GRADO EN ECONOMÍA

CURSO ACADÉMICO 2025-2026

TRABAJO FIN DE GRADO

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE OPTIMIZACIÓN: EL MÉTODO SIMPLEX

MATHEMATICAL OPTIMIZATION METHODS: THE SIMPLEX METHOD

AUTOR: MARIO LIAÑO GUTIÉRREZ

DIRECTORA: PATRICIA GÓMEZ GARCÍA

CONVOCATORIA DE DEFENSA: OCTUBRE, 2025

DECLARACIÓN RESPONSABLE

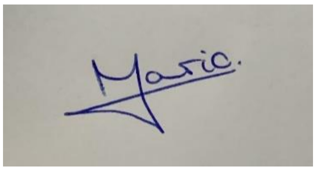
La persona que ha elaborado el TFG que se presenta es la única responsable de su contenido. La Universidad de Cantabria, así como quien ha ejercido su dirección, no son responsables del contenido último de este Trabajo.

En tal sentido, Don Mario Liaño Gutiérrez se hace responsable:

1. *De la AUTORÍA Y ORIGINALIDAD del trabajo que se presenta.*
2. *De que los DATOS y PUBLICACIONES en los que se basa la información contenida en el trabajo, o que han tenido una influencia relevante en el mismo, han sido citados en el texto y en la lista de referencias bibliográficas.*

Asimismo, declara que el Trabajo Fin de Grado tiene una extensión de máximo

10.000 palabras, excluidas tablas, cuadros, gráficos, bibliografía y anexos. Fdo.:



ÍNDICE

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es comprender cómo funciona el método Simplex, centrándonos en explicar qué es y realizando dos casos prácticos para ver cómo se aplica

Primero, expondremos las raíces de este método, la Investigación Operativa, donde veremos dónde surgió y cómo se fue desarrollando gracias a los avances tecnológicos de la época. Seguidamente, analizaremos los pasos para aplicar esta metodología, desde definir el problema hasta llegar a la solución del modelo.

En segundo lugar, estudiaremos una de las principales ramas de la Investigación Operativa, la programación lineal. Para esto, pondremos un contexto de su aparición en la Segunda Guerra Mundial y veremos qué ventajas nos proporciona en comparación con los programas no lineales. Para entenderlo mejor, resolveremos un problema utilizando el método gráfico.

Una vez analizado todo esto, entraremos en el principal objetivo del ensayo, comprender el método Simplex. Para ello, explicaremos qué es el método Simplex y cómo se formula un modelo lineal en su forma estándar, matricial y en forma de tabla. Después, veremos dos ejemplos prácticos con el fin de entenderlo.

ABSTRACT

The main objective of this work is to understand how the Simplex method works, focusing on explaining what it is and conducting two practical cases to see how it operates.

First, we will present the roots of this method, Operational Research, where we will see where it originated and how it developed thanks to the technological advances of the time. Next, we will analyze the steps to apply this methodology, from defining the problem to reaching the solution of the model.

Second, we will study one of the main branches of Operational Research: linear programming. To do this, we will provide context on its emergence during World War II and examine the advantages it offers compared to nonlinear programs. To better understand it, we will solve a problem using the graphical method.

After analyzing all this, we will focus on the main objective of the essay: understanding the Simplex method. To achieve this, we will explain what the Simplex method is and how a linear model is formulated in its standard, matrix, and tabular forms. Finally, we will go through two practical examples to understand it more easily.

INTRODUCCIÓN

El trabajo se divide principalmente en seis apartados. El primero trata de una breve introducción sobre el comienzo de la investigación operativa, con el fin de poner un contexto cómo surgió. El segundo se adentra en cómo se estructuran los problemas y como se solucionan. Para explicar esto mejor, en el tercer apartado realizaremos un ejemplo práctico sobre un problema de programación lineal.

En el siguiente apartado, nos adentramos en el objetivo principal del trabajo, el método Simplex, por lo que se explicará qué es y cómo aplicarlo.

Por último, en el quinto y sexto apartado realizaremos dos casos prácticos sobre el método Simplex.

1. INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

La trayectoria científica y el uso de distintas técnicas aplicadas a la investigación nos enseña la existencia de dos aspectos de la investigación que se pueden definir como investigación pura e investigación aplicada. La investigación pura no muestra ningún tipo de valor al resultado final obtenido después de finalizar las investigaciones. Por otro lado, la investigación aplicada tiene en cuenta los resultados obtenidos en diversos ámbitos (humano, social, económico, etc). Dicho de otra forma, la investigación pura simplemente busca conocer las cosas mejor, mientras que la aplicada busca optimizar lo máximo posible los resultados.

Gracias a la investigación aplicada, se consiguió encontrar una mayor rentabilidad en distintos aspectos, como podría ser obtener un mayor rendimiento económico o aprovechar esta investigación en relación con diversas profesiones. Estas conclusiones se consiguen gracias al uso de un tipo metodológico, denominado Investigación Operativa.

La Investigación operativa, también denominada como ciencia de la administración o IO, es el uso de distintos métodos para mejorar la eficacia y los resultados obtenidos de las investigaciones, basándose primordialmente en la matemática, la economía y el cálculo de probabilidades y estadística.

