



Facultad de Educación

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA**

**La enseñanza y el aprendizaje del concepto económico de elasticidad
desde la perspectiva del razonamiento covariacional**

**Teaching and learning of the economic concept of elasticity from the
perspective of covariational reasoning**

Alumna: Andrea Amoedo Fernández

Especialidad: Economía, Administración y Gestión y FOL

Director: Pedro Álvarez Causelo

Curso académico: 2024-2025

Fecha: 12/06/2025

RESUMEN. El objetivo del trabajo es caracterizar las formas de pensar y de razonar de los estudiantes en el aula de Economía al enfrentarse a las funciones en sus distintas formas de representación. Dado que el concepto de función se utiliza habitualmente en economía para recoger relaciones entre las magnitudes económicas de interés, dotar de sentido a su uso implica que los alumnos sean capaces de razonar en términos covariacionales, lo cual requiere ir más allá de los aprendizajes habituales del aula de matemáticas. Tomando como referencia central el concepto de elasticidad, este trabajo pretende analizar si los estudiantes aplican o no el razonamiento covariacional cuando se encuentran con las distintas formas de representación funcional en un contexto económico. Para alcanzar este objetivo, se pasará un cuestionario basado en tareas a un grupo de estudiantes de Economía de 1º de Bachillerato. La información obtenida se utilizará como referencia para realizar una propuesta orientada a mejorar la capacidad de razonamiento covariacional. En dicha propuesta tendrán un papel central las construcciones dinámicas, implementándose a través del software GeoGebra.

Palabras clave: razonamiento covariacional, elasticidad, funciones, educación secundaria

ABSTRACT. The main aim of this paper is to characterise the ways of thinking and reasoning of students in the economics classroom when face with functions in their different forms of representation. Given that the concept of function is commonly used in economics to express the relationships between economic magnitudes of interest, making sense of its use implies that students can reason in covariational terms, which requires going beyond the usual learning in the maths classroom. Taking the concept of elasticity as a central reference, this paper aims to analyse whether students apply covariational reasoning when encountering different forms of functional representation in an economic context. In order to achieve this objective, a task-based questionnaire will be administered to a group of Economics students in the first year of Bachillerato. The information obtained will be used as a reference to make a proposal whose aim is to improve covariational reasoning. Dynamic constructions will play a central role in this proposal, by using GeoGebra software.

Key words: covariational reasoning, elasticity, functions, secondary education

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO	6
1.1 Las funciones: del aula de matemáticas a la de economía.....	6
1.1.1 Análisis de la aparición del concepto de función en el currículo y en el aula de matemáticas	10
1.2 Las funciones desde la perspectiva del razonamiento covariacional.....	12
1.2.1 Las relaciones lineales como patrón de referencia	15
1.2.2 La elasticidad como alternativa	17
1.3 El concepto de elasticidad	20
1.3.1 La presencia del concepto de elasticidad en el currículo y en los libros de texto.	23
1.3.2 El concepto de elasticidad desde la perspectiva del razonamiento covariacional	31
CAPÍTULO 2. EXPLORACIÓN DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN EL AULA DE ECONOMÍA	33
2.1 Metodología	34
2.1.1 Muestra	34
2.1.2 Instrumento de recogida de información	34
2.1.3 Análisis de datos	36
2.2 Valoración de los resultados.....	41
CAPÍTULO 3. LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO PARA FACILITAR EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: UNA PROPPUESTA.....	43
3.1 Estructura de la propuesta.....	44
CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL	53
BIBLIOGRAFÍA	55
ANEXOS	58

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación (M. Carlson et al., 2002)	14
Tabla 2. Clasificación de tipos de demanda según el valor de la elasticidad...	22
Tabla 3. Definiciones y fórmulas del concepto de elasticidad en cinco libros de texto de Economía	25
Tabla 4. Resultados de la primera pregunta del cuestionario	37
Tabla 5. Resultados de la segunda pregunta del cuestionario.....	37
Tabla 6. Resultados de la tercera pregunta del cuestionario	38
Tabla 7. Resultados de la cuarta pregunta del cuestionario	39
Tabla 8. Resultados de la quinta pregunta del cuestionario	40
Tabla 9. Resultados de la sexta pregunta del cuestionario.....	41

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Concepto de función desde el enfoque de la correspondencia	9
Figura 2. Representación gráfica de la tasa de variación media de una función no lineal.....	17
Figura 3. Primera situación de precio y cantidad para el producto A y B	18
Figura 4. Segunda situación de precio y cantidad para el producto A y B.....	18
Figura 5. Tabla que recoge los cambios relativos de cantidad cosecha de maíz y su precio	20
Figura 6. Ejemplos de explicaciones gráficas de la elasticidad en dos libros de texto	27
Figura 7. Representación de una curva de demanda con una variación de precios concreta	28
Figura 8. Primera actividad del libro de GeoGebra.....	45
Figura 9. Segunda actividad del libro de GeoGebra.....	47
Figura 10. Tercera actividad del libro de GeoGebra.....	50
Figura 11. Primera actividad de ampliación del libro de Geogebra	52
Figura 12. Segunda actividad de ampliación del libro de GeoGebra.....	52

INTRODUCCIÓN

El concepto de elasticidad es muy relevante en economía, ya que permite comparar los cambios relativos de dos magnitudes económicas relacionadas. En la etapa de Educación Secundaria, se introduce principalmente a través de la elasticidad-precio de la demanda, que tiene una función clave en la fijación de precios debido a su relación directa con los ingresos de los vendedores.

A pesar de su relevancia, el alumnado presenta dificultades en su comprensión profunda, provocadas por su carácter abstracto y su desconexión de situaciones económicas reales. Para abordar esta dificultad es necesario tener en cuenta que el concepto de elasticidad se encuentra vinculado al concepto de función. Comprender la elasticidad requiere conceptualizar la covariación de dos magnitudes, lo que exige una concepción dinámica de las funciones y la aplicación del razonamiento covariacional por parte del alumnado.

Las funciones son esenciales para la modelización económica, ya que recogen relaciones entre magnitudes económicas de interés. Esta visión instrumental del concepto de función choca con el enfoque habitual del aula de matemáticas, que tiende a ser formal y descontextualizado. En este sentido, diversos estudios destacan la utilidad del razonamiento covariacional, para facilitar la coordinación del cambio simultáneo entre dos magnitudes (Carlson, 2002). Este tipo de razonamiento, resulta especialmente pertinente en el concepto de elasticidad, ya que coordina los cambios relativos de dos variables interrelacionadas, como el precio y la cantidad demandada.

Con el objetivo de explorar el uso del razonamiento covariacional en el aprendizaje del concepto de elasticidad en alumnos de Economía de 1º de Bachillerato, se realiza un cuestionario a 30 discípulos de un instituto de Santander. A partir de los resultados, se ha elaborado un modelo de segundo orden que pretende comprender los esquemas mentales del alumnado, sobre el que se diseña una propuesta basada en construcciones dinámicas elaboradas con GeoGebra. Esta herramienta permite al estudiante manipular representaciones funcionales y potenciar su razonamiento tanto cuantitativo como covariacional.

De acuerdo con estos objetivos, el trabajo se estructura en tres grandes apartados. En primer lugar, se realiza una revisión de la literatura relevante sobre la enseñanza y la presencia en el currículum tanto del concepto de función como del de elasticidad, desde la perspectiva del razonamiento covariacional. En segundo lugar, se presenta la metodología y los resultados del cuestionario llevado a cabo. Por último, se presenta la propuesta basada en GeoGebra que busca mejorar la capacidad de razonamiento covariacional.

CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

Dado el estrecho vínculo entre la economía y las matemáticas, este apartado revisa el papel que desempeñan las funciones en la enseñanza de las matemáticas y su aplicación en la modelización económica. Desde la perspectiva del constructivismo radical, se profundiza en el razonamiento covariacional como herramienta fundamental para interpretar funciones como relaciones dinámicas entre magnitudes. Finalmente, se analiza el concepto de elasticidad, especialmente la elasticidad-precio de la demanda, por su relación directa con dicho razonamiento, abordando su tratamiento en el currículo y en los libros de texto de Economía de 1º de Bachillerato, así como las dificultades que plantea su enseñanza y comprensión.

1.1 Las funciones: del aula de matemáticas a la de economía

El concepto de función acompaña a los estudiantes a lo largo de toda la etapa de educación secundaria, ya que constituye un pilar fundamental de las matemáticas modernas y una herramienta clave para otras disciplinas, como la física o la economía. En economía representan una herramienta esencial para recoger relaciones entre magnitudes económicas, y es frecuente trabajar con las diferentes formas de representación (gráfica, algebraica y tabular) como un recurso esencial para la modelización económica.

Los libros de texto de Economía en secundaria están repletos de tablas, gráficas y expresiones algebraicas que acompañan explicaciones conceptuales o ejercicios prácticos. Algunas representaciones gráficas habituales pueden ser la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) o las curvas de oferta y de

demandas. En cuanto a la representación algebraica, se utiliza de forma habitual para expresar diversas funciones como las de oferta y de demanda, a partir de las cuales se determina el precio y cantidad de equilibrio a través de la resolución de un sistema de ecuaciones. También son comunes las tablas para presentar conceptos como los costes y productividades medias o marginales.

Es habitual que en el aula de economía se utilicen de forma simultánea estas representaciones funcionales, lo que exige que el alumnado desarrolle fluidez en su interpretación y la capacidad de establecer conexiones entre ellas. Por ejemplo, la representación gráfica de la Frontera de Posibilidades de Producción suele ir acompañada de una tabla de valores concretos, mientras que las curvas de oferta y demanda se presentan frecuentemente junto con sus correspondientes expresiones algebraicas.

Tal es la dependencia de la enseñanza de la economía respecto al concepto de función que, en ocasiones, los libros de texto recurren a representaciones funcionales que exceden el nivel de conocimientos matemáticos del alumnado. Un ejemplo, es el uso de funciones con más de una variable, ya que en niveles más avanzados es habitual trabajar con ellas para representar la demanda o la producción. Además, algunos manuales introducen factores como los “gustos” de los consumidores como variables en los modelos, lo que puede entrar en conflicto con el razonamiento cuantitativo de los estudiantes, al no concebir variables de este tipo como atributos cuantificables.

Las funciones en economía tienen el objetivo, de representar patrones de relación entre magnitudes, convirtiéndose en una herramienta clave para la modelización económica. Por ello, se pone de manifiesto la importancia de que los estudiantes comprendan, trabajen fluidamente y doten de sentido económico a las funciones. Sin embargo, esta necesidad contrasta con el enfoque habitual en el aula de matemáticas, donde con frecuencia el tratamiento de las funciones se aborda de manera genérica y procedimental, sin una vinculación con contextos reales que favorezcan su comprensión (Oehrtman et al., 2008).

En contraste con este enfoque de las matemáticas, en otras disciplinas como la física o la economía, las funciones adquieren un carácter aplicado: se

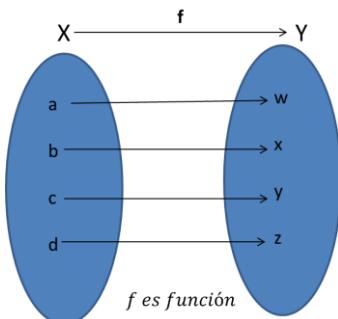
utilizan para modelizar y analizar situaciones reales. En física, por ejemplo, una función puede describir cómo varía la posición de un objeto en movimiento a lo largo del tiempo, lo que permite analizar su comportamiento y cuantificar magnitudes como la velocidad o la aceleración. Por otra parte, en economía, las funciones permiten representar patrones de relaciones entre magnitudes como el precio y la cantidad demandada o los costes y el volumen de producción. Por ello, la aplicación del razonamiento covariacional en la modelización de fenómenos económicos resulta esencial para dotar de significado estos conceptos y promover una comprensión profunda en el alumnado.

En el caso de la economía, la modelización presenta una complicación adicional. Mientras que, en física, los fenómenos reales y los experimentos sirven como referente directo para los modelos, en economía la mayoría de los modelos se construyen sobre supuestos teóricos que simplifican la realidad, partiendo no de situaciones reales sino “realistas¹”. En muchos casos, incluso se exige que el alumno sea capaz de concebir como serían las relaciones *ceteris paribus*, cuando esto no es observable en la realidad.

Frente a ese papel instrumental de las funciones en el aula de economía, en la de matemáticas priman las definiciones y los procedimientos descontextualizados. La definición formal más comúnmente empleada en los libros de texto de matemáticas describe las funciones como una relación entre dos magnitudes, de modo que a cada valor de una variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente. Según esta definición, los elementos de un conjunto se asocian con los elementos de otro conjunto, de tal manera que a cada elemento del primero le corresponde de forma exclusiva un elemento del segundo. Este enfoque de correspondencia contrasta con el enfoque de coordinación de magnitudes que defienden algunos autores como Thompson o Carlson, que tratan de poner el énfasis en la covariación, como se explicará más adelante.

¹ Estas situaciones dependen del conocimiento previo de los alumnos, y de que sean capaces de visualizarlas o concebirlas, a pesar de que no se den en la realidad (Lázaro et al., 2024)

Figura 1. Concepto de función desde el enfoque de la correspondencia



Más allá de la definición formal de función que es genérica y abstracta, se debe poner especial énfasis en la coordinación de las diferentes formas de representación de las funciones como son: expresión algebraica, tabular, gráfica o verbal. Los tres tipos de representación permiten conocer la relación existente entre ambas variables, pero con diferentes matrices. Las primeras, nos permiten condensar la relación existente entre variable dependiente e independiente de forma abstracta y general. Por ejemplo:

$$y = f(x)$$

La representación tabular, por otra parte, asigna valores concretos a la función para ambas variables, y suele utilizarse junto con la representación gráfica. Esta última permite visualizar la forma de la función y, en definitiva, la relación entre las dos variables. Thompson y Saldanha (1998) afirman que esta facilita la concepción de las funciones en términos continuos, frente a la visión estática de la tabular o la algebraica. El objetivo es que el alumnado sea capaz de desarrollar una imagen mental de la coordinación de los cambios simultáneos entre variable dependiente e independiente. En este sentido, también es fundamental que los estudiantes sean capaces de describir la relación de las variables verbalmente. En este sentido, Ellis et al. (2002) subrayan que las relaciones funcionales deben concebirse en términos de su razón de cambio, poniendo en relieve la importancia del razonamiento covariacional en la conceptualización por los estudiantes de la coordinación entre magnitudes.

Dada la complejidad y abstracción del concepto de función, es habitual una comprensión deficiente de este por parte del alumnado. Numerosas investigaciones han evidenciado estos desafíos y destacado la necesidad de

adoptar enfoques pedagógicos que vayan más allá de la mera manipulación de símbolos y procedimientos matemáticos habitual (M. Carlson et al., 2002; Ellis et al., 2022; Oehrtman et al., 2008; Paoletti & Vishnubhotla, 2022; Thompson & Carlson, 2017). En particular, han explorado la capacidad de los estudiantes para interpretar y representar situaciones a través de funciones, así como las dificultades que encuentran en este proceso. Se ha evidenciado que existe una ausencia de la capacidad de covariación simultánea de dos magnitudes relacionadas entre sí, siendo esta una habilidad esencial no solo en las ciencias, sino que también en el análisis económico. En este contexto, se presenta el razonamiento covariacional como una propuesta para que los estudiantes puedan superar estas dificultades y visualizar las funciones como una relación entre magnitudes. De esta forma, se daría prioridad al enfoque de covariación, utilizando el de correspondencia para dar una definición formal en otras etapas más avanzadas (Beckman et al, 2005).

