Facultad de Educación

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Evaluando la competencia en razonamiento matemático en la ESO en Cantabria: deducción, inducción y abducción

Assessing mathematical reasoning competence in ESO in Cantabria: deduction, induction and abduction

Alumno: David Gutiérrez Cambra
Especialidad: Matemáticas
Directores: María Claudia Lázaro del Pozo y Tomás Jesús Recio Muñiz
Curso académico: 2024/2025
Fecha: Junio 2025

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas que han contribuido, de una u otra forma, a la realización de este trabajo.

En primer lugar, quiero agradecer a Claudia y a Tomás su continua orientación y guía a lo largo de la elaboración de este proyecto.

En segundo lugar, gracias a mi familia más cercana, sobre todo a mis padres y a mi hermana Diana, y a María, por haberme apoyado siempre.

En tercer lugar, gracias a mis amistades más cercanas, en especial a Héctor y a Saúl.

No puedo dejar sin mencionar a mi centro de prácticas. Gracias a mi tutora y a todo el Departamento de Matemáticas por todo lo que me han enseñado.

Resumen

El razonamiento matemático está muy presente tanto en la legislación educativa vigente en Cantabria como en las evaluaciones internacionales y nacionales de la competencia matemática. La importancia del razonamiento motiva el estudio, que se aborda en esta memoria, de los tipos de razonamiento que moviliza el alumnado, basándose en la clasificación dada por Charles Sanders Peirce, así como el diseño de estrategias para la evaluación por competencias, según la LOMLOE, del razonamiento matemático, todo ello en el marco de la ESO en Cantabria. La consecución de estos objetivos se aborda mediante el análisis y la evaluación de trece pruebas escritas realizadas por alumnado de un grupo de 4º ESO y de una resolución guiada oral de un problema realizada por un o una estudiante de 2º ESO. Los resultados, comparados con los de la Evaluación de Diagnóstico 2023-2024, muestran que el alumnado participante en la prueba escrita obtiene un mejor resultado en el bloque de Resolución de Problemas frente al de Razonamiento y Prueba, y confirman la competencia matemática del alumno o de la alumna de 2º ESO elegido para la prueba oral. Además, se identifican numerosas deducciones, inducciones y abducciones a lo largo de los ítems evaluados.

Palabras clave: razonamiento matemático, evaluación, LOMLOE, ESO.

Abstract

Mathematical reasoning is well-established in current educational legislation in Cantabria as well as in international and national assessments of mathematical competence. The importance of reasoning motivates the study, addressed in this report, of the types of reasoning mobilized by students, based on the classification given by Charles Sanders Peirce, as well as the design of strategies for competency-based assessment of mathematical reasoning, according to the LOMLOE, all within the framework of ESO in Cantabria. The achievement of these aims is addressed through the analysis and evaluation of thirteen written tests taken by students from a 4th-year ESO group and a guided oral problem-solving exercise taken by a 2nd-year ESO student. The results, compared with those of the 2023-2024 *Evaluación de Diagnóstico*, show that students participating in the written test performed better in the Problem-Solving competency block than in the Reasoning and Proof competency block, and confirm the mathematical competence of the 2nd-year ESO student selected for the oral test. Furthermore, numerous deductions, inductions and abductions were identified throughout the assessed items.

Key words: mathematical reasoning, assessment, LOMLOE, ESO

Índice

1. Introducción

El razonamiento matemático es un concepto fundamental en la enseñanza de las matemáticas, tanto en el campo de la investigación didáctica como durante la práctica docente en el aula (Hjelte et al., 2020). Autores como Ball y Bass (2003) llegan a afirmar que el razonamiento matemático es tan fundamental para usar y comprender las matemáticas como lo es la comprensión lectora para la propia lectura.

La relevancia del razonamiento motiva su clasificación en diferentes tipologías. En este trabajo se desarrolla la categorización planteada por Charles Sanders Peirce, que distingue los razonamientos deductivo, inductivo y abductivo. Tal y como afirma Reid (2003), esta taxonomía no es solo útil para clasificar los razonamientos que moviliza el alumnado si no, sobre todo, para identificar los puntos clave presentes en dichos razonamientos. De entre los tres tipos, la abducción es quizás el menos conocido, aunque no por ello es menos importante que la deducción y la inducción: es el proceso por el cual se forman hipótesis explicativas (Peirce, 1997, p. 230). Se manifiesta en el proceso de raciocinio como un *flash*, de una manera instintiva (Peirce, 1997, p. 242), e incrementa la creatividad del alumnado (Hidayah et al., 2023). Su importancia en la educación de las matemáticas ha ido creciendo en las últimas décadas (Pedemonte y Reid, 2011) y se considera una parte importante del razonamiento matemático (Reid, 2003). Además, se ha reconocido su valor en la enseñanza de las demostraciones matemáticas (Arzarello et al., 2012, p. 98) y en la resolución de problemas (Arzarello y Soldano, 2019; Cifarelli, 2016; Recio et al., 2025).

En el Decreto 73/2022, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, y en la normativa educativa a nivel nacional, recogida en el Real Decreto 217/2022, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se recoge la importancia del razonamiento en el currículum de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. De hecho, se llega a nombrar a uno de los cinco bloques de competencias específicas en matemáticas como “Razonamiento y Prueba”.

Asimismo, la importancia del razonamiento en matemáticas hace necesario el desarrollo de métodos para su evaluación: evaluaciones internaciones y nacionales de la competencia matemática, como el informe PISA (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), 2023a, pp. 18-97), el estudio TIMSS (Mullis et al., 2021) o las Evaluaciones de Diagnóstico (Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP), 2023), le dan un peso significativo en sus pruebas.

El objetivo general de este trabajo es diseñar estrategias para la evaluación por competencias (siguiendo el marco establecido por la Ley Orgánica 3/2020, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006 de Educación, conocida como LOMLOE) del razonamiento matemático en ejercicios y problemas planteados al alumnado de Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Autónoma de Cantabria. Para conseguir lo anterior se plantea, como objetivo específico, el diseño de una batería de problemas y ejercicios (especialmente ricos en los distintos aspectos del razonamiento matemático mencionados en este trabajo y que, por tanto, se prestan mejor que las tareas estándar de la ESO para la evaluación de la competencia en razonamiento matemático), el planteamiento de rúbricas para evaluarlos por competencias y el posterior análisis de los resultados obtenidos.

También como objetivo general de este trabajo, se pretende explorar qué tipos de razonamiento, según la clasificación de Peirce (1878), moviliza el alumnado durante la resolución de ejercicios y problemas matemáticos. En relación con lo anterior, se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Analizar la capacidad del alumnado para razonar deductivamente.
- Analizar cómo aplica el alumnado el razonamiento inductivo en la generalización de patrones.
- Analizar los argumentos abductivos que utiliza el alumnado en el proceso de resolución de un problema matemático.

En Cantabria, la Unidad Técnica de Evaluación y Acreditación de la Consejería de Educación y Formación Profesional (UTEA, 2025) ha publicado, en enero de 2025, un informe general que recoge los resultados de las evaluaciones de diagnóstico en esta comunidad autónoma para el curso 2023/2024. En ella, se especifican los porcentajes de acierto de los ítems clasificados según los bloques de competencias específicas de matemáticas. Para secundaria (2º ESO), se observa que “el porcentaje total de respuestas correctas en la competencia matemática no supera el 45,50 %” (UTEA, 2025, p. 24), siendo este porcentaje el menor de entre las tres competencias evaluadas (los porcentajes totales de aciertos fueron de 71,78 % para la prueba de competencia lingüística en lengua castellana y de 55,51 % para la prueba de competencia lingüística en lengua inglesa). Además, “el peor resultado para la competencia [matemática] se obtuvo en Razonamiento y Prueba con un 43,31 %” (UTEA, 2025, p. 24), obteniéndose un 46,17 % para el bloque competencial de Resolución de Problemas. Atendiendo a los anteriores resultados, se formula una hipótesis asociada al primer objetivo específico: se espera que los resultados de la evaluación por competencias de las tareas planteadas al alumnado objeto de las experiencias de este trabajo estén en la línea de los dados por la UTEA (2025).

Por otro lado, se formulan una serie de preguntas de investigación relacionadas con el resto de los objetivos específicos:

- ¿Hasta qué punto es capaz el alumnado de secundaria que participa en las experiencias planteadas de razonar deductivamente en ejercicios y problemas de matemáticas?
- ¿Hasta qué punto es capaz el alumnado de secundaria que participa en las experiencias planteadas de razonar inductivamente para generalizar patrones?
- ¿Hasta qué punto es capaz el alumnado de secundaria que participa en las experiencias planteadas de generar hipótesis explicativas por medio de la abducción durante el proceso de resolución de problemas matemáticos?

El trabajo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se trata de establecer las definiciones de los constructos “razonamiento” (por ser fundamental en este trabajo) y “argumentación” (al acompañar habitualmente este término al razonamiento). Tras ello, se contextualiza el razonamiento en la educación matemática y se reivindica su importancia. En la línea anterior, se enfatiza la importancia del razonamiento mostrando su presencia en la legislación educativa vigente, así como en las distintas pruebas de evaluación de la competencia matemática, en el ámbito internacional (PISA y TIMSS) y nacional (evaluaciones de diagnóstico). Para terminar la exposición más teórica de este proyecto, se establecen las acepciones de razonamiento deductivo, inductivo y abductivo a utilizar, así como su importancia y conexión con la competencia y el razonamiento matemáticos.

A continuación, y atendiendo a los objetivos, se plantean dos experiencias, así como métodos para evaluar por competencias cada una de ellas:

- Una prueba escrita, en la que se plantean una serie de problemas y ejercicios. En la resolución de dichas actividades es necesario movilizar distintos tipos de razonamiento. Esta prueba escrita se ha desarrollado en un grupo de 4º de ESO de un instituto de educación secundaria de Cantabria. Se plantean rúbricas, de elaboración propia, para evaluar por competencias cada una de las actividades.
- Una resolución guiada oral de un problema relacionado con el razonamiento matemático realizada por un alumno o una alumna de 2º de la ESO de un instituto de educación secundaria de Cantabria, con un reconocido buen desempeño en la competencia matemática. Se plantea una rúbrica, de elaboración propia, para evaluar por competencias esta actividad. Aun así, ante el excelente desempeño en matemáticas del alumno o de la alumna, esta experiencia es sobre todo interesante para estudiar los tipos de razonamiento que el o la estudiante moviliza "en tiempo real" cuando resuelve el problema.

Tras la descripción del diseño metodológico, se muestran los resultados de la evaluación de las distintas evidencias recopiladas (pruebas escritas y resolución guiada), así como un desglose de las diferentes tipologías de razonamiento (deducción, inducción y abducción) que aparecen.

Por último, en las conclusiones del proyecto, se comentan los resultados de la evaluación de las experiencias, comparándose y contrastándose con los publicados por la UTEA (2025). Además, se hace una valoración general en relación con el tipo de razonamiento que el alumnado ha movilizado en las distintas tareas. Por otro lado, se estudian posibles líneas futuras de investigación y se analizan las limitaciones que ha tenido el trabajo.

2. El Razonamiento y la Argumentación

Tal y como explicitan Hanna y Yackel (2003), escribir sobre el razonamiento (y, por extensión, sobre la argumentación), en concreto en el ámbito de las matemáticas, es complicado. Aun así, a la par que difíciles de definir, la importancia del razonamiento y la argumentación es reconocida tanto en la legislación educativa como en los informes internacionales que evalúan la competencia matemática, tal y como se detalla en epígrafes ulteriores. La importancia de estos constructos motiva el introducir este capítulo concretando las acepciones de “razonamiento” y “argumentación” a utilizar en este trabajo.

En primer lugar, en un sentido genérico, se define el razonamiento como un proceso mental por el cual se generan conclusiones a partir de la información disponible en un conjunto de observaciones o premisas (Khemlani, 2018). El paso de las premisas a la conclusión se realiza por medio de una “garantía”, que no necesariamente tiene por qué ser una regla lógica (Walton, 1990). El carácter cognitivo, de reflexión individual de un sujeto, es una característica clave de lo que en este trabajo se entiende por razonamiento.

Por otro lado, se define la argumentación como un mecanismo, de carácter tanto social como verbal (i.e., usando el lenguaje, ya sea de modo oral, escrito, o de otro tipo), que tiene por objetivo resolver o gestionar desacuerdos y conflictos entre dos o más partes (Walton, 1990), implicando siempre intencionalidad. Esta voluntad de convencer y la presencia necesaria de interacción humana, constituyen el eje vertebrador de lo que se entiende en este trabajo por argumentación.

Siguiendo lo expuesto por Walton (1990), se entiende que el razonamiento, aunque podría llegar a darse fuera de todo contexto, se suele encontrar inmerso en un marco concreto, apareciendo muy frecuentemente en la propia argumentación. La clara relación entre razonamiento y argumentación es reforzada por autores como Mercier y Sperber (2011), que defienden que el razonamiento tiene como función la argumentación, sosteniendo la tesis de que la mente humana es una mente social, que necesita y se beneficia de la interacción.

Tras establecer las definiciones anteriores, y una vez clarificado el punto de partida de este trabajo, no se dará importancia a la distinción entre términos como “argumentación”, “razonamiento”, “argumento”, etc.

3. El Razonamiento en la Educación Matemática

El razonamiento matemático se entiende en este trabajo como aquel razonamiento que versa sobre matemáticas o sobre alguna situación interpretable en términos matemáticos.

En el marco general de las evaluaciones del sistema educativo (MEFP, 2023, p. 118) se afirma que “el razonamiento permite desarrollar las destrezas para la percepción de patrones, estructuras y regularidades, así como la observación e identificación de características, relaciones y propiedades de objetos”. Además, se destaca cómo determinados bloques competenciales, como Resolución de Problemas, ponen en acción el razonamiento matemático y la argumentación.

Por otra parte, en el marco de referencia para las pruebas de matemáticas de PISA 2022 (OCDE, 2023a, pp. 18-97), se afirma que el razonamiento matemático implica la evaluación de situaciones, la selección de estrategias, la inferencia de conclusiones lógicas y el desarrollo y la descripción de soluciones, reconociendo cómo se pueden aplicar dichas soluciones. Además, en la citada referencia, se indica que entre las funciones del razonamiento se incluye también la de realizar juicios informados sobre situaciones sociales o familiares que puedan ser resueltas desde una perspectiva matemática. Por último, se resalta la importancia del razonamiento para discernir la validez de la información que bombardea a los individuos en la actualidad.

Asimismo, en este marco de referencia de PISA 2022, se señala al razonamiento matemático como núcleo de la alfabetización matemática, una interacción que se basa y depende de una serie de conocimientos clave. Entre estos prerrequisitos se incluyen los siguientes:

- Comprender cantidades, sistemas numéricos y sus propiedades algebraicas.
- Apreciar el poder de la abstracción y la representación simbólica.
- Observar estructuras matemáticas y sus regularidades.
- Reconocer relaciones funcionales entre cantidades.
- Utilizar modelos matemáticos como modo de entender el mundo real.
- Entender la variación como el eje vertebrador de la estadística.

Otro contexto relevante es el del estudio TIMSS 2023 (Mullis et al., 2021, p. 16) donde se establece que el razonamiento matemático involucra al pensamiento lógico y sistemático. Además, se indica que el razonamiento matemático está patente a la hora de explicar y justificar un método utilizado para obtener la solución de un problema, así como en las inferencias válidas basadas en la evidencia. Finalmente, se enfatiza que el razonamiento es necesario para analizar o generalizar relaciones matemáticas.

El Comité Español de Matemáticas (CEMAT, 2021, p. 11) también introduce algunas concreciones sobre el razonamiento matemático en el ámbito educativo, estableciendo que "los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático cuando en clase: identifican, reconocen, organizan, conectan, representan, construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican, defienden, interpretan, hacen juicios, critican, refutan y cualifican".

Por otra parte, Hjelte et al. (2020) distinguen dos grandes tipos de razonamiento matemático en educación matemática: el de dominio general y el de dominio específico. En el caso del razonamiento de dominio general, y siguiendo con lo expuesto por Hejlte et al. (2020), se distinguen otros dos subtipos de razonamientos: los razonamientos creativo e imitativo (Lithner, 2008), siendo este último el predominante a nivel escolar. Tal y como plantean Hjelte et al. (2020), la clasificación de Lithner no solo ayuda al profesorado a comprender las diferentes manifestaciones del razonamiento entre el alumnado, sino que también enfatiza la necesidad de reforzar el razonamiento creativo, en detrimento de un aprendizaje más "memorístico".

Hjelte et al. (2020) también remarcan la importancia de que los profesores y las profesoras tengan en mente los diferentes dominios específicos de razonamiento (por ejemplo, el razonamiento geométrico o la inferencia informal). Por un lado, deben tener en cuenta las diferentes características de cada dominio; consecuencia de ellas, se puede dar el caso de que un estudiante o una estudiante razone creativamente en un dominio concreto, y que no lo haga en otro. Por otro lado, se debe tener en mente las interacciones entre diferentes dominios específicos de razonamiento (por ejemplo, el razonamiento aditivo, que involucra la suma de números y su interpretación, es necesario como paso previo al razonamiento multiplicativo).

Es preciso señalar que, a pesar de la relevancia de las aportaciones de Hjelte et al. (2020) sobre el razonamiento matemático, que ayudan a enfatizar la importancia de este en la educación matemática, en este trabajo no se hará referencia a los tipos de razonamiento matemático descritos por Hjelte et al. (2020), dado que el enfoque elegido ha sido el propuesto por Peirce (1878).

4. El Razonamiento en la Legislación Educativa

En esta sección, se analiza la presencia de los términos “razonamiento” y “argumentación” en la legislación educativa vigente en la Comunidad Autónoma de Cantabria, más precisamente en las matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello, se buscan dichos conceptos en las competencias clave (presentes en el Anexo I del Real Decreto 217/2022) y en las competencias específicas de matemáticas en la enseñanza básica, concretadas en Cantabria (recogidas en el Decreto 73/2022).

El término “razonamiento” aparece en múltiples ocasiones: en primer lugar, se menciona en la descripción de la competencia clave STEM que “la competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos” (Real Decreto 217/2022, p. 28). La importancia del razonamiento en la competencia STEM se concreta en los descriptores operativos STEM1 y STEM4, correspondientes al perfil de salida de la enseñanza básica:

> STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y

> emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario. (Real Decreto 217/2022, p. 28)
>
> STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos. (Real Decreto 217/2022, p. 29)

En las asignaturas de Matemáticas en la ESO, las menciones al concepto son también numerosas. Se establece la importancia del constructo, afirmándose que el razonamiento es una característica de las matemáticas (Decreto 73/2022, p. 232). De igual forma, se fija el razonamiento matemático como uno de los pilares utilizados para la definición de las competencias específicas de matemáticas. De hecho, da nombre a uno de los cinco bloques que engloban dichas competencias específicas en la Educación Secundaria Obligatoria: "razonamiento y prueba", que agrupa las competencias específicas 3 y 4 (Decreto 73/2022, p. 233). Se observa cómo, de hecho, la competencia específica 3 citada a continuación enfatiza la importancia del razonamiento explícitamente:

> 3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. (Decreto 73/2022, p. 236)

Asimismo, se incide en cómo el razonamiento ayuda a ver patrones y regularidades, tanto en situaciones reales como abstractas. También se afirma cómo el desarrollo de la competencia específica 3 promueve "el uso del razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas" (Decreto 73/2022, p. 237). Por último, reconoce la mejora del razonamiento en el alumnado cuando éste se plantea problemas novedosos.