Otra definición que aporta Ríos Insua (1996, p. 14) basada en el profesor Johnson de la Universidad John Hopkins es la siguiente:

> La Investigación Operativa es la predicción y comparación de valores, efectividad y costes de un conjunto de cursos de acción propuestos, en que intervienen sistemas de hombres y máquinas y está basada sobre un modelo descrito mediante una metodología lógica o matemática que permita determinar los valores de los parámetros de los cursos de acción, mediante análisis de observaciones anteriores o de operaciones experimentales convenientemente diseñadas.

1.1 HISTORIA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Desde la llegada de la Revolución Industrial, la humanidad ha conseguido un importante crecimiento de tamaño y las organizaciones se han vuelto más complejas. Este cambio conllevó un aumento de las divisiones de trabajo y la necesidad de separar las distintas responsabilidades administrativas. A pesar de haber conseguido grandes beneficios, la dificultad de asignar los recursos de manera eficaz debido al aumento de la complejidad y de la especialización fue creciendo. Este tipo de incidentes desencadenaron un ambiente para la aparición de la investigación de operaciones.

No obstante, a pesar de que las IO se encuentran desde hace varios años atrás, el inicio de la denominada Investigación Operativa comienza con la necesidad de administrar la escasez de los recursos de la Segunda Guerra Mundial. La Fuerza Aérea Británica formó el primer grupo que utilizaría métodos cuantitativos para intentar resolver estos problemas, que fue bautizado como *Investigación operacional.* Poco más tarde, los militares estadounidenses formaron un grupo similar. Estos dos grupos estaban compuestos por un gran número de científicos (físicos e ingenieros) con el fin de aplicar el método científico a este y a otros problemas tanto estratégicos como tácticos.

Debido a los triunfos que tuvo Gran Bretaña gracias al equipo IO, tras finalizar la guerra se generó un interés en aplicar los métodos científicos en ámbitos que no fueran militares, pasando de nuevo a primer plano los problemas ligados a la especialización y complejidad de las organizaciones. Los primeros problemas que surgieron fueron en áreas tales como la programación de refinerías de petróleo, el estudio de mercados, las inversiones y la distribución de productos. Todos estos problemas se comenzaron a solucionar gracias a dos factores. El primero de ellos fue la aparición del *método simplex,* herramienta para resolver problemas de programación lineal desarrollado ñor George Dantzig (1947).

El segundo factor fue la *revolución de las computadoras.* Esto facilitó la resolución de gran número de cálculos, que era casi imposible realizar de forma manual. Esto, junto al desarrollo de computadoras personales más rápidas y de las mejoras de los softwares, hizo posible el alcance de estos métodos a la gran mayoría de personas, llegando a tener hoy en día en nuestras manos un gran número de herramientas para resolver problemas de investigación de operaciones.

2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

El uso de métodos cuantitativos implica la necesidad de muchos recursos humanos. El proceso para aplicar este método requiere una secuencia de pasos.

2.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Lo primero que debemos realizar es identificar el problema que encuentra la organización. Para ello, debemos definir bien el problema y fijar los objetivos que queremos cumplir realizando un consenso con el equipo durante esta fase con el fin de optimizar el resultado final.

2.2 DESARROLLO DE UN MODELO MATEMÁTICO O MODELIZACIÓN

Una vez definido el problema, nos encontramos con la formulación de un modelo matemático o modelización del problema. El objetivo de la investigación operativa es simplificar el problema, consiguiendo que este sea lo menos complejo posible pero asemejándose a la realidad. Para ello, es necesario ver la naturaleza de los modelos matemáticos antes de elaborarlo.

Tras determinar los límites del problema, se continua con la construcción del modelo. Dependiendo de su grado de complejidad, nos podemos encontrar con modelos a *escala, analógicos y matemáticos.* Estos últimos son los modelos que utiliza la investigación de operaciones, pues permiten analizar de un gran número de alternativas (pudiendo llegar en número infinito). El coste de analizar este modelo es bastante menor que al tratar con la experimentación de un sistema real; se puede reducir la duración de un problema que puede llegar a necesitar años de análisis. Es más sencillo modificar el modelo. Por último, es posible experimentar, lo que no es factible con el sistema real, debido a cuestiones como motivos físicos, tiempo, económicos, etc.

Esta fase para llevar a cabo la formulación matemática se denomina diseño, y consta de los siguientes pasos (Ríos Insua, 1996):

1. Determinación de los componentes del modelo: variables de decisión o control, resultados y parámetros.
2. Determinación de la estructura: incluye las expresiones matemáticas que relacionan todas las variables del modelo.
3. Determinación de un principio de elección, tratando la optimización, satisfacción…
4. Generación de alternativas, decisiones o cursos de acción, y predicción y medición de los resultados que conseguimos.
5. Determinar un escenario o establecimiento de suposiciones con el fin de examinar las situaciones de decisión.

A pesar de que con esto se busque simplificar la realidad, siempre pueden surgir datos adicionales que se descubren mientras definimos el problema. Incluir muchos detalles puede cargar de más el problema, por lo que se debe encontrar un punto de equilibrio entre la complejidad de la situación real y la simplicidad que buscamos.