En este apartado se examinará cómo se presenta el concepto de función en el currículo de Matemáticas de educación secundaria, así como su tratamiento en el aula y en los libros de texto. A continuación, se analizará la relevancia del razonamiento covariacional como enfoque clave para comprender y modelizar las relaciones funcionales de manera dinámica.

1.1.1 Análisis de la aparición del concepto de función en el currículo y en el aula de matemáticas

Las funciones, en sus múltiples facetas, aparecen a lo largo del currículum de toda la educación secundaria. Con la nueva ley de educación, la LOMLOE, se le da una especial importancia a la utilización de las funciones de forma contextualizada, como herramienta matemática que permite recoger las relaciones entre magnitudes en el contexto de la modelización de situaciones “realistas”. Esto es debido al enfoque competencial que tiene la ley, que potencia la adquisición de competencias, frente a la de conceptos y procedimientos descontextualizados. A lo largo de este apartado, se analizará la forma en la que aparecen las funciones en las distintas etapas, tanto relacionadas con las competencias específicas como con los saberes básicos.

La primera vez que aparece el concepto de función en el currículo de Matemáticas descrito en el Real Decreto 217/2022 es durante el primer ciclo de la ESO, de 1º a 3º. En 4º de la ESO, el tratamiento que se les da a las funciones es equivalente en ambas opciones de la asignatura, la A y la B. En el **Anexo I** se presenta una tabla con los saberes básicos relacionados con las funciones a lo largo de la etapa de la ESO. Este concepto aparece tratado desde sus diferentes aristas, por una parte, un “Sentido Algebraico” más relacionado con los tipos de funciones que pueden existir, y otro “Sentido de la Medida”, que se centra precisamente en el estudio de la covariación de las magnitudes implicadas. Este último guarda una estrecha relación con el razonamiento covariacional central en este trabajo, ya que alude expresamente a la comprensión de la coordinación de cambios simultáneos en magnitudes relacionadas entre sí.

En concreto, podemos relacionar estos saberes básicos con la Competencia Específica 1 y la 6. Ambas están centradas en la contextualización de las matemáticas, modelizando y resolviendo problemas de la vida cotidiana, e identificando las matemáticas en otras materias y situaciones. Estas competencias ponen el énfasis en la comprensión y en la capacidad de transferencia de conocimientos desde un enfoque competencial, fomentando la conexión entre el pensamiento matemático y la realidad. En este contexto, las funciones se erigen como una herramienta esencial que, en cualquiera de sus representaciones (algebraica, gráfica, verbal o tabular) permite a los estudiantes modelizar la realidad de manera efectiva. Sin embargo, esta orientación contrasta con la práctica habitual de muchas aulas, donde, como he observado tanto en mi experiencia de prácticas como en la literatura revisada, predominan los conocimientos procedimentales sin una conexión con la realidad.

En los dos cursos del Bachillerato, en el marco de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, que son las propias a la modalidad de Bachillerato que cursa la asignatura de Economía, las funciones continúan adquiriendo relevancia y se profundiza en su complejidad. En esta etapa se estudian aspectos fundamentales como la continuidad, la derivada, la representación gráfica y otras propiedades esenciales de las funciones (**Anexo II**). Las competencias

específicas relacionadas coinciden con las de la etapa anterior, destacando la importancia de las funciones en la modelización de funciones, y el carácter interdisciplinar de las matemáticas. Esto último, cobra una especial importancia, ya que en esta etapa se cursa simultáneamente la asignatura de Economía.

1.2 Las funciones desde la perspectiva del razonamiento covariacional

A pesar de que el currículum de matemáticas en el caso de España ya haya otorgado un mayor protagonismo a la comprensión profunda del concepto de función como coordinación de magnitudes desde un enfoque competencial, lo cierto es que gran parte de la enseñanza tradicional sigue centrándose en la manipulación simbólica y la visión de una relación estática entre variables (Ellis et al., 2022). Se tiende a dejar de lado la perspectiva del significado de la situación que se intenta resolver, no conectando este conocimiento con la realidad (Oehrtman et al., 2008), sin aplicar un razonamiento cuantitativo. Como consecuencia los estudiantes tienden a desconectar la práctica del contexto real, limitándose a una aplicación mecánica de los modelos matemáticos. En este contexto, se debe adquirir un nuevo enfoque pedagógico en las aulas que permita a los estudiantes comprender cómo una magnitud varía en función de otra, visualizando el cambio continuo entre las variables (Oehrtman et al., 2008).

Para avanzar hacia esta perspectiva, es fundamental comprender los esquemas mentales del alumnado desde los que interpretan el concepto de función y el de elasticidad. Desde la perspectiva del constructivismo radical (Glaserfeld, 2001), el conocimiento no se concibe como una realidad externa que se transfiere al alumno, sino como una construcción activa que cada individuo elabora a partir de su experiencia y contexto. En este marco, el aprendizaje es un proceso individual, dinámico y reflexivo, en el que cada estudiante construye significados propios mediante la coordinación de elementos sensoriales y operaciones mentales. Por ello, para investigar sobre el razonamiento de los estudiantes, resulta necesario construir modelos de segundo orden, es decir, representaciones que permitan formular hipótesis sobre su forma de pensar con el fin de adaptar las posibles intervenciones pedagógicas y guiarles hacia esquemas conceptuales más elaborados (Ulrich et al., 2014).

Diversos autores han creado modelos de segundo orden sobre el razonamiento de los estudiantes en el ámbito de las matemáticas, señalando una desconexión entre los símbolos algebraicos y el significado contextual de los problemas (Thompson & Smith, 2007). Muchos estudiantes manipulan expresiones numéricas sin haber interiorizado su sentido en una situación real; es decir, no han conceptualizado lo que están haciendo. En el contexto del constructivismo radical, con el objetivo de acabar con la brecha entre lo simbólico y lo significativo, se propone fomentar en el alumnado el razonamiento cuantitativo. Este es entendido como la capacidad para interpretar una situación en términos de magnitudes y de las relaciones que existen entre ellas. De esta forma se facilita el dotar de sentido a las expresiones matemáticas al vincularlas con atributos medibles, como la velocidad, el tiempo o, en el contexto económico, la sensibilidad de la cantidad demandada ante variaciones en el precio. Para desarrollarlo, Thompson y Smith (2007) proponen, entre otras estrategias, contextualizar los problemas en situaciones reales y priorizar la comprensión del significado de las representaciones y de los procedimientos matemáticos por encima de la mera obtención de resultados correctos.

Una vez que los estudiantes son capaces de cuantificar, es decir, conceptualizar las magnitudes, están en disposición de avanzar hacia formas de pensamiento más complejas. Entre ellas, destaca el razonamiento covariacional, que implica coordinar mentalmente la variación simultánea de dos magnitudes (Carlson et al., 2002), lo cual es fundamental para conceptualizar situaciones dinámicas. En el ámbito económico, esto se traduce, por ejemplo, en analizar cómo varía la cantidad demandada en respuesta a cambios en el precio, atendiendo no solo a valores absolutos, sino también a las relaciones proporcionales entre ambas magnitudes. El razonamiento covariacional no solo permite una comprensión más profunda del concepto de elasticidad, sino que facilita la interpretación de gráficas, tablas y funciones desde una perspectiva dinámica en todo el ámbito de la asignatura.

Complementariamente, Ellis et al. (2022) subrayan la importancia de plantear problemas que resulten próximos a la experiencia de los estudiantes para fomentar un aprendizaje más significativo. Sin embargo, no es

estrictamente necesario que estos problemas se basen en situaciones de la vida real; lo esencial es que permitan a los estudiantes construir una representación mental clara y coherente del fenómeno que están analizando, es decir, conceptualizarla. Esta capacidad de visualizar y modelizar la interdependencia entre magnitudes es clave para mejorar su comprensión y aplicación de las funciones en diferentes contextos. Por tanto, para que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda del concepto de función, es fundamental que perciban la variación simultánea entre dos magnitudes, de manera que el valor de una determine el valor de la otra (Thompson & Carlson, 2017). Esta visión resulta esencial para facilitar la comprensión de las funciones como herramienta de modelización en economía, e interpretar y comprender las relaciones funcionales.

Con el objetivo de profundizar en cómo los estudiantes conciben las funciones, Carlson et al. (2002) identificaron cinco acciones mentales claves en el razonamiento covariacional, basándose en cómo los estudiantes modelizan situaciones reales a través de funciones (Tabla 1). Estos niveles progresivos proporcionan una herramienta útil para analizar y comprender las dificultades y avances en el razonamiento de los estudiantes.

Tabla 1. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación (M. Carlson et al., 2002)

Acción mental	Descripción de la acción mental
Acción mental 1 (MA1)	Coordinación del valor de una variable con la variación de la otra.
Acción mental 2 (MA2)	Coordinación de la dirección de variación de una variable con la variación de la otra.
Acción mental 3 (MA3)	Coordinación de la cuantía de la variación de una variable con la variación de la otra variable.
Acción mental 4 (MA4)	Coordinación de la tasa media de variación de la función con los incrementos constantes de variación de la otra variable.
Acción mental 5 (MA5)	Coordinación de la tasa marginal de la función con las variaciones continuas de la variable independiente para todo el dominio de la función.

1.2.1 Las relaciones lineales como patrón de referencia

Para facilitar que los estudiantes conceptualicen la coordinación entre dos magnitudes, es útil tomar las funciones lineales como patrón de referencia. Este tipo de relaciones se representan gráficamente mediante rectas, por lo que resultan especialmente accesibles para los estudiantes y son muy utilizadas en la enseñanza de la economía debido a su sencillez. Se considera la forma funcional:

$$y = mx + n$$

Desde el enfoque de la covariación, la peculiaridad de las funciones lineales radica en que su tasa de variación es constante, en concreto, la pendiente m actúa como constante de proporcionalidad.

$$\Delta y = m * \Delta x, \quad \forall x, \forall \Delta x$$

Esto implica que un cambio en la variable independiente provocará un cambio en la variable dependiente que será m veces dicho cambio, funcionando como un factor de variación. Por ejemplo, se considera la siguiente función de demanda de hamburguesas en un restaurante, donde la cantidad demandada (q) depende del precio (p), siguiendo la notación estándar en economía:

$$q = 80 - 5p$$

Para esta función se cumple:

$$\Delta q = -5 * \Delta p, \quad \forall p, \forall \Delta p$$

La interpretación de la pendiente de esta función de demanda es que, ante un aumento del precio de 1 euro, se venden cinco hamburguesas menos. Como primera intuición de la coordinación entre ambas magnitudes, es importante destacar el signo negativo de la pendiente, que indica que cantidad demandada y precio son inversamente proporcionales.

Aunque esta interpretación pueda parecer sencilla, el alumnado suele presentar dificultades cuando los cambios de precio que tienen sentido son menores a la unidad. Para ilustrarlo, consideremos la siguiente función de demanda de barras de pan en una panadería local:

$$q = 150 - 50p$$

La interpretación habitual de esta pendiente sería que, ante un aumento del precio de 1 euro, la demanda disminuye en 50 barras de pan. Sin embargo, dado que una subida de 1 euro en productos baratos como el pan supone un cambio muy significativo, es importante que el alumnado aprenda a interpretar variaciones más pequeñas. Por ejemplo, un incremento de 10 céntimos (0,10€) provocaría una reducción de 5 barras de pan. Para favorecer la comprensión, se podría expresar la función en su forma punto-pendiente, por ejemplo:

$$q = 100 - 50(1 - p)$$

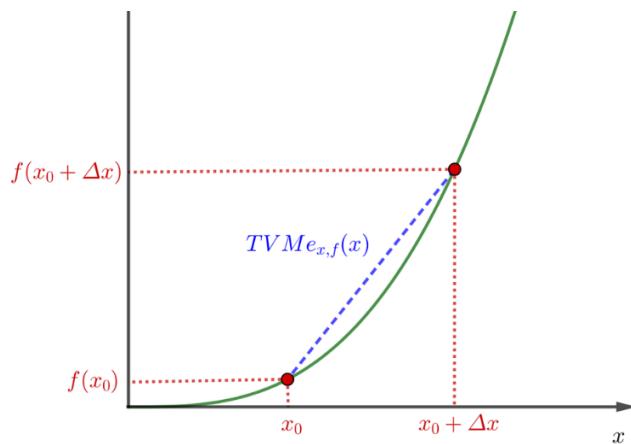
Con esta formulación, el foco se sitúa en la interpretación de la pendiente en torno a un punto concreto (en este caso, un precio de 1 euro), lo que facilita la conceptualización de cambios pequeños y con sentido económico y permitiendo entender la relación de covariación entre precio y cantidad desde una perspectiva más realista, sin poner el énfasis en los puntos de corte, que carecen de significado económico.

Cuando las funciones no son lineales, como ocurre con funciones exponenciales u otras más complejas, la pendiente deja de ser constante. En estos casos, un mismo cambio en la variable independiente puede provocar distintos efectos en la dependiente, según el punto de partida. Para analizar esta covariación, se recurre a la Tasa de Variación Media (TVM_e), que mide la variación del output en relación con el input, y es el cociente de las variaciones absolutas de las dos variables:

$$TVM_e[x, f(x)] = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Esta tasa depende del punto inicial y de la magnitud del incremento, y es equivalente a la pendiente de una función lineal que une esos puntos concretos de la curva. Es decir, gráficamente, se representa como la pendiente de la secante (recta azul) entre dichos puntos, como se observa en la Figura 2.

Figura 2. Representación gráfica de la tasa de variación media de una función no lineal.



Como complemento, esta noción conecta con el concepto de derivada, ya presente en el currículo de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º de Bachillerato. A pesar de que muchos estudiantes aún no se sienten familiarizados la derivada, es un concepto esencial en el análisis económico, y podría ser interesante presentarles esta conexión a aquellos estudiantes que se encuentren interesados en continuar los estudios por esta rama.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

La derivada se puede calcular como el límite de la TVMe cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero. Por ello, trabajar con variaciones pequeñas no solo es más realista, sino que facilita la comprensión por parte del alumno de la derivada en términos de cambio local. Esto es fundamental tanto en el cálculo como en sus aplicaciones en economía.

1.2.2 La elasticidad como alternativa

En el apartado anterior se ha resumido el papel de la tasa de variación como forma de cuantificar el impacto de los cambios en una variable sobre otra, implicando la comparación de la variación absoluta de la variable dependiente e independiente. La elasticidad constituye una alternativa a este planteamiento, introduciendo la comparación de variaciones relativas, debido la relevancia que tiene en economía, ya que la mayor parte de los análisis se expresan en términos porcentuales. Por ejemplo, en nuestra vida cotidiana recibimos una gran cantidad de información económica en término relativos, por ejemplo el IPC, los datos del

paro, de crecimiento económico, los aranceles o los impuestos. Por lo que el manejo de este tipo de magnitudes resulta esencial en la vida cotidiana de los estudiantes.

Para ilustrar la importancia de las variaciones relativas, a continuación, se presentan una serie de ejemplos que ilustran la importancia de cuantificar cuánto ha afectado el cambio de una variable en otra. En este caso utilizaremos el precio y la cantidad demanda de dos productos diferentes.

Consideremos primero una situación en la que se produce un mismo cambio en el precio de dos productos distintos.