Por otro lado, la competencia específica 4, citada a continuación, no hace referencia explícita al razonamiento, aunque hace alusión a un concepto relacionado con él: el pensamiento computacional.

> 4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. (Decreto 73/2022, p. 237)

No hay una definición unívoca de pensamiento computacional; de hecho, tal y como detallan Polanco-Padrón et al. (2021), hay muchas definiciones variadas, que se pueden clasificar según el elemento en el cual se pone el énfasis (es decir, si ponen énfasis en su papel como proceso mental o de resolución de problemas, en la metodología, etc.). Una de las primeras definiciones fue formulada por Wing (2006): se presenta a continuación en una versión sintetizada por Polanco-Padrón et al. (2021, p. 60).

> El pensamiento computacional implica resolver los problemas, diseñar sistemas y entender el comportamiento humano, aprovechando los conceptos fundamentales para las ciencias informáticas. El pensamiento computacional incluye una gama de herramientas mentales que reflejan la amplitud del campo de la informática.

Por otro lado, y fuera ya del bloque competencial de Razonamiento y Prueba, el razonamiento aparece en la competencia específica 1:

> 1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de <u>razonamiento</u>, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. (Decreto 73/2022, p. 235)

También en la descripción de la competencia específica 2 se menciona cómo el razonamiento matemático y el científico son básicos para verificar las soluciones obtenidas tras el análisis de un problema (Decreto 73/2022, p. 236).

Se observa así cómo las competencias específicas 1, 2, 3 y 4 de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria son las más conectadas con el razonamiento matemático. Por ello, adquieren una especial relevancia a lo largo del presente trabajo.

No se debe olvidar la conexión de las competencias específicas de las materias con los descriptores operativos del perfil de salida de la enseñanza básica. La Ilustración 1 muestra cómo conectan las competencias fundamentales para este proyecto con los descriptores operativos. Destacan los ya comentados descriptores STEM1 y STEM2, conectados con las cuatro competencias específicas desarrolladas. Por último, es de procedencia observar cómo en el currículum no solo se conectan estas cuatro competencias específicas de matemáticas con la competencia STEM, sino con muchas otras, como la Competencia en Comunicación Lingüística (CCL), la Competencia Digital (CD), la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA), la Competencia Ciudadana (CC), la Competencia Emprendedora (CE), o la Competencia en Conciencia y Expresión Culturales (CCEC). De hecho, la única competencia clave que no está en conexión directa con estas competencias específicas es la Competencia Plurilingüe (CP).

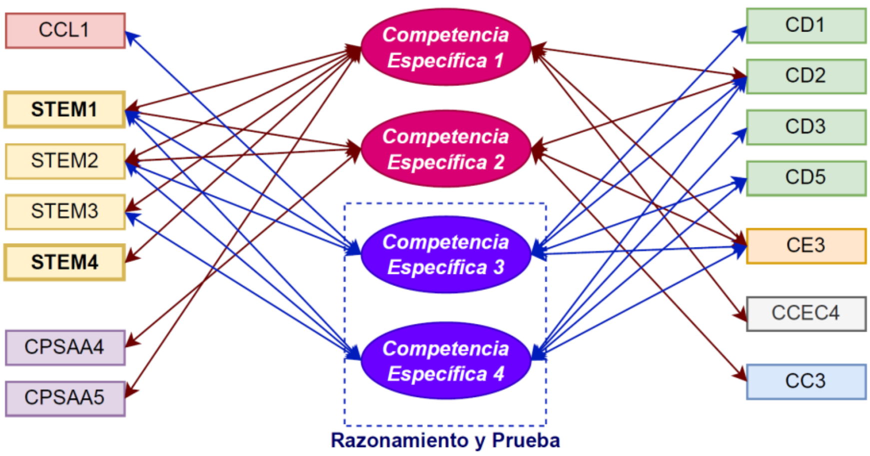


Ilustración 1: Descriptores operativos asociados a las competencias específicas 1 a 4 de matemáticas en la ESO (elaboración propia).

En cuanto al concepto de “argumentación”, si bien sus menciones no son tan frecuentes, suele mostrarse yuxtapuesto al razonamiento. Esto refuerza la relación que comúnmente se establece entre los conceptos de razonamiento y argumentación.

5. El Razonamiento en PISA, TIMSS y las Evaluaciones de Diagnóstico

La omnipresencia del razonamiento y la argumentación en la educación matemática preuniversitaria, evidenciada en epígrafes precedentes, hacen necesario establecer estándares nacionales e internacionales que permitan su evaluación. Se analizan primero dos de las evaluaciones internacionales más reconocidas: el informe PISA (OCDE, s.f.) y el estudio TIMSS (TIMSS & PIRLS International Study Center, s.f.). A nivel nacional, se estudia la importancia del razonamiento en la Evaluación general del Sistema y en las Evaluaciones de diagnóstico (MEFP, 2023).

El marco de referencia para las pruebas de matemáticas PISA 2022 (OCDE, 2023a, pp. 18-97) tiene entre sus principales contribuciones resaltar la importancia del razonamiento matemático. A diferencia de ediciones anteriores del informe, no solo se incide en la importancia del razonamiento como componente intrínseco al ciclo de resolución de problemas (que comprende los procesos de “formular”, “emplear” e “interpretar y evaluar”), sino como un proceso cognitivo con entidad y aplicaciones propias. En la prueba PISA 2022 se le otorga un peso aproximado del 25 % de la puntuación (OCDE, 2023a, Tabla 2.1).

En el marco de referencia de matemáticas del estudio TIMSS 2023 (Mullis et al., 2021) también se reconoce la importancia del razonamiento en matemáticas, clasificándolo como uno de los tres “dominios cognitivos” de la prueba (siendo los otros dos “Conocer” y “Aplicar”). De hecho, se le da un peso del 20 % de los puntos en la prueba de 4º curso (que coincide con 4º de Primaria en España), que asciende al 25 % en la evaluación de 8º curso (que corresponde a 2º ESO en el sistema español).

En las evaluaciones de diagnóstico a nivel nacional, el bloque competencial de Razonamiento y Prueba tiene un gran peso: de hecho, constituye el 30 % de los ítems de la prueba, tanto en 4º de Primaria como en 2º de ESO (MEFP, 2023, Tablas C.II.8 y C.II.15).

6. Deducción, Inducción y Abducción

Se analizan ahora tres tipos de razonamiento: la deducción, la inducción y la abducción. Esta clasificación coincide con la realizada por el filósofo Charles

Sanders Peirce (1878) en artículos como *Deduction, Induction, and Hypothesis*.

El razonamiento deductivo es aquel en el que, a partir de un conjunto de premisas, se infiere una conclusión, asegurando y creyendo que el hecho de que las premisas sean ciertas garantiza la veracidad de la conclusión (Audi, 1999; Vorobej, 1992). Así, en una deducción se aplican reglas generales a casos particulares (Peirce, 1878) para poder garantizar la certeza de la veracidad de lo concluido. Aparte de la certeza de la conclusión ya comentada, una propiedad importante de la deducción es también la llamada "monotonicidad" (*monotonicity*, en inglés): en un argumento deductivo, no existen dudas sobre la validez de la conclusión, incluso si se añaden nuevas premisas al conjunto inicial de estas (Aliseda, 2003).

Se distinguen dos tipos de deducciones: las válidas son aquellas en las que la creencia del sujeto o sujetos de que la veracidad de las premisas implica la conclusión es realmente cierta, y las inválidas, aquellas que no son válidas (Vorobej, 1992). Se ejemplifica ahora la deducción, modificando un ejemplo dado por Peirce (1878): se tiene una bolsa de alubias blancas y se tiene un montón de alubias de dicha bolsa. Se deduce que todas las alubias del montón son blancas.

Además, se definen también los argumentos deductivos sólidos (*sound*, en inglés) como aquellos que son válidos y que parten de premisas verdaderas (Thompson, 1996). Nótese que existen argumentos deductivos válidos que no son sólidos, como el siguiente ejemplo ("Validity and Soundness", s.f.): se parte de las premisas "Todos los monos araña son elefantes" y "Ningún elefante es un animal", de lo que se deduce, aplicando reglas de inferencia lógicas, la conclusión "Ningún mono araña es un animal"; si bien la veracidad de las premisas implica la conclusión, las premisas son ambas claramente falsas.

Las demostraciones matemáticas clásicas son "pruebas deductivas formalizadas" (Alfaro-Carvajal et al., 2019, p. 59). Así, tal y como afirman Godino y Recio (2001, p. 407), en el contexto de los fundamentos de las matemáticas como se entienden en la actualidad, "la noción de demostración está íntimamente ligada a las nociones de deducción y de sistema axiomático (o formal)". En la misma línea, Yopp (2009, p. 287) declara que una demostración matemática es una expresión del razonamiento deductivo. Siendo la demostración un concepto tan troncal de las matemáticas, la importancia de la deducción en esta ciencia es ineludible. Por último, el marco de matemáticas de PISA 2022 refuerza la importancia de la deducción, reconociéndola como una rasgo característico del proceso matemático (OCDE, 2023a, p. 28).

Aun así, no se debe enfatizar únicamente en el aspecto deductivo de las matemáticas en detrimento de otros tipos de razonamiento, más relacionados con la intuición. De hecho, si bien "la obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente", dichas pruebas son descubiertas "mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición" (Polya, 1954/1966, p. 14). Polya (1954/1966) comenta cómo el razonamiento demostrativo (relacionado con la deducción) y el plausible (que distingue entre intuiciones más o menos razonables) no son incompatibles, sino que se complementan. Esta palpable importancia de la dualidad demostración-intuición en matemáticas se traslada al campo de la didáctica de estas, tal y como evidencia el siguiente extracto:

> Un estudiante seriamente interesado en matemáticas, que pretenda dedicar a ellas su vida, debe aprender el razonamiento demostrativo; él es su profesión y el signo distintivo de su ciencia. Sin embargo, para obtener un éxito real debe también aprender el razonamiento plausible; de él dependerá su labor creadora. El estudiante aficionado tomará también el gusto al razonamiento demostrativo: quizá tenga poca necesidad de usarlo directamente, pero con él adquirirá un término con el que comparar la supuesta evidencia de todas clases con que se enfrentará en la vida moderna. Sin embargo, en todos sus esfuerzos necesitará del razonamiento plausible. En todo caso, un estudiante de matemáticas ambicioso intentará aprender las dos clases de razonamiento, demostrativo y plausible, cualesquiera que puedan ser sus intereses ulteriores. (Polya, 1954/1966, pp. 14-15)

También otros matemáticos, como Felix Klein, reconocían la importancia de la dualidad demostración-intuición antes mencionada. Bass (2005/2007, p. 692) afirma cómo Klein "respetaba el rigor, aunque acogía la intuición y la imaginación con agrado, y el significado que las matemáticas toman de las ciencias y del mundo experimental".

La inducción se enmarca en el razonamiento plausible. Se puede definir el razonamiento inductivo como aquel en el que se infiere una conclusión o generalización a partir de ejemplos u observaciones específicas (Audi, 1999). Es importante tener en cuenta, tal y como detalla Douven (2021), que la inducción no tiene una intención explicativa, sino que se basa únicamente en argumentos probabilísticos y frecuentistas (es decir, si se observa una cierta propiedad un número de veces determinada, se infiere su veracidad a nivel general; pero no se trata de explicar dicha frecuencia de aparición). Lo anterior será especialmente relevante a la hora de distinguir la abducción, que definiremos más adelante, de la inducción.

Se ejemplifica ahora la inducción, modificando un ejemplo dado por Peirce (1878): se tiene una bolsa de alubias, y se sacan un número significativo de ellas. Se observa que todas las alubias que se han extraído son blancas. Por ende, se concluye que todas las alubias de la bolsa son blancas. Se observa cómo, en el caso de la inducción, la veracidad de la conclusión obtenida no está garantizada, sino que es inferida por ser probable. Así, desde un punto de vista lógico, es perfectamente compatible que todas las alubias extraídas sean blancas y que haya una alubia roja en la bolsa.

La importancia del razonamiento inductivo en las matemáticas y, en concreto, en la enseñanza de estas, está reconocida en la literatura. En el contexto educativo, el marco de matemáticas de PISA 2022 reconoce la importancia dual del razonamiento deductivo y el inductivo, tanto en el mundo actual como en los ítems diseñados para la prueba PISA (OCDE, 2023a, p. 28). Asimismo, matemáticos como Hans Freudenthal llegaban a oponerse a las aproximaciones deductivas en educación matemática, inclinándose por un enfoque inductivo (Bass, 2005/2007). Más en general, extractos como el siguiente expresan la importancia de la inducción en la matemática:

> Las matemáticas también requieren de la observación, de la

experimentación, de la inducción, de la causalidad, pues surgen de la actividad de la mente humana, en un ejercicio continuo de introspección del mundo interior de los pensamientos, en relación con el mundo exterior de la realidad. (Peñalva-Rosales, 2009, p. 142)

El razonamiento inductivo también tiene importancia como paso previo a la deducción: "parece razonable y natural que la fase inductiva preceda a la fase demostrativa. Primero, intuir; luego, probar" (Polya, 1954/1966, p. 125). Esta "simbiosis" entre la inducción y la deducción queda evidenciada en el trabajo de Crespo-Crespo y Farfán (2005, p. 290):

> La mayoría de las ciencias, en particular las que atañen a los campos de las matemáticas, parten de la inducción, unida a la intuición, como método para enunciar sus proposiciones… Tal método [el método inductivo] en las matemáticas puede ser el punto de partida para la búsqueda de regularidades en un grupo de datos que pueden ser de naturaleza diversa (números, gráficas, formas geométricas, etc.) hacia la formulación de generalizaciones sobre la base de lo observado. Probar una propiedad requiere de la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal.

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) también se reconoce la importancia de la inducción para la búsqueda de relaciones matemáticas a través del estudio de patrones y de casos particulares. Asimismo, se enfatiza en este informe la necesidad de que los estudiantes conozcan, además de los beneficios de la inducción, sus limitaciones. En el Anexo I se ejemplifica cómo no todos los patrones generalizan como esperaríamos a partir de un número pequeño de observaciones.

Aunque numerosas fuentes, incluida la legislación educativa (Decreto 73/2022; Real Decreto 217/2022) o el marco de matemáticas de PISA (OCDE, 2023a), solo mencionan los razonamientos deductivo e inductivo, es posible distinguir un tercer tipo de razonamiento. Se plantea el siguiente ejemplo, variante de uno dado por Douven (2021): Saúl y Héctor tuvieron una gran discusión que acabó con su amistad. Un vecino te comenta que los ha visto juntos tomándose un café y merendando. Concluyes que lo que debe haber ocurrido es que vuelven a ser amigos. Es claro que el anterior razonamiento no es deductivo ya que, sin ir más lejos, se viola la monotonicidad: si se añade la premisa inicial de que Saúl y Héctor tienen un negocio a partes iguales y que deben reunirse periódicamente para concretar cómo organizarlo, la conclusión obtenida no se sostiene con tanta firmeza. Por otro lado, el argumento no encaja con la inducción, que está basada en la generalización a partir de casos particulares. Por tanto, se evidencia que es necesario incluir un tercer tipo de razonamiento: el razonamiento abductivo.

Charles Sanders Peirce fue el responsable de sistematizar y popularizar este tipo de razonamiento, al que también llamó a lo largo de su carrera "hipótesis" y "retroducción" (Bellucci y Pietarinen, 2022; Reid, 2018). Aun así, lejos de proporcionar una definición fija, el significado que Peirce le da a la abducción fue evolucionando con el tiempo (Bellucci y Pietarinen, 2022; Reid, 2018). Se encuentran, de hecho, dos fases del pensamiento peirceano a este respecto (Bellucci y Pietarinen, 2022; Reid, 2018): aquella que se centra en la estructura lógica del razonamiento abductivo y aquella que se centra en las funciones que resuelve o aborda la abducción.

A nivel lógico, Peirce define la abducción en diversos trabajos a través de silogismos. Por ejemplo, Peirce (1867, p. 285) define la abducción (que llama "hipótesis"), a través del siguiente silogismo:

"Todo M es, por ejemplo, P', P'', P''', etc.,
S es P', P'', P''', etc.;
S es probablemente M."

Más tarde, Peirce (1878, p. 472) define la abducción como la inferencia de un caso a partir de una regla general y un resultado. Se da el siguiente ejemplo, modificando uno dado por el propio Peirce (1878): si se parte del resultado "Tengo un montón de alubias blancas cerca de la bolsa" y de la regla general "Todas las alubias de la bolsa son blancas", se concluye el caso o hipótesis "El montón de alubias blancas ha sido extraído de la bolsa". Años después, Peirce (1883, p. 140) proporciona otro silogismo que codifica la abducción, y que se muestra a continuación ligeramente modificado:

“M cumple, por ejemplo, P', P'', P''', etc.
S cumple el r % de las proposiciones P', P'', P''', etc.
Entonces, probable y aproximadamente, S se parece a M en un r %”.

Tras el desarrollo lógico en sus trabajos de antes de 1900, Peirce abandona parcialmente las formulaciones silogísticas de la abducción y pasa a definirla como un método para encontrar y seleccionar hipótesis explicativas (Bellucci y Pietarinen, 2022, p. 2). De hecho, llega a afirmar que en sus trabajos anteriores (los que se han comentado) confunde, sutilmente, abducción e inducción, tal y como desarrollan Bellucci y Pietarinen (2022, p. 6).

Así, ya en su época más madura, Peirce comienza a preocuparse por las funciones de la abducción (Bellucci y Pietarinen, 2022; Reid, 2018). Ya en sus primeros trabajos, Peirce (1878, p. 472) establece una definición de la abducción (hipótesis en este trabajo) con un formato distinto al silogismo: primero, se identifica una circunstancia o un hecho curioso que podría explicarse suponiendo que dicho hecho es un caso particular de una regla general. Tras ello, se adopta dicha suposición como base para comprender el fenómeno observado. A principios del siglo XX, en sus clases sobre el pragmatismo en Harvard, Peirce (1997, p. 230) fija la definición de la abducción como el proceso por el cual se forman hipótesis explicativas. Además, afirma que la abducción, que se manifiesta en el proceso de raciocinio como un *flash*, de una manera instintiva (Peirce, 1997, p. 242), es la única operación lógica que introduce nuevas ideas: la deducción no hace más que evidenciar las consecuencias lógicas necesarias de una hipótesis que ya está establecida, y la inducción tampoco generaría conocimiento novedoso; si bien la inducción, como la abducción, es un tipo de inferencia ampliativo (es decir, es un razonamiento en el que la conclusión va más allá de lo que está lógicamente contenido en las premisas), no tiene intencionalidad explicativa, tal y como se ha comentado antes (es importante enfatizar que, si bien la inducción solo usa como sustento argumentos estadísticos, argumentos abductivos con intencionalidad explicativa también pueden basarse parcialmente en la estadística [Douven, 2021]). Se concluye, tal y como especifica Reid (2018), que las dos funciones que destaca Peirce sobre la abducción son la de explicar hechos sorprendentes y la de explorar para descubrir conocimiento novedoso. De esta manera, la abducción toma el papel protagonista en la faceta creativa del razonamiento; es la piedra angular de la creatividad (von Glasersfeld, 1998).