2.3 SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO Y VADILACIÓN

Tras terminar el diseño del modelo matemático, el siguiente paso es solucionar el modelo. Según Ríos Insua "Una solución para el modelo será un conjunto de valores específicos para las variables de decisión, que van a permitir identificar cuál es la alternativa seleccionada para ser recomendada como solución del problema." (Ríos Insua, 1996, p. 15)

Para obtener estos valores, cuando se identifica el tipo de modelo que se ha realizado, se elegirá una técnica de administración que se encuentra en una de dos categorías:

1. Métodos óptimos: producen los valores más acertados para variables de decisión, es decir, aquellos valores que satisfacen todas las limitaciones del problema.
2. Métodos heurísticos: producen valores para las variables que cumplen con las limitaciones, aunque no son necesariamente óptimos.

Estos últimos son más eficientes a la hora de utilizar computadoras, por lo que se usan cuando obtener las soluciones más óptimas lleva demasiado tiempo o son imposibles de calcular debido a la complejidad del modelo.

Por último, tras resolver el modelo matemático es de crucial importancia validar la solución del mismo, viendo si las decisiones que concluimos se pueden realizar. Esto se realiza para evitar errores como el no haber percibido todas las limitaciones del problema real, haber pasado por alto u omitido algún aspecto concreto del problema, o haber estimado de forma errónea los datos.

Si durante este último procedimiento encontramos algún error, se regresará a la etapa de formulación y se realizaran las modificaciones convenientes.

3. PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una de las ramas más utilizadas a la hora de resolver problemas de optimización matemática. A día de hoy, se utiliza de forma habitual en ámbitos empresariales y administrativos de todo el mundo. A su vez, tiene gran aplicación en muchas ramas científicas y tecnológicas.

El origen de esta técnica recae en los economistas de la antigua Unión Soviética con el fin de gestionar la economía del país. En 1939, un economista y matemático ruso llamado Leonid V. Kantorovich publicó un estudio en el que se hablaba de la posibilidad de aplicar estos modelos lineales con el fin de mejorar la organización y la planificación de la producción, ganando años más tarde el Premio Nobel de Economía con este estudio.

A pesar de la gran influencia de Kantorovich, no fue hasta la Segunda Guerra Mundial cuando evolucionó en gran medida la programación lineal con el fin de optimizar diversos análisis estratégicos y de conseguir una optimización del uso de las tropas aliadas. Concretamente, fue el matemático estadounidense G.B Dantzing quien se encargó de un proyecto realizado por la Fuerza Aérea de Estados Unidos. El más conocido de los métodos que utilizó y desarrolló junto a su equipo fue el Simplex. Esto, junto al avance de las computadoras como herramientas de cálculo, impulsó esta área en gran medida.

Un programa lineal es *"aquel en el cual la función objetivo es lineal y las restricciones están dadas por un conjunto de ecuaciones e inecuaciones lineales".* (Cobo Ortega, 1995, p. 184)

Algunas ventajas que suponen los programas lineales en relación a los no lineales son las siguientes:

1. Son más fáciles de formular y definir.
2. Se puede trabajar de una forma más eficiente con un mayor número de variables de decisión.
3. Se adaptan mejor a las computadoras ya que aprovechan la velocidad de cálculo de estas.

Un problema de programación lineal se puede resolver tanto de forma gráfica como numérica.

Los pasos que se deben emplear para llegar a esta solución óptima que buscamos son los siguientes:

1. Identificación de las variables de decisión:

   El primer paso que debemos realizar es la identificación de estas variables, por lo que nos preguntaremos lo que pueden controlar y la información que contienen.

2. Identificación de la función objetivo.
3. Identificación de las restricciones:

El último paso consiste en encontrar las limitaciones que podemos localizar en el problema. Todo esto dependerá de las limitaciones que tengan las variables que encontramos en el problema y del problema de optimización que tengamos, ya sea maximizar o minimizar.

Una vez establecidos estos pasos, es momento de empezar a encontrar la solución óptima del problema.

A pesar de que el trabajo gire en torno al método Simplex, en el siguiente apartado realizaremos un ejemplo del método gráfico con el fin de entenderlo de una forma más dinámica.

3.1 EJEMPLO DE PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODO GRÁFICO

Una vez explicados los pasos para resolver un problema de programación lineal, vamos a realizar un ejemplo sencillo con dos variables para entender cómo obtener la solución óptima y ver cómo se resuelve de forma gráfica.

Este método no es muy aplicable ya que la mayoría de problemas cotidianos que encontramos tienen más de dos variables, pero con esto conseguiremos comprender como se resuelven de manera algebraica los problemas de tres o más variables. Como dicen Mathur y Solow *"el enfoque gráfico es útil no sólo para encontrar una solución óptima, sino también para obtener información adicional sobre cuán susceptible es la solución óptima con respecto a los cambios en los datos del problema."* (Mathur y Solow, 1996, p. 118)

Para este ejemplo, vamos a considerar un modelo donde los objetivos, su función y las restricciones del problema ya han sido identificadas. El modelo es el siguiente:

Max $z = 30x_1 + 50x_2$

Sujeto a $2x_1 + 2x_2 \leq 120$

$3x_1 + x_2 \leq 150$

$x_2 \leq 30$

$x_i \geq 0,\ i = 1, 2$

El objetivo de este problema va a ser hallar los valores de x_1 y x_2 que maximicen la función escrita y que cumplan con las restricciones correspondientes.

Las restricciones que encontramos en el problema son las dos ecuaciones que se encuentran en el "apartado" de *Sujeto a*, por lo que en primer lugar cambiaremos las restricciones por ecuaciones con igualdades con el fin de dibujar las gráficas.