Figura 3. Primera situación de precio y cantidad para el producto A y B

PRODUCTO A		PRODUCTO B	
Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
10	2000	10	1000
12	1500	12	700

Aunque el cambio absoluto en la cantidad es mayor en el producto A (500 unidades frente a 300 en el B), el análisis de la variación relativa muestra una realidad distinta: la demanda del producto A cae un 25%, mientras que la del B un 30%. Este enfoque, nos lleva a afirmar que ante un mismo incremento de precio el efecto en la cantidad demandada ha sido mayor en el B. A continuación, se considera la situación descrita en la Figura 4.

Figura 4. Segunda situación de precio y cantidad para el producto A y B

PRODUCTO A		PRODUCTO B	
Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
10	2000	10	1000
11	1500	16	750

En esta ocasión se observa que ambos productos experimentan una caída del 25% en la cantidad demandada. Ante un mismo cambio relativo en la variable dependiente, se debe prestar atención al cambio de la variable independiente, el precio. El precio, ha subido un 10% en el producto A y un 60% en el B, teniendo un cambio mucho menor un mismo efecto sobre la cantidad. Por tanto, el producto A presenta una mayor sensibilidad a cambios en el precio, siendo precisamente esta magnitud lo que mide la elasticidad.

El concepto de elasticidad está claramente relacionado con el enfoque de la covariación, en concreto, encaja con la que se recogía en la Tabla 1 como la Acción Mental 4, que implica comparar cambios relativos en lugar de absolutos. La diferencia con la TVMe es que se busca cuantificar la relación que existe entre la variación relativa de la variable dependiente e independiente, no entre las variaciones absolutas. Así, se introduce el concepto económico de elasticidad arco, que es central en este trabajo. La elasticidad-precio de la demanda, por ejemplo, compara la variación relativa de la cantidad demandada ante una variación relativa en el precio, permitiendo cuantificar con precisión la covariación entre ambas variables. El concepto de elasticidad se puede generalizar a cualquier otra situación en la que el interés esté en comparar las variaciones relativas y no las variaciones absolutas, como la elasticidad-precio de la oferta o las elasticidades cruzadas.

La Acción Mental 5 (MA5), que se refiere a incrementos marginales en la variable independiente, nos acerca al concepto de elasticidad punto a través de la derivada de la función. Aunque este nivel de análisis requiere conocimientos matemáticos más avanzados que los abordados en la educación secundaria, posteriormente se compararán las ventajas de uno y otro enfoque.

Es esencial tomar como referencia el razonamiento covariacional para, por una parte, analizar las formas de pensar de los estudiantes, y por otra, tener este análisis de referencia a la hora de buscar una mejor propuesta de enseñanza. Este enfoque se considera un modelo de segundo orden, ya que, en base a la perspectiva del constructivismo radical, solo podemos formular hipótesis sobre las formas de pensar y los procesos de aprendizaje del alumnado, sin llegar a conocerlos con certeza (Thompson & Carlson, 2017). En este trabajo se busca entender cómo los estudiantes razonan acerca de un concepto estrechamente vinculado a la cuantificación de la covariación: la elasticidad. Para ello, se analiza su aparición en los libros de texto más utilizados y, posteriormente, se examina el razonamiento de los alumnos a través de un cuestionario, con el objetivo de desarrollar una propuesta didáctica que mejore su comprensión del concepto.

1.3 El concepto de elasticidad

El origen del concepto de elasticidad no es del todo claro, aunque existen referencias tempranas que muestran cómo algunos autores ya manejaban ideas próximas al concepto, incluso antes de que se formalizara. Una revisión completa de esta evolución puede encontrarse en Morrill (1983).

Uno de los primeros antecedentes documentados aparece en 1699 con William Davenant, quien elaboró una tabla que recogía el precio del grano en relación con las cantidades cosechadas, expresando las variaciones con respecto a una situación de partida. Aunque no utilizó el término "elasticidad", esta tabla muestra una clara intuición de la relación entre precio y cantidad, lo que hoy entenderíamos como elasticidad-precio de la demanda (la sensibilidad del precio al cambio en la cantidad disponible en el mercado). Por ejemplo, si la cosecha de grano disminuye un 20% los precios aumentarían un 80%. Su objetivo era evidenciar ante la comunidad política y económica los efectos negativos de las malas cosechas, y abogar por la necesidad de importar cereales para reducir la vulnerabilidad ante estas fluctuaciones (Endres, 1987).

Figura 5. Tabla que recoge los cambios relativos de cantidad cosecha de maíz y su precio

<i>Defect</i>	<i>Above the common rate</i>	
1 tenth		3 tenths
2 tenths		8 tenths
3 tenths	raises the price	1.6 tenths
4 tenths		2.8 tenths
5 tenths		4.5 tenths

Nota. Extraída de Endres (1987)

Más adelante, Cournot (1897) fue uno de los primeros en intuir de manera formal la noción de elasticidad arco. En su análisis del comportamiento de la demanda, Cournot distinguió entre situaciones en las que esta respondía más o menos intensamente a los cambios de precio, y relacionó esta diferencia con el efecto que tendrían dichos cambios sobre los ingresos totales. Aunque no empleó aún el término "elasticidad", anticipó la distinción entre las demandas elásticas e inelásticas.

Finalmente, sería Marshall (1890) quien acuñó formalmente el término elasticidad punto y definió su cálculo tal y como lo entendemos hoy. Fue el

primero en presentar una fórmula explícita para medir la sensibilidad de la cantidad demandada ante variaciones en el precio, sentando las bases del análisis microeconómico moderno.

Es interesante señalar, que el concepto de elasticidad arco, aparece posteriormente y es más habitual en los libros de texto introductores de economía debido a su carácter más práctico, sin embargo, presenta algunas limitaciones desde el punto de vista teórico. Dada una relación funcional cualquiera $y = f(x)$, se define la elasticidad arco como:

$$\varepsilon_{(y_0, \Delta y)} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}}$$

Dado que la elasticidad se calcula como el cociente de las variaciones relativas de la variable dependiente y la independiente, se trata de magnitud adimensional, es decir, no tiene unidades de medida. Esta característica puede suponer una dificultad para la interpretación y conceptualización por parte del alumnado (Mkhatshwa, 2024). No obstante, la ausencia de unidades de medida también constituye una ventaja, ya que permite comparar la sensibilidad de la cantidad demanda respecto al precio en productos esencialmente diferentes, como el maíz y la gasolina. A pesar de que uno se mide en kilos y otro en litros, y sus precios de partida difieren notablemente, la elasticidad permite la abstracción de estas diferencias, cuantificando la relación entre ambas variables, que es lo verdaderamente relevante en el análisis económico.

Para el caso concreto de una función de demanda en la que la cantidad depende del precio, la elasticidad-precio de la demanda adopta esta forma:

$$\varepsilon_{(p_0, \Delta p)} = \frac{\frac{\Delta q}{q_0}}{\frac{\Delta p}{p_0}}$$

Cuantifica, por tanto, la relación entre la variación relativa de la cantidad y la variación relativa del precio, desempeñando un papel similar al de la TVMe cuando el centro de interés son las variaciones relativas en lugar de las

absolutas. Dado que un aumento en el precio provoca una disminución en la cantidad demandada, la elasticidad-precio de la demanda tiene signo negativo. Sin embargo, en la práctica se utiliza el valor absoluto para su interpretación, especialmente en el nivel educativo que se está estudiando.

En concreto, la elasticidad tiene una especial relevancia desde el punto de vista económico por diversas razones. Por ejemplo, para los vendedores, conocer esta relación es clave para anticipar el impacto de los cambios de precio en sus ingresos, así como para determinar estrategias de fijación de precios, especialmente en situaciones de poder de mercado, como el caso del monopolio.

Podemos reordenar esta expresión para expresar la elasticidad-precio de la demanda como el producto entre la pendiente y una fracción que ajusta según el punto inicial:

$$\varepsilon_{(p_0, \Delta p)} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \frac{p_0}{q_0}$$

De esta forma, la elasticidad se expresa como la tasa de variación media corregida por un segundo factor formado por el cociente de los valores iniciales de precio y cantidad.

En función del valor numérico de la elasticidad, se distinguen tres tipos de demanda:

Tabla 2. Clasificación de tipos de demanda según el valor de la elasticidad

Tipo de demanda	Elasticidad	Interpretación
Elástica	$\varepsilon > 1$	La variación porcentual de la cantidad es mayor que la del precio.
Inelástica	$\varepsilon < 1$	La variación porcentual de la cantidad es menor que la del precio.
Unitaria	$\varepsilon = 1$	Las variaciones porcentuales de precio y cantidad son las mismas.

Como ya se ha mencionado anteriormente la elasticidad arco presenta algunas limitaciones teóricas que dificultan su consideración como forma más precisa de medir la covariación entre dos variables. Una de sus principales desventajas es la falta de simetría: no es lo mismo calcularla desde q_0 a q_1 que

en el sentido inverso. Este hecho se deriva de la propia naturaleza de las variaciones relativas como forma de cuantificar el cambio, ya que su valor numérico depende del valor de la magnitud tomada como referencia. Por ejemplo, si el precio aumenta de 100 a 120 el incremento es del 20%, pero si baja de 120 a 100, la disminución es del 16,7%. Esto evidencia la importancia del punto de referencia seleccionado para realizar el cálculo.

Por tanto, desde el punto de vista teórico, la forma más precisa de medir la elasticidad es mediante la elasticidad punto, que se define como:

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{dq}{dp} \frac{p_0}{q_0}$$

En esta fórmula, $\frac{dq}{dp}$ representa la derivada de la función en p_0 , es decir, la pendiente de la curva de demanda en ese punto concreto. La elasticidad punto refleja con mayor exactitud la sensibilidad de la variable dependiente ante pequeños cambios en la independiente.

Gómez López (2019) señala que, en la enseñanza del concepto de elasticidad, suele presentarse la fórmula y resolverse ejercicios mecánicamente, sin llegar a comprender el porqué de su uso. El siguiente apartado busca justamente analizar cómo se presenta y trabaja el concepto de elasticidad-precio de la demanda en los libros de texto de 1º de Bachillerato de Economía y en el currículum oficial, poniendo énfasis en su importancia como herramienta para entender las relaciones de covariación entre variables económicas.

1.3.1 La presencia del concepto de elasticidad en el currículo y en los libros de texto.

El currículum de la asignatura de Economía de 1º de Bachillerato ha sido extraído del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Economía se trata de una asignatura de modalidad dentro del itinerario de Ciencias Sociales y Humanidades, con una carga lectiva de 4 horas semanales. Esta asignatura tiene un carácter introductorio al ámbito económico, tratando una gran diversidad de ramas de la economía, como macroeconomía, microeconomía, política

económica, comercio internacional o política monetaria entre otras. Su objetivo es ofrecer una visión global al alumnado de la realidad económica actual, dando una especial relevancia al contexto.

El concepto de elasticidad aparece en el apartado B de los saberes básicos, dedicado a las “Herramientas para entender el mundo con una visión microeconómica”, siendo estudiado junto al análisis del intercambio y del funcionamiento del mercado.

Para contextualizar el conocimiento del alumnado de 1º de Bachillerato respecto al concepto de elasticidad, se ha llevado a cabo un análisis crítico de cinco libros de texto comúnmente utilizados en Cantabria. Este análisis se ha estructurado en torno a cuatro dimensiones clave: definición y expresión analítica del concepto, su interpretación gráfica, factores determinantes en su valor y tipo de ejercicios prácticos propuestos. El objetivo principal es evaluar si estas fuentes fomentan el razonamiento cuantitativo y covariacional, dada su importancia para facilitar la comprensión del concepto por parte del alumnado, tal y como se ha expuesto en el marco teórico.

A) Definición y expresión analítica

De los cinco libros analizados, únicamente dos (SM y McGraw-Hill), introducen el concepto de elasticidad a través de ejemplos diseñados para conectar con el conocimiento previo del alumnado. Ambos parten de la ley de la demanda, enfatizando que la cantidad demandada varía inversamente con el precio, y plantean reflexiones sobre cómo la magnitud de ese cambio puede diferir según el tipo de bien. En SM por ejemplo se afirma que: “según la ley de la demanda, si baja el precio de un bien un 10%, aumenta la cantidad demandada. Pero, si analizamos esos aumentos para distintos bienes, observaremos que son muy diferentes según el tipo de bien” (p. 94). Posteriormente, comparan cuánto aumentaría la demanda si bajase el precio de bienes y servicios como joyas o restaurantes, frente a otros como el pan o la sal.

A continuación, todos los manuales presentan una definición teórica del concepto de elasticidad acompañada de su expresión matemática. Esta información se encuentra sintetizada en la Tabla 3.

Tabla 3. Definiciones y fórmulas del concepto de elasticidad en cinco libros de texto de Economía

Libro de texto	Definición	Fórmula
Edelvives	La elasticidad es una medición de la <u>sensibilidad</u> de la cantidad, ofertada o demandada, frente a los cambios en una de las variables que la determinan."	$\epsilon_p^D = \left \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} \right $
Anaya	La elasticidad es un ratio o razón, número obtenido por cociente, que refleja la <u>sensibilidad</u> de una variable respecto a otra	$\epsilon_p^D = \frac{ \Delta Q }{Q} / \frac{ \Delta P }{P}$
Compartiendo Conocimiento	La elasticidad de la demanda es una herramienta que sirve para medir la <u>sensibilidad</u> de la cantidad demandada de un bien ante variaciones del precio de este.	$\epsilon_p^D = - \frac{\frac{(Q_1 - Q_0)}{Q_0}}{\frac{(P_1 - P_0)}{P_0}}$
SM	La elasticidad cuantifica la <u>sensibilidad</u> de la demanda de los consumidores ante cambios en los precios.	$\epsilon_p^D = \frac{\% \text{ de cambio en } Q}{\% \text{ de cambio en } P}$
Mac Graw Hill	La elasticidad-precio de la demanda cuantifica la variación de la cantidad demandada ante variaciones en los precios.	$\epsilon_p^D = \left \frac{\% \text{ de cambio en } Q}{\% \text{ de cambio en } P} \right $

Todos los libros de texto, excepto McGraw-Hill, definen la elasticidad como la “sensibilidad” de la demanda ante variaciones en el precio, un término que puede resultar abstracto, ya que no compara el cambio de una variable y el de otra, no explicitando el razonamiento covariacional, lo que dificulta una comprensión profunda por parte del alumnado.

En cuanto a las expresiones analíticas, todos los libros de texto presentan la elasticidad como el cociente de variaciones relativas de cantidad y precio, aunque presentan algunas diferencias en su formulación. Una primera diferencia se encuentra en el tratamiento del signo, ya que algunos manuales simplifican su expresión aplicando un valor absoluto o un signo negativo al inicio. Solamente los libros de SM y McGraw-Hill reflexionan sobre el signo negativo de la

elasticidad-precio de la demanda, debido a la relación inversa de precio y cantidad demandada, aplicando el razonamiento covariacional.

Otra cuestión relevante es la distinción entre variaciones absolutas y relativas. Solo el libro de Anaya ilustra adecuadamente esta diferencia mediante un ejemplo numérico, destacando que un mismo cambio absoluto puede suponer distintos porcentajes según el valor inicial. En concreto, explican que un aumento de 8 unidades en la cantidad demandada representa un incremento del 25 % si se parte de una demanda inicial de 32 unidades, mientras que ese mismo aumento supondría un 50 % si se parte de 16 unidades. Con este ejemplo se pretende evidenciar la importancia de los cambios relativos en el análisis económico.