Además, en esta última fase de su carrera, Peirce hace notar que la abducción no es simplemente un tipo más de razonamiento: es el punto de partida del proceso de investigación científica (Bellucci y Pietarinen, 2022). En detalle, Peirce (1997, p. 230) especifica que el proceso científico hace uso de los tipos de razonamiento ya vistos de la siguiente manera: en primer lugar, por medio del razonamiento abductivo, se genera una hipótesis explicativa de un evento sorprendente. Tras ello, la deducción infiere de esta hipótesis una proposición derivada, que predice una consecuencia determinada de dicha hipótesis formulada. Por último, la consecuencia deducida es probada empíricamente por medio de la inducción.

Para terminar esta revisión histórica, se recoge la que, según Reid (2018), es la última referencia a una expresión lógica del razonamiento abductivo (Peirce, 1997, p. 245). Esta última forma lógica se localiza temporalmente en los trabajos de Peirce de principios del siglo XX.

El hecho sorprendente, C, se observa;
Pero si A fuera verdadero, C se seguiría de A.
Por lo tanto, hay una razón para sospechar que A es verdadero.

Este último esquema lógico de la abducción encaja en gran medida con todo lo que se ha descrito anteriormente. Se observa que el ejemplo inicial de Saúl y Héctor se puede enmarcar en lo anterior: el hecho sorprendente es el verlos merendando juntos. Si la premisa de que vuelven a ser amigos fuera verdadera, el hecho sorprendente se seguiría lógicamente de ella. Por lo tanto, se sospecha que vuelven a ser amigos. Igualmente, el ejemplo de las alubias inspirado en los trabajos de Peirce (1878) también se puede enmarcar en este nuevo esquema: el hecho sorprendente es que haya un montón de alubias blancas al lado de la bolsa. Si la premisa de que las alubias hubieran sido extraídas de la bolsa de alubias blancas fuera verdadera, el hecho sorprendente se seguiría lógicamente de ella. Por lo tanto, se hipotetiza que las alubias del montón han sido extraídas de la bolsa.

Se usará, indistintamente, el esquema lógico anterior, así como la formulación dada por Peirce (1878) en términos de “resultado”, “regla general” y “caso” o “hipótesis”, a partir de este punto del trabajo siempre que se requiera de una expresión lógica del razonamiento abductivo.

Se destaca, por último, el trabajo de Eco (1983) en el que se elabora una clasificación de distintos tipos de razonamientos abductivos, partiendo de la definición de Peirce (1878), que es aplicada en trabajos que conectan la abducción con la educación matemática (Pedemonte y Reid, 2011). Esta taxonomía se desarrolla en el Anexo II.

A continuación, se muestran varios ejemplos de abducciones. En primer lugar, se plantea la siguiente situación, inspirada en un ejemplo planteado por Flores-Samaniego (2017, pp. 31-32). Un alumno o una alumna de 2º ESO recibe un problema con el siguiente enunciado: “un triángulo cumple que la suma del cuadrado de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero”. El docente o la docente proporciona al estudiante o la estudiante el teorema de Pitágoras como herramienta útil para resolver la problemática. El alumno o la alumna se da cuenta de que, si el triángulo fuera rectángulo, se tendría la propiedad del enunciado, utilizando el teorema de Pitágoras. Por lo tanto, se sospecha que el triángulo dado es rectángulo. En este ejemplo, por supuesto, se tiene en cuenta que el sujeto que razona no conoce el hecho de que el recíproco del teorema de Pitágoras es cierto, ya que si no razonaría deductivamente. Se observa que el caso anterior encaja tanto en la definición de abducción enunciada por Peirce en términos de “resultado”, “regla general” y “caso” (Peirce, 1878), como en la variante de principios del siglo XX (Peirce, 1997, p. 245), tal y como se muestra en la Tabla 1. Además, como solo se dispone de una regla general (el teorema de Pitágoras), el ejemplo representa una abducción sobrecodificada (véase el Anexo II).

(Peirce, 1878)		Principios del S. XX (Peirce, 1997)
Resultado	“Este triángulo tiene la propiedad de que la suma del cuadrado de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero”	Hecho Sorprendente (C) = “Este triángulo tiene la propiedad de que la suma del cuadrado de la longitud de dos de sus lados es igual al cuadrado de la longitud del tercero” Si A= “El triángulo es rectángulo” es verdadero, C se sigue lógicamente de A por el teorema de Pitágoras. Entonces, sospechamos que A es verdadero.
Regla General	“Los triángulos rectángulos cumplen el teorema de Pitágoras”	
Caso	“El triángulo es rectángulo”	

Tabla 1: Ejemplo de abducción en matemáticas (Flores-Samaniego, 2017, pp. 31-32) enmarcado en las definiciones dadas por Peirce en 1878 y a principios del siglo XX.

En segundo lugar, se plantea el problema anterior, sin proporcionar la “pista” de la utilidad del teorema de Pitágoras. En ese caso, el alumno o la alumna debería considerar todos los teoremas que conoce sobre triángulos (como el teorema del seno, por ejemplo), por lo que se estaría ante una abducción subcodificada (véase el Anexo II). Se observa cómo la intervención del docente o de la docente puede cambiar el tipo de abducción que moviliza el alumnado (Pedemonte y Reid, 2011, p. 292): al proporcionar la regla general, transforma una abducción subcodificada en una sobrecodificada.

Por último, se presenta la siguiente situación, inspirada en una tarea planteada por Reid (2003) y analizada, en términos de la teoría de Eco (1983), por Pedemonte y Reid (2011). Se le plantea a María, una alumna, el conocido problema que pide calcular el número total de apretones de manos en una reunión de un número dado de personas si cada participante saluda a todos los demás, pero “a la inversa”: es decir, se le pide que calcule el número de asistentes a la reunión si se dieron 2001000 apretones de manos. Tras una primera fase de exploración, el docente o la docente guía a María hasta una regla que permite averiguar el número de apretones de manos de un grupo de n personas sumando todos los números naturales de 1 a n-1. María prueba con el caso n=26, y suma con su calculadora los números del 1 al 25, obteniendo que 26 personas se dan 325 apretones de manos. Ahora, María se da cuenta de que $26 \cdot (26/2) - (26/2)$ es 325. A partir del caso anterior, María inventa una regla general que cree que modeliza el número de apretones en una reunión de n personas: $n \cdot (n/2) - (n/2)$. Ahora, siguiendo el esquema de Peirce (1997), razona de manera abductiva: dispone del hecho C = “Un grupo de personas se da 2001000 apretones de mano, en las condiciones establecidas en el enunciado”. “Tanteando” con valores de n, se da cuenta de que si el hecho A = “Hay 2001 personas en la reunión” fuera cierto, el hecho C se seguiría lógicamente de A a partir de la regla general inventada anteriormente. Por lo tanto, infiere que es probable que el número de personas en la reunión sea 2001. Este argumento puede clasificarse, en concreto, como una abducción creativa (véase el Anexo II), ya que María se inventa la regla general.

En la educación de las matemáticas, la abducción ha ido ganando protagonismo en las últimas décadas (Pedemonte y Reid, 2011). Reid (2003) afirma que el razonamiento abductivo es una parte importante del razonamiento matemático y que el desarrollo del razonamiento abductivo del alumnado debe preocupar a los profesores y las profesoras de matemáticas. Cifarelli (2016, p. 210) indica que la abducción ayuda a explicar cómo los y las aprendices desarrollan explicaciones plausibles para situaciones “sorprendentes” con las que se topan. Este mismo autor caracteriza la abducción en la educación matemática como un proceso continuo de construcción de significado, que el alumnado utiliza como fuente de ideas innovadoras al enfrentarse a problemas (Cifarelli, 1997, p. 20). En esta misma línea, Hidayah et al. (2023) concluyen que el tipo de razonamiento que incrementa la creatividad del alumnado es el razonamiento abductivo. Además, estos autores afirman que la abducción, junto a la deducción, es esencial para el aprendizaje por descubrimiento. Komatsu y Jones (2022) concluyen que, en concreto, la abducción creativa lleva a la construcción de nuevo conocimiento matemático.

Otros autores, como Arzarello et al. (2012, p. 98), afirman que los procesos abductivos e inductivos son tan importantes como el razonamiento deductivo para la enseñanza de demostraciones matemáticas. En consonancia con lo anterior, Arzarello y Paola (2003) defienden que el alumnado prueba sus conjeturas matemáticas utilizando hechos, ideas, palabras y oraciones producidas durante la fase de exploración y conjetura.

Por último, las situaciones que requieren de la resolución de problemas también constituyen una oportunidad para razonar de manera abductiva (Cifarelli, 2016, p. 210). Aunque no se aborda en este trabajo, otros autores y otras autoras evidencian la aparición del razonamiento abductivo en la resolución de problemas en Entornos de Geometría Dinámica, como GeoGebra (Arzarello y Soldano, 2019; Recio et al., 2025).

7. Experiencias

Las dos experiencias diseñadas, que se describen a continuación, concretan los objetivos generales presentados en la introducción de esta memoria: por un lado, se pretende evaluar el razonamiento matemático del alumnado, desde un enfoque competencial, en el marco de la legislación educativa vigente. Por otra parte, se pretende detectar instancias de razonamiento en los productos evaluables (resoluciones en papel entregadas por los y las participantes, grabación de una resolución guiada), para su posterior análisis y clasificación, siguiendo la categorización basada en los trabajos de Peirce desarrollada en la sección 6.

Si bien se pueden reconocer múltiples competencias específicas de matemáticas en la ESO (descritas, para Cantabria, en el Decreto 73/2022) en los ejercicios planteados, para la evaluación por competencias solo se analizan las competencias específicas 1, 2, 3 y 4. Siguiendo lo expuesto en la sección 4, la selección anterior viene motivada por el hecho de que las competencias 3 y 4 pertenecen al bloque competencial de Razonamiento y Prueba, y por la presencia explícita del razonamiento matemático en las descripciones de las competencias 1 y 2, que componen el bloque de Resolución de Problemas.

7.1. Experiencia 1. Prueba Escrita en 4º ESO

7.1.1. Contexto

El instituto público en el que se ha realizado la prueba escrita se sitúa en una zona urbana, en concreto en Santander. El centro dispone de algo más de 500 alumnos y alumnas de ESO y Bachillerato. El alumnado del instituto procede de realidades sociales bastante diferenciadas y las familias de los estudiantes tienen grados de implicación muy variados.

La prueba escrita se ha desarrollado en un grupo de 4º ESO durante una tutoría. El grupo está compuesto por 18 alumnos y alumnas, de los cuales 11 cursan Matemáticas A y 7 cursan Matemáticas B. Del total de estudiantes, participaron en la prueba 13 alumnos y alumnas: 8 cursan Matemáticas A y 5 cursan Matemáticas B. Del resto de alumnado, cuatro estudiantes (tres que cursan Matemáticas A y uno que cursa Matemáticas B) realizaron por voluntad propia la prueba, pero no se pudo recoger porque no entregaron el consentimiento firmado por sus tutores legales que permitía su análisis en el marco de esta experiencia. Además, una persona se negó a participar, por motivos personales.

7.1.2. Consideraciones Éticas

Para la realización de esta experiencia se han tenido en cuenta las consideraciones éticas pertinentes. En primer lugar, se ha solicitado permiso al director/a del centro escolar, por escrito, siguiendo la solicitud de consentimiento informado del Anexo III. Tras ello, se ha contactado con el tutor o la tutora del grupo de 4º de la ESO en cuestión, que ha dado el visto bueno a la realización de esta prueba en su grupo durante una sesión de tutoría. Después de la aceptación por parte del tutor o la tutora, se ha solicitado a las familias del alumnado su consentimiento informado, utilizando el modelo adjunto en el Anexo IV: en esta solicitud, se les informaba de los detalles del estudio, así como del tratamiento de sus datos. En detalle, se les comunicó el hecho de que la prueba escrita sería anónima, recogiéndose solo junto a la resolución escrita de la misma si cursan Matemáticas A o Matemáticas B. Además, se les comunicó que la prueba se realizaría durante la hora de tutoría y de que no tendría ninguna repercusión sobre el trato que recibirá el alumnado o sobre las calificaciones de los y las estudiantes. Asimismo, el conductor de la experiencia se ha asegurado de que también el alumnado estuviera al corriente de los detalles del estudio, mediante la lectura de la solicitud, así como mediante la resolución de todas sus dudas sobre el mismo.

7.1.3. Diseño de la Prueba

A continuación, se analiza cada uno de los ejercicios propuestos para la prueba escrita, se justifica la elección de los mismos, y se indican los saberes básicos involucrados y los criterios de evaluación elegidos para su evaluación por competencias. Los enunciados completos se adjuntan en el Anexo V y las rúbricas para evaluar cada uno de los ejercicios se localizan en el Anexo VI.

Ejercicio 1

Inspirada en la entrada *Dodgy Proofs* de NRICH (s.f.), esta tarea propone un argumento matemático en el que se infiere que el perímetro de un cuadrado es siempre cuatro veces su área a partir del estudio de un caso concreto ("en un cuadrado de lado 1 cm, se cumple que el perímetro, que mide 4 cm, es cuatro veces el área, de valor 1 cm^2"). El alumnado deberá decidir si lo anterior es verdadero o falso y razonar su respuesta. Además, se pedirá que, en el caso de que la afirmación sea falsa (como efectivamente ocurre), se trate de reformular el enunciado para que este sea verdadero. Se espera que las respuestas se enmarquen dentro de dos grandes categorías:

- El o la estudiante cree, erróneamente, que es verdadero. En este caso, se podría estar aplicando erróneamente una inducción (cayendo en un doble peligro: en generalizar falazmente, como en el ejemplo del Anexo I, y en aplicar un argumento inductivo que reposa sobre datos demasiado escasos, en un único ejemplo). Incluso puede que después de la generalización anterior el alumnado estuviera tratando de dar una prueba deductiva formalizada, a partir de la manipulación de las fórmulas del perímetro ($P = 4x$) y el área ($A = x^2$) de un cuadrado de lado x.
- El o la estudiante detecta el error en la asunción. Se hipotetiza que el alumnado podría usar estrategias como las siguientes para probar la falsedad del enunciado:
    - Manipulación de las fórmulas del perímetro ($P = 4x$) y el área ($A = x^2$) de

un cuadrado de lado x, que lleva a inferir que

$$\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}\neq 4, \forall x\in\{2,3,4,\dots\}.$$

Este enfoque algebraico requiere únicamente de una cadena de argumentos deductivos (casi catalogables de “mecánicos”).

- En vez de comenzar manipulando algebraicamente expresiones conocidas, el alumnado prueba un caso distinto al de lado 1 cm, por ejemplo, el de lado 2 cm. Ya con ese caso, el enunciado falla, lo que permite al alumnado demostrar deductivamente la falsedad del ejercicio.

Para la evaluación, se plantea una rúbrica, de elaboración propia, basada en los criterios de evaluación 1.3 (correspondiente a la competencia específica 1), y 3.1 y 3.2 (correspondientes a la competencia específica 3). Si bien los criterios no son exactamente comunes para Matemáticas A y Matemáticas B, los indicadores de la rúbrica se han diseñado para adaptarse a las dos versiones.

Los dos principales saberes básicos que se movilizan en este ejercicio son los siguientes:

- “Modelos geométricos: representación y explicación de relaciones numéricas y algebraicas en situaciones diversas” (Decreto 73/2022, 2022, pp. 251, 258): en este caso, la relación numérica enunciada (“el perímetro es el cuádruple del área”) es fundamental para el ejercicio.
- “Elaboración y comprobación de conjeturas sobre propiedades geométricas mediante programas de geometría dinámica u otras herramientas” (Decreto 73/2022, 2022, pp. 252, 258): es fundamental movilizar este saber básico para poder determinar la validez o falsedad del enunciado.

Ambos son comunes a las materias de Matemáticas A y Matemáticas B y pertenecen a la gran idea de “Visualización, razonamiento y modelización geométrica” del sentido espacial.

Ejercicio 2

Esta tarea es una variante de la unidad “Triangular Pattern” de PISA 2022 (OCDE, 2023b, pp. 376-379), que engloba una pregunta (la cuestión CMA150Q03) del proceso cognitivo de razonamiento. En ella, se plantea un patrón geométrico, formado por triángulos rojos y azules. El alumnado deberá analizarlo, calcular algunos casos particulares y generalizar el patrón. En primer lugar, se pedirán algunos casos particulares: dos de ellos podrán sacarse continuando el patrón "manualmente", pero el tercero requerirá de un razonamiento inductivo: observando algunos casos iniciales, y contando en ellos el número de triángulos rojos y azules, el o la estudiante inferirá una regla general. Se plantea una última pregunta: "¿Es correcto afirmar que, independientemente de cuántas filas pintemos, el dibujo tendrá más del 50 % de los triángulos de color rojo?". Se busca que el alumnado razone deductivamente a partir de la generalización obtenida que afirma que cada fila tiene más triángulos rojos que azules (en concreto, uno más): esto debe llevar al alumnado, aplicando un argumento puramente deductivo, a que la suma de los triángulos rojos si hay n filas pintadas será igual a la suma de los triángulos azules más n.

Para la evaluación, se plantea una rúbrica, de elaboración propia, basada en los criterios de evaluación 1.1 y 1.2 (correspondientes a la competencia específica 1), y 4.1 (correspondiente a la competencia específica 4). Si bien los criterios no son exactamente comunes para Matemáticas A y Matemáticas B, los indicadores de la rúbrica se han diseñado para adaptarse a las dos versiones.

Los dos principales saberes básicos que se movilizan en este ejercicio son los siguientes:

- "Patrones, pautas y regularidades: observación, generalización y término general en casos sencillos" (Decreto 73/2022, 2022, pp. 252, 258): este saber básico, común para Matemáticas A y Matemáticas B, y que pertenece a la gran idea de "Patrones" del sentido algebraico, está muy presente en este ejercicio. El alumnado necesita observar el patrón del dibujo, comprenderlo y generalizarlo, primero añadiendo filas manualmente y luego abstrayendo casos imposibles de manejar gráficamente. Por último, se pide una descripción del caso enésimo, es decir, del patrón con n filas dibujadas (es decir, se pide el cálculo de términos generales).
- "Situaciones de proporcionalidad directa e inversa en diferentes contextos: desarrollo y análisis de métodos para la resolución de problemas" (Decreto

73/2022, 2022, pp. 251, 257): este saber básico, común para Matemáticas A y Matemáticas B, y perteneciente a la gran idea de “Razonamiento Proporcional” del sentido numérico, engloba las cuestiones sobre porcentajes de este problema. Aun así, probablemente estas preguntas son más bien propias de los conocimientos y destrezas de las matemáticas de 1º a 3º de la ESO, donde se encuentra el saber básico “Porcentajes: comprensión y resolución de problemas” (Decreto 73/2022, 2022, p. 244).