$2_1 + 2x_2 \leq 120 \longrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 120$

$3x_1 + x_2 \leq 150 \longrightarrow 3x_1 + x_2 = 150$

Para representarlo gráficamente, tendríamos que igualar x_1 y x_2 a 0:

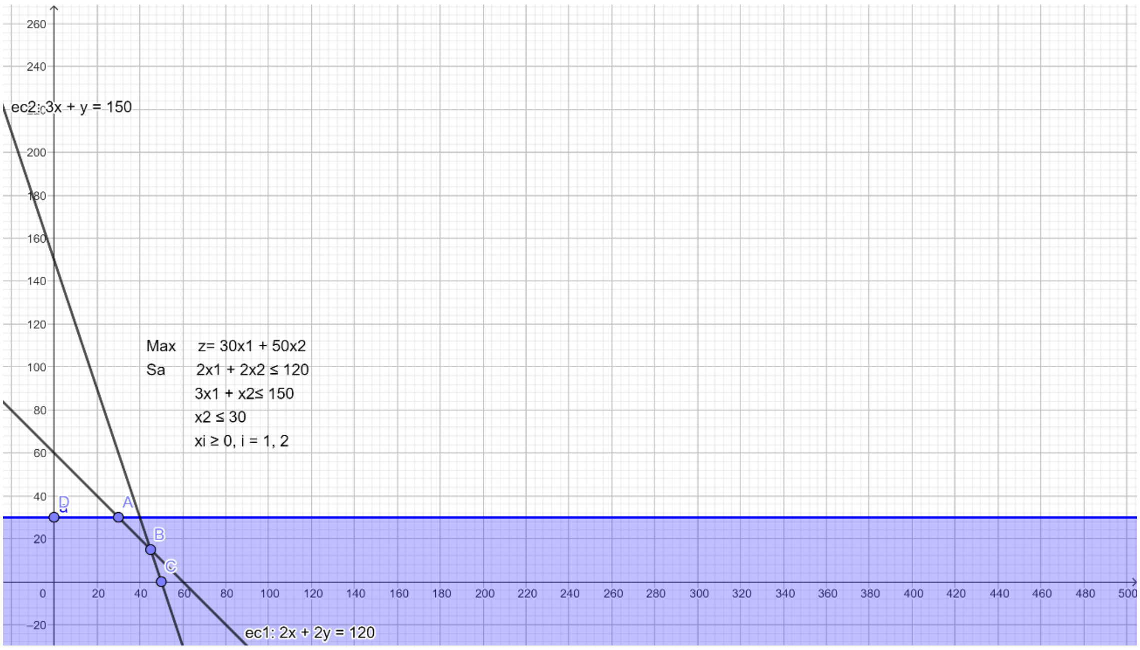
$2x_1 + 2x_2 = 120 \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 60$ El punto es (0, 60)

$2x_1 + 2x_2 = 120 \longrightarrow x_1 = 60, x_2 = 0$ El punto es (60, 0)

$3x_1 + x_2 = 150 \longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 150$ El punto es (0, 150)

$3x_1 + x_2 = 150 \longrightarrow x_1 = 50, x_2 = 0$ El punto es (50, 0)

Todo esto gráficamente se vería reflejado de la siguiente forma:



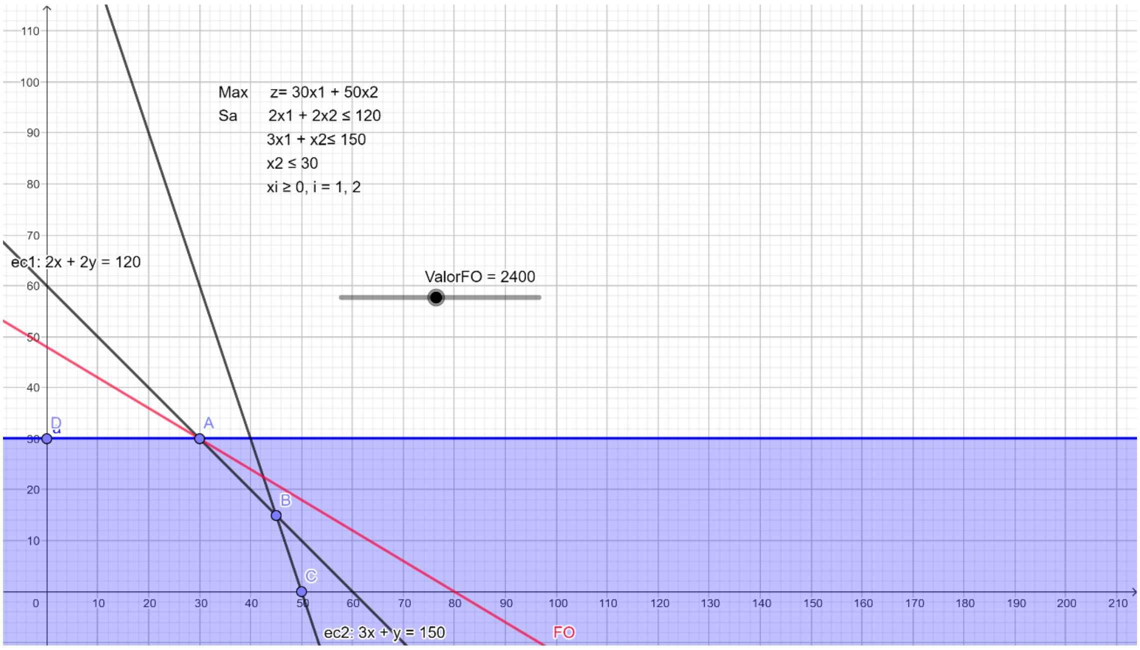
Gráfica 3.1.1: Elaboración propia con Geogebra

En esta imagen vemos representadas las ecuaciones de las restricciones.

