarlos, referenciarlos y reutilizarlos, respetando la propiedad intelectual.
CD2
Gestiona y utiliza su entorno personal digital de aprendizaje para construir conocimiento y crear contenidos digitales, mediante estrategias de tratamiento de la información y el uso de diferentes herramientas digitales, seleccionando y configurando la más adecuada en función de la tarea y de sus necesidades de aprendizaje permanente.
CD3
Se comunica, participa, colabora e interactúa compartiendo contenidos, datos e información mediante herramientas o plataformas virtuales, y gestiona de manera responsable sus acciones, presencia y visibilidad en la red, para ejercer una ciudadanía digital activa, cívica y reflexiva.
CD5
Desarrolla aplicaciones informáticas sencillas y soluciones tecnológicas creativas y sostenibles para resolver problemas concretos o responder a retos propuestos, mostrando interés y curiosidad por la evolución de las tecnologías digitales y por su desarrollo sostenible y uso ético.

Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA)
CPSAA1
Regula y expresa sus emociones, fortaleciendo el optimismo, la resiliencia, la autoeficacia y la búsqueda de propósito y motivación hacia el aprendizaje, para gestionar los retos y cambios y armonizarlos con sus propios objetivos.
CPSAA3
Comprende proactivamente las perspectivas y las experiencias de las demás personas y las incorpora a su aprendizaje, para participar en el trabajo en grupo, distribuyendo y aceptando tareas y responsabilidades de manera equitativa y empleando estrategias cooperativas.
CPSAA4
Realiza autoevaluaciones sobre su proceso de aprendizaje, buscando fuentes fiables para validar, sustentar y contrastar la información y para obtener conclusiones relevantes.
CPSAA5
Planea objetivos a medio plazo y desarrolla procesos metacognitivos de retroalimentación para aprender de sus errores en el proceso de construcción del conocimiento.
Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)
CCEC1
Conoce, aprecia críticamente y respeta el patrimonio cultural y artístico, implicándose en su conservación y valorando el enriquecimiento inherente a la diversidad cultural y artística.
CCEC2 (a través de Música)
Disfruta, reconoce y analiza con autonomía las especificidades e intencionalidades de las manifestaciones artísticas y culturales más destacadas del patrimonio, distinguiendo los medios y soportes, así como los lenguajes y elementos técnicos que las caracterizan.
CCEC3 (a través de Música)
Expresa ideas, opiniones, sentimientos y emociones por medio de producciones culturales y artísticas, integrando su propio cuerpo y desarrollando la autoestima, la creatividad y el sentido del lugar que ocupa en la sociedad, con una actitud empática, abierta y colaborativa.
CCEC4
Conoce, selecciona y utiliza con creatividad diversos medios y soportes, así como técnicas plásticas, visuales, audiovisuales, sonoras o corporales, para la creación de productos artísticos y culturales, tanto de forma individual como colaborativa, identificando oportunidades de desarrollo personal, social y laboral, así como de emprendimiento.

Competencia plurilingüe (CP)
CP3
Conoce, valora y respeta la diversidad lingüística y cultural presente en la sociedad, integrándola en su desarrollo personal como factor de diálogo, para fomentar la cohesión social.
Competencia en comunicación lingüística (CCL)
CCL1 (a través de Música)
Se expresa de forma oral, escrita, signada o multimodal con coherencia, corrección y adecuación a los diferentes contextos sociales, y participa en interacciones comunicativas con actitud cooperativa y respetuosa tanto para intercambiar información, crear conocimiento y transmitir opiniones, como para construir vínculos personales.
CCL2
Comprende, interpreta y valora con actitud crítica textos orales, escritos, signados o multimodales de los ámbitos personal, social, educativo y profesional para participar en diferentes contextos de manera activa e informada y para construir conocimiento.
CCL3
Localiza, selecciona y contrasta de manera progresivamente autónoma información procedente de diferentes fuentes, evaluando su fiabilidad y pertinencia en función de los objetivos de lectura y evitando los riesgos de manipulación y desinformación, y la integra y transforma en conocimiento para comunicarla adoptando un punto de vista creativo, crítico y personal a la par que respetuoso con la propiedad intelectual.
CCL5
Pone sus prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática, la resolución dialogada de los conflictos y la igualdad de derechos de todas las personas, evitando los usos discriminatorios, así como los abusos de poder, para favorecer la utilización no solo eficaz sino también ética de los diferentes sistemas de comunicación.
Competencia ciudadana (CC)
CC1 (a través de Música)
Analiza y comprende ideas relativas a la dimensión social y ciudadana de su propia identidad, así como a los hechos culturales, históricos y normativos que la determinan, demostrando respeto por las normas, empatía, equidad y espíritu constructivo en la interacción con los demás en cualquier contexto.

CC2
Analiza y asume fundadamente los principios y valores que emanan del proceso de integración europea, la Constitución española y los derechos humanos y de la infancia, participando en actividades comunitarias, como la toma de decisiones o la resolución de conflictos, con actitud democrática, respeto por la diversidad, y compromiso con la igualdad de género, la cohesión social, el desarrollo sostenible y el logro de la ciudadanía mundial.
CC3
Comprende y analiza problemas éticos fundamentales y de actualidad, considerando críticamente los valores propios y ajenos, y desarrollando juicios propios para afrontar la controversia moral con actitud dialogante, argumentativa, respetuosa y opuesta a cualquier tipo de discriminación o violencia.
CC4
Comprende las relaciones sistémicas de interdependencia, ecodependencia e interconexión entre actuaciones locales y globales, y adopta, de forma consciente y motivada, un estilo de vida sostenible y ecosocialmente responsable.
Competencia emprendedora (CE)
CE1 (a través de Música)
Analiza necesidades y oportunidades y afronta retos con sentido crítico, haciendo balance de su sostenibilidad, valorando el impacto que puedan suponer en el entorno, para presentar ideas y soluciones innovadoras, éticas y sostenibles, dirigidas a crear valor en el ámbito personal, social, educativo y profesional.
CE2
Evalúa las fortalezas y debilidades propias, haciendo uso de estrategias de autoconocimiento y autoeficacia, y comprende los elementos fundamentales de la economía y las finanzas, aplicando conocimientos económicos y financieros a actividades y situaciones concretas, utilizando destrezas que favorezcan el trabajo colaborativo, para reunir y optimizar los recursos necesarios que lleven a la acción una experiencia emprendedora que genere valor.
CE3
Desarrolla el proceso de creación de ideas y soluciones valiosas y toma decisiones, de manera razonada, utilizando estrategias ágiles de planificación y gestión, y reflexiona sobre el proceso realizado y el resultado obtenido, para llevar a término el proceso de creación de prototipos innovadores y de valor, considerando la experiencia como una oportunidad para aprender.