Ejercicio 3

Esta tarea es una variante del ítem M032424 de TIMSS 2011 (Foy et al., 2013, p. 127), que corresponde al “dominio cognitivo” de razonamiento. En ella, se plantean dos balanzas, que muestran dos situaciones en la que se pesan distintas combinaciones de unos bloques metálicos. El alumno o la alumna debe ser capaz de elegir un peso para el bloque metálico entre los cuatro dados (5 gramos, 6 gramos, 7 gramos u 8 gramos), de manera que las situaciones mostradas en ambas balanzas sean ciertas. Tras ello, se ha añadido una última cuestión: “¿Serías capaz de expresar todos los pesos que puede tener un bloque metálico, a partir de la información de la que dispones?”. Para la primera cuestión, bastaría “probar” cada opción planteada en las balanzas de los gráficos, comprobando la validez de cada una. Para la segunda cuestión, se plantean dos posibles estrategias a seguir por el alumnado:

- “Traducción al álgebra” de la situación mostrada por los dibujos de las balanzas. Definiendo x como el peso de un disco, el alumnado “traduce” la situación de las balanzas al álgebra por medio de inecuaciones ($x < 8$ y $3x > 20$). Tras ello, basta manipular las expresiones algebraicas para obtener el intervalo abierto buscado (que tiene por extremos $20/3$ y 8), que es la solución del sistema formado por ambas inecuaciones (constituyendo todo este último procedimiento una instancia de razonamiento deductivo).
- A partir del primer apartado, el alumnado observa que “el conjunto de pesos admisibles contiene a 7 gramos, pero no contiene ni a 6 ni a 8 gramos” (“caso”). Ahora, de la redacción de la cuestión (“Un bloque metálico puede pesar entre … y … gramos”), se muestra ante el alumnado, de una manera

casi evidente, la siguiente regla general: “El conjunto de pesos admisibles buscado es un intervalo (de extremos, por ejemplo, a y b, a < b)”. Tras lo anterior, el alumnado razona deductivamente, infiriendo como resultado que el conjunto de pesos admisibles buscado es un intervalo de extremos a y b, a < b, cumpliendo $6 < a \leq 7$ y $7 \leq b < 8$. Tras esta deducción, el alumno o la alumna podría ir “afinando” los extremos, “tanteando”, hasta llegar al intervalo buscado. Por ejemplo, podría inferir, inductivamente, que si 6,7 gramos, 6,67 gramos, 6,667 gramos, o 6,6667 gramos, son pesos válidos para un disco (esto lo obtendría “probando”), un peso de la forma 6,6…67, con un número finito y arbitrario de seises en su expansión decimal, también será un peso válido. Lo anterior, junto al hecho de que los pesos de la forma 6,6…6, con un número finito y arbitrario de seises en su expansión decimal, no son válidos (esta última afirmación también podría haber sido inferida inductivamente), permitiría al alumnado deducir que el extremo inferior del intervalo buscado debe ser aproximadamente 6,67 gramos. De la misma forma, podría inferir inductivamente que 7,9…9 gramos, con un número finito y arbitrario de nueves en su expansión decimal, también es un peso válido (obteniendo candidatos a extremo superior del intervalo). Esto le permitiría aproximarse a la solución pedida, evitando el uso directo de métodos algebraicos.

Para la evaluación, se plantea una rúbrica, de elaboración propia, basada en los criterios de evaluación 2.2 (correspondiente a la competencia específica 2), y 4.2 (correspondiente a la competencia específica 4). Si bien los criterios no son exactamente comunes para Matemáticas A y Matemáticas B, los indicadores de la rúbrica se han diseñado para adaptarse a las dos versiones.

Los tres principales saberes básicos que se movilizan en este ejercicio son los siguientes:

- “Operaciones con números reales en la resolución de situaciones contextualizadas, valorando si los resultados [se añade la palabra, “obtenidos” en la redacción del saber básico para Matemáticas B] son razonables” (Decreto 73/2022, 2022, pp. 251, 257): este saber básico, común a Matemáticas A y Matemáticas B, y enmarcado en la gran idea “Sentido de las operaciones” del sentido numérico, está presente implícitamente en este ejercicio, en cada “prueba de validez” que el estudiante o la estudiante realiza con cada posible peso para el disco metálico.

- “Variables: asociación de expresiones simbólicas al contexto del problema y diferentes usos” (Decreto 73/2022, 2022, pp. 252, 258): este saber básico, común para Matemáticas A y Matemáticas B, y perteneciente a la gran idea “Variable” del sentido algebraico, puede ser útil para resolver la situación planteada si ésta es “traducida al álgebra”.
- “Ecuaciones, sistemas de ecuaciones e inecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología” (Matemáticas A), “Ecuaciones, sistemas e inecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología” (Matemáticas B) (Decreto 73/2022, 2022, pp. 252, 259): al igual que en el anterior apartado, este saber básico, perteneciente a la gran idea “Igualdad y desigualdad” del sentido algebraico (de redacción casi idéntica en ambas modalidades de matemáticas), será necesariamente movilizado si se resuelve el ejercicio desde un enfoque algebraico.

Ejercicio 4

Esta tarea es una simplificación del problema “A Question of Dancing”, planteado por Perelman (1979, pp. 72-73). En ella, se plantea un entrenamiento conjunto entre dos escuelas de baile, al que acuden un total de 20 personas. Se sabe que el primer bailarín o bailarina de la primera escuela baila con un solo bailarín o bailarina de la otra escuela, que el segundo bailarín o bailarina de la primera escuela baila con dos bailarines de la segunda escuela, etc. hasta que el último bailarín o bailarina de la primera escuela baila con todos los bailarines y bailarinas de la segunda escuela. Se pregunta al alumnado cuántos bailarines y bailarinas de la segunda escuela acudieron al entrenamiento. Se espera que el alumnado llegue a la conclusión de que tiene que haber el mismo número de bailarines y bailarinas en ambas escuelas y que, por tanto, la respuesta a la pregunta es 10 personas.

Para la evaluación, se plantea una rúbrica, de elaboración propia, basada en los criterios de evaluación 1.1 (correspondiente a la competencia específica 1) y 4.1

(correspondiente a la competencia específica 4). Si bien los criterios no son exactamente comunes para Matemáticas A y Matemáticas B, los indicadores de la rúbrica se han diseñado para adaptarse a las dos versiones.

En este ejercicio, se movilizan sobre todo los dos saberes básicos de la gran idea "Modelo matemático" del sentido algebraico, comunes en Matemáticas A y Matemáticas B (Decreto 73/2022, 2022, pp. 252, 258):

- "Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones [en Matemáticas B, se añade "y de las herramientas tecnológicas adecuadas"]".
- "Estrategias de deducción y análisis de conclusiones razonables de una situación de la vida cotidiana a partir de un modelo".

7.1.4. Análisis de los Resultados

En esta sección, se recogen los resultados de la evaluación por competencias de cada uno de los ejercicios. Además, se analizan las distintas instancias de deducción, inducción y abducción que han aparecido en las resoluciones.

7.1.4.1. Evaluación por Competencias de la Prueba Escrita

En esta sección, se comentan los resultados obtenidos evaluando por competencias la prueba escrita, siguiendo las rúbricas del Anexo VI. Los resultados de la evaluación al completo se encuentran tabulados en el Anexo VII. Además, en ese mismo anexo se muestra un gráfico por cada ejercicio de la prueba escrita que resume los resultados de la evaluación.

En el ejercicio 1, la puntuación media obtenida por los 13 participantes es aproximadamente 0,692 sobre 3 (23,1 % de la puntuación máxima), siendo las puntuaciones medias del alumnado de Matemáticas A y Matemáticas B 0,375 sobre 3 (12,5 % de la puntuación máxima) y 1,2 sobre 3 (40 % de la puntuación máxima), respectivamente. Los resultados son, en general, muy bajos. La moda es 0, ya que 9 personas obtienen una puntuación de 0 (ni siquiera reconocen que la afirmación del ejercicio es errónea) y solo dos personas obtienen la puntuación completa, justificando correctamente que el enunciado es erróneo (y proporcionando un contraejemplo que apoya su hipótesis). Destaca también el hecho de que ninguno de los participantes con la máxima puntuación (noveno y duodécimo participantes) cursa Matemáticas A.

En el ejercicio 2, la puntuación media obtenida por los 13 participantes es, aproximadamente, 4,462 sobre 8 (55,8 % de la puntuación máxima), siendo las puntuaciones medias del alumnado de Matemáticas A y Matemáticas B 4,25 sobre 8 (53,1 % de la puntuación máxima) y 4,8 sobre 8 (60 % de la puntuación máxima), respectivamente. Los resultados son mejores para este segundo ejercicio que para el primero: solo 4 de 13 participantes obtienen puntuaciones por debajo del 4 de 8. Asimismo, todo el alumnado, salvo el cuarto y el octavo participantes, consigue generalizar el patrón sin necesidad de dibujarlo para el caso con 50 filas. Además, cinco estudiantes obtienen fórmulas en función de n para el número de triángulos de cada color, si se continuara el patrón hasta la fila enésima. Por último, remarcar que las diferencias entre Matemáticas A y Matemáticas B que sí se observaban en el ejercicio 1 se atenúan para este problema.

En el ejercicio 3, la puntuación media obtenida por los 13 participantes es, aproximadamente, 3,92 sobre 6 (65,3 % de la puntuación máxima), siendo las puntuaciones medias del alumnado de Matemáticas A y Matemáticas B 3,375 sobre 6 (56,3 % de la puntuación máxima) y 4,8 sobre 6 (80 % de la puntuación máxima), respectivamente. De nuevo, los resultados mejoran respecto al ejercicio precedente: solo el tercer participante falla al seleccionar el peso correcto. Aun así, es importante observar cómo el porcentaje de acierto en la pregunta que pide el intervalo de pesos admisibles es significativamente más bajo: de hecho, solo el duodécimo participante consigue el crédito completo (3 puntos) en esta cuestión.

El ejercicio 4 es el que peores resultados presenta: la puntuación media obtenida por los 13 participantes es, aproximadamente, 0,62 sobre 3 (20,7 % de la puntuación máxima), siendo las puntuaciones medias del alumnado de Matemáticas A y Matemáticas B 0,25 sobre 3 (8,3 % de la puntuación máxima) y 1,2 sobre 3 (40 % de la puntuación máxima), respectivamente. Al igual que en el ejercicio 1, la moda vuelve a ser 0, con 8 participantes que no obtienen ningún punto. De hecho, solo el noveno participante, de entre los trece estudiantes, consigue la puntuación completa. Por último, vuelve a ser notable la diferencia entre los resultados entre distintas modalidades de matemáticas.

Por último, si se atiende a las valoraciones de cada criterio de evaluación en cada ejercicio, se puede inferir el rendimiento del alumnado participante en cada competencia específica considerada (competencias específicas 1 a 4).

Los criterios de evaluación 1.1 y 1.2 de la competencia específica 1 han sido valorados en los ejercicios 1, 2 y 4, y en el ejercicio 2, respectivamente. Tomando el conjunto de puntuaciones, se observa que la media entre los trece participantes para el criterio 1.1 es de aproximadamente 2,31 sobre 4 (57,8 % de acierto) y la mediana, 2 de 4. Para el criterio 1.2, la puntuación media es de 1,15 sobre 2 (57,5 % de acierto), siendo la mediana 1 de 2. Para el criterio 2.2 de la competencia específica 2, evaluado en el ejercicio 3, se han obtenido resultados muy buenos, con una media de aproximadamente 2,77 sobre 3 (92,3 % de acierto) y con mediana igual a 3 sobre 3 (100 % de acierto). Conjuntamente, se puede concluir que el porcentaje de acierto en el bloque competencial de Resolución de Problemas (competencias específicas 1 y 2) es de, aproximadamente, el 69,2 % (computando la media de las puntuaciones totales sobre 9 de los criterios 1.1, 1.2 y 2.2). Realizando este mismo análisis particularizando en cada modalidad de matemáticas, se concluye que, para este bloque competencial, el porcentaje de acierto en Matemáticas A es del 65,3 % y en Matemáticas B, del 75,6 %.

Los criterios de evaluación 3.1 y 3.2 de la competencia específica 3 han sido valorados en el ejercicio 1. Así, se observa que la media entre los trece participantes para el criterio 3.1 es de aproximadamente 0,308 sobre 1 (30,8 % de acierto) y la mediana, 0 de 1. Para el criterio 3.2, los resultados son peores, obteniendo 0,154 sobre 1 (15,4 % de acierto) de puntuación media, y 0 de 2 como mediana. Los criterios de evaluación 4.1 y 4.2 de la competencia específica 4 han sido valorados en los ejercicios 2 y 4, y en el ejercicio 3, respectivamente. Tomando el conjunto de puntuaciones, se observa que la media entre los trece participantes para el criterio 4.1 es de 1,85 sobre 6 (30,8 % de acierto) y la mediana, 2 de 6. Para el criterio 4.2, se tiene que la puntuación media es 1,15 sobre 3 (38,3 % de acierto), y que la mediana es 1 sobre 3. Conjuntamente, se puede concluir que el porcentaje de acierto en el bloque competencia de Razonamiento y prueba (competencias específicas 3 y 4) es de, aproximadamente, el 31,5 % (computando la media de las puntuaciones totales sobre 11 de los criterios 3.1, 3.2, 4.1 y 4.2). Realizando este mismo análisis particularizando en cada modalidad de matemáticas, se concluye que, para este bloque competencial, el porcentaje de acierto en Matemáticas A es del 21,6 % y en Matemáticas B, del 47,3 %.

7.1.4.2. Instancias de Deducción, Inducción y Abducción en la Prueba Escrita

En primer lugar, los participantes 9 y 12, que obtienen la máxima puntuación en el ejercicio 1, parecen proceder por el camino no algebraico (probando la propiedad en el cuadrado de lado 2 cm, y "topándose" así con un contraejemplo para el enunciado). Por ejemplo, el participante 9 escribe como respuesta a si la afirmación es cierta lo siguiente: "No, ya que si tienes un cuadrado de 2 cm de lado no da 4 veces más, sino que dos y es distinto en cada cuadrado que no tenga el mismo tamaño". Entre los participantes con crédito parcial, destacan respuestas como la del participante 4 ("Sí, con esta regla de tres se puede descubrir siempre el perímetro, pero solo es 4 en este cuadrado, los otros cuadrados se resuelven de la misma manera, pero diferentes resultados"), que si bien parece que infiere la imposibilidad de generalizar el enunciado a cualquier cuadrado (se ha intuido que sí ha detectado el error de la afirmación, aunque se expresa de una manera un tanto "extraña", nombrando a la "regla de tres"), no llega a proporcionar un contraejemplo. Por último, los participantes que no obtienen puntuación suelen razonar con deducciones inválidas, ya que la creencia del sujeto de que la veracidad de las premisas planteadas implica la conclusión no es cierta (por ejemplo, el participante 3 escribe que el enunciado "es correcto, ya que el cuadrado tiene cuatro lados y esto pasa con todos los cuadrados").

En el segundo ejercicio, el alumnado aplica inducción para generalizar el patrón que observa en los primeros casos, como se esperaba (por ejemplo, el participante 8, tras reconocer el patrón, afirma sobre él que “en la siguiente fila siempre habrá un triángulo más que en la anterior. Por ejemplo, en la fila 4, habrá 4 triángulos rojos y tres azules. Fórmula = n+1”). Sorprenden ciertos argumentos deductivos inválidos para hallar porcentajes, como el que plantea el participante 6 que, a partir del porcentaje erróneamente calculado en el apartado b (obtiene 0,6 %), deduce que el porcentaje para el patrón de seis filas está en proporcionalidad directa con el anterior y que, por tanto, se puede obtener multiplicando 0,6 % por 6 y dividiéndolo entre 3 (número de filas del caso del apartado b).

Para el tercer ejercicio, ciertos participantes, como el 9, han argumentado deductivamente la elección de 7 gramos como el peso válido (el participante nombrado escribió lo siguiente: “Una sola placa tiene que pesar menos de 7 gramos por lo que las tres primeras opciones son correctas, pero tres placas tienen que pesar más de 20 gramos por lo que solo la respuesta “c” es la correcta ya que es la única que supera los 20 gramos”). En cuanto a la pregunta abierta, todos y todas se han decantado por un enfoque no algebraico, deduciendo, como se comenta en epígrafes anteriores, que el 7 debe estar en el intervalo de pesos admisibles, pero que dicho intervalo no debe contener ni al 6 ni al 8. Luego, inductivamente, el alumnado “afina” los extremos con mayor o menor precisión. Por ejemplo, el primer estudiante escribe que el intervalo es de 7 a 7,5; el segundo, de 6,7 a 7,6; el décimo de 6 a 7; el decimotercero, de 6,7 a 7,99, etc.

Para el cuarto, los razonamientos del alumnado o no están explícitos o no están completos, solamente destacando el esquema de la situación efectuado por el participante 9, el cual le permite razonar deductivamente para concluir la solución.

7.2. Experiencia 2. Resolución Guiada de un Problema

7.2.1. Contexto

La experiencia se ha realizado a un único estudiante o una única estudiante, que cursa 2º ESO en un instituto de una zona urbana, en concreto en Torrelavega.

El alumno o la alumna destaca en su centro de referencia por su excelente desempeño académico, tanto en Matemáticas (buen desempeño en la competencia matemática) como en el resto de las materias. Además, tiene una gran capacidad de trabajo y un alto nivel de compromiso con todas las asignaturas, evidenciando un gran desempeño competencial en el bloque de Destrezas Socioafectivas.

7.2.2. Consideraciones Éticas

Para la realización de esta experiencia, se han tenido en cuenta las consideraciones éticas pertinentes. No fue necesario solicitar un consentimiento informado al director o directora del centro de origen del estudiante o la estudiante, ya que la experiencia se realizó fuera de horario escolar, en el domicilio del alumno o de la alumna. En primer lugar, se solicitó a la familia del alumno o de la alumna su consentimiento informado, utilizando el modelo adjunto en el Anexo VIII: en esta solicitud, se les informaba de los detalles del estudio, así como del tratamiento de sus datos. En detalle, se les comunicó el hecho de que la resolución guiada de los problemas sería grabada y, tras ello, transcrita para su análisis, reflejándose en la presente memoria únicamente dicha transcripción escrita, debidamente anonimizada, para asegurar que el único dato personal explícito del alumno o de la alumna sea el curso escolar en el que se encuentra matriculado o matriculada. Además, el conductor de la experiencia se ha asegurado de que también el estudiante o la estudiante estuviera al corriente de los detalles del estudio, mediante la lectura de la solicitud, así como mediante la resolución de todas sus dudas sobre el mismo (incidiendo en cómo la participación en el estudio es voluntaria, y en cómo no tendría ninguna repercusión sobre el trato que recibirá el alumno o la alumna, o sobre sus calificaciones en su centro de referencia). Tras todo lo anterior, la resolución guiada se realizó en el domicilio del alumno o de la alumna, en un horario consensuado con el tutor o la tutora legal firmante y con el propio o la propia estudiante.

7.2.3. Diseño de la Prueba

La prueba en cuestión consiste en la resolución guiada y oral de un problema, en la que un alumno o una alumna dialoga con el docente o la docente en el contexto de una entrevista. Este formato ha sido utilizado por otros autores y otras autoras para estudiar cómo razona el alumnado (Cifarelli, 1997, 1999, 2016; Sáenz-Ludlow, 1997). A continuación, se analiza el ejercicio propuesto, se justifica la elección del mismo, y se indican los saberes básicos involucrados y los criterios de evaluación elegidos para su evaluación por competencias. El enunciado completo se adjunta en el Anexo IX y la rúbrica para evaluarlo se localiza en el Anexo X. La rúbrica en cuestión es de elaboración propia.

El ejercicio propuesto está basado en un ítem de PISA 2000, llamado "Manzanas" (Consejería de Educación del Gobierno de Navarra, s.f.), al que se le ha añadido contexto y explicaciones (para clarificarlo), y se le ha cambiado las especies de los árboles del enunciado. La elección de ejercicio viene motivada por la necesidad de que el alumno o la alumna generalice patrones para llegar a la solución del mismo.