Como las variables deben ser positivas, solo nos queda una región debajo de las rectas pero en el cuadrante positivo, que es la que se encuentra entre los puntos A (30, 30), B (45, 15), C (50, 0) y D (0, 30). Es la llamada región factible, y es donde se encontrará la solución óptima.

Tras conocer la región factible, nos queda obtener la solución óptima. Para ello, representamos la función que queremos maximizar, en este caso $z = 30x_1 + 50x_2$, y hallaremos el vector gradiente. En este caso, el vector gradiente es (3, 5), y como queremos maximizar, recorremos las curvas de nivel $z = 30x_1 + 50x_2$ en la misma dirección del vector gradiente hasta encontrar los últimos puntos en común con la región factible.

En nuestro caso, utilizaremos un deslizador que nos proporciona Geogebra que nos ayudará a obtener el punto óptimo, que es el punto A (30,30)



Gráfica 3.1.2: Elaboración propia con Geogebra

Como observamos, $x_1 = 30$ y $x_2 = 30$, por lo que, si sustituimos en la función que maximizamos, obtenemos un valor de 2400, siendo este su solución óptima.

El método que hemos utilizado, como ya hemos mencionado solo es útil cuando se trata de problemas que tienen dos variables. Para resolver problemas con tres o más variables, utilizaremos el Método Simplex, que explicaremos a continuación.

4. MÉTODO SIMPLEX

Como hemos mencionado en el apartado anterior, los modelos lineales compuestos de tres o menos variables se pueden resolver de forma gráfica. Cuando se ven implicadas más de tres variables, es necesario recurrir al algoritmo Simplex.

Como definieron Mathur y Solow (1996), el algoritmo Simplex es un "método algebraico para resolver cualquier problema de programación lineal en un número finito de pasos en una computadora." (Mathur y Solow, 1996, p. 169).

4.1 ¿QUÉ ES EL MÉTODO SIMPLEX?

Una definición que nos encontramos del método Simplex según George Dantzig (1947) es la siguiente: "algoritmo iterativo que secuencialmente a través de iteraciones se va aproximando al óptimo del problema de PL (Progresión Lineal) en caso de existir este último".

Este método consiste en la búsqueda de una solución óptima sin tener la necesidad de obtener todas las soluciones, seleccionando exclusivamente un conjunto de estas que lleguen a la solución buscada. Para ello, debemos de partir de una solución factible inicial. Si esta no es óptima, se buscará otra solución, haciendo que el valor de la función disminuya o no aumente, hasta encontrar la solución óptima. Al haber un número de soluciones básicas finitas, por cada reducción del valor óptimo descartaremos una solución que no podrá repetirse, por lo que en un número de pasos limitado se encontrará un óptimo del problema.

Cuando trabajamos con dos variables, lo hacemos sobre un plano real y las restricciones, forman un conjunto de soluciones factibles. Por otro lado, cuando trabajamos con más de dos variables, en vez de trabajar en un plano real trabajaremos sobre un poliedro.

En la siguiente imagen se representa el poliedro utilizado en el método Simplex. Partiendo desde el *"starting vertex"*, se van evaluando las posibles soluciones al problema. Cuando una de estas soluciones no es óptima, vamos moviéndonos de vértice y descartando las soluciones antes vistas, con el fin de llegar a la óptima, denominada *"optimal solution".*

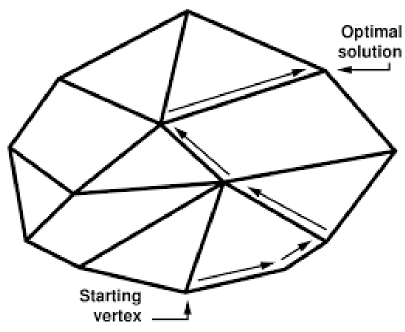


Figura 4.1.1: Poliedro convexo / Fuente: sanchezpares.com

4.2 CONVERSIÓN A LA FORMA ESTÁNDAR

La forma estándar permite manipular un problema de programación lineal de forma algebraica. Esto es necesario para aplicar el algoritmo Simplex, pues como hemos dicho, sustituirá los pasos geométricos con el correspondiente paso algebraico.

Como hemos visto, un problema de programación lineal puede tener como objetivo maximizar o minimizar, hay restricciones de igualdad o desigualdad, y las variables pueden ser negativas (≤ 0) o positivas (≥ 0).

La forma genérica o estándar de un problema lineal es la siguiente:

1. Función objetivo (mínimo):

   $X = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

2. Restricciones o sujeto a (s.a):

   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

   …

   $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

3. $x_i \geq 0$, i = 1, 2, …, n

Esta forma del algoritmo se utiliza para permitir a la computadora llevar a cabo las manipulaciones algebraicas de la manera más simple. Algunas de las características clave que debe cumplir son las siguientes:

1. La función objetivo debe minimizarse.
2. Todos los valores que se encuentran en el lado derecho de las restricciones son positivos.
3. Todas las restricciones son igualdades.
4. Todas las variables son positivas.