Tras la definición y la exposición de la fórmula, la mayoría de los libros de texto clasifican los distintos tipos de demanda según el valor numérico de la elasticidad, acompañando esta clasificación con diferentes ejemplos:

- Inelástica ($e < 1$): McGraw-Hill y Edelvives incluyen ejemplos de bienes básicos y necesarios (leche, pan, medicinas, etc.).
- Unitaria ($e = 1$): McGraw-Hill y Edelvives son los únicos libros de texto que destacan que este tipo es prácticamente imposible encontrarlo fuera del contexto teórico, ya que se trata de un modelo que parte de unos supuestos concretos que no se corresponden con la realidad.
- Elástica ($e > 1$): McGraw-Hill y Edelvives ofrecen ejemplos de bienes de lujo.

Además, Anaya introduce las nociones de demanda perfectamente inelástica ($e = 0$) y perfectamente elástica ($e = \infty$), aunque no menciona su escasa aplicabilidad en contextos reales.

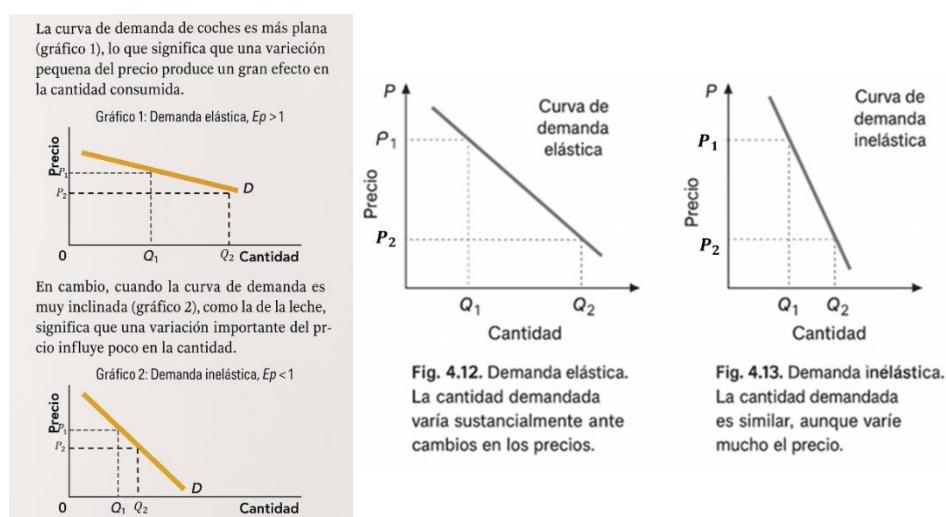
B) Interpretación gráfica

Complementando a la definición y la expresión analítica solo tres de los cinco libros de texto ofrecen una breve interpretación gráfica. Anaya presenta cuatro representaciones gráficas de curvas de demanda con distintas pendientes, clasificándolas como demandas elásticas o inelásticas. Sin

embargo, comete el error de asociar toda la curva con un único tipo de elasticidad, ignorando que esta depende del punto considerado y de la magnitud del cambio. Esto puede llevar a que los alumnos confundan la elasticidad con la pendiente de la curva de demanda, identificando pendientes más pronunciadas con demandas inelásticas, y viceversa, sin tener en cuenta el razonamiento covariacional que se encuentra detrás. Incluso se afirma que “la forma de la curva de demanda está determinada por la elasticidad, de modo que las funciones de demanda muy elásticas tienen curvas muy horizontales, mientras que las inelásticas las tienen más verticales” (p. 79).

Por su parte, SM y McGraw-Hill ofrecen representaciones más detalladas que incluyen variaciones concretas de precio y cantidad, invitando al alumnado a reflexionar sobre cuándo la demanda es elástica o inelástica en función de los cambios observados.

Figura 6. Ejemplos de explicaciones gráficas de la elasticidad en dos libros de texto



Nota. Las explicaciones pertenecen al libro de McGraw Hill y el de SM

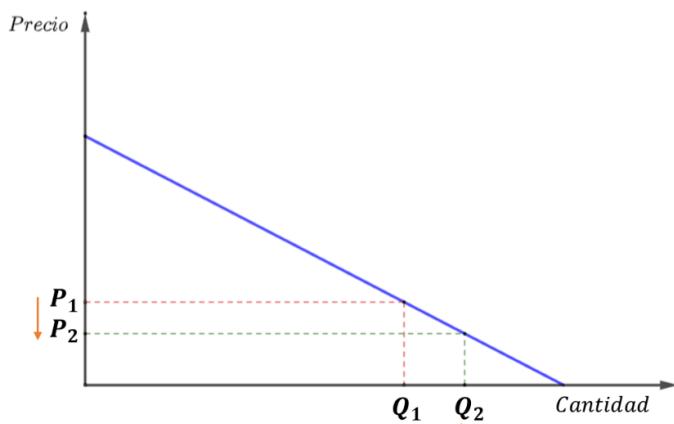
En concreto, se busca que el alumnado intuya que una demanda responde de forma inelástica cuando un gran cambio en el precio no produce un gran cambio sobre la cantidad, mientras que responde forma elástica si una pequeña variación del precio sí provoca grandes cambios en la cantidad demandada. Sin embargo, estas explicaciones no ponen el énfasis en la conceptualización de la covariación del cambio en el precio y de la cantidad, ni

se cuantifican correctamente estos cambios. Además, exponen situaciones poco realistas, como reducciones de precio de más de la mitad de su valor inicial, dificultando la conceptualización de la situación al alumnado.

Para evitar posibles confusiones, sería conveniente centrar la atención en los incrementos relativos de ambas variables. En ambas imágenes, se observa que el cambio en el precio de la primera gráfica es proporcionalmente pequeño, ya que parte de un valor muy elevado. En cambio, este descenso provoca un aumento proporcionalmente grande en la cantidad demandada, que prácticamente se duplica. En este caso, la demanda responde de forma elástica, dado que la cantidad demandada aumenta en mayor proporción que la disminución del precio. En cambio, en la segunda gráfica se produce un cambio proporcionalmente grande en el precio, que se reduce a menos de la mitad. Sin embargo, el aumento en la cantidad demandada es relativamente pequeño, incrementándose aproximadamente un tercio. En este caso, la demanda responde de forma inelástica, ya que la cantidad demandada crece en menor proporción que la variación del precio.

Se debe prestar especial atención a la no identificación de la elasticidad con la forma de la curva (más o menos inclinada), ya que se puede inducir a error a los estudiantes. Una curva “plana” puede mostrar una respuesta inelástica en función del tramo analizado, como se observa en la Figura 7.

Figura 7. Representación de una curva de demanda con una variación de precios concreta



Nota. En este gráfico se muestra una disminución del precio inicial (rojo) al final (verde), con su respectivo aumento de la cantidad.

Ante esta variación concreta de los precios esta curva de demanda responde de forma inelástica. Esto es debido a que la variación relativa del precio es muy grande, se reduce prácticamente a la mitad, mientras que el aumento de la cantidad demandada es relativamente pequeño. El foco debe ponerse, por tanto, no en la forma general de la curva de demanda si no en la comparación del cambio relativo concreto de ambas variables, aplicando el razonamiento covariacional.

C) Factores determinantes en su valor

Los libros de texto analizados identifican los mismos principales factores que afectan la elasticidad-precio de la demanda:

- Tipo de bien: los bienes de primera necesidad suelen tener una demanda inelástica, mientras que los bienes de lujo elástica.
- Existencia de bienes sustitutivos: la presencia de alternativas favorece una mayor elasticidad de la demanda, ya que ante subidas de precio los consumidores pueden cambiar de bien. Por ejemplo las manzanas, tienen otras frutas como sustitutivo mientras que los huevos no tienen un producto sustitutivo.
- Proporción de renta destinada en el bien o servicio: la demanda de los bienes y servicios que representan un mayor gasto absoluto será más elástica. Por ejemplo, ante una misma bajada de precio de un 2% del pan y a un automóvil, la demanda de automóviles será más elástica ya que representa más dinero en términos absolutos que el gasto en pan.
- Plazo de tiempo considerado: según McGraw-Hill y Edelvives la demanda tiende a volverse más elástica a largo plazo, ya que los consumidores pueden encontrar más fácilmente alternativas. Ambos ponen el ejemplo de los combustibles fósiles. McGraw-Hill incluye una actividad de profundización sobre la demanda de petróleo.

D) Tipos de ejercicios prácticos propuestos

En términos generales, los ejercicios propuestos en los libros de texto analizados se centran en la aplicación directa de la fórmula de la elasticidad, la identificación del tipo de bien según su grado de elasticidad (elástica o inelástica)

y otras cuestiones relacionadas con la definición conceptual de la elasticidad. A pesar de que la mayoría de las actividades tienen un enfoque meramente procedural, en ocasiones se plantean ejercicios a partir de situaciones contextualizadas y realistas, con el objetivo de favorecer la conexión entre el contenido teórico y la realidad cotidiana del alumnado. Este tipo de ejercicios aparecen especialmente en el manual de Edelvives y de McGraw-Hill, proponiendo que los alumnos tomen decisiones sobre políticas económicas o fiscales. En el **Anexo III** se muestra una tabla resumen con ejemplos de ejercicios propuestos.

Asimismo, la mayoría de los libros incluyen ejercicios que vinculan la elasticidad con los ingresos, destacando dos efectos clave: por un lado, el efecto ventas, según el cual un aumento del precio provoca una caída en la cantidad demandada; y por otro, el efecto ingreso medio, ya que las unidades vendidas se comercializan a un precio superior. La interacción entre ambos efectos depende del valor de la elasticidad, y determina si el ingreso total aumenta o disminuye ante un determinado cambio en los precios. Estos ejercicios suelen plantear situaciones en las que se debe decidir si un empresario debería subir o bajar el precio de un producto para incrementar sus ingresos dependiendo del valor de la elasticidad.

Otro aspecto destacable es que en todos los libros de texto los datos para el cálculo de la elasticidad se ofrecen en forma tabular, es decir, ofreciendo los valores para precio y cantidad. En ningún caso se les proporciona la función de demanda, lo que dificulta que los alumnos coordinen las distintas formas de representación, y no concibran la relación existente entre ambas magnitudes.

Algunos libros como McGraw-Hill si incluyen actividades que buscan la coordinación de las distintas formas de representación. Por ejemplo, se plantea una situación en la que se relacionan simultáneamente precio, ventas e ingresos, permitiendo observar cómo cambian conjuntamente estas variables en formato tabular. Complementariamente se pide al alumnado que vincule el resultado numérico con la teoría, fomentando así una comprensión más profunda de la relación funcional entre las variables implicadas.

1.3.2 El concepto de elasticidad desde la perspectiva del razonamiento covariacional

Tal como se ha observado en el análisis de los libros de texto, la forma en la que se introduce el concepto de elasticidad puede llevar a diversas confusiones en el alumnado. Entre las más frecuentes se encuentra la tendencia a identificar la elasticidad con la pendiente de la curva de demanda, o bien a asumir que esta es constante a lo largo de toda la curva. Además, en muchos casos no se razona el objetivo del uso de la elasticidad, es decir, no se explica qué tipo de razonamiento económico permite (Gómez, 2019). Al igual que en la enseñanza de las funciones, se prioriza la mecanización de procedimientos a través de ejercicios rutinarios, dejando en un segundo plano la comprensión conceptual y, en particular, el desarrollo del razonamiento covariacional.

Sin embargo, el estudio de la elasticidad-precio de la demanda encaja de forma natural con una perspectiva covariacional. De hecho, este concepto se basa precisamente en comparar los cambios en la variable dependiente (la cantidad demandada) con los cambios en la variable independiente (el precio). Este tipo de análisis implica pensar en la covariación entre dos magnitudes y, más específicamente, en cómo se relacionan sus variaciones relativas.

Poner el foco en los cambios relativos, y no únicamente en los absolutos, es fundamental para comprender adecuadamente el concepto de elasticidad, ya que en la mayor parte de ocasiones esta magnitud es la que nos ofrece más información en un análisis económico. Por ejemplo, a la hora de determinar si una subida de precio ha sido significativa o una bajada en la cantidad demandada, tal y como se mostraba con las Figura 3 y 4.

La comprensión del concepto de elasticidad implica la conceptualización de la coordinación entre ambas variables a través de distintas formas de representación. Por un lado, se encuentra la interpretación analítica, basada en la forma funciones; por otro, la representación gráfica, en la que no se puede observar directamente la elasticidad, pero sí pueden deducirse las variaciones relativas mediante la pendiente local de la curva. Por último, la interpretación

verbal, es decir, la capacidad de razonar si la cantidad demandada varía más o menos que proporcionalmente ante un cambio en el precio.

En conclusión, la literatura revisada pone de manifiesto que los estudiantes pueden encontrar diversas dificultades a la hora de comprender el concepto de elasticidad, especialmente en lo que respecta a la coordinación de las variables implicadas: precio y cantidad demandada. Esto es debido a que se trata de un concepto abstracto que, al representar un modelo económico, resulta difícil vincular con situaciones reales. Como señala Mkhatshwa (2024), a pesar de que la elasticidad no es directamente observable en la representación gráfica de la curva de demanda, muchos estudiantes tienden a confundirla con la pendiente. Además su carencia de unidades de medida es otro factor que complica aún más su conceptualización.

A esto se suma la exigencia de operar con variaciones relativas en lugar de absolutas, una competencia que no siempre está suficientemente desarrollada en el alumnado. Estas dificultades inherentes al concepto se ven agravadas por el enfoque mayoritariamente procedimental de los libros de texto, que tienden a promover la memorización y mecanización de cálculos sin fomentar una verdadera comprensión del fenómeno económico que subyace. En consecuencia, se dificulta la activación del razonamiento covariacional, clave para interpretar cómo varía una magnitud en relación con otra en un contexto económico.

Estas conclusiones teóricas sustentan, por un lado, el diseño del cuestionario aplicado al alumnado, el cual ha sido concebido para identificar en qué medida los estudiantes son capaces de comprender e interpretar la elasticidad desde un enfoque covariacional y no meramente mecánico. Por otro lado, también justifican la necesidad de una propuesta didáctica alternativa, basada en construcciones dinámicas con herramientas como GeoGebra, que favorezcan el desarrollo del razonamiento covariacional y permitan vincular el concepto de elasticidad con representaciones gráficas interactivas y con situaciones económicas contextualizadas.

CAPÍTULO 2. EXPLORACIÓN DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN EL AULA DE ECONOMÍA

El objetivo de esta investigación es exploratorio y pretende aproximarse a las formas de pensar del alumnado de 1º de Bachillerato en el aula de economía, en relación con el concepto de elasticidad-precio de la demanda. Concretamente, se busca analizar si los estudiantes aplican un razonamiento de tipo covariacional al enfrentarse a este concepto. Posteriormente, a partir de los resultados obtenidos, se diseñará una propuesta didáctica orientada a favorecer un cambio en los esquemas mentales del alumnado, con el fin de facilitar la comprensión de la elasticidad y mejorar así su aprendizaje.

Como se expuso en el marco teórico, diversos estudios en el ámbito de la didáctica de las matemáticas han señalado que los estudiantes, por lo general, no aplican el razonamiento covariacional, a pesar de que esto favorece un aprendizaje más significativo (Carlson et al., 2002; Saldanha & Thompson, 1998). Sin embargo, se han realizado muy pocos estudios de este tipo en el ámbito de la economía, especialmente en la etapa de educación secundaria, a pesar de su estrecha vinculación con las matemáticas. Algunas investigaciones, como la de Mkhatshwa (2022), han abordado la utilización del razonamiento covariacional en el estudio de la economía en la enseñanza universitaria.