Para evaluar este ejercicio, se recurre a los siguientes criterios de evaluación de primer a tercer curso de la ESO: 1.2, 1.3, 2.1, 3.2 y 4.1 (Decreto 73/2022, 2022, pp. 240-242). Por otro lado, en este ejercicio se movilizan múltiples saberes básicos, pero destacan, sobre todo, los siguientes (Decreto 73/2022, 2022, pp. 242-248):

- "Estrategias variadas de recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana" (perteneciente a la gran idea "Conteo" del sentido numérico) : al empezar a explorar el ejercicio, el alumno o la alumna procede a analizar, e incluso dibujar, algunos "diseños agrícolas" distintos de los ejemplificados. En ellos, el estudiante o la estudiante procederá a contar los números de abedules y perales presentes en los diseños para poder sacar conclusiones.
- "Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas" y "Relaciones recíprocas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas" (pertenecientes a la gran idea "Sentido de las operaciones" del sentido numérico): se requiere manejar sumas, restas, productos y divisiones

de números enteros, así como la dualidad entre la raíz cuadrada y el elevar al cuadrado, para poder contestar a las preguntas de la situación contextualizada planteada.

- "Identificación de patrones y regularidades numéricas" (pertenecientes a la gran idea "Conteo" del sentido numérico), "Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos" y "Fórmulas y términos generales: obtención mediante la observación de pautas y regularidades sencillas y su generalización" (pertenecientes a la gran idea "Patrones" del sentido algebraico): los saberes básicos anteriores hacen referencia a la importancia de la generalización de los patrones numéricos que aparecen en el número de perales y de abedules en la situación del problema.

7.2.4. Análisis de los Resultados

En esta sección, se recogen los resultados de la evaluación del ejercicio de la resolución guiada (teniendo en cuenta la transcripción de la grabación de la experiencia del Anexo XI), y se analizan las distintas instancias de deducción, inducción y abducción que han aparecido a lo largo de la resolución.

7.2.4.1. Evaluación por Competencias de la Resolución Guiada

Los resultados de la evaluación al completo se encuentran tabulados en el Anexo XII. La puntuación obtenida por el alumno o la alumna es de 9 sobre 10, habiendo obtenido únicamente un crédito parcial en el criterio de evaluación 1.2 (por no haber justificado de manera completa su resolución del último apartado).

7.2.4.2. Instancias de Deducción, Inducción y Abducción en la Resolución Guiada

Para inferir el número de perales en el diseño de cuatro filas, el o la estudiante procede del siguiente modo: en primer lugar, cuenta el número de perales en el diseño de tres filas, y obtiene nueve. Basado en su observación, se percata de que tres por tres es nueve, e inventa una regla general: el número de perales en el diseño de n filas es n por n. Este razonamiento no se considera inductivo: si bien en el ejercicio se muestra una tabla con el número de perales para el caso n=1 y el caso n=2, el alumno o la alumna razonó mirando únicamente el caso n=3. Por lo tanto, al partir de un único caso, no se considera inducción. En un sentido amplio, se podría considerar una abducción creativa (véase el Anexo II), en la que el alumno o la alumna inventa una regla general. De hecho, la propia invención de la regla general podría cuadrar en el siguiente esquema lógico de la abducción (Peirce, 1997): el o la estudiante observa que tres por tres da el número de perales para el caso de n=3 filas. Si la regla general "n por n es el número de perales del diseño con n filas" fuera cierta, el hecho observado se seguiría lógicamente de ella. Por lo tanto, el o la estudiante tiene razones para sospechar que la regla general es cierta. Por último, tras haber inferido inductivamente la regla general, es capaz de deducir el número de perales para el diseño de cuatro filas: "Porque cuatro filas por cuatro columnas… Dieciséis".

En cambio, la inferencia del número de abedules se ajusta más a una inducción, porque sí se explicita claramente en el discurso que deduce el caso n=5 a partir de la generalización de todos los casos anteriores, que se encuentran ya tabulados. "Porque ocho por cinco cuarenta. Porque aquí es por dos [señala el caso en el que hay dos filas], aquí es por tres [señala el caso en el que hay tres filas], aquí es por cuatro [señala el caso en el que hay cuatro filas], y aquí es por cinco".

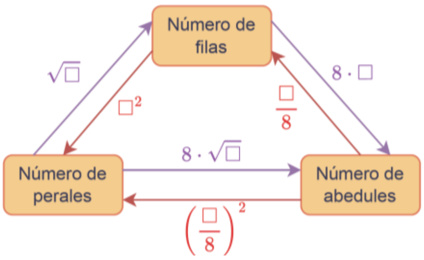


Ilustración 2: Procedimientos inferidos por el alumno o la alumna para calcular un parámetro del ejercicio a partir de otro (elaboración propia)

Para responder a las preguntas 3 y 4, el alumno o la alumna recurre al razonamiento deductivo, teniendo en cuenta todo lo que ya ha inferido anteriormente. Al haber comprendido cómo calcular el número de perales y de abedules a partir del número de filas del diseño, el alumno o la alumna es capaz de deducir cómo calcular el número de abedules dado el número de perales, y viceversa, "componiendo" operaciones, tal y como se muestra en la Ilustración 2. Por ejemplo, para calcular el número de abedules a partir del número de perales, el alumno o la alumna razona del siguiente modo: "Puedes hacer la raíz cuadrada de 441 [teclea en la calculadora], que da 21, y la multiplicas por 8, y da 168”. Análogamente, para calcular el número de perales a partir del número de abedules, el alumno o la alumna razona como sigue: “Vale, pues puedes hacer 136 entre 8 [Teclea en la calculadora]. Da 17. Y multiplicarlo por 17 [Teclea en la calculadora de nuevo]. 17 por 17”.

Por último, con algo más de dificultad, el alumno o la alumna deduce que, si en la fila n, el número de perales es $n \cdot n$ y el número de abedules es $8 \cdot n$, n debe ser 8 para que el número de árboles de cada tipo sea igual.

8. Conclusiones

Tal y como se establece en epígrafes precedentes, en este trabajo se pretende diseñar estrategias para la evaluación por competencias del razonamiento matemático, así como analizar las instancias de razonamiento deductivo, inductivo y abductivo que moviliza el alumnado, todo ello en el marco de la Educación Secundaria Obligatoria en Cantabria. Para lograr estos objetivos generales, se establecieron una serie de objetivos específicos que fueron abordados, en su totalidad, en este trabajo.

En primer lugar, se han propuesto una serie de tareas que han permitido evaluar por competencias el razonamiento matemático (en base a criterios de evaluación de las competencias específicas 1 a 4 de matemáticas en la enseñanza básica, tal y como se detallan en el Decreto 73/2022). Estas tareas se han estructurado en dos actividades: una prueba escrita que se realizó a un grupo de 4º ESO y una resolución guiada oral que se llevó a cabo con un alumno o una alumna de 2º ESO.

Además, se han elaborado rúbricas para la evaluación por competencias de las tareas propuestas (véase el Anexo VI y el Anexo X): estos instrumentos de evaluación están basados en criterios de evaluación asociados a las competencias específicas 1 a 4 de matemáticas en la ESO.

Los resultados de la evaluación de la prueba escrita confirman parcialmente la hipótesis de investigación: el porcentaje de acierto de los ítems clasificados en el bloque competencial de Razonamiento y Prueba es de 31,5 %, un mal resultado, en la línea del obtenido por la UTEA (2025, p. 24), que catalogaba a este bloque competencial como el peor valorado en la evaluación de la competencia matemática en 2º ESO. Por otro lado, en el bloque de Resolución de Problemas, el porcentaje de acierto fue de un 69,2 %, un resultado significativamente mejor que el 46,17 % de acierto obtenido por la UTEA (2025, p. 24) en la evaluación de la competencia matemática en 2º ESO. Sin aventurarse a sacar conclusiones estadísticas a partir de los resultados obtenidos para el alumnado participante, parece que, de 2º a 4º ESO, hay una cierta mejora en el bloque competencial de Resolución de Problemas, mientras que en el bloque de Razonamiento y Prueba el nivel competencial se mantiene.

En cuanto a la resolución guiada, el excelente resultado obtenido por el o la estudiante refuerza y confirma su ya conocido excelente nivel de desempeño en la competencia matemática.

Como último comentario respecto a la evaluación de la prueba escrita, destaca la diferencia presente en el porcentaje de acierto de los ítems clasificados en el bloque competencial de Razonamiento y Prueba dependiendo de la modalidad de matemáticas: el alumnado de Matemáticas A obtiene un 21,6 %, mientras que el alumnado de Matemáticas B alcanza un 47,3 %. Lo anterior podría explicarse en base al enfoque de cada modalidad, así como a partir de los intereses del alumnado: los y las estudiantes de Matemáticas B suelen inclinarse más por bachilleratos científicos, mientras que los y las estudiantes de Matemáticas A prefieren bachilleratos sin materias específicas de matemáticas u otras opciones como los Grados Medios. La comentada diferencia de perspectiva queda reflejada en la legislación:

> Matemáticas A se desarrolla preferentemente mediante la resolución de problemas, la investigación y el análisis matemático de situaciones de la vida cotidiana; mientras que Matemáticas B profundiza, además, en los procedimientos algebraicos, geométricos, analíticos y estadísticos, incorporando contextos matemáticos, científicos y sociales. (Decreto 73/2022, 2022, p. 235)

Aun con todo lo anterior en consideración, sería interesante estudiar esta diferencia con una muestra más amplia.

En segundo lugar, se han examinado los razonamientos del alumnado (en las pruebas escritas y en la resolución guiada) y se han clasificado las distintas instancias reconocidas como deducciones, inducciones o abducciones. Gracias a este análisis, se ha podido contestar a la preguntas de investigación planteadas.

En primer lugar, el alumnado participante en las actividades parece ser capaz de razonar deductivamente, aunque a veces moviliza deducciones inválidas (como en el ejercicio 1 de la prueba escrita). El alumnado que realizó la prueba escrita suele utilizar deducciones que evitan el manejo explícito del álgebra:

- En el caso del ejercicio 1, los y las estudiantes razonaron deductivamente dando un contraejemplo, evitando la “manipulación algebraica” de las fórmulas del perímetro y el área.
- En el caso del ejercicio 3, los y las estudiantes dedujeron que el intervalo de pesos admisibles está entre 6 y 8 gramos y que contiene a 7 gramos; ningún o ninguna participante planteó un sistema de inecuaciones a resolver “algebraicamente”.

En la resolución guiada, destaca sobre todo el razonamiento deductivo empleado por el o la estudiante en las respuestas a los apartados 3 y 4 (en las que el alumno o la alumna “compuso reglas generales” que había inferido en apartados precedentes).

En segundo lugar, el alumnado moviliza numerosas inducciones a lo largo de las actividades:

- En el ejercicio 2 de la prueba escrita, los y las estudiantes razonan inductivamente para generalizar el patrón dado.
- En el ejercicio 3 de la prueba escrita, los y las estudiantes razonan inductivamente para “afinar” los extremos del intervalo de pesos admisibles.
- En la resolución guiada, el alumno o la alumna parece inferir inductivamente el número de abedules en un diseño de n filas.

Por último, no se han registrado evidencias claras de la capacidad del alumnado de razonar abductivamente en la prueba escrita. Aun así, en la resolución guiada se ha detectado una instancia de abducción creativa para la determinación del número de perales en un diseño de n filas.

Este trabajo de fin de máster presenta ciertas limitaciones que se deben tener en cuenta. En primer lugar, existe una limitación en cuanto a la muestra, que en este estudio ha sido tomada por conveniencia, ya que el grueso del alumnado accesible para el conductor de las experiencias era el de su centro de prácticas. Por lo tanto, este estudio no ha producido resultados generalizables a la población completa de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria de Cantabria. De hecho, tal y como queda explícito en los objetivos de este trabajo, las conclusiones obtenidas solo pretenden dar información sobre los y las participantes de las experiencias. Si se buscara generalizar a todo el alumnado de Educación Secundaria Obligatoria de Cantabria, habría que replantear el muestreo para tratar de seleccionar un grupo de estudiantes representativo de la población completa.

En segundo lugar, el conductor de la experiencia se ha topado con ciertas limitaciones al llevar a cabo, especialmente, la prueba escrita. La franja temporal de la que dispuso fue de entre treinta y cuarenta minutos (algo escasa) y, además, al alumnado de Matemáticas A le coincidió la experiencia en el mismo día en el que se examinaron de matemáticas (lo que hizo que muchos alumnos y muchas alumnas estuvieran más cansados y cansadas de lo habitual).

Por otro lado, más justificación en las respuestas de la prueba escrita hubieran ayudado a dilucidar más instancias de razonamiento. Aun así, se entiende que el alumnado no está acostumbrado a explicar en detalle sus razonamientos, con lo que la falta de detalle era previsible.

Por último, el conductor de estas experiencias considera que el formato de la resolución guiada de problemas en viva voz tiene mucho interés para tratar de entender cómo razona el alumnado. Además, el hecho de contar con un o una estudiante con un buen desempeño en la competencia matemática ha enriquecido la entrevista y su posterior análisis. Por tanto, sería interesante plantear más resoluciones guiadas orales, de mayor duración que la de este trabajo (dos o tres problemas en lugar de uno).

9. Bibliografía

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75. https://dx.doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Aliseda, A. (2003). Mathematical Reasoning Vs. Abductive Reasoning: A Structural Approach. *Synthese, 134*, 25-44. https://doi.org/10.1023/A:1022127429205

Arzarello, F., Bussi, M. G. B., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A. y Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 97-143). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_5

Arzarello, F. y Paola, D. (2003). *Mathematical objects and proofs within technological environments: an embodied analysis*. Comunicación presentada en la reunión CERME 3, Bellaria, Italia.

Arzarello, F. y Soldano, C. (2019). Approaching Proof in the Classroom Through the Logic of Inquiry. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 221-243). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_10

Audi, R. (Ed.). (1999). *The Cambridge Dictionary of Philosophy* (2ª ed.). Cambridge University Press.

Ball, D.L. y Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. En J. Kilpatrick, W.G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principals and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática (R. Marín Malavé, Trans.). *La Gaceta de la RSME*, *10*(3), 689-706 (Trabajo original publicado en 2005).

Bellucci, F. y Pietarinen, A.V. (2022). Peirce’s Abduction. En L. Magnani (Ed.), *Handbook of Abductive Cognition* (pp. 7-20). Springer.

Cifarelli, V. (1997). *Emergence of abductive reasoning in mathematical problem solving*. Comunicación presentada en la reunión del Special Interest Group for Research in Mathematics Education, American Educational Research Association, Chicago, Illinois.

Cifarelli, V. (1999). Abductive Inference: Connections between Problem Posing and Solving. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 217-224). PME.

Cifarelli, V. (2016). The importance of abductive reasoning in mathematical problem solving. En Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics* (pp. 209-225). Sense Publishers.

Comité Español de Matemáticas. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*.

Consejería de Educación del Gobierno de Navarra. (s.f.). *Ejercicios Liberados – PISA 2000-2003 – Matemáticas*. https://www.educacion.navarra.es/documents/27590/27758/Items_Matematicas200003_CAST.pdf/a717e885-ae68-480b-af1d-27a84fccb408

Crespo-Crespo, C. R. y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8*(3), 287-317.

Decreto 73/2022, de 27 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *Boletín Oficial de Cantabria, 151*, de 5 de agosto de 2022, 20441-21321. https://boc.cantabria.es/boces/verAnuncioAction.do?idAnuBlob=374886

Douven, I. (2021). Abduction. En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Edward N. Zalta, Ed.). https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/abduction/

Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction. En U. Eco y T. Sebeok (Eds.), *The Sign of Three: Dupin, Holmes, Peirce* (pp. 198-220). Indiana University Press.

Flores-Samaniego, A. H. (2017). Pensamiento matemático y el quehacer científico. *PädiUAQ*, *1*(1), 26-39.

Foy, P., Arora, A. y Stanco, G. M. (2013). *TIMSS 2011 User Guide for the International Database. Released Items. Mathematics - Eight Grade*. International Association For The Evaluation Of Educational Achievement. https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-released-items.html

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *19*(3), 405-414.

Hanna, G. y Yackel, E. (2003). Reasoning and proof. En J. Kilpatrick, W.G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to NCTMs principles and standards* (pp. 227-236). National Council of Teachers of Mathematics.

Hidayah, I.N., Irawati, S., Agung, M., Sa'dijah, C., Subanji y Sudirman. (2023). Creative Conjecture: Abductive Reasoning to Generate Some Ideas in Algebra. *Mathematics Teaching Research Journal*, *15*(1), 108-126.

Hjelte, A., Schindler, M. y Nilsson, P. (2020). Kinds of Mathematical Reasoning Addressed in Empirical Research in Mathematics Education: A Systematic Review. *Education Sciences*, *10*(10), 289. https://doi.org/10.3390/educsci10100289

Khemlani, S. (2018). Reasoning. En S.L. Thompson-Schill (Vol. Ed.) y J.T. Wixted (Editor-In-Chief), *Stevens' Handbook of Experimental Psychology and Cognitive Neuroscience: Language and Thought* (4ª ed., Vol. 3, pp. 385-430). John Wiley & Sons.

Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educ Stud Math*, *109*, 567-591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, *340*, de 30 de diciembre de 2020. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educ Stud Math*, *67*, 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Mercier, H. y Sperber, D. (2011). Why do humans reason? Arguments for an argumentative theory. *Behavioral and Brain Sciences*, *34*(2), 57-74.

http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X10000968

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2023). *Marco general de las evaluaciones del sistema educativo. Evaluación general del sistema y Evaluaciones de diagnóstico*. https://www.libreria.educacion.gob.es/ebook/175538/free_download/

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y von Davier, M. (eds.). (2021). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education and Human Development, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement. https://timssandpirls.bc.edu/timss2023/frameworks/index.html

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.

NRICH. (s.f.). Dodgy proofs. https://nrich.maths.org/problems/dodgy-proofs

OCDE. (2023a). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

OCDE. (2023b). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

OCDE. (s.f.). *Programme for International Student Assessment (PISA)*. https://www.oecd.org/en/about/programmes/pisa.html

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(3), 281-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Peirce, C. S. (1867). On the Natural Classification of Arguments. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, *7*, 261-287. https://doi.org/10.2307/20179566

Peirce, C. S. (1878). Deduction, Induction, and Hypothesis. *Popular Science Monthly*, *13*, 470-482.

Peirce, C. S. (1883). A theory of probable inference. En C. S. Peirce (Ed.), *Studies in logic by members of the Johns Hopkins University* (pp. 126-181). Little, Brown and Co. https://doi.org/10.1037/12811-007

Peirce, C. S. (1997). *Pragmatism as a Principle and Method of Right Thinking: The 1903 Harvard Lectures on Pragmatism* (P. A. Turrisi, Ed.). State

University of New York Press.

Peñalva-Rosales, L. P. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y cultura*, (33), 135-151.

Perelman, Y. I. (1979). *Algebra Can Be Fun* (G. Yankovsky, Trad.). Mir Publishers.

Polanco-Padrón, N., Ferrer-Planchart, S. y Fernández-Reina, M. (2021). Aproximación a una definición de pensamiento computacional. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, *24*(1), 55-76.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible* (J.L. Abellán, Trans.). Editorial Tecnos (Trabajo original publicado en 1954).