Si nos encontramos con un problema de programación lineal, para convertirlo a su forma estándar, tenemos que tener en cuenta ciertas características clave (Mathur y Solow, 1996):

1. Conversión de una función objetivo:

   Uno de los principales puntos a tener en cuenta es seleccionar el problema al que nos enfrentamos, pudiendo elegir si queremos realizar un problema de maximización o de minimización. Si nos encontramos con un problema de maximización, habría que multiplicar cada coeficiente por -1 para crear su problema de minimización equivalente.

   $\text{Max } x_1 - x_2 + x_3 \longrightarrow \text{Min } -x_1 + x_2 - x_3$

2. Conversión de los términos independientes de las restricciones:

Al igual que el anterior paso, consiste en multiplicar ambos lados por -1 y cambiar la dirección de desigualdad.

$2x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -10 \longrightarrow -2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10$

3. Conversión de las restricciones de desigualdad:

   Cada restricción (≤ o ≥) se transforma en una restricción de igualdad añadiendo una variable de holgura (variable de superávit) no negativa.

   $-2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 10 \longrightarrow -2x_1 + x_2 + 4x_3 + s_1 = 10$

   $2x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 10 \longrightarrow 2x_1 - x_2 - 4x_3 - s_2 = 10$

4.3 FORMA MATRICIAL

Una de las formas de definir un problema lineal es de manera matricial, por lo que los vectores y las matrices serían las siguientes (Cobo Ortega, 1995):

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El problema se podría definir como

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esta es la formulación estándar matricial del problema lineal. Para ver cómo sería la conversión del problema lineal a esta forma matricial, utilizaremos un sencillo ejemplo numérico:

Max $\quad x_1 - 4x_2 + 2x_3$

Sujeto a $\quad x_1 + 2x_2 \leq 10$

$\quad 4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 1$

$\quad x_1 + x_2 \geq 0$

Realizando los pasos mencionados en la conversión de un problema lineal a forma estándar, tendríamos:

Min $\quad -x_1 + 4x_2 - 2(x_6 - x_7)$

Sujeto a $x_1 + 2x_2 + x_4 = 10$

$4x_1 + 3x_2 – (x_6 – x_7) - x_5 = 1$

$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

La forma matricial estándar sería la siguiente:

$$c = (-1, 4, 0, 0, -2, 2) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4 MÉTODO SIMPLEX EN FORMA DE TABLA

Esta forma tabular se utiliza cuando hay un elevado número de variables, y es necesario realizar una gran cantidad de cálculos. Gracias a esto, surgieron las *tablas del Simplex,* con el fin de organizar los cálculos. Para explicar la realización de la tabla, utilizaremos el siguiente problema, usando la notación de Cobo Ortega (1995):

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \text{ con } b \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La tabla sería la siguiente:

C_1	C_2	C_3	c_1 … … c_n	F_1
c_{B1} … c_{Bm}	x_{B1} … x_{B1}	b_1 … b_m	a_{11} … … a_{1n} a_{ij} a_{m1} … … a_{mn}	
…	…	c_B o b	c_B o A_1 … c_B o A_n	F_{m+2}
			z_1 … … z_n	$F_1 - F_{m+2}$

$z_i = c_i – c_B$ o A_i $i = 1, 2, …, n$ siendo $A_1, …, A_n$ las columnas de la matriz A

En esta tabla podemos observar que en la primera fila se colocan los coeficientes de las variables en la función objetivo. Por otro lado, en las columnas C_1, C_2, C_3 se encuentran los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo, las variables básicas iniciales y el vector de términos independientes de las restricciones, respectivamente.

Es fundamental entender que las variables básicas iniciales deben estar asociadas a una matriz de base asociada que sea equivalente a la identidad. Con frecuencia, cuando incorporamos las variables de holgura (o las variables de superávit que vimos en la forma matricial) en las restricciones, se forma una matriz básica identidad que puede servir como punto de partida para el algoritmo. Cuando esto no sucede, es posible aplicar otras técnicas con el fin de obtener una matriz identidad, como la introducción de variables artificiales.

Centrándonos en la parte central de la tabla, vemos que la tabla está formada por la matriz de coeficientes A. La fila F_{m+2} contiene los resultados de multiplicar escalarmente la columna C_1 con la matriz A. Por último, en la última fila aparece el resultado de restar las filas F_1 y F_{m+2}.