La elasticidad-precio de la demanda es un concepto especialmente adecuado para explorar el razonamiento covariacional, ya que su comprensión implica la coordinación entre los cambios en dos variables, precio y cantidad demandada. Por ello, esta investigación se plantea la siguiente pregunta: ¿Aplican los estudiantes de 1º de Bachillerato un razonamiento covariacional al enfrentarse al concepto de elasticidad-precio de la demanda?

Siguiendo las conclusiones de estudios previos, se espera que los estudiantes no razonen en términos de covariación, es decir, que no concibran simultáneamente las variaciones del precio y la cantidad demandada. Para evaluar esta cuestión, se ha diseñado un cuestionario que permita detectar evidencias (o ausencia) de este tipo de razonamiento en el ámbito de la economía, en relación al concepto de elasticidad-precio de la demanda.

2.1 Metodología

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, ya que el objetivo principal es comprender cómo interpretan los estudiantes el concepto de elasticidad desde su propia perspectiva, con el objetivo de crear un modelo de segundo orden sobre su forma de pensar. Para la recogida de información se ha utilizado un cuestionario diseñado específicamente para identificar patrones de razonamiento en torno a la relación entre precio y cantidad demandada.

2.1.1 Muestra

La muestra está compuesta por 30 estudiantes de 1º de Bachillerato de un instituto de la ciudad de Santander, que cursan la asignatura de Economía o Economía, Emprendimiento y Actividad Empresarial, por lo que pertenecen a la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales o a la modalidad General. Se trata de una muestra no probabilística por conveniencia, ya que se seleccionó en el centro en el que se realizaron las prácticas del Máster, por cuestiones de accesibilidad y adecuación.

2.1.2 Instrumento de recogida de información

El instrumento seleccionado para la recogida de datos ha sido un cuestionario, diseñado con preguntas que permiten obtener información relevante para contrastar la hipótesis de partida. El uso del cuestionario en este contexto se justifica por su capacidad para recoger de forma estructurada datos sobre la comprensión del concepto de elasticidad y sobre la presencia de razonamiento covariacional en el alumnado.

Antes de la realización de la prueba escrita se obtuvo la autorización del centro educativo y se informó a los participantes sobre el objetivo del estudio y sus características. Además, se recogió su consentimiento por escrito en cumplimiento con la Ley de Protección de Datos, tras pedir la autorización del Comité de Ética de Proyectos de Investigación de la Universidad de Cantabria (**Anexo IV**).

El cuestionario incluye tanto preguntas abiertas como cerradas. Las abiertas permiten explorar el razonamiento de los estudiantes, al instarles a explicar libremente sus respuestas a distintos problemas. Por su parte, las preguntas cerradas, situadas al inicio del cuestionario, recogen información básica de carácter sociodemográfico (edad, sexo, modalidad de Bachillerato, si cursan o no Matemáticas), relevante para contextualizar los resultados.

Aunque se consideró la posibilidad de realizar entrevistas clínicas basadas en tareas para profundizar en el razonamiento del alumnado, finalmente se descartó esta opción por las limitaciones de tiempo y recursos. Este tipo de entrevista facilitaría más información para realizar un diagnóstico más preciso de los esquemas mentales de los estudiantes, y nos permitiría conducir al sujeto a través de preguntas. No obstante, se llevó a cabo una entrevista clínica preliminar con un estudiante del primer curso del Grado en Economía, que había cursado recientemente 2º de Bachillerato. Esta entrevista permitió observar que, incluso en estudiantes con buen rendimiento en Matemáticas y en Economía, el razonamiento covariacional no aparece de forma espontánea en el tratamiento del concepto de elasticidad, predominando un enfoque mecánico y procedimental. También se observó que con una guía sí pudo interpretar las tasas de variación relativas y relacionarlas con el concepto de elasticidad.

Con base en esta observación, se elaboró una versión adaptada del cuestionario dirigida a estudiantes de 1º de Bachillerato, utilizando ejercicios basados en el manual de la editorial Edelvives y preguntas inspiradas en estudios anteriores (**Anexo V**).

En primer lugar, el cuestionario comienza con una sección destinada a recopilar información general sobre la muestra, incluyendo el sexo, la edad y la modalidad de Bachillerato del alumnado. Asimismo, se les pregunta si actualmente cursan la asignatura de Matemáticas, dado su vínculo estrecho con la economía y, en particular, con el razonamiento covariacional. Cabe señalar que los participantes proceden de distintas modalidades de Bachillerato, y que la asignatura de Matemáticas puede recibir diferentes denominaciones según el

itinerario: Matemáticas Generales o Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

A continuación, el cuestionario se compone de seis preguntas centradas en aspectos clave en una comprensión profunda del concepto de elasticidad, tales como las tasas de variación o la interpretación económica de funciones. Estas preguntas pueden agruparse en tres bloques temáticos. El primer bloque incluye las preguntas 1 a 3. Las dos primeras tienen como finalidad identificar si el alumnado reconoce las variaciones relativas como una magnitud económica relevante y si es capaz de utilizarlas adecuadamente. Ambas se contextualizan en el ámbito económico, abordando primero una variación en el precio y, posteriormente, una en la cantidad demandada como consecuencia de dicho cambio. La tercera pregunta busca determinar si los estudiantes relacionan estas variaciones relativas con el concepto de elasticidad. Además, se les solicita que expresen cuáles han sido las principales dificultades que han encontrado con relación al aprendizaje de este concepto.

El segundo bloque, formado por la pregunta 4, se pregunta explícitamente sobre el concepto de elasticidad, con el objetivo de comprobar si los estudiantes saben calcular la elasticidad-precio de la demanda a partir de datos organizados en formato tabular. Se trata de una cuestión fundamentalmente procedural.

Por último, el tercer bloque, correspondiente a las preguntas 5 y 6, pretende evaluar si los estudiantes interpretan adecuadamente los conceptos implicados en términos de covariación, concretamente la pendiente de una función de demanda lineal y el propio concepto de elasticidad, en forma gráfica.

2.1.3 Análisis de datos

Los datos recogidos a través del cuestionario han sido analizados de forma anónima, evaluando individualmente cada pregunta con el objetivo de identificar patrones generales en el razonamiento del alumnado.

En las dos primeras preguntas, orientadas a comprobar si el alumnado aplicaba correctamente el concepto de variación relativa, los resultados fueron dispares. Mientras que, en la primera pregunta, referida a los cambios de precio,

únicamente una persona respondió de forma correcta calculando la tasa de variación, en la segunda, centrada en los cambios en la cantidad, el 23% de los encuestados ofreció una respuesta adecuada. Esta diferencia puede deberse a que los cálculos requeridos en la segunda pregunta eran más sencillos o incluso resultaban más intuitivos visualmente, suponiendo una disminución del 25% y 20%. Un gran número de estudiantes calculó la variación relativa como el cociente entre el valor final y el inicial, lo que les permitió obtener fácilmente el factor de variación.

Tabla 4. Resultados de la primera pregunta del cuestionario

Pregunta 1					
	Responde correctamente	Intuición verbal	Variación absoluta	Confusión magnitud	Mal/Ns/Nc
Nº personas	1	10	7	8	4
%	3,3%	33,3%	23,3%	26,7%	13,3%

Nota. Se considera que un estudiante responde correctamente si explicita el cálculo, este es correcto y verbaliza el encarecimiento del producto. Se considera que hay una confusión referente a la magnitud, cuando se hace evidente que el estudiante no concibe el encarecimiento como magnitud.

Tabla 5. Resultados de la segunda pregunta del cuestionario

Pregunta 2					
	Responde correctamente	Intuición verbal	Variación absoluta	Mal	Mal/Ns/Nc
Nº personas	7	4	6	11	2
%	23,3%	13,3%	20%	36,7%	6,7%

A pesar de ello, aproximadamente un tercio del alumnado mostró cierta intuición, aunque no formalizara el cálculo. Entre las justificaciones aportadas en la primera pregunta, se encuentran respuestas como: “*la diferencia de 3€ en los arándanos representa relativamente poco porque ya eran mucho más caros que los kiwis*” o “*el arándano ha tenido una subida menos notoria*”. También se observó un caso en el que se estimó verbalmente la proporción correcta: “*los kiwis se han encarecido más del 50% del precio original, mientras que los arándanos menos de un cuarto*”.

La dificultad principal observada es la no conceptualización del encarecimiento como una magnitud. Un 23,3% de los encuestados en la primera pregunta y un 20% en la segunda, razonaron en base a la variación absoluta. Además, en la primera pregunta, se detectaron respuestas confusas motivadas por una falta de comprensión de la magnitud “precio por kilo” denotando la falta de razonamiento cuantitativo, como, por ejemplo: “*los kiwis, porque al ser más grandes cada kiwi vale más y un kilogramo de kiwis es menos que el de arándanos*”.

El objetivo de la pregunta 3 era que el alumnado integrase las nociones de cambio de precio y de cantidad de las dos preguntas anteriores para construir el concepto de elasticidad, pero ningún individuo intuyó esta conexión. Un 20% del alumnado dejó la pregunta en blanco o afirmó no recordarlo, y un 36,7% ofreció respuestas incorrectas. Aunque estas respuestas reflejan una intuición general, no evidencian la coordinación de los cambios de las dos variables. Dentro del grupo que respondió de forma correcta, la mayoría se centró en los distintos tipos de elasticidad, acercándose a la definición teórica. Un 10% ofreció ejemplos prácticos (como gasolina para demanda inelástica o cine para elástica), y solo cuatro estudiantes dieron una definición completa que incluía la idea de variación simultánea de las variables. Una respuesta especialmente destacable fue la de una persona que lo definió de forma genérica: “*cómo responde una variable cuando cambia otra*”, exemplificando con el precio y la cantidad, pero siendo consciente que puede utilizarse en otros contextos, lo que evidencia una comprensión profunda del concepto.

Tabla 6. Resultados de la tercera pregunta del cuestionario

Pregunta 3							
	Def. correcta	Aprox. def.	Ej.	Tipos	Dificultad	Def. incorrecta	Mal/Ns/Nc
Nº	4	7	3	8	4	11	6
%	13,3%	23,3%	10%	26,7%	13,3%	36,7%	6,7%

Nota. Def. es una abreviatura para definición de la elasticidad. Se considera que se da una aproximación a la definición cuando no se trata de una definición formal, pero demuestra una concepción básica del concepto. La suma de los porcentajes de esta pregunta es mayor que 100, ya que hay individuos que realizaron varios de los ítems (p.e. dar la definición y poner ejemplos).

En la pregunta 4, que requería el cálculo de la elasticidad a partir de una tabla de datos, ningún estudiante resolvió correctamente ambos casos. En concreto, dos tercios del alumnado no supo responder o dieron respuestas irrelevantes, lo que sugiere que el aprendizaje previo no fue suficientemente significativo como para permitir aplicar o intuir el concepto, aunque no recordaran la fórmula exacta. Del resto de alumnos, tres estudiantes plantearon la fórmula correctamente, pero cometieron errores de cálculo, y otros tres intuyeron verbalmente el comportamiento de la demanda en función de los ingresos totales. Por ejemplo, señalaron que los ingresos en el primer caso no variaban significativamente, mientras que en el segundo la subida del precio provocaba una caída drástica en la cantidad, y por tanto en los ingresos, siendo una demanda más elástica. Cuatro alumnos aplicaron incorrectamente la fórmula, calculando bien la variación del precio, pero al revés la de la cantidad, posiblemente para evitar resultados negativos. Esto evidencia una ausencia de razonamiento covariacional, ya que el signo negativo es lo que indica la relación inversa existente entre precio y cantidad.

Tabla 7. Resultados de la cuarta pregunta del cuestionario

Pregunta 4						
	Responde correctamente	Error cálculo	Intuición verbal	Error fórmula	Mal	Mal/Ns/Nc
Nº personas	0	3	3	4	9	11
%	0%	10%	10%	13,3%	30%	36,7%

Nota. Se consideran errores en la fórmula cuando el estudiante escribe una fracción de la variación de la cantidad entre la del precio, pero se equivoca al calcular una de las dos variaciones.

En relación con la pregunta 5, que exploraba la interpretación de los parámetros de una función lineal de demanda, la mitad del alumnado dejó la respuesta en blanco, probablemente por no comprender lo que se les solicitaba. De quienes respondieron, la mayoría se limitaron a sustituir el valor del precio en la función sin ofrecer una interpretación o calcular los puntos de corte de la función, evidenciando un aprendizaje procedimental y mecánico del uso de las funciones, aplicando lo que están acostumbrados a realizar en clase de matemáticas. Solo dos estudiantes intuyeron el significado del coeficiente de la

pendiente, con respuestas como: “*es lo que marca que cuando aumenta el precio haya menos demanda*”, pese a que no fuera una respuesta completa.

En general, no se observó aplicación del razonamiento cuantitativo, dificultando la interpretación funcional de la relación precio-cantidad. Algunas respuestas mostraron una clara falta de comprensión de las variables implicadas, como, por ejemplo: “*es el tiempo en el cual vende la cantidad demandada de ese producto*”, mostrando una clara ausencia de razonamiento cuantitativo.

Tabla 8. Resultados de la quinta pregunta del cuestionario

Pregunta 5					
	Correcta	Intuición parcial	Sustitución del precio	Interpretación gráfica	Ns/Nc
Nº personas	0	3	11	1	15
%	0%	10%	36,7%	3,3%	50%

En la sexta y última pregunta, que presentaba gráficamente dos curvas de demanda correspondientes a distintos mercados, ningún estudiante logró identificar correctamente en cuál de los dos mercados se producía una respuesta más elástica de la cantidad ante un cambio en el precio, refiriéndose a al cambio relativo en precio y cantidad. En concreto, más de un tercio del alumnado no logró responder a la pregunta o lo hizo sin una justificación adecuada, lo que pone de manifiesto una dificultad significativa en la interpretación gráfica de funciones de demanda desde la perspectiva del razonamiento covariacional. De entre los que describieron el cambio en la cantidad, solo dos aludieron a una mayor variación proporcional en la cantidad del mercado B en comparación con el A, mientras que ocho se refirieron a la variación absoluta. Otros cinco estudiantes ofrecieron respuestas que evidencian cierta intuición sobre el comportamiento de la curva, con comentarios como “*no hay un cambio tan brusco*” o “*es menos notorio*”, aunque sin llegar a un razonamiento plenamente covariacional. Por otra parte, únicamente dos alumnos confundieron elasticidad con pendiente, lo cual, aunque incorrecto, indica que esta asociación errónea no fue predominante en el grupo.

Tabla 9. Resultados de la sexta pregunta del cuestionario

Pregunta 6						
	Correcta	Parcial	Intuición verbal	Pendiente	Var. absoluta	Ns/Nc
Nº	0	2	5	2	8	13
%	0%	6,7%	16,7%	6,7%	26,7%	43,3%

Nota. Se considera una respuesta parcial cuando el estudiante se refiere al cambio relativo de una de las variables, pero no de la otra. La cuarta clasificación de respuesta se refiere a que el estudiante confunda la elasticidad con la pendiente.