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76,* de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Recio, T., Ueno, C. y Vélez, M. P. (2025). A Computational Approach to the Perimeter-Area Inequality in a Triangle. *Axioms*, *14*(1), 40. https://doi.org/10.3390/axioms14010040

Reid, D. A. (2003). *Forms and uses of abduction*. Comunicación presentada en la reunión CERME 3, Bellaria, Italia.

Reid, D. A. (2018). Abductive Reasoning in Mathematics Education: Approaches to and Theorisations of a Complex Idea. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9), em1584. https://doi.org/10.29333/ejmste/92552

Saenz-Ludlow, A. (1997). Inferential processes in Michael's mathematical thinking. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, 169-176). PME.

Thompson, V. A. (1996). Reasoning from false premises: The role of soundness in making logical deductions. *Canadian Journal of Experimental Psychology / Revue canadienne de psychologie expérimentale, 50*(3), 315-319. https://doi.org/10.1037/1196-1961.50.3.315

TIMSS & PIRLS International Study Center. (s.f.). *TIMSS: Trends in International*

Mathematics and Science Study. https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html

Unidad Técnica de Evaluación y Acreditación de la Consejería de Educación y Formación Profesional de Cantabria. (2025). *Informe general de Cantabria. Evaluación de Diagnóstico 4º Ed. Primaria y 2º ESO*. Curso 2023-2024. https://www.educantabria.es/documents/39930/24899932/Informe+ED+Cantabria+2023-2024.pdf/e7c9ba43-551a-ee61-0219-ff7ce58d3fa0?t=1737029979178

Validity and Soundness. (s.f.). En *Internet Encyclopedia of Philosophy*. https://iep.utm.edu/val-snd/

von Glasersfeld, E. (1998). Scheme theory as a key to the learning paradox. Presentado en *15th Advanced Course, Archives Jean Piaget*.

Vorobej, M. (1992). Defining Deduction. *Informal Logic, 14*(2), 105-118. https://doi.org/10.22329/il.v14i2.2533

Walton, D. N. (1990). What is Reasoning? What Is an Argument? *The Journal of Philosophy*, *87*(8), 399-419. https://doi.org/10.2307/2026735

Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35. http://dx.doi.org/10.1145/1118178.1118215

Yopp, D. A. (2009). From Inductive reasoning to proof. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(5), pp. 286-291. https://doi.org/10.5951/MTMS.15.5.0286

Anexo I. Las Limitaciones de la Inducción

El siguiente ejemplo ayuda a visualizar las limitaciones del razonamiento inductivo. Así, en la situación planteada a continuación, extraída de los estándares de la NCTM (2000, pp. 266-267), se muestra un patrón que no generaliza como se esperaría a partir de un número pequeño de observaciones.

Se quiere determinar cuántos segmentos de distinta longitud se pueden formar uniendo nodos de una malla cuadrada de cinco unidades de lado. Como el caso 5x5 pedido puede ser difícil de estudiar directamente, se anima a los y las estudiantes a empezar con casos más simples. Así, los alumnos y las alumnas estudiarán los casos 1×1, 2×2, 3×3 y 4×4, tratarán de encontrar un patrón de crecimiento en el número de longitudes diferentes y, luego, extrapolarán sus hallazgos al caso 5×5. De manera sistemática, los estudiantes "construyen" el caso 1×1, luego el caso 2×2 (teniendo en cuenta el resultado obtenido en el caso 1×1) y así sucesivamente (véase la Ilustración 3). Finalmente, el alumnado tabula todos los datos (véase la Tabla 2) y trata de buscar el patrón subyacente. Llegados a este punto, los estudiantes no pueden evitar predecir el número de segmentos de distinta longitud para el caso 5×5: (((2 + 3) + 4) + 5) + 6 = 20. Pero, si se estudia el caso 5×5 (véase la Ilustración 4), se detecta un error en la generalización de los estudiantes; no son 20, sino 19 segmentos distintos, ya que el segmento AB coincide con el segmento CD en longitud. Este problema es muy útil para hacer ver a los estudiantes el peligro de generalizar patrones observables de manera poco cuidadosa.

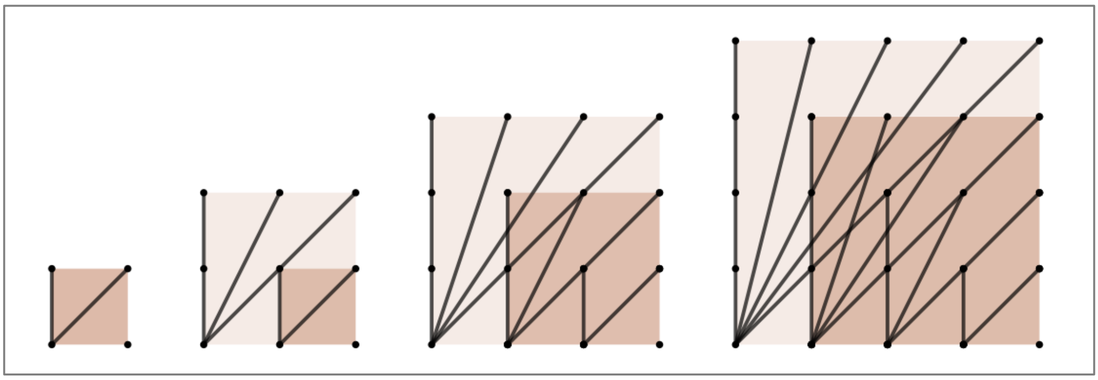


Ilustración 3: Segmentos de distinta longitud en mallas cuadradas de lado hasta 4 unidades (elaboración propia)

Tamaño de la malla	Número de segmentos de distinta longitud (1)
1×1	2
2×2	2 + 3 = 5
3×3	(2 + 3) + 4 = 9
4×4	((2 + 3) + 4) + 5 = 14
(1) Si estamos en el caso n, se calcula sumando los segmentos del caso n-1 con los casos "nuevos" (véase la Ilustración 3).	

Tabla 2: Número de segmentos de distinta longitud en mallas cuadradas de lado hasta 4 unidades

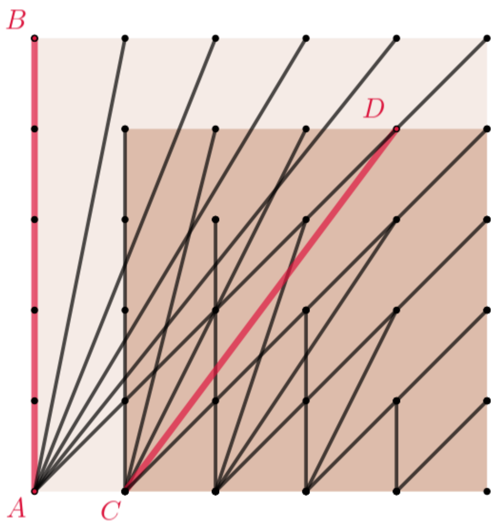


Ilustración 4: Segmentos de distinta longitud en malla 5×5 (elaboración propia)

Anexo II. La Abducción según Eco

A partir del trabajo de Peirce (1878), Eco (1983, pp. 206-207) elabora una clasificación en la que distingue tres tipos de abducciones: sobrecodificadas, subcodificadas y creativas. Esta taxonomía es aplicada en trabajos que conectan la abducción con la educación matemática (Pedemonte y Reid, 2011). A continuación, se desarrollan dichos tipos de razonamiento abductivo:

- <u>La abducción sobrecodificada (*overcoded abduction*, en inglés)</u>: en este caso, la regla general de la abducción se muestra de manera automática o casi automática ante el sujeto que razona. El sujeto conoce así una única regla general. Por tanto, la abducción sobrecodificada encajaría, estrictamente, con la definición de abducción dada por Peirce (Pedemonte y Reid, 2011, p. 285). Eco llega a clasificar en este tipo de abducción tareas de interpretación de códigos realmente triviales. Por ejemplo, lo siguiente sería una abducción sobrecodificada: si una persona sabe que /kaˈfe/ representa a la bebida infusionada de las semillas del cafeto (única regla general que identifica o de la que dispone el sujeto) y escucha una consecución de sonidos que se parece a /ka'fe/, interpreta que ha escuchado una referencia a la citada bebida.
- <u>La abducción subcodificada (*undercoded abduction*, en inglés)</u>: en este caso, la regla general se elige de entre una serie de reglas equiprobables (aunque, de facto, y como se verá en un ejemplo más adelante, no siempre lo son totalmente). En este caso, se observa que la interpretación de la definición de Peirce (1878) se toma en sentido amplio: no solo se infiere abductivamente el "caso", sino también la "regla general". Eco (1983) ejemplifica este tipo de razonamiento con el descubrimiento, realizado por Kepler, de la trayectoria elíptica de las órbitas planetarias: en primer lugar, Kepler partió de un resultado o hecho sorprendente (los datos empíricos de las posiciones de los planetas). Tras ello, abdujo un número finito de posibles curvas geométricas que modelizaban la trayectoria planetaria. Se observa que hay curvas que son directamente descartadas o menospreciadas para el análisis, rompiendo así parcialmente la equiprobabilidad de la que se hablaba anteriormente: los planetas no orbitan siguiendo una espiral, por ejemplo. De lo anterior, se sigue

la hipótesis de que la órbita de un planeta es elíptica.

- La abducción creativa: puede ocurrir que, al contrario que en las abducciones sobrecodificadas y subcodificadas, el sujeto que razona ni conozca ni disponga de una regla general que aplique para la situación motivada por el hecho sorprendente. En este caso, se debe abducir una regla general, que el sujeto inventará por completo. Eco (1983, p. 207) subraya cómo este tipo de abducción requiere de lo que él llama "meta-abducción". Este nivel de inferencia hace referencia a la verificación o evaluación del "universo" que se forma a partir de las abducciones realizadas. Se observa que, habitualmente, en las abducciones sobrecodificadas y subcodificadas no es necesario realizar meta-abducciones, ya que las reglas generales que se eligen suelen están previamente comprobadas en el mundo real. En cambio, en la abducción creativa es indispensable la meta-abducción: una verificación exitosa de la regla general inferida en la realidad puede provocar un cambio de paradigma. Para ilustrar lo anterior, Pedemonte y Reid (2011, p. 285) plantean las abducciones presentes en la explicación de las anomalías de la órbita de Mercurio que se observaron a mediados del siglo XIX. A través de una abducción subcodificada, utilizando el conocimiento sobre el movimiento planetario, se hipotetizó que la razón de las anomalías era la existencia de un planeta desconocido en el sistema solar que perturbaba la órbita de Mercurio. Finalmente, la hipótesis que explicó las perturbaciones surgió a través de la abducción creativa de una nueva regla general: la relatividad de Einstein. La meta-abducción que se realizó sobre esta teoría física confirmó su acierto en explicar el fenómeno, y sustentó la revolución física que se originó a partir de ella.

Anexo III. Solicitud de Consentimiento Informado para el Director/a

Estimad[redacted] [redacted],

Soy David Gutiérrez Cambra, alumno del Máster en Formación del Profesorado de Secundaria. Estoy desarrollando mis prácticas en el [redacted], tutorizado por [redacted]. Además, estoy realizando mi Trabajo de Fin de Máster bajo la supervisión de Claudia Lázaro del Pozo, tutora de la Universidad de Cantabria, con la colaboración de Tomás Recio Muñiz, profesor emérito de la Universidad Nebrija.

En este trabajo de fin de máster, voy a llevar a cabo una investigación a pequeña escala acerca de la capacidad para razonar matemáticamente del alumnado de 4º de ESO de este centro. Esta experiencia consistirá en **la realización de una breve prueba escrita**. La prueba consistirá en la realización individual de una serie de ejercicios y problemas matemáticos. Con los resultados obtenidos, evaluaré dicha prueba para sacar conclusiones globales sobre la competencia matemática y la capacidad de razonamiento matemático de los y las estudiantes. Además, clasificaré los distintos tipos de argumentos matemáticos que el alumnado haya utilizado.

La prueba será completamente **anónima** (no se recogerán los nombres de los y las estudiantes que entreguen la prueba; solo deberán indicar la modalidad de Matemáticas que cursan, A o B), y se llevará a cabo en el centro dentro del horario escolar en la clase de tutoría. La participación en este estudio es totalmente **voluntaria**, y **no afectará de ningún modo al trato que reciba el alumnado ni a sus resultados en la asignatura de Matemáticas**.

Tomando lo anterior en consideración, te agradecería mucho que me permitieras realizar la prueba propuesta para este estudio en el centro. Agradezco de antemano tu colaboración. Un cordial saludo,

David

✂- -

D. /Dña. ....,

con DNI ....,

director[redacted] del [redacted], manifiesto que he leído y entendido la hoja de información que se me ha entregado, que he hecho las preguntas que me surgieron sobre el proyecto y que he recibido información suficiente sobre el mismo. Tomando lo anterior en consideración, **AUTORIZO** la realización de la prueba escrita diseñada para este estudio en el centro.

…………………, a …. de …………… de 2025

Firma:

Anexo IV. Solicitud de Consentimiento Informado para la Prueba Escrita

Estimadas familias,

Soy David Gutiérrez Cambra, alumno del Máster en Formación del Profesorado de Secundaria. Estoy desarrollando mis prácticas en el [redacted], tutorizado por [redacted]. Además, estoy realizando mi Trabajo de Fin de Máster bajo la supervisión de Claudia Lázaro del Pozo, tutora de la Universidad de Cantabria, con la colaboración de Tomás Recio Muñiz, profesor emérito de la Universidad Nebrija.

En este trabajo de fin de máster, voy a llevar a cabo una investigación a pequeña escala acerca de la capacidad para razonar matemáticamente del alumnado de 4º de ESO de este centro. Esta experiencia consistirá en **la realización de una breve prueba escrita**. La prueba consistirá en la realización individual de una serie de ejercicios y problemas matemáticos. Con los resultados obtenidos, evaluaré dicha prueba para sacar conclusiones globales sobre la competencia matemática y la capacidad de razonamiento matemático de los y las estudiantes. Además, clasificaré los distintos tipos de argumentos matemáticos que el alumnado haya utilizado.

La prueba será completamente **anónima** (no se recogerán los nombres de los y las estudiantes que entreguen la prueba; solo deberán indicar la modalidad de Matemáticas que cursan, A o B), y se llevará a cabo en el centro dentro del horario escolar en la clase de tutoría. La participación en este estudio es totalmente **voluntaria**, y **no afectará de ningún modo al trato que reciba el alumnado ni a sus resultados en la asignatura de Matemáticas**.

Tomando lo anterior en consideración, les agradecería mucho que permitieran que el menor o la menor a su cargo participara en la prueba propuesta para este estudio. Agradezco de antemano su colaboración. Un cordial saludo,

David

✂- -

D. /Dña. ....,

con DNI ....,

padre/madre o tutor/a de ....,

manifiesto que he leído y entendido la hoja de información que se me ha entregado y que he recibido información suficiente sobre el proyecto. Tomando lo anterior en consideración, **AUTORIZO** al menor o a la menor a mi cargo a participar en la prueba propuesta para este estudio.

…………………, a …. de …………… de 2025

Firma del padre, madre o tutor/a:

Anexo V. Prueba Escrita

¡Demuestra tu razonamiento matemático!

Marca tu modalidad de Matemáticas: | Matemáticas A | Matemáticas B |

Indicaciones:

- No pongas **ni tu nombre**, **ni tus apellidos**. LA PRUEBA ES ANÓNIMA.

- **Justifica tu respuesta** y los pasos que has seguido para llegar a ella en todos los ejercicios.

- Se permite el uso de calculadora.

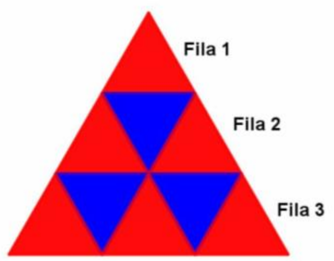
Ejercicio 1

Estudiemos el siguiente desarrollo matemático:

"Construimos un cuadrado de lado 1 cm. Se observa que el área del cuadrado es 1x1=1 cm², y que su perímetro es 1+1+1+1 = 4 cm. Por lo tanto, concluimos que dado un cuadrado cualquiera, su perímetro siempre es cuatro veces su área."

¿El anterior razonamiento es correcto? **Justifica tu respuesta**, explicando por qué crees que lo anterior es o no correcto. En caso de que no sea correcta, trata de escribir una versión correcta del desarrollo.

Ejercicio 2



Paula pinta el patrón de la imagen en su cuaderno, dibujando triángulos rojos y azules. Responde a las siguientes preguntas, **justificando todas tus respuestas**.

a) Si Paula siguiera pintando filas, ¿Cuántos triángulos rojos y azules habría en la fila 4? ¿Y en la fila 7? ¿Y en la fila 50? ¿Y en la fila n?

b) ¿Qué porcentaje de los triángulos son rojos en el dibujo del enunciado (que presenta las tres primeras filas del patrón)?

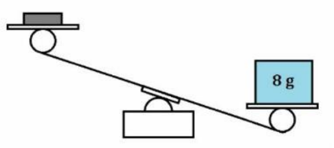
c) Si Paula añadiera filas al dibujo hasta pintar la Fila 6, ¿Qué porcentaje de los triángulos serían rojos?

d) ¿Es correcto afirmar que, independientemente de cuántas filas pintemos, el dibujo tendrá más del 50% de los triángulos de color rojo?

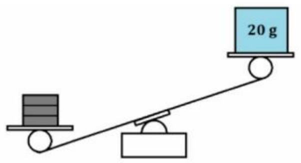
Ejercicio 3

Alberto tiene tres bloques metálicos idénticos, y quiere determinar cuánto pesan. Para ello, realiza dos mediciones de peso en una balanza.

En la primera, coloca **un bloque** metálico en uno de los platos, y **8 gramos** de peso en el otro, observando la siguiente situación:



En la segunda, coloca los **tres bloques** en uno de los platos, y **20 gramos** de peso en el otro, observando la siguiente situación:



¿Cuáles de los siguientes pesos podría corresponder con el peso de uno de los bloques metálicos? Selecciona la respuesta correcta, y **justifica tu elección**:

A. 5 gramos

B. 6 gramos

C. 7 gramos

D. 8 gramos

¿Serías capaz de expresar todos los pesos que puede tener un bloque metálico, a partir de la información de la que dispones? **Justifica tu respuesta.**

Un bloque metálico puede pesar entre …………..… y …………..… gramos.

Ejercicio 4

Dos escuelas de baile de Santander, "Estudio 40" y "Dancing School", organizaron un entrenamiento conjunto al que asistieron 20 bailarines en total (provenientes de ambas escuelas). Un bailarín de "Estudio 40", Pedro, bailó con 1 bailarín de "Dancing School". Una segunda bailarina de "Estudio 40", Noelia, bailó con 2 integrantes de "Dancing School" (no necesariamente diferentes del anterior). Un tercer bailarín de “Estudio 40”, José, bailó con 3 bailarines de “Dancing School” (no necesariamente diferentes de los anteriores). El patrón anterior continuó hasta que la última bailarina de "Estudio 40", Laura, bailó con todos los bailarines y bailarinas que pertenecían a "Dancing School".

Teniendo en cuenta todo lo anterior, ¿cuántas personas de la escuela "Dancing School" asistieron al entrenamiento conjunto?