Cada tabla corresponde a una solución básica factible. Una vez formada la tabla inicial, es necesario definir ciertas reglas que permitan generar las tablas correspondientes a las siguientes soluciones básicas, así como determinar la solución básica asociada a cada una. Para verificar si hemos llegado a la solución óptima, debemos analizar los signos de la última fila de la tabla:

- Por una parte, habremos llegado al óptimo si todos los elementos de la última fila son iguales o superiores a cero.
- Si alguno de los valores en la última fila de la tabla resulta ser negativo, será necesario construir una nueva tabla para continuar con el proceso.
    - Para ello, el primer paso consiste en identificar el elemento negativo con mayor valor absoluto, pues la posición de este elemento determinará cuál será la nueva variable básica que se incorporará al sistema.
    - A continuación, se dividen los valores de la columna C_3, que contiene los términos independientes, entre los valores positivos de la columna de la matriz A correspondiente al elemento seleccionado. De los cocientes resultantes, se seleccionará el menor. El valor de A utilizado es el pivote que nos permitirá construir la siguiente tabla y la variable asociada a la fila del pivote dejará de ser una variable básica.
    - El siguiente paso consiste en transformar el valor pivote en 1. Para lograrlo, se normaliza toda la fila del pivote dividiendo cada uno de sus elementos entre el valor del mismo. Posteriormente, es necesario ajustar el resto de los valores en la columna del pivote, reduciéndolos a 0 mediante operaciones elementales por filas, utilizando la fila del pivote como referencia.
    - Se actualizan las columnas C_1 y C_2- y se calculan de nuevo los valores de las dos últimas filas de la tabla, dejando todo preparado para continuar con el análisis y determinar si se ha alcanzado una solución óptima o si es necesario repetir el procedimiento en una nueva iteración.

Este proceso se repite hasta conseguir una tabla donde ninguno de los valores de la última fila es negativo.

Para entender esto, realizaremos un caso práctico donde comprenderemos de una forma más eficiente el uso de estas tablas.

5. CASO PRÁCTICO: MÉTODO SIMPLEX EN FORMA DE TABLA

Un agricultor vende dos productos y quiere **maximizar sus beneficios**. Cada producto necesita la mano de obra para llegar a venderlos y tiene asociado un coste de transporte hasta los supermercados. A continuación, la tabla siguiente representa los costes y los beneficios de cada producto.

	x_1	x_2	Restricciones
Mano de obra	80	120	480
Transporte	20	10	80
Beneficio	60	40	

Como vemos en la tabla de arriba, 480 será la disponibilidad de mano de obra y 80 el coste límite que puede asumir por el transporte.

El primer paso es desarrollar la función objetivo y las restricciones:

$$\begin{cases} \max z = 60x_1 + 40x_2 \\ 80x_1 + 120x_2 \ \leq 480 \\ \ 20x_1 + 10x_2 \leq 80 \\ \qquad x_1, x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

Ahora debemos realizar la conversión a su forma estándar añadiendo las variables de holgura:

$$\begin{cases} \min z = -60x_1 - 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \qquad 80x_1 + 120x_2 + x_3 = 480 \\ \qquad 20x^1 + 10x^2 + x_4 = 80 \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

A continuación, construimos la primera de las tablas:

	-60	-40	0	0	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_3 = 0	80	120	1	0	480
x_4 = 0	20	10	0	1	80
	=0*80 + 0*20 = 0	=0*120 + 0*10 = 0	0	0	0
	=-60 - 0 = -60	=-40 - 0 = -40	0	0	

Al tener valores negativos en la última fila, esto nos indica que no hemos llegado a la solución óptima.

La variable que entra ahora es la variable x_1 ya que -60 es el valor negativo más elevado en valor absoluto. Por otra parte, la variable que sale es x_4 pues si calculamos las razones (x_B/x_1), 480/80 = 6 > 80/20 =4, la menor razón corresponde a x_4.

El pivote es el valor 20, por lo que dividimos los valores de esa fila entre 20:

	-60	-40	0	0	

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_3 = 0	80	120	1	0	480
x_1 = -60	1	1/2	0	1/20	4

Por otra parte, la fila de x_3 la calcularíamos con el siguiente algoritmo:

Nueva fila x_3 = Antigua fila x_3 – 80*Nueva fila x_1

Quedando así de manera definitiva la anterior tabla:

	-60	-40	0	0	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_3 = 0	0	80	1	-4	160
x_1 = -60	1	1/2	0	1/20	4
	=1*(-60) + 0*0 = -60	=1/2*(-60) + 0*80 = -30	0	=0*(-4) - 60*(1/20) = -3	=4*(-60) = -240
	=-60 + 60 =0	=30 – 40 = -10	0	3	

Como nos ha vuelto a quedar otro valor negativo en la última fila, debemos repetir el proceso realizado anteriormente

El pivote ahora es el valor 80 de la columna x_2, por lo que dividimos la fila de x_3 entre 80

	-60	-40	0	0	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_3 = 0	0	1	1/80	-1/20	2
x_1 = -60	1	1/2	0	1/20	4

La nueva variable básica pasa a ser x_2, saliendo la variable x_3. Por último, calculamos la nueva fila x_1 :

	-60	-40	0	0	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_B
x_2 = -40	0	1	1/80	-1/20	2
x_1 = -60	1	0	-1/160	3/40	3
	=0*(-40) + (-60)*1 = -60	=1*(-40)- 60*0 =- 40	= (-40)*(1/80) - 60* (-1/160) = -1/8	= (-40)* (-1/20) - 60*(3/40) = = -5/2	= (-40)*2 - 3*60 = -260
	0	0	=1/8 + 0 = 1/8	=5/2 + 0 = 5/2	

Como todos los valore de la última fila son positivos, hemos llegado a la solución óptima. Para maximizar nuestro problema:

$x_1 = 3$ $x_2 = 2$ $z = 260$. Esta serían nuestras soluciones óptimas

6. VARIABLES ARTIFICIALES EN EL MÉTODO SIMPLEX

No siempre es posible obtener una matriz identidad como punto de partida. Veremos a continuación cómo solucionar esta cuestión

Una solución es añadir nuevas variables, denominadas *variables artificiales*. Cuando hemos realizado la conversión del problema lineal a la forma estándar, sumamos estas nuevas variables a las restricciones necesarias con el fin de obtener una matriz básica que sea igual a la identidad.