2.2 Valoración de los resultados

A la luz de los resultados obtenidos, se ha podido observar que el alumnado presenta dificultades tanto en la comprensión del concepto de elasticidad como en su aplicación en contextos reales y representaciones gráficas. Aunque algunos estudiantes muestran ciertas intuiciones o razonamientos verbales próximos a la noción de cambio relativo, la mayoría no logra establecer la coordinación simultánea entre las dos variables implicadas, precio y cantidad, ni vincular este análisis con la interpretación del contexto económico. Esto indica una ausencia de razonamiento covariacional, que, como se ha argumentado a lo largo del marco teórico, resulta fundamental para interiorizar el concepto de elasticidad de forma significativa.

Las respuestas tienden a centrarse en variaciones absolutas o en cálculos mecánicos, sin comprender el sentido económico de la magnitud ni visualizar cómo varían conjuntamente las variables, mostrando la ausencia de razonamiento cuantitativo. Presentan dificultades incluso en la cuantificación de magnitudes como el encarecimiento de un producto. Además, se observa una desconexión entre la representación algebraica, gráfica y verbal, lo cual limita la capacidad del alumnado para interpretar las situaciones planteadas desde una perspectiva funcional y dinámica.

En consecuencia, puede afirmarse que, en esta muestra, el alumnado no aplica el razonamiento covariacional ni el cuantitativo en el aprendizaje del concepto de elasticidad-precio de la demanda, reflejando la dificultad del

alumnado para conectar la expresión algebraica con la realidad económica. Este estudio, de carácter exploratorio, permite esbozar una primera aproximación a los esquemas mentales del alumnado y establecer una base sobre la que seguir investigando.

Con el objetivo de profundizar en el razonamiento del alumnado y en la construcción de sus esquemas mentales, sería recomendable complementar en futuras investigaciones el uso del cuestionario con entrevistas clínicas basadas en tareas. Esta metodología permitiría, por una parte, comprender con mayor claridad el razonamiento que subyace a las respuestas de los estudiantes y, por otra, ofrecer aclaraciones o apoyos puntuales que les ayuden a interpretar correctamente las preguntas. Por ejemplo, en la pregunta 1, varios estudiantes manifestaron intuiciones verbales como “*el arándano ha tenido una subida menos notoria*”, sin llegar a explicitar ningún cálculo. Una entrevista clínica habría permitido preguntar: “¿A qué te refieres con ‘menos notoria’? ¿Cómo lo compararías con el precio inicial?”, lo que podría haber inducido al alumno a pensar sobre la variación relativa. Asimismo, en la pregunta 5, donde muchos estudiantes se limitaron a sustituir el precio en la función, una entrevista habría permitido intervenir con una pregunta como: “¿Qué significa este número -5 en esta función? ¿Qué nos está diciendo sobre el comportamiento de la demanda?”, promoviendo así un vínculo entre la expresión algebraica y el contexto económico. En definitiva, las entrevistas clínicas habrían permitido detectar con mayor precisión aquellas respuestas que, aunque incorrectas en su forma, contenían indicios de comprensión parcial.

A partir de los resultados obtenidos, es posible construir un modelo de segundo orden que ayude a comprender cómo razonan los estudiantes sobre este concepto, y que, en consecuencia, permita diseñar una propuesta orientada a modificar dichos esquemas mentales para facilitar su aprendizaje. Esta propuesta, que será desarrollada en el siguiente apartado, tendrá el objetivo de favorecer una comprensión significativa del concepto de elasticidad desde la coordinación entre magnitudes y el análisis proporcional, superando así el enfoque procedimental que predomina actualmente en la enseñanza del concepto.

CAPÍTULO 3. LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO PARA FACILITAR EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: UNA PROPUESTA

El objetivo de esta propuesta es acercar el razonamiento covariacional al aula de economía, centrándose en el concepto de elasticidad. Para su diseño, se ha tomado como punto de partida el modelo de segundo orden elaborado a partir del análisis de los resultados del cuestionario. Este modelo revela que el alumnado no suele razonar en términos cuantitativos y tienen dificultades para conectar las variables económicas con situaciones del mundo real. Además, se ha detectado la ausencia generalizada de razonamiento covariacional, ya que los estudiantes no conciben la variación simultánea de dos magnitudes, en este caso, el precio y la cantidad.

Desde esta perspectiva, es crucial introducir el razonamiento covariacional y cuantitativo desde el comienzo del curso, de modo que el primer contacto del alumnado con contenidos económicos esté vinculado a contextos reales y se aborde de forma dinámica. Esto facilitaría una familiarización gradual con el uso del programa GeoGebra para analizar fenómenos económicos y la covariación de magnitudes.

Aunque esta propuesta se centra en el aprendizaje del concepto de la elasticidad como magnitud económica que es algo muy específico, los resultados del cuestionario muestran que el alumnado también cuenta con problemas de base. Por ejemplo, tienen dificultades con conceptos previos clave como la cuantificación de variaciones de magnitudes o la interpretación económica de la función de demanda. Por ello, en esta propuesta se incluyen propuestas de actividades que abordan estos elementos fundamentales como paso previo para la comprensión del concepto de elasticidad.

La propuesta se basa en el uso del programa GeoGebra, una herramienta especialmente útil para trabajar conceptos económicos que implican la coordinación entre magnitudes, como es el caso de la elasticidad. GeoGebra es un software gratuito ampliamente utilizado en la docencia de las matemáticas, dado su carácter dinámico y manipulativo.

A diferencia de la naturaleza estática de los libros, GeoGebra permite a los estudiantes manipular construcciones dinámicas, lo que favorece la comprensión y visualización de las relaciones funcionales. En este sentido, Ellis et al. (2022) destacan que la creación de contextos visualizables, imaginables y manipulables para el alumnado es esencial para facilitar su razonamiento covariacional. Además, desde la perspectiva del constructivismo radical, como ya se ha mencionado anteriormente, el conocimiento se construye de forma activa a partir de la experiencia del alumnado, por lo que la utilización de este tipo de recursos dinámicos y manipulables permite facilitar una comprensión profunda de los conceptos económicos.

3.1 Estructura de la propuesta

La propuesta se materializa en un libro interactivo de GeoGebra disponible en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/v4brxvpx>. Está compuesto por hojas dinámicas que integran construcciones elaboradas con GeoGebra, acompañadas por explicaciones, preguntas guiadas y actividades diseñadas para promover la comprensión conceptual y contextualizada.

El contenido del libro se estructura en las siguientes secciones:

- Dos actividades iniciales centradas en la comprensión de las variaciones relativas y absolutas de cantidad demandada y precio.
- Una actividad dedicada a la interpretación económica de la función de demanda, prestando especial atención a la interpretación de la pendiente.
- Una actividad de introducción al concepto de elasticidad, enlazando con los conocimientos adquiridos previamente.
- Dos actividades de ampliación que trabajan la relación de la elasticidad con los ingresos del vendedor.

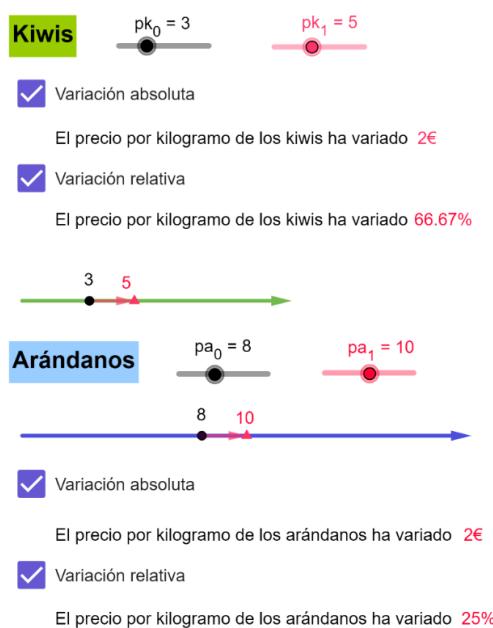
A continuación, se presenta una breve explicación de las distintas actividades y sus objetivos específicos.

3.1.1 Actividad 1. Variaciones absolutas y relativas

En primer lugar, antes de comenzar con las construcciones de GeoGebra, me centraría en que el alumnado comprendiera la importancia de las variaciones relativas como magnitudes en economía. Las dos primeras preguntas del cuestionario evidencian, por lo general, la ausencia de razonamiento cuantitativo, y la no concepción del encarecimiento como una magnitud. Por lo que, con el fin de facilitar una comprensión contextualizada, dedicaría un tiempo a hacerles preguntas y poniendo ejemplos acerca de cambios en los precios de bienes cercanos a ellos. Plantearía cuestiones relativas a como comparar subidas de precios en distintos productos, como, por ejemplo: “¿Una subida de 1€ en una barra de pan es mucho? ¿Y si la subida es en el precio de un coche?”. Con ello les introduciría en una primera intuición como se deben comparar cambios en las variables.

La primera actividad en GeoGebra guarda una estrecha relación con la primera pregunta del cuestionario, ya que trata de comparar el encarecimiento de dos frutas, kiwis y arándanos. Esta actividad contiene deslizadores que permiten modificar el precio final e inicial de ambas frutas, y un segmento que les indica gráficamente el cambio producido. Además, en forma de texto se presentan la variación absoluta y la relativa en forma de porcentaje.

Figura 8. Primera actividad del libro de GeoGebra



A lo largo de la actividad se plantean una serie de cuestiones destinadas a guiarlos para que perciban la importancia de las variaciones relativas como magnitud económica. En concreto, se plantean dos situaciones en las que deberán determinar que fruta se ha encarecido o abarato más. En primer lugar, se compara una subida del precio de los kiwis de 3€ a 5€ de los kiwis y de los arándanos de 8€ a 10€. En este caso, a pesar de que la variación absoluta sea la misma, el objetivo es que reflexionen sobre cuánto supone dicha subida con respecto al precio inicial, introduciendo la variación relativa de una forma contextualizada.

Complementariamente, pondría especial énfasis en la comprensión y trabajo fluido con los ratios y porcentajes. En este sentido, podrían calcular la variación relativa como el cociente de la variación absoluta entre el precio inicial, o el cociente de precios. Deberían ser capaces por tanto, de concebir que un aumento del 25% es equivalente a multiplicar el precio inicial por 1,25. A su vez, esta fluidez debería ser adquirida al trabajar con disminuciones en los precios, siendo una disminución del 25% equivalente a multiplicar el precio inicial por 0,75.

Tras la realización de esta primera actividad guiada en la que se familiarizan con las variaciones relativas, realizarán una breve tarea de autoevaluación. En esta ocasión, se preguntan por los efectos en las cantidades vendidas de ambas frutas ante las variaciones de precios de la actividad anterior.

Para finalizar esta actividad se les invita a que coordinen los cambios en las cantidades de esta actividad con los cambios de los precios de la actividad anterior. Con esta reflexión podrán determinar que un cambio menor en el precio de los arándanos ha producido un cambio mucho mayor en la cantidad. De esta forma podrán acercarse a una primera intuición del concepto de elasticidad y su utilidad.

3.1.2 Actividad 2. Interpretación económica de la función de demanda

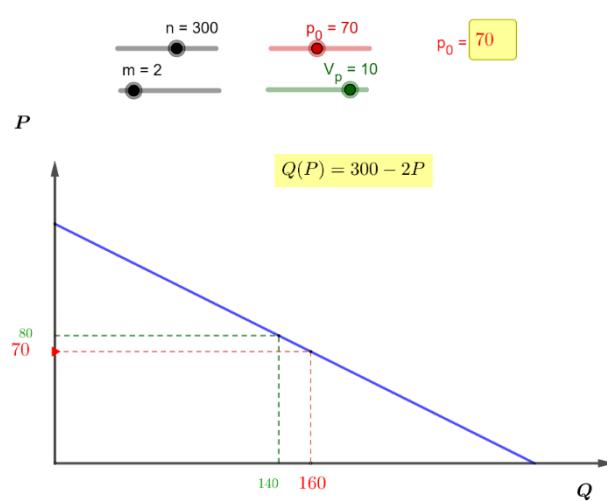
La siguiente actividad está destinada a trabajar otro de los conceptos de base necesarios para la comprensión del concepto de elasticidad: la

interpretación económica de la función de demanda. En base a los resultados del cuestionario, el alumnado tiende a utilizar un enfoque meramente procedural basado en lo que se encuentran habituados a hacer en el aula de matemáticas.

En primer lugar, pondría el énfasis en que concibieran las funciones como herramientas claves para la modelización económica, en concreto para la coordinación del cambio en magnitudes. Por ello, es esencial contextualizar y dotar de sentido económico las representaciones para facilitar tanto el razonamiento cuantitativo como el covariacional. Por ejemplo, comentaría que el cálculo de los puntos de corte de una función de demanda no tiene sentido económico, ya que supone calcular el precio cuando no se vende ninguna unidad y la cantidad que se demandaría cuando el precio fuera gratis. Se busca, por tanto, poner el énfasis en la pendiente y en la tasa de cambio constante de las relaciones lineales.

Con el objetivo de trabajar el uso del razonamiento covariacional en la interpretación y comprensión de la función de demanda se ha creado una actividad interactiva en GeoGebra, ya que la manipulación facilita la visualización dinámica de la relación entre las variables (Thompson & Saldanha, 1998). En la construcción se puede modificar por una parte la pendiente y ordenada en el origen, y por otra el precio inicial y su variación absoluta.

Figura 9. Segunda actividad del libro de GeoGebra



En esta actividad se plantean una serie de cuestiones que buscan guiar al alumno hacia la utilización del razonamiento covariacional en la interpretación de funciones, promoviendo la coordinación entre la expresión algebraica y la gráfica. El primer aspecto abordado es el sentido descendente de la pendiente, vinculándolo directamente con la expresión algebraica de la función y con su sentido económico. Para ello, se les invita a modificar el precio y observar lo que ocurre con la cantidad, con el fin de que identifiquen la relación inversa entre ambas variables y coordinen ambas formas de representación.

Las cuestiones autoevaluables planteadas a continuación tienen como finalidad el alumnado sea capaz de cuantificar esta relación entre precio y cantidad, dotándola de un sentido económico. Como primera aproximación, se les propone analizar las variaciones absolutas en la cantidad ante cambios en el precio de 1€. A continuación, se plantean cambios menores a la unidad, como aumentos de 10 céntimos, con el objetivo de que conciban el coeficiente de la pendiente como el factor de variación de la cantidad con respecto al precio. Al tratarse de una función lineal, este factor se mantiene constante a lo largo de toda la función, por tanto, cualquier cambio en el precio provocará una variación en la cantidad en la misma proporción.

En el ámbito de la economía existe una dificultad adicional en la coordinación de ambas formas de representación, ya que la gráfica se hace al contrario que la habitual en matemáticas: la variable dependiente (cantidad demandada) se sitúa en el eje de abscisas y la independiente (precio) en el eje de ordenadas. Esta disposición, poco habitual para los estudiantes, requiere una especial atención para garantizar que comprendan esta particularidad y sean capaces de visualizar la covariación de las magnitudes de manera efectiva.

A través de esta actividad, se introduce a los estudiantes una herramienta que cuantifica la coordinación del cambio en la cantidad demandada en relación con el del precio en términos absolutos, representado por la pendiente de la función de demanda. Para finalizar el análisis, se propone el uso una magnitud que mida esta relación, pero en términos relativos: la elasticidad-precio de la demanda.