Anexo VI. Rúbricas para la Evaluación de la Prueba Escrita

En este anexo, se adjuntan las rúbricas para evaluar la prueba escrita, comunes para alumnado de Matemáticas A y Matemáticas B (asociándose los indicadores elegidos a los criterios de evaluación de ambas materias, recogidos en el Decreto 73/2022 [2022, pp. 248-250, 254-256]).

Rúbrica del Ejercicio 1

El ejercicio 1 (véase el Anexo V) se evalúa sobre un máximo de 3 puntos.

	Criterio de evaluación	0 puntos	1 punto
Matemáticas A	1.3. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de un problema activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	No moviliza conocimientos elementales de geometría plana para responder a la cuestión, y no comprende el concepto de perímetro ni de área.	Comprende los conceptos de perímetro y de área, y los moviliza para tratar de obtener la solución al problema.
Matemáticas B	1.3. Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de un problema movilizando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.		
Matemáticas A	3.1. Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.	No identifica el error en la afirmación y acepta que el desarrollo es correcto.	Identifica correctamente que la relación entre el área y el perímetro planteada no se da en general y que, por tanto, el desarrollo planteado es erróneo.
Matemáticas B	3.1. Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada.		
Matemáticas A	3.2. Crear variantes de un problema dado, modificando alguno de sus datos y observando la relación entre los diferentes resultados obtenidos.	No proporciona ningún contraejemplo para argumentar la falsedad de la afirmación.	Plantea correctamente un contraejemplo (por ejemplo, argumentando con el cuadrado de lado 2, o sustituyendo algún valor n en el cociente del perímetro con el área en un cuadrado de lado n) para probar la falsedad de la afirmación.
Matemáticas B	3.2. Plantear variantes de un problema que lleven a una generalización.		

Rúbrica del Ejercicio 2

El ejercicio 2 (véase el Anexo V) se evalúa sobre un máximo de 8 puntos.

	Criterio de evaluación	0 puntos	1 punto	2 puntos
Matemáticas A	1.1. Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.	No es capaz de dibujar o "imaginar el dibujo" de más filas del patrón.	Es capaz de dibujar o de "imaginar el dibujo" de más filas del patrón, pero con errores numéricos o de interpretación (por ejemplo, si bien pinta hasta la fila 4 o la fila 7, se equivoca	Es capaz de "dibujar" o de "imaginar el dibujo" de más filas del patrón, y de interpretar el resultado correctamente.
Matemáticas B	1.1. Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas			

	planteadas.		posteriormente al contar el número de triángulos de cada color).	
Matemáticas A	1.2. Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.	No moviliza el concepto de proporción o porcentaje (número de triángulos rojos entre número total de triángulos), u obtiene resultados erróneos sin justificación.	Moviliza el concepto de proporción (número de triángulos rojos entre número total de triángulos), pero comete errores de cálculo.	Es capaz de utilizar el concepto de proporción o porcentaje sin errores, tanto sobre el gráfico proporcionado, como sobre “continuaciones” del patrón con más filas.
Matemáticas B	1.2. Analizar y seleccionar diferentes herramientas y estrategias elaboradas en la resolución de un mismo problema, valorando su eficiencia.			
Matemáticas A	4.1. Reconocer e investigar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación y su tratamiento computacional.	No es capaz de deducir el número de triángulos en una fila que no puede “dibujar directamente”, como es la fila 50.	Es capaz de deducir el número de triángulos en la fila 50, pero no es capaz de obtener una fórmula en función de la incógnita n.	Deduce que en la fila n, habrá n triángulos rojos, y $n-1$ triángulos azules.
Matemáticas B	4.1. Generalizar patrones y proporcionar una representación computacional de situaciones problematizadas.	Responde que no habrá más del 50 % de los triángulos de color rojo (independientemente de cuántas filas se pinten), o responde afirmativamente sin justificar su solución o justificándola incorrectamente.	Responde que siempre habrá más del 50 % de los triángulos de color rojo, y lo justifica, pero de manera incompleta (por ejemplo, si responde afirmativamente, justificando que en la primera fila no hay triángulos azules).	Responde que siempre habrá más del 50 % de los triángulos de color rojo, y lo justifica correctamente (respondiendo algo equivalente al hecho de que, en cada fila, siempre hay más triángulos rojos que azules).

Rúbrica del Ejercicio 3

El ejercicio 3 (véase el Anexo V) se evalúa sobre un máximo de 6 puntos.

	Criterio de evaluación	0 puntos	1 punto	2 puntos	3 puntos
Matemáticas A	2.2. Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable…).	No selecciona la solución correcta (7 gramos) de entre las opciones proporcionadas.			Selecciona la respuesta correcta (7 gramos), de entre las opciones proporcionadas.
Matemáticas B	2.2. Justificar las soluciones óptimas de un problema desde diferentes perspectivas (matemática, de género, de sostenibilidad, de consumo responsable…).				
Matemáticas A	4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando y creando algoritmos sencillos.	No es capaz de escribir el intervalo en el que se sitúan todos los posibles pesos, ni intuye	No consigue deducir el intervalo en el que sitúan todos los posibles pesos, pero intuye que debe ser	No consigue deducir el intervalo en el que sitúan todos los posibles pesos, pero intuye	Es capaz de escribir el intervalo en el que se sitúan todos los posibles pesos, sin errores

Matemáticas B	4.2. Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos.	que debe contener al 7 y estar entre el 6 y el 8.	un intervalo que contenga al 7, atendiendo a las conclusiones del apartado anterior y por tanto, coloca al 7 en uno de los extremos. Por ejemplo, una respuesta correspondiente a este crédito parcial sería “Entre 7 y 7,5”.	que debe ser un intervalo que contenga al 7 y que esté situado entre el 6 y el 8 (sin incluir a estos últimos), atendiendo a las conclusiones del apartado anterior. Es decir, escribe un intervalo que contiene al 7 y cuyos extremos son, respectivamente, mayor estrictamente que 7 y mayor estrictamente que 7 (por ejemplo, una respuesta correspondiente a este crédito parcial sería “Entre 6,7 y 7,5”).	(es decir, se espera alguna de estas respuestas: “Entre 20/3 y 8”, “Entre $6,\overline{6}$ y 8”, “Entre 20/3 y $7,\overline{9}$”, “Entre $6,\overline{6}$ y $7,\overline{9}$”).

Rúbrica del Ejercicio 4

El ejercicio 4 (véase el Anexo V) se evalúa sobre un máximo de 3 puntos.

	Criterio de evaluación	0 puntos	1 punto	2 puntos
Matemáticas A	1.1. Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.	No es capaz de esquematizar la situación planteada en el ejercicio.	Es capaz de esquematizar la situación planteada en el ejercicio, ya sea explicándola (como parte de la justificación de la solución) o mediante un esquema gráfico.	
Matemáticas B	1.1. Reformular de forma verbal y gráfica problemas matemáticos, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.			
Matemáticas A	4.1. Reconocer e investigar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación y su tratamiento computacional.	No explicita que el enésimo bailarín de “Estudio 40” bailó con n estudiantes de “Dancing School”, y no es capaz de deducir que hay 10 estudiantes de ”Dancing School”.	Es capaz de deducir que hay 10 bailarines de “Dancing School”, pero la justificación está incompleta o contiene errores.	Es capaz de darse cuenta de que el enésimo bailarín de “Estudio 40” bailó con n estudiantes de “Dancing School”, y que por lo tanto, n + n = 20, de donde deducimos que hay n = 10 bailarines de “Dancing School”. La justificación de la solución es completa.
Matemáticas B	4.1. Generalizar patrones y proporcionar una representación computacional de situaciones problematizadas.			

Anexo VII. Resultados de la Evaluación de la Prueba Escrita

En este anexo, se tabulan los resultados numéricos completos de la evaluación por competencias de los ejercicios de la prueba escrita del Anexo V (a partir de las rúbricas del Anexo VI). Además, se adjuntan gráficas (todas ellas siguiendo la leyenda de la Ilustración 5) que representan los resultados para cada ejercicio, de manera visual.

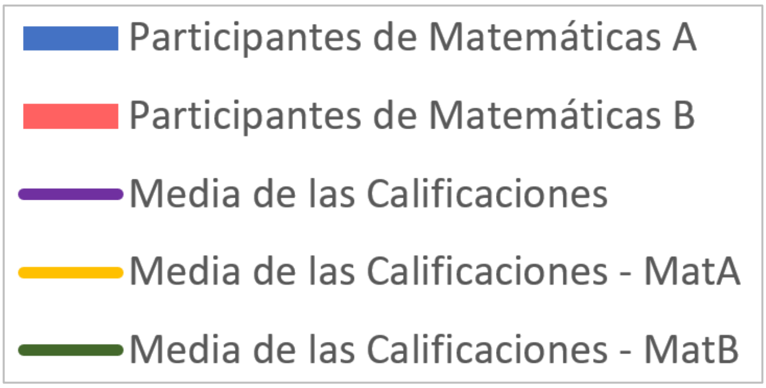


Ilustración 5: Leyenda común para las gráficas del Anexo VII

Estudiante	Modalidad	1.1	3.1	3.2	Puntuación (sobre 3)
1	A	0	0	0	0
2	A	0	0	0	0
3	A	0	0	0	0
4	A	1	1	0	2
5	A	0	0	0	0
6	A	0	1	0	1
7	A	0	0	0	0
8	A	0	0	0	0
9	B	1	1	1	3
10	B	0	0	0	0
11	B	0	0	0	0
12	B	1	1	1	3
13	B	0	0	0	0

Tabla 3: Resultados de la evaluación del ejercicio 1, utilizando la rúbrica del Anexo VI.

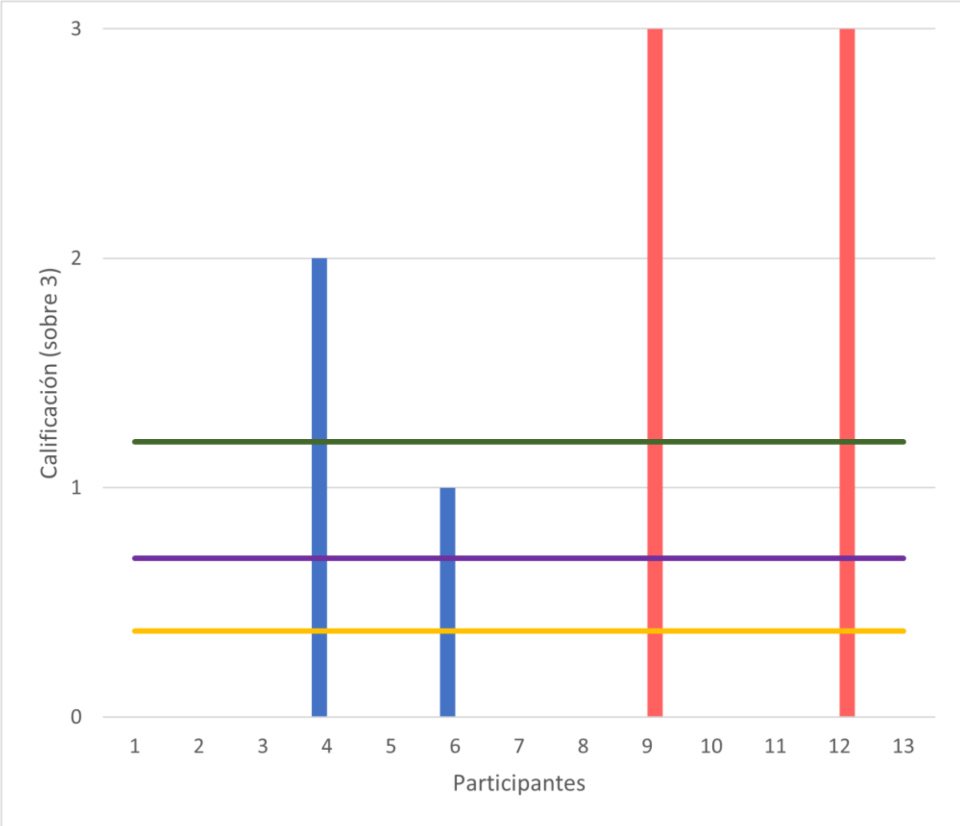


Ilustración 6: Gráfica de los resultados de la evaluación del ejercicio 1

Estudiante	Modalidad	1.1	1.2	4.1 (1)	4.1 (2)	Puntuación (sobre 8)
1	A	2	1	1	1	5
2	A	2	0	1	0	3
3	A	2	0	1	0	3
4	A	1	2	0	0	3
5	A	2	1	1	0	4
6	A	2	1	2	0	5
7	A	2	2	2	1	7
8	A	2	2	0	0	4
9	B	2	2	2	1	7
10	B	2	1	2	0	5
11	B	2	1	1	0	4
12	B	1	1	1	0	3
13	B	2	1	2	0	5

Tabla 4: Resultados de la evaluación del ejercicio 2, utilizando la rúbrica del Anexo VI.

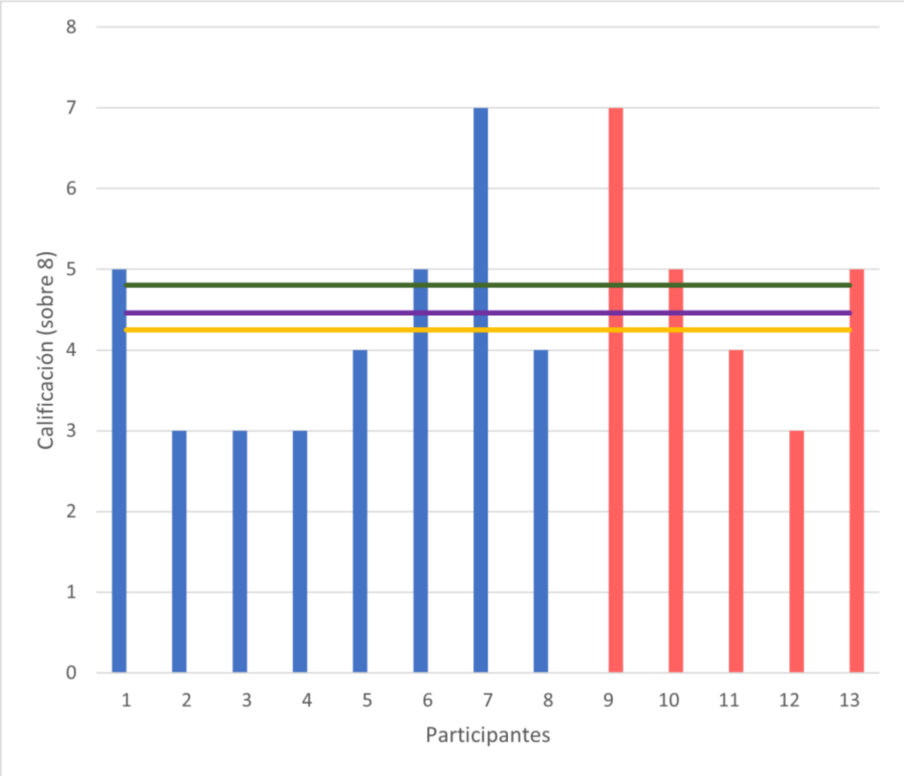


Ilustración 7: Gráfica de los resultados de la evaluación del ejercicio 2

Estudiante	Modalidad	2.2	4.2	Puntuación (sobre 6)
1	A	3	1	4
2	A	3	0	3
3	A	0	0	0
4	A	3	1	4
5	A	3	0	3
6	A	3	0	3
7	A	3	2	5
8	A	3	2	5
9	B	3	2	5
10	B	3	1	4
11	B	3	1	4
12	B	3	3	6
13	B	3	2	5

Tabla 5: Resultados de la evaluación del ejercicio 3, utilizando la rúbrica del Anexo VI.

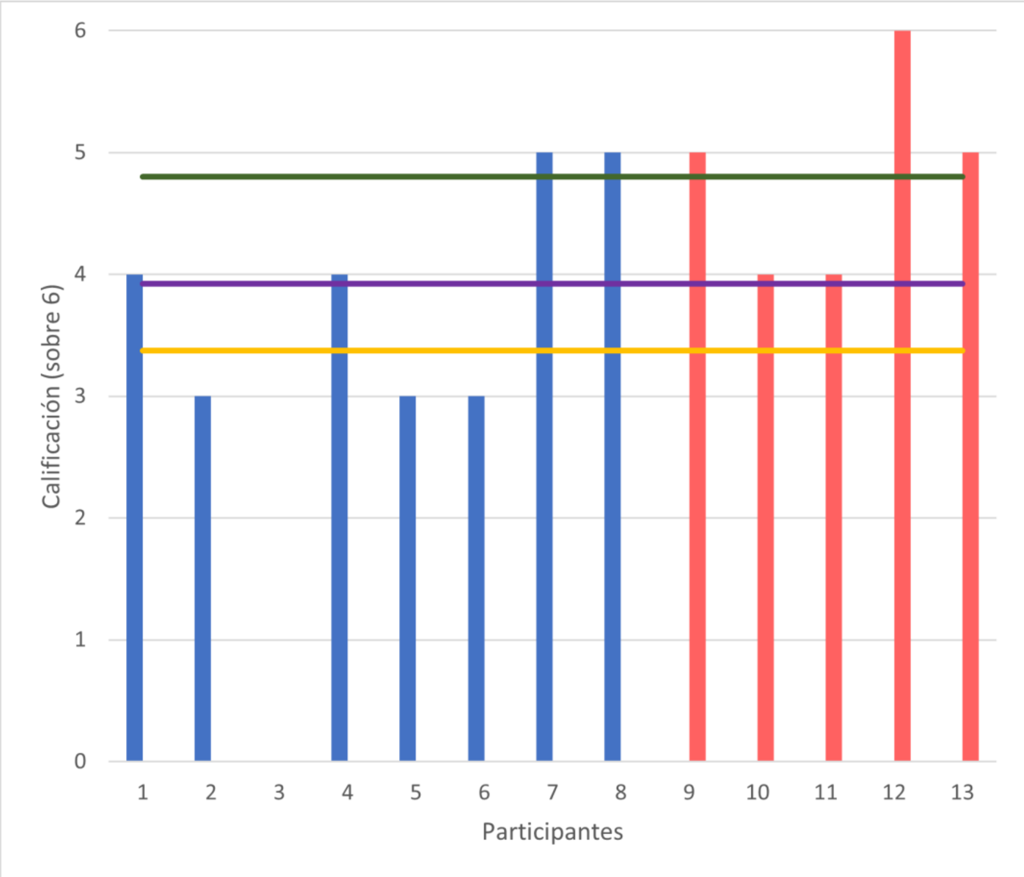


Ilustración 8 Gráfica de los resultados de la evaluación del ejercicio 3

Estudiante	Modalidad	1.1	4.1	Puntuación (sobre 3)
1	A	0	0	0
2	A	0	0	0
3	A	0	0	0
4	A	0	0	0
5	A	0	0	0
6	A	0	1	1
7	A	0	0	0
8	A	1	0	1
9	B	1	2	3
10	B	0	0	0
11	B	0	0	0
12	B	0	1	1
13	B	1	1	2

Tabla 6: Resultados de la evaluación del ejercicio 4, utilizando la rúbrica del Anexo VI.