La forma de conseguir esto es añadiéndolas a la función objetivo con un coeficiente muy elevado positivo, que representaremos con la letra *M*. Así, al minimizar la función objetivo dejarán de ser básicas. Vamos a realizar un ejemplo, partiendo ya de un problema que se encuentra en su forma estándar:

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 2x_2 \\ -4x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tras introducir las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 junto a las variables artificiales, el problema y sus restricciones se verían de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

La primera tabla Simplex que elaboraremos será la siguiente:

C_b	Base	b	2	-2	0	0	0	M
0	x_3	9	-4	-3	1	0	0	0
0	x_5	4	1	0	0	0	1	0
M	x_6	6	3	1	0	-1	0	1
		C_b * b = 6M	C_b *A_1 = 3M	C_b *A_2 = M	C_b *A_3 = 0	C_b *A_4 = -M	C_b *A_5 = 0	C_b *A_6 = M
			2 - 3M	-2 - M	0	M	0	0

El mayor valor absoluto es 2 – 3M. Entra como variable básica x_1 y para determinar que variable sale, dividimos los valores de b entre los valores positivos de A_1. La variable x_6 deja de ser básica. El pivote de A_1 es 3.

La siguiente tabla se vería de este modo:

C_b	Base	b	2	-2	0	0	0	M
0	x_3	17	0	-5/3	1	-4/3	0	4/3
0	x_5	2	0	-1/3	0	1/3	1	-1/3
2	x_1	2	1	1/3	0	-1/3	0	1/3
		$C_b * b =$ 4	$C_b *A_1 =$ 2	$C_b *A_2 =$ 2/3	$C_b *A_3 =$ 0	$C_b *A_4 =$ -2/3	$C_b *A_5 =$ 0	$C_b *A_6 =$ 2/3
			0	-8/3	0	2/3	0	M -2/3

Como solo tenemos el valor -8/3 negativo, entra como variable ficticia x_2. Al dividir los valores de b entre los valores positivos de A_2, vemos que x_1 deja de ser básica. El pivote de A_2 es 1/3

La siguiente tabla es la siguiente:

C_b	Base	b	2	-2	0	0	0	M
0	x_3	27	5	0	1	-3	0	3
0	x_5	4	1	0	0	0	1	0
-2	x_2	6	3	1	0	-1	0	1
		$C_b * b =$ -12	$C_b *A_1 =$ -6	$C_b *A_2 =$ -2	$C_b *A_3 =$ 0	$C_b *A_4 =$ 2	$C_b *A_5 =$ 0	$C_b *A_6 =$ -2
			8	0	0	-2	0	M + 2

Solo tenemos el valor -2 negativo, entrando como variable ficticia x_4. Como no existen valores positivos en la columna A_4, podemos asegurar que este problema no tiene un óptimo finito.

7. CONCLUSIÓN

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado ha sido ver la gran importancia que ha tenido a lo largo del tiempo la Investigación Operativa. Esta disciplina nos ha permitido resolver grandes problemas como la asignación de recursos y ha tenido un gran impacto en el ámbito empresarial.

Gracias a esta metodología podemos entender una gran herramienta, la programación lineal, con lo que resolvemos problemas que tengan variables continuas y restricciones lineales. Existen diversos métodos para abordar este tipo de problemas, siendo el enfoque analítico y el gráfico los más conocidos. Como hemos visto en el ejemplo realizado anteriormente, el método gráfico solo se puede usar cuando el problema posea dos variables, siendo esta situación muy extraña en el día a día.

Seguidamente, vemos que cuando nos encontramos con un problema que contiene más de dos variables, una forma de obtener una solución es el método Simplex, con el que se busca únicamente la solución óptima sin tener la necesidad de buscar todas las soluciones posibles.

Gracias a todo esto y al avance tecnológico que ha habido a lo largo del tiempo, el método Simplex lo puede usar cualquier persona o empresa en su día a día para encontrar una respuesta a diversos problemas, ya que este nos proporcionará el punto más óptimo de la función objetivo.

8. BIBLIOGRAFÍA

Cobo Ortega, A. (1995) *Optimización matemática*. Santander: COPISAN.

Mathur, K. y Solow, D. (1996) *Investigación de Operaciones. El arte de la Toma de Decisiones*. México: Prentice Hall.

Ríos Insua, S. (1996) *Investigación Operativa, Programación lineal y aplicaciones*. Madrid: Ramón Areces.

Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. Pearson Educación.

García Ligero Ramírez, M. J. y Román Román P. *Transformación de un problema de programación lineal a forma estándar. Departamento de Estadística e I.O. Universidad de Granada*. Disponible en: https://www.ugr.es/~mjgarcia/IO1Grado1718/PDF/TransformacionFormaEstandar.pdf

(Consultado el 3/09/2024)

Muñoz Guillermo, M, (2012). *Programación lineal. U.P.C.T.* Disponible en: https://ocw.bib.upct.es/pluginfile.php/10251/mod_resource/content/1/T7.pdf

(Consultado el 5/09/2024)