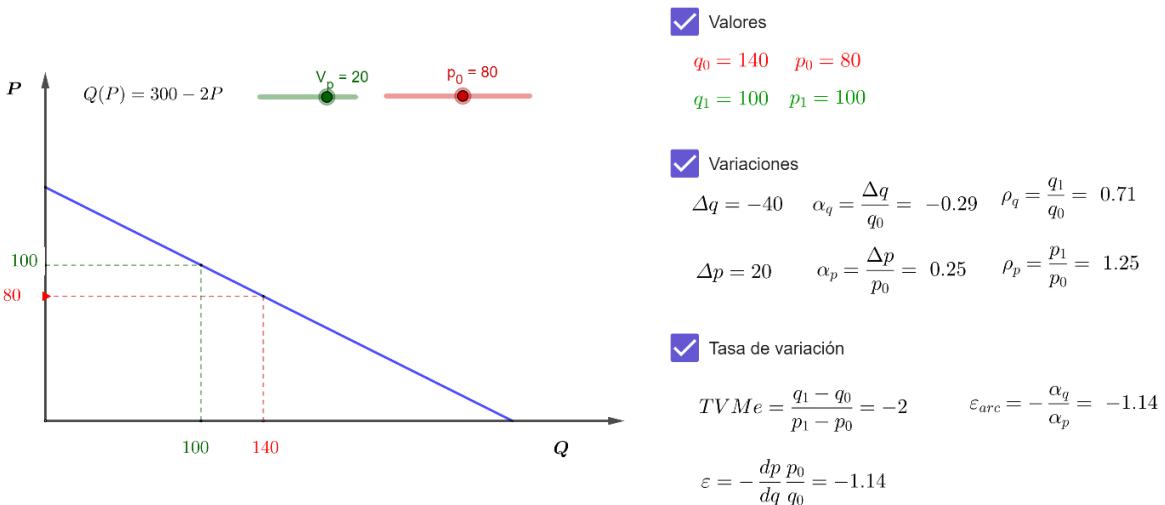
3.1.3 Actividad 3. Elasticidad-precio de la demanda

Tras familiarizar al alumnado con los conceptos previos necesarios, como las variaciones relativas y la interpretación económica de la función de demanda, se introducirá el concepto de elasticidad. Los resultados del cuestionario revelaron que una de las principales dificultades detectadas radica en su incapacidad de conceptualizar la elasticidad como una magnitud. En particular, se pudo observar que realizaban los cálculos de forma mecánica, sin comprender que el propósito de la elasticidad es medir la respuesta de la demanda ante cambios en el precio. Por ello, el objetivo de esta actividad es que doten de significado económico a esta magnitud, realizando los procedimientos y cálculos desde la comprensión.

Antes de comenzar la actividad en GeoGebra, se llevaría a cabo una breve introducción exemplificando bienes cuyas demandas reaccionan de forma distinta ante cambios en el precio. Se recordaría al alumnado que, en términos generales, existe una relación inversa entre el precio y la cantidad demandada, sin embargo, lo realmente relevante es cuantificar dicha relación. Por ejemplo, un mismo incremento porcentual en la leche y en las entradas de cine provocará en ambos casos una disminución de la demanda, pero no en la misma proporción. En el caso de la leche, al tratarse de un bien de primera necesidad, probablemente no suponga una disminución notable, mientras que en las entradas de cine la demanda podría reducirse considerablemente.

Tras esta sencilla conexión de los conceptos económicos con el contexto real, se realizaría una actividad en GeoGebra. En ella se muestra una función de demanda en su expresión gráfica y algebraica, en la que pueden modificar tanto el precio inicial como su variación. La segunda vista gráfica mostrará distintas casillas de control que irán guiando su aprendizaje.

Figura 10. Tercera actividad del libro de GeoGebra



Para comenzar la actividad se guía al estudiante en un repaso de lo aprendido hasta ese momento, es decir, las variaciones relativas y el sentido económico de la pendiente, con ayuda de las dos primeras casillas de control. A lo largo de la actividad se les pedirá a los estudiantes comparar dos situaciones, una en la que el precio del bien ha subido de 10€ a 20€ y otra en la que ha subido de 130€ a 140€.

En este momento se les introducirá el concepto de Tasa de Variación Media, que en este caso se mantiene constante a lo largo de toda la función y coincide con la pendiente, ya que es lineal. Esta es una forma de cuantificar la relación entre el precio y la cantidad, pero sin tener en cuenta las variaciones relativas. Por ello, se busca una magnitud que cuantifique la “sensibilidad” de la cantidad demandada ante cambios relativos en los precios: la elasticidad.

Después de destacar la relevancia de esta magnitud en el análisis económico, se invita al alumnado a interactuar con los deslizadores de la construcción de GeoGebra. El objetivo es que observen como varía la elasticidad a lo largo de la curva, comprendiendo su valor depende del punto de partida. Esta exploración les permite visualizar que, aunque la pendiente de la función sea constante en el caso de una recta, la elasticidad no lo es, ya que incorpora las variaciones relativas de precio y cantidad.

El siguiente objetivo es que el alumnado distinga entre respuestas elásticas e inelásticas de la demanda, a partir de la comparación de las dos

situaciones anteriormente mencionadas. Con ello se busca fomentar una comprensión profunda del concepto y su significado económico, priorizando el desarrollo conceptual antes de abordar los aspectos procedimentales. A continuación, introduce la forma de calcular la elasticidad, el cociente de las variaciones relativas de cantidad y precio, y su interpretación económica. Se le daría una especial importancia al signo negativo, ya que es indicativo de la relación inversa entre precio y cantidad.

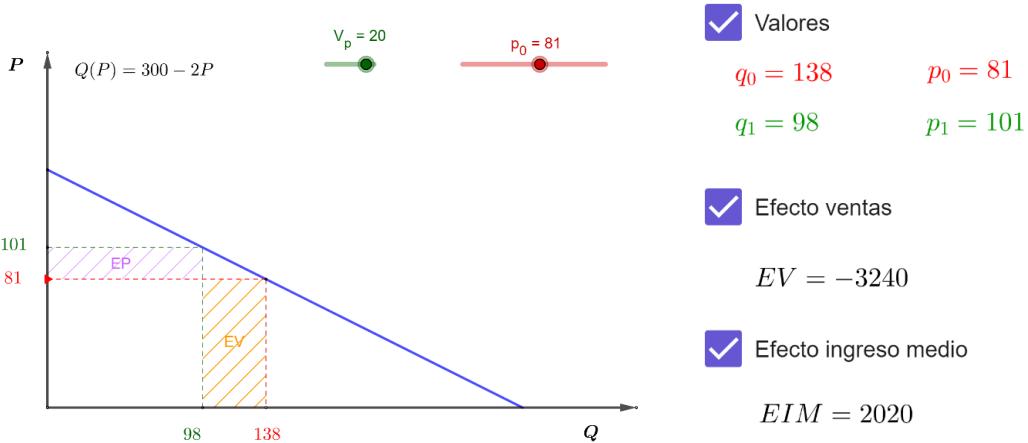
Como ampliación para aquellos estudiantes que tengan un mayor interés en la economía, se propone la elasticidad punto como alternativa a la elasticidad arco. Al tratar de una función lineal, estas son equivalentes, ya que la pendiente se mantiene constante, pero esta puede ser especialmente útil con funciones no lineales. Este concepto tiene la dificultad añadida de incorporar la derivada de la función, pero al tratarse de una función lineal, son derivadas que se encuentran habituados a calcular en este curso.

La actividad se finalizaría con una breve recapitulación de lo aprendido y de la relevancia de la elasticidad como magnitud económica. También se plantean una serie de cuestiones destinadas a que el alumnado reflexione sobre las posibles aplicaciones de la elasticidad, como por ejemplo en los cambios de ingresos de los vendedores.

3.1.4 Actividades de ampliación. Elasticidad e ingresos

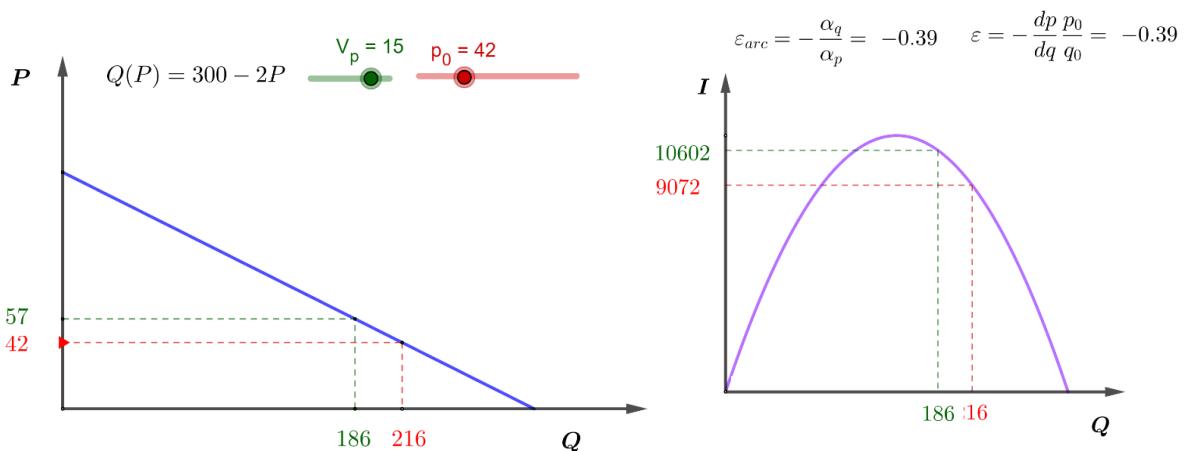
En línea con las reflexiones planteadas al final de la última actividad se proponen dos actividades de ampliación para aquellos estudiantes con capacidad e interés por la economía. Una primera construcción estaría destinada a que el alumnado se familiarizara con los conceptos de Efecto Ventas y Efecto Ingreso Medio. Estos conceptos tratan de medir los efectos de un aumento de precio sobre los ingresos, por una parte, disminuye la cantidad vendida (efecto ventas), pero por otra, las unidades que se venden son a un precio mayor (efecto ingreso medio). Dependiendo cuál de estos efectos tenga mayor prevalencia al empresario le interesaría o no la subida de precio. Si el Efecto Ventas es mayor que el Efecto Ingreso Medio los ingresos disminuirán, y viceversa.

Figura 11. Primera actividad de ampliación del libro de Geogebra



Tras manipular ambas magnitudes y analizar sus efectos sobre los ingresos, la segunda construcción está destinada a relacionarlos con la elasticidad. En esta ocasión se muestra de nuevo la gráfica anterior, acompañada de la función de ingresos totales en la segunda vista gráfica.

Figura 12. Segunda actividad de ampliación del libro de GeoGebra



El objetivo de esta construcción es que los alumnos coordinen las variaciones en los ingresos con ambos efectos, comprobando en qué precio y cantidad se obtienen los ingresos máximos. Antes de este punto subidas de precio significarán aumentos en los ingresos, ya que el Efecto Ingreso Medio es mayor que el Efecto Ventas, y después de ese punto, al contrario. El objetivo es que coordinen esta visión con el sentido económico de la elasticidad, ya que ambos efectos están estrechamente relacionados con la “sensibilidad” de la demanda ante cambios en el precio. Por tanto, antes del máximo de ingresos la demanda responde de forma inelástica y después de forma elástica.

CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL

El concepto de elasticidad está estrechamente relacionado con el razonamiento covariacional, ya que implica la coordinación de los cambios relativos entre dos variables relacionadas entre sí. Representa, por tanto, una extensión de las comparaciones entre variaciones absolutas, como es el caso de la pendiente de una función. Para facilitar un aprendizaje significativo del concepto de elasticidad, se hace necesario recurrir a este tipo de razonamiento y dotar de sentido económico a los procedimientos aplicados.

Sin embargo, los resultados obtenidos en el cuestionario evidencian una ausencia generalizada de razonamiento covariacional y cuantitativo en el alumnado. Estas dificultades no se limitan únicamente al concepto de elasticidad, sino que también a conceptos previos esenciales, como las variaciones relativas o la interpretación económica de la pendiente de una función de demanda.

Dado el papel central que desempeña el concepto de función en la modelización económica, sería recomendable fomentar el desarrollo del razonamiento covariacional de forma transversal a lo largo de toda la asignatura de Economía. En este sentido, el uso de herramientas como GeoGebra resulta especialmente útil, al permitir representar de forma dinámica y manipulable las relaciones funcionales, facilitando una comprensión profunda y contextualizada. La propuesta presentada responde a esta necesidad, partiendo del modelo de segundo orden elaborado a partir del análisis del cuestionario. Las actividades planteadas buscan trabajar las dificultades encontradas en los diferentes conceptos, promoviendo la reflexión, la manipulación y la visualización de las magnitudes implicadas.

La elaboración de este trabajo me ha permitido tomar conciencia de la importancia de reflexionar, como docente, sobre los conocimientos previos y las formas de pensar del alumnado. Es interesante la realización de cuestionarios o pruebas con los que poder intuir los esquemas mentales del alumnado para poder ajustar y mejorar la práctica docente, adaptándola a sus necesidades y favoreciendo un aprendizaje más significativo. En este sentido, considero esencial facilitar al alumnado la conceptualización de la covariación entre

magnitudes, a través de situaciones contextualizadas y visualizables, con la ayuda de herramientas como GeoGebra, que permiten el trabajo autónomo del alumnado desde una perspectiva dinámica y manipulable.

Finalmente, considero que el desarrollo del razonamiento covariacional no debería limitarse únicamente al ámbito de la Economía, sino que constituye una competencia transversal que debería ser fomentada por los docentes, especialmente en el ámbito STEM. En este sentido, resulta clave aprovechar las sinergias entre las asignaturas de Matemáticas y Economía sería interesante que se aprovecharan más, especialmente en la modalidad de Ciencias Sociales, para reforzar conceptos clave y facilitar un aprendizaje más significativo para el alumnado.

BIBLIOGRAFÍA

- Beckman, A., Michelsen, C., & Sriraman, B. (2005). Michelsen_functions_2005. *Proceedings of the 1º International Symposium of Mathematics and Its Connections to the Arts and Sciences*, 201–214.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carlson, M. P., O'Bryan, A., & Rocha, A. (2022). *Instructional Conventions for Conceptualizing, Graphing and Symbolizing Quantitative Relationships* (pp. 221–259). https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_9
- Cournot, A. (1897). Of the Law of Demand. In *Mathematical Principles of the Theory of Wealth Of the Law of Demand*. Macmillan.
- Ellis, A., Özgür, Z., & Fatih Dogan, M. (2022). ConceptualAnalysisEarlyFunction_Ellis_2022. In *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (pp. 169–197). https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7_7
- Endres, A. M. (1987). The King-Davenant ‘Law’ in Classical Economics. *History of Political Economy*, 19(4), 621–638. <https://doi.org/10.1215/00182702-19-4-621>
- Glaserfeld, E. von. (2001). El constructivismo radica y la enseñanza. *Perspectivas*, 31, nº2, 171–184.
- Lázaro, J., Lozano, E. G., Pérez, J. L., Carlos, M. J., Wagner, R., & Cecilia, J. (2024). *Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación* (Primera). Editorial Mar Caribe.
- Marshall, A. (1890). The elasticity of wants. In *Principles of Economics* (8th ed., Vol. 3).

Morrill, J. E. (1983). A Mathematician's Brief Excursion into Economic History-The Concept of Arc Elasticity of Demand. *The American Economist*, 27(1), 47–53. <https://about.jstor.org/terms>

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' Function Understanding. *Making the Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics*, 27–47.