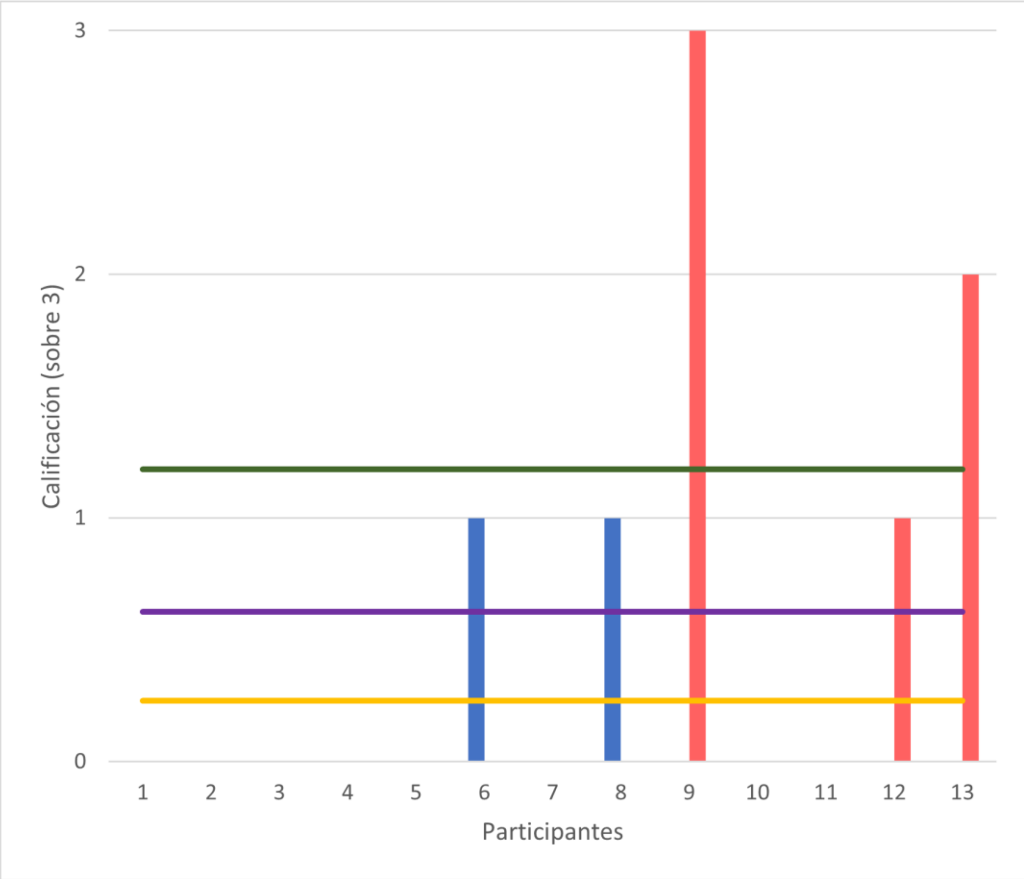


Ilustración 9: Gráfica de los resultados de la evaluación del ejercicio 4

Anexo VIII. Solicitud de Consentimiento Informado para la Grabación

Estimadas familias,

Soy David Gutiérrez Cambra, alumno del Máster en Formación del Profesorado de Secundaria. Estoy realizando mi Trabajo de Fin de Máster bajo la supervisión de Claudia Lázaro del Pozo, tutora de la Universidad de Cantabria, con la colaboración de Tomás Recio Muñiz, profesor emérito de la Universidad Nebrija.

En este trabajo de fin de máster, voy a llevar a cabo una investigación a pequeña escala acerca de la capacidad para razonar matemáticamente del alumnado de secundaria. Esta experiencia consistirá en **la resolución individual, guiada y oral de una serie de problemas de matemáticas** por parte del alumnado. Solo el audio de la resolución guiada será grabado, y tras ello será transcrito para su posterior análisis, reflejándose en la memoria del proyecto únicamente dicha transcripción escrita. Sobre la grabación y la transcripción, evaluaré las resoluciones expuestas por el o la estudiante, para sacar conclusiones sobre su grado de competencia matemática y su capacidad de razonamiento matemático. Además, clasificaré los distintos tipos de argumentos matemáticos que el alumnado haya utilizado.

La entrevista será completamente **anónima** (no se recogerá el nombre del o de la estudiante que participe, y se anonimizará la transcripción en caso de que algún dato de la grabación proporcione datos privados sobre el estudiante o la estudiante; solo se tendrá en cuenta el curso escolar del alumno o de la alumna), y se llevará a cabo en el horario consensuado con ustedes. La grabación original de la entrevista será custodiada por David Gutiérrez Cambra, y no se publicará. La participación en este estudio es totalmente **voluntaria**, y **no afectará de ningún modo al trato que reciba el alumnado ni a sus resultados en la asignatura de Matemáticas**.

Tomando lo anterior en consideración, les agradecería mucho que permitieran al menor o la menor a su cargo a participar en la experiencia propuesta para este estudio. Agradezco de antemano su colaboración. Un cordial saludo,

David

✂- -

D. /Dña. ....,

con DNI ....,

padre/madre o tutor/a de ....,

manifiesto que he leído y entendido la hoja de información que se me ha entregado, que he hecho las preguntas que me surgieron sobre el proyecto y que he recibido información suficiente sobre el mismo. Tomando lo anterior en consideración, **AUTORIZO** al menor o la menor a mi cargo a participar en la prueba propuesta para este estudio.

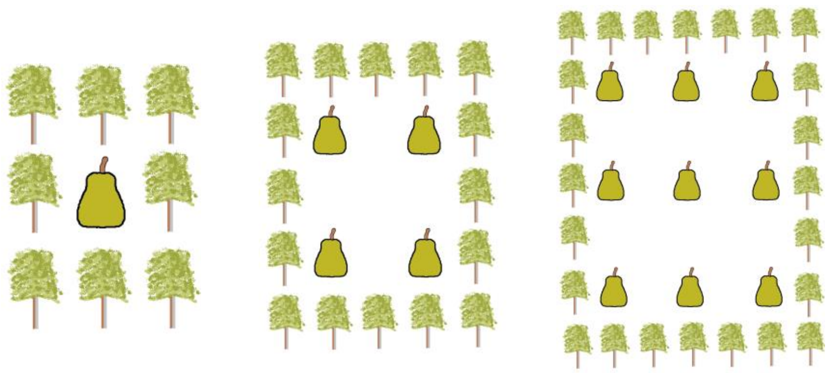
…………………, a …. de ……………. de 2025
Firma del padre, madre o tutor/a

Anexo IX. Problema Propuesto para la Entrevista

María es una agricultora experta, especialista en plantar perales. A lo largo de su vida, se ha dado cuenta de algunas estrategias clave para optimizar su producción de peras:

- Siempre planta los perales en huertas cuadradas, disponiendo el mismo número de filas que de columnas (por ejemplo, si hay tres filas de perales, tiene que haber tres columnas de perales).
- Entre un peral y otro, siempre deja un metro cuadrado de tierra sin cultivar (para dejarles espacio para crecer).
- Para proteger a los perales del viento y la lluvia, siempre planta abedules alrededor de la huerta cuadrada. Además, se ha percatado de que entre abedules y perales no es necesario dejar el metro cuadrado de terreno.
- Tanto los abedules como los perales necesitan un metro cuadrado de terreno.

Con lo anterior, María trata diariamente de diseñar disposiciones para sus cultivos. Para ello, piensa cuántas filas de perales quiere plantar, y luego trata de cumplir las condiciones superiores. Por ejemplo, se muestran los diseños para una, dos y tres filas de perales:



Para mejorar su producción, a María le interesa conocer este tipo de diseño agrícola en mayor profundidad. ¡Ayúdala a conseguirlo respondiendo a las siguientes cuestiones!

Justifica cada una de las respuestas. Recuerda que puedes dibujar las situaciones que necesites para responder a las cuestiones.

1. Completa la siguienta tabla. Fíjate en los dibujos del enunciado, donde aparecen las disposiciones con hasta tres filas de perales.

Número de filas de perales	Número de perales	Número de abedules
1	1	8
2	4	
3		24
4		
5		

2. Si n es el número de filas de perales, ¿Serías capaz de dar una fórmula general, dependiendo de n, para el número de perales y el número de abedules?

3. Un vecino de María dispone de una parcela enorme que no utiliza, y quiere prestársela para que cultive sus perales. El vecino sabe que en su parcela se podrían plantar 441 perales. ¿Cuántos abedules necesitará María para rodear esa cantidad de perales? Selecciona la respuesta correcta, y **justifica tu elección**:

A. 440 abedules
B. 250 abedules
C. 168 abedules

4. En una ocasión, María recibió como regalo 136 abedules. ¿Cuántos perales, como máximo, podrá plantar, si quiere rodearlos con los 136 abedules? Selecciona la respuesta correcta, y **justifica tu elección**:

A. 289 perales
B. 68 perales
C. 160 perales

5. Por último, María sabe que hay una disposición en la que el número de perales y el de abedules es el mismo, pero no sabe a cuántas filas de perales corresponde. ¿Sabrías averiguarlo? **Detalla el método que has seguido para resolver este apartado**.

Anexo X. Rúbrica para la Evaluación de la Resolución Guiada

En este anexo, se adjunta la rúbrica para la evaluación del problema resuelto durante la entrevista, diseñada a partir de los criterios de evaluación de matemáticas para los cursos de 1º a 3º ESO (Decreto 73/2022, 2022, pp. 240-242).

Criterio de evaluación	0 puntos	1 punto	2 puntos
3.2. Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.	No es capaz de dibujar ni de plantear diferentes diseños para la finca de perales, distintos de los tres mostrados como ejemplo.	Es capaz de dibujar, o al menos de plantear, diferentes diseños para la finca de perales, distintos de los tres mostrados como ejemplo.	
4.1. Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.	No es capaz de analizar los patrones presentes en el número de perales y de abedules, en función de las filas de perales de la finca.	Es capaz, de forma guiada, de analizar y reconocer los patrones presentes en el número de perales y de abedules, en función de las filas de perales de la finca, aunque no es capaz de formular dichas regularidades en función del número de filas de perales.	Es capaz, de forma guiada, de analizar y reconocer los patrones presentes en el número de perales y de abedules, en función de las filas de perales de la finca. Además, es capaz de obtener una fórmula general para el número de perales y de abedules en función del número de filas de perales.
1.3. Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.	No es capaz de inferir el número de abedules en un diseño hipotético, dado el número de perales.	Es capaz de plantear una metodología correcta para inferir el número de abedules en un diseño hipotético, dado el número de perales, pero comete errores.	Es capaz de inferir el número de abedules en un diseño hipotético, dado el número de perales.
	No es capaz de inferir el número de perales en un diseño hipotético, dado el número de abedules.	Es capaz de plantear una metodología correcta para inferir el número de perales en un diseño hipotético, dado el número de abedules, pero comete errores.	Es capaz de inferir el número de perales en un diseño hipotético, dado el número de abedules.
1.2. Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.	No es capaz de deducir que el diseño que tiene el mismo número de perales y abedules es aquel con ocho filas de perales.	Es capaz de deducir que el diseño que tiene el mismo número de perales y abedules es aquel con ocho filas de perales. Aun así, la justificación del anterior resultado contiene errores o es incompleta.	Es capaz de deducir que el diseño que tiene el mismo número de perales y abedules es aquel con ocho filas de perales. Además, la justificación de lo anterior es completa y detallada.
2.1. Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.	Cuando comete un error durante la resolución guiada no es capaz de detectarlo, ya que no comprueba ninguno de los resultados parciales que obtiene.	Durante la resolución guiada, es capaz de detectar cuándo ha cometido un error, y de corregir su resolución.	

Anexo XI. Transcripción de la Grabación de la Resolución Guiada

En este anexo, se recoge la transcripción de la resolución guiada del problema del Anexo VIII:

[La resolución guiada comenzó con la lectura de la situación del problema por parte del conductor de la experiencia, asegurando la completa compresión del enunciado por parte del alumno o de la alumna participante. Tras ello, el alumno o la alumna continuó leyendo la primera pregunta]

David: Puedes escribir lo que quieras.

Alumno o Alumna: Vale, vale.

D: Vale, la uno está entera.

A: Sí, sí.

D: ¿Y la dos? Es esta de aquí [señala el dibujo]. ¿No?

A: Sí, sí.

D: Por ejemplo, ¿Cuántos abedules hay en la dos?

A: [Reflexiona durante unos segundos y cuenta los abedules] Dieciséis.

D: Vale. Entonces, en este hueco… [Señala el hueco de la tabla del primer apartado]

A: Pondría dieciséis.

[…]

D: ¿Y cuántos perales habría en el tercer diseño, en el que tiene tres filas?

A: [Reflexiona unos segundos] Cuatro. ¡Ah! Perales. [Reflexiona un poco más, y cuenta los perales] Nueve.

D: Eso es. ¿Se entiende?

A: Sí.

D: Ahora, 4 y 5. ¿Cómo completarías la fila 4?

A: [Tiempo de reflexión y escribe dieciséis en los perales de la fila 4]

D: Vale, entonces has puesto...

A: Dieciséis.

D: ¿Y por qué has puesto dieciséis?

A: Porque cuatro filas por cuatro columnas… Dieciséis.

D: Vale, bien. Muy bien. Estupendo. Ahora, ¿Cómo completarías la otra columna [la de los abedules]?

A: [Silencio]

D: También, si quieres… Puedes pintarlo, puedes dibujarlo. Puedes pintar la situación del cuatro.

A: Vale [Procede a dibujar].

D: Vale, ¿Eso que sería? [Señalo los perales]

A: Los perales.

D: Vale, ¡Muy bien! ¿Y qué color quieres para los abedules? ¿Quieres otro color?

A: No, da igual. [Sigue dibujando]

D: ¿Cuántos hay?

A: [Piensa unos segundos, mientras cuenta los abedules que ha pintado] Pues treinta y dos.

D: Muy bien. Vale. Pues ahora habría que completarlo para el cinco. ¿No? Entonces, vamos a completar las columnas, la primera y la segunda. Entonces, para el cinco, ¿Qué haríamos?

A: Voy [Reflexiona, y va a la columna de los perales] Pues aquí 25…

D: Muy bien.

A: Y en el otro [Reflexiona unos segundos]. Cuarenta.

D: ¿Y por qué dirías que es cuarenta?

A: Porque ocho por cinco cuarenta. Porque aquí es por dos [señala el caso en el que hay dos filas], aquí es por tres [señala el caso en el que hay tres filas], aquí es por cuatro [señala el caso en el que hay cuatro filas], y aquí es por cinco.

D: Muy bien, ¿no? Estupendo. Vale, entonces, vamos a seguir con la pregunta dos. Ahora, en vez de decirte: fila 1, fila 2, fila 3, fila 4, fila 5, te pido que estudies el caso de la fila n. ¿Entiendes lo que significa eso?

A: Sí, creo.

D: Es decir, es una indeterminada. Puede ser cualquier fila, en función de n. Entonces, ¿cuál dirías tú que es el número de perales en el caso en el que hay n filas de perales?

A: Sería n por n.

D: Muy bien. Si quieres escríbelo para tenerlo escrito.

[…]

D: ¿Y serías capaz de predecir el número de abedules?

A: Creo que 8 por n.

D: Perfecto. ¿Se entiende?

A: Sí.

D: Vale. Y ahora, vamos a seguir. Lee el 3, a ver qué te parece.

[El alumno o la alumna lee en voz alta el apartado 3]

D: ¿Qué se te ocurre?

A: A ver…441… Es que, a ver…

D: Vaya por delante, puedes usar la calculadora para lo que te dé la gana [Vuelvo a enseñarle la calculadora]. Por si acaso ayuda. Entonces…

A: Vale.

D: ¿Se te ocurre algo? Te puedo dar pistas, ¿eh?

A: Vale, espera. Puedes hacer la raíz cuadrada de 441 [teclea en la calculadora], que da 21, y la multiplicas por 8, y da 168.

D: Entonces, ¿Cuál sería la opción correcta?

A: La c.

D: Pues perfecto. ¿Vale? ¿Se entiende?

A: Sí.

D: Muy bien. Vale. Vamos a por el 4. Entonces, en el 4…

[El alumno o la alumna lee en voz alta el apartado 4]

A: Vale, pues puedes hacer 136 entre 8 [Teclea en la calculadora]. Da 17. Y multiplicarlo por 17 [Teclea en la calculadora de nuevo]. 17 por 17.

D: Perfecto.

A: 289. Que es la a.

D: Muy bien, a. ¿Se entiende?

A: Sí.

D: Muy bien. Pues vamos a por el cinco, que es el último. Entonces, lee tú si quieres.

[El alumno o la alumna lee en voz alta el apartado 4]

D: Puedes hacer cálculo, escribir lo que quieras, ¿eh? No pasa nada.

A: Vale

D: A mí de cabeza me costaría…

A: [Se ríe. Tras ello, reflexiona durante un rato]

D: ¿Pistas?

A: No lo sé…

D: Fíjate… Solamente una pista, ¿vale? ¿Algunas de estas opciones te vale? [Señalo cada fila de la tabla]

A: Sí, la de n…

D: Eso es, pero imagínate, de las que son números, ¿alguna cuadra con lo que te estoy pidiendo?

A: No.

D: ¿Por qué?

A: Porque no hay ninguna que haya la misma cantidad de perales y abedules.

D: Vale.

A: Vale.

D: Entonces…

A: Pues.

D: Esta ya es para nota, ¿eh?

A: [Se ríe] Eh… Puedes intentar saber el número de perales que hay para saber las filas que hay.

D: Vale.

A: Vale. Bueno. Directamente, n tiene que ser igual a… n, que es el número que hay, tiene que ser igual a los abedules que hay. ¿No? O no, espera…

D: ¿Qué tiene que ser igual a qué? Ahí me has escrito que el número de filas…

A: Ah no, el número de filas tendría que ser este. No, a ver… La tabla, ¿qué era aquí? [señala la leyenda superior de la tabla]

D: Aquí, lo que habíamos escrito era el número de perales [señalo donde él o ella apunta] y aquí el número de abedules.

A: Sí, sí, sí. Vale. Entonces tiene que ser lo otro. Vale. [Señala varias veces a las columnas correspondientes al número de abedules y de perales de la tabla]. Es igual a ocho. Entonces, n tiene que ser ocho.

D: ¿Lo ves?

A: Sí.

D: ¿Se entiende?

A: Sí.

D: ¿Estás segur[redacted] entonces de que la respuesta sería ocho?

A: Ocho serían el número de perales. Pero pregunta de las filas...

D: ¿Seguro que ocho sería el número de perales?

A: No sé. Ah, no. Porque n es...

D: Eso es. ¿Cuál sería el número de perales?

A: Ocho. Bueno...Eh… Sería... ¿Ocho por ocho?

D: Muy bien. ¿Qué es?

A: Que es... Sesenta y cuatro.

D: Y te das cuenta de que entonces coincide. Vale. Muy bien.

A: Vale.

D: ¿Se entiende?

A: Sí.

D: ¿Seguro?

A: Sí.

Anexo XII. Resultados de la Evaluación de la Resolución Guiada

En este anexo, se tabulan los resultados completos de la evaluación por competencias del ejercicio de la resolución guiada recogido en el Anexo IX (a partir de la rúbrica del Anexo X).

Criterio de evaluación	0	1	2
3.2		X	
4.1			X
1.3			X
			X
1.2		X	
2.1		X	

Tabla 7: Resultados de la evaluación de la resolución guiada, utilizando la rúbrica del Anexo IX.

<u>Puntuación obtenida (sobre 10)</u>: 9/10.