Paoletti, T., & Vishnubhotla, M. (2022). Constructing Covariational Relationships and Distinguishing Nonlinear and Linear Relationships. In G. Karagöz Akar, İ. Ö. Zembat, S. Arslan, & P. W. Thompson (Eds.), *Quantitative Reasoning in Mathematics and Science Education* (Vol. 21). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14553-7>

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In *Compendium for research in mathematics education* (Reston). <https://www.researchgate.net/publication/302581485>

Thompson, P. W., & Saldanha, L. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah & W. N. Coulumbe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, NC: North Caroline State University. <https://www.researchgate.net/publication/264119300>

Thompson, P. W., & Smith, J. (2007). Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In *Algebra in the early grades* (pp. 95–132). Erlbaum.

Ulrich, C., Tillema, E. S., Hackenberg, A., & Norton, A. (2014). Constructivist Model Building: empirical examples from mathematics education. *Constructivist Foundations*, 9, 328–339. <http://www.univie.ac.at/constructivism/journal/9/3/328.ulrich>

Libros de texto

- Cabrera, A. (2022). *Economía. Revuela*. Madrid, España: Editorial SM
- Narváez, V., Rodríguez, J., Rueda F. y Toledo J. (2022). *Economía. Operación Mundo*. Editorial Anaya
- Gallego, G. y Ramos A. (2022). *Economía. Proyecto Fanfest*. Editorial Edelvives Laberinto.
- Martínez Sirera, L. (2022). *Economía*. Editorial Compartiendo Conocimiento.
- Penalonga, A. (2019). *Economía*. Editorial: McGraw-Hill.

Legislación

- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

ANEXOS

ANEXO I. Relación de saberes básicos sobre las funciones y asignaturas de la ESO (Real Decreto 217/2022)

Etapa	Saberes básicos
1º-3º de la ESO	D. Sentido algebraico 5. Relaciones y funciones <ul style="list-style-type: none">- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan.- Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas.- Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.
4º de la ESO	B. Sentido de la medida
(Matemáticas A)	2. Cambio. y B) <ul style="list-style-type: none">- Estudio gráfico del crecimiento y decrecimiento de funciones en contextos de la vida cotidiana con el apoyo de herramientas tecnológicas: tasas de variación absoluta, relativa y media. D. Sentido algebraico 2. Modelo matemático. <ul style="list-style-type: none">- Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones. 5. Relaciones y funciones. <ul style="list-style-type: none">- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan.

-
- Relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas.
 - Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana.
-

ANEXO II. Relación de saberes básicos sobre las funciones y asignaturas de la Bachillerato (Decreto 73/2022)

Etapa	Saberes básicos
1º de Bachillerato	<p>B. Sentido de la medida</p> <p>2. Cambio</p> <ul style="list-style-type: none"> - Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad. - Derivada de una función: definición a partir del estudio del cambio en contextos de las ciencias sociales. <p>C. Sentido algebraico</p> <p>4. Relaciones y funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> - Representación gráfica de funciones utilizando la expresión más adecuada. - Transformaciones de funciones (operaciones aritméticas y valor absoluto), utilizando herramientas digitales para realizar las operaciones con las expresiones simbólicas más complicadas. - Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional sencilla, irracional, logarítmica, y a trozos: comprensión y comparación.
2º de Bachillerato	<p>B. Sentido de la medida</p> <p>2. Cambio.</p> <ul style="list-style-type: none"> - La derivada como razón de cambio en resolución de problemas de optimización en contextos diversos. - Aplicación de los conceptos de límite y derivada a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones. <p>C. Sentido algebraico</p> <p>2. Modelo matemático.</p>

-
- Relaciones cuantitativas en situaciones diversas: estrategias de identificación y determinación de la clase o clases de funciones que pueden modelizarlas utilizando herramientas tecnológicas.
4. Relaciones y funciones.
- Representación, análisis e interpretación de funciones con herramientas digitales.
 - Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.
-

ANEXO III. Ejercicios de ejemplo propuestos sobre la elasticidad en los libros de texto

Libro de texto	Ejercicio de ejemplo
Anaya	Si el precio de un bien es de 25€ la demanda semanal de ese bien se sitúa en 20 unidades. Si el precio baja a 20€ la demanda se sitúa en 30 unidades. Averigua la elasticidad de la demanda del bien y razona si al empresario le interesa bajar el precio. (p. 90)
Edelvives	El gobierno desea desincentivar el consumo de bollería industrial. Ha realizado un estudio que indica que la elasticidad precio de la demanda de este producto es 4,5. Si el precio de este producto es de 0,75€/unidad y el gobierno desea reducir el consumo en un 50% ¿cuánto debería aumentar el precio mediante impuestos? Razona tu respuesta con datos numéricos a partir de la fórmula de la elasticidad. (p. 93)
Compartiendo Conocimiento	Explica, con tus palabras, qué significa la elasticidad de la demanda. ¿Qué significa que un bien tenga demanda elástica? ¿Y que sea inelástica? (p. 96)
SM	Las entradas de un concierto de música cuestan 20 euros y, a ese precio, suelen asistir 5000 personas. El empresario que organiza el concierto quiere aumentar los ingresos y para ello quiere modificar los precios. Si la elasticidad de la demanda-precio de este espectáculo suele ser superior a la unidad (demanda elástica) ¿debería subir o bajar los precios para aumentar los ingresos? Compruébalo para un cambio del precio del 20% y una elasticidad de 1,5. (p. 95)
Smartbook	¿Por qué es importante para un empresario el estudio de la elasticidad-precio de la demanda? (p. 77)

ANEXO IV. Documentos del CEPI

TÍTULO DEL ESTUDIO: *La enseñanza y el aprendizaje del concepto económico de elasticidad desde la perspectiva del razonamiento covariacional*

INVESTIGADORA: Andrea Amoedo Fernández

DIRECTOR: Pedro Álvarez Causelo

CONTACTO: andrea.amoedo@alumnos.unican.es

CENTRO de trabajo del investigador:

1. INTRODUCCIÓN

Nos dirigimos a Ud. para informarle sobre **un estudio de investigación**, que llevaremos a cabo en el marco del **Trabajo Fin de Máster** correspondiente al Máster en Formación del Profesorado de la Universidad de Cantabria.

La intención es tan sólo que Ud. reciba **la información correcta y suficiente** para que pueda evaluar y juzgar, si quiere o no que sus datos se incluyan en nuestro estudio.

Para ello le rogamos lea esta hoja informativa con atención, pudiendo consultar con las personas que considere oportuno o pedirnos cualquier aclaración que necesite.

2. PARTICIPACIÓN VOLUNTARIA

Debe saber que su participación en este estudio es **totalmente voluntaria**, y que puede decidir no participar, o cambiar su decisión y retirar su consentimiento en cualquier momento.

3. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ESTUDIO

El estudio consiste en la realización de un análisis exploratorio sobre las formas de pensar y de razonar de los estudiantes cuando se enfrentan al uso de los conceptos y procedimientos matemáticos en el marco de los modelos económicos. La atención se centra en el denominado razonamiento covariacional asociado al concepto matemático de función. En particular, se trata de analizar si son capaces de extender este tipo de razonamiento para dar sentido al concepto económico de elasticidad. Toda la información requerida se obtendrá a partir de su participación en la realización de una serie de tareas escritas.

Debe saber que, al aceptar participar en el estudio, no se alterará de ningún modo el trato que reciba durante el curso académico en la materia en cuyo horario se llevan a cabo las tareas.

4. BENEFICIOS Y RIESGOS DERIVADOS DE SU PARTICIPACIÓN EN EL ESTUDIO.

Debe saber que **siempre que lo desee podrá interrumpir su participación en el proyecto**. Aunque no recibirá beneficios personales por participar en este estudio de investigación, su colaboración nos será de gran ayuda para poder llevar a cabo la investigación planteada.

5. CONFIDENCIALIDAD Y TRATAMIENTO DE DATOS

Si decide participar en el estudio únicamente se recogerán los siguientes datos: **Nombre, apellidos, edad y curso académico** en el que se encuentra matriculado.

Debe conocer además que, aunque sus datos se recogerán al completo, **en el estudio no figurarán sus datos personales**, puesto que les someteremos a un proceso de anonimización de manera que nadie externo al proyecto pueda relacionarlos con el mismo.

La custodia de los datos será llevada a cabo por el autor y director de la investigación. Los datos en soporte papel serán destruidos a la finalización del estudio y los datos en soporte informático serán almacenados en un equipo de la UC.

El tratamiento, la comunicación y la cesión de los datos de carácter personal de todos los sujetos participantes se ajustará a lo dispuesto en el Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), que entró en vigor el 25 de mayo de 2018 que supone la derogación de Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre referidos a la protección de las personas físicas en lo que respecta al tratamiento de datos personales.

De acuerdo con lo que establece la legislación mencionada, **usted puede ejercer los derechos de acceso, rectificación, supresión, limitación del tratamiento, portabilidad de los datos y oposición**, para lo cual deberá dirigir a la responsable del estudio, para dejar constancia de su decisión.

Para ejercer **sus derechos sobre los datos recogidos**, puede ponerse en contacto con la investigadora responsable, en la dirección de email andrea.amoedo@alumnos.unican.es

CONSENTIMIENTO INFORMADO DEL PARTICIPANTE PARA EL ESTUDIO

Título del Proyecto: *La enseñanza y el aprendizaje del concepto económico de elasticidad desde la perspectiva del razonamiento covariacional*

Investigadora Principal: ANDREA AMOEDO FERNÁNDEZ

Yo, _____
(Nombre y apellidos en MAYÚSCULAS)

Declaro que:

- He leído la hoja de información que me han facilitado.
- He podido formular las preguntas que he considerado necesarias acerca del estudio.
- He recibido información adecuada y suficiente por el investigador abajo indicado sobre:
 - Los objetivos del estudio y sus procedimientos.
 - Los beneficios e inconvenientes del proceso.
 - Que mi participación es voluntaria y altruista
 - El procedimiento y la finalidad con que se utilizarán mis datos personales y las garantías de cumplimiento de la legalidad vigente.
 - Que en cualquier momento puedo revocar mi consentimiento y solicitar la eliminación de mis datos personales.
 - Que tengo derecho de acceso y rectificación a mis datos personales.

CONSENTO EN LA PARTICIPACIÓN EN EL PRESENTE ESTUDIO

SÍ NO

(marcar lo que corresponda)

Para dejar constancia de todo ello, firmo a continuación:

Fecha

Firma.....

Nombre investigador: Andrea Amoedo Fernández

Firma del investigador.....

APARTADO PARA LA REVOCACIÓN DEL CONSENTIMIENTO

Yo,

revoco el consentimiento de participación en el proceso, arriba firmado.

Firma y Fecha de la revocación

Autorización del centro educativo

El abajo firmante D/D^a _____

con cargo _____ del centro educativo

_____, ante la petición de *Pedro Álvarez*

Causelo, como tutor de la alumna *Andrea Amoedo Fernández*, la cual está realizando su TFM correspondiente al Máster en Formación del Profesorado de la Universidad de Cantabria, para poder recoger información necesaria para la realización del mismo del alumnado de este centro, **manifiesta que:**

- 1.- Ha sido informado sobre la naturaleza y los objetivos del TFM, así como del tipo de información que se recabará de los estudiantes y del procedimiento que se seguirá en el proceso de recogida y en el de tratamiento y custodia de la misma.
- 2.- Conoce la información facilitada a los estudiantes y a sus tutores, así como el compromiso de disponer de los correspondientes consentimientos informados.
- 3.- Tiene el compromiso del tutor del TFM de que la recogida de información estará debidamente supervisada por él mismo y por un profesor del centro educativo y de que se respetarán estrictamente la confidencialidad y el anonimato.

Por todo ello, **autoriza** a *Andrea Amoedo Fernández* a recoger información en los grupos de estudiantes _____, bajo los compromisos arriba mencionados.

Fdo. : _____

Cargo: _____

Santander, a ____ de ____ de
2025

ANEXO V. Cuestionario llevado a cabo en dos clases de 1º de Bachillerato

CUESTIONARIO

Datos generales del encuestado

Edad:; Sexo: Modalidad de Bachillerato

¿Cursa la asignatura de Matemáticas? SI () NO ()

Preguntas

1. En una frutería local se observan los siguientes cambios en el precio de dos productos:

- El precio por kilogramo de kiwis ha subido de 5€/kg a 8€/kg.
- El precio por kilogramo de arándanos ha subido de 15€/kg a 18€/kg.

¿Cuál de las dos frutas cree que se ha encarecido más? Justifique su respuesta.

2. Suponga ahora que le dan información sobre las consecuencias de esas subidas en los precios sobre las ventas de cada uno de los productos en dicho establecimiento:

- Las ventas de kiwis han pasado de ser de 1000 kilogramos a la semana a ser de 800 kilogramos a la semana.
- Las ventas de arándanos han pasado de ser 400 kilogramos a la semana a ser 300 kilogramos a la semana.

¿En cuál de los dos productos cree que ha tenido un mayor impacto la subida del precio? Justifique su respuesta.

3. Explique con sus propias palabras todo lo que recuerde sobre el concepto de elasticidad (significado, ejemplos, aplicaciones...). Señale qué le resultó difícil de aprender con relación a dicho concepto.

4. En una cafetería del centro de un pueblo se venden dos tipos de bocadillos, el simple (S) y el gourmet (G). Los precios eran de 2€ el simple y 4€ el gourmet. El dueño ha decidido subir el precio un 10% para los dos bocadillos. En la tabla se muestra el precio de cada tipo de bocadillo y su cantidad demandada.

	SIMPLE		GOURMET	
	Antes	Después	Antes	Después
Precio	2	2,2	4	4,4
Cantidad	90	81	30	24

Calcula la elasticidad para los dos tipos de bocadillos dado este incremento de los precios. Ante este incremento de precios, ¿la demanda de bocadillos responde de forma elástica o inelástica? Razona tu respuesta.

5. Suponga que la relación entre la cantidad demandada de un producto y el precio fijado para el mismo viene dada por la función:

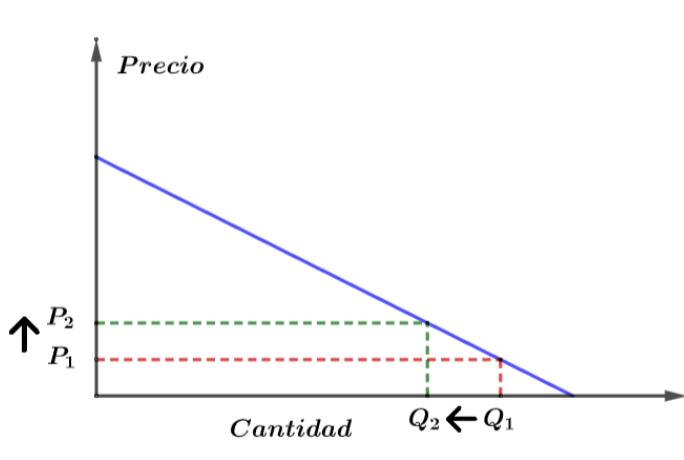
$$q = 1000 - 5p$$

y que el precio actual del producto es de 60€.

¿Qué interpretación económica le da al coeficiente del precio (al -5)?

6. En las gráficas siguientes aparecen representadas las curvas de demanda de un producto correspondientes a dos mercados distintos, A y B. Ante un cambio del precio de P_1 a P_2 , ¿para cuál de los dos mercados considera usted que se produce la respuesta más elástica de la cantidad demandada? Justifica tu respuesta.

MERCADO A



MERCADO B

