GRADO EN ECONOMÍA
CURSO ACADÉMICO 2024-2025

TRABAJO FIN DE GRADO

FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ECONOMÍA: LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO EDUCATIVO

FUNCTIONS, GRAPHICS AND COVARIATIONAL REASONING IN THE TEACHING AND LEARNING OF ECONOMICS: DYNAMIC CONSTRUCTIONS AS AN EDUCATIONAL RESOURCE

AUTOR/A: LUCÍA VELASCO GUTIÉRREZ

DIRECTOR/A: PEDRO ÁLVAREZ CAUSELO

CONVOCATORIA DE DEFENSA: JUNIO, 2025

DECLARACIÓN RESPONSABLE

La persona que ha elaborado el TFG que se presenta es la única responsable de su contenido. La Universidad de Cantabria, así como quien ha ejercido su dirección, no son responsables del contenido último de este Trabajo.

En tal sentido, Don/Doña LUCÍA VELASCO GUTIÉRREZ se hace responsable:

1. *De la AUTORÍA Y ORIGINALIDAD del trabajo que se presenta.*
2. *De que los DATOS y PUBLICACIONES en los que se basa la información contenida en el trabajo, o que han tenido una influencia relevante en el mismo, han sido citados en el texto y en la lista de referencias bibliográficas.*

Asimismo, declara que el Trabajo Fin de Grado tiene una extensión de máximo 10.000 palabras, excluidas tablas, cuadros, gráficos, bibliografía y anexos.

Fdo.: Firmado por VELASCO GUTIERREZ LUCIA - ***6913** el día 20/06/2025 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Lucía Velasco

ÍNDICE:

RESUMEN *4*

ABSTRACT *4*

1. INTRODUCCIÓN *5*

2. FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA *6*

2.1. LAS FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA . 6

2.2. LAS FUNCIONES DESDE LA PERSPECTIVA DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL 7

2.3. RAZONAMIENTO COVARIACIONAL Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES 9

3. ANALIZANDO EL RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA *10*

3.1. MÉTODOS 10

3.1.1. Diseño del cuestionario 10

3.1.2. Bloque I: tareas de representación 10

3.1.3. Bloque II: tareas de interpretación 11

3.2. RESULTADOS 12

3.2.1 Bloque I: tareas de representación 12

3.2.2 Bloque II: tareas de interpretación 16

4. LAS CONSTRUCCIONES DINÁMIMCAS COMO RECURSO PARA FACILITAR EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: UNA PROPUESTA *20*

4.1. TAREA 1 21

4.2. TAREA 2 21

4.3. TAREA 3 23

4.4. TAREA 4 24

4.5. TAREA 5 24

5. CONCLUSIONES *25*

6. REFERENCIAS *27*

ANEXO I: DOCUMENTACIÓN COMITÉ DE ÉTICA *29*

ANEXO II: CUESTIONARIO EXPERIMENTO *36*

ANEXO III: ENLACES DE LA PROPUESTA EN GEOGEBRA *42*

RESUMEN

En este Trabajo de Fin de Grado se adopta la propuesta teórica del razonamiento covariacional para acercarse a la forma de razonar de los estudiantes cuando utilizan el concepto de función en el aula de economía. En particular, se centra la atención en el uso de las representaciones gráficas para recoger relaciones entre magnitudes económicas. A través de un cuestionario basado en tareas, se analizan las formas de pensar de un grupo de estudiantes de primer curso del Bachillerato cuando se enfrentan a tareas de representación y de interpretación de relaciones funcionales sencillas planteadas en un contexto económico que les resulte cercano.

En este trabajo se incluyen tanto las tareas planteadas en el cuestionario como el análisis de las respuestas proporcionadas por los participantes. Los estudiantes resolvieron actividades vinculadas a contextos reales como tarifas de transporte, ahorro para un viaje y producción agrícola de trigo. Tras el análisis de los resultados obtenidos, se propone el uso del programa GeoGebra como recurso didáctico para la mejora de la interpretación de funciones matemáticas aplicadas a situaciones económicas.

La información recogida pone de manifiesto que los estudiantes encuentran grandes dificultades a la hora de representar relaciones que se les presentan de manera verbal. En cuanto a las tareas de interpretación de representaciones dadas, se observa que encuentran dificultades incluso para dar sentido a la pendiente de relaciones lineales sencillas.

Tomando como referencia la información obtenida, se recurre al programa GeoGebra para elaborar una serie de construcciones dinámica orientadas a facilitar que los alumnos superen las dificultades identificadas y sean capaces de razonar en términos covariacionales.

Palabras clave: funciones, variable dependiente, variable independiente, razonamiento covariacional, GeoGebra, representación gráfica.

ABSTRACT

In this Bachelor's Thesis, the theoretical framework of covariational reasoning is adopted to approach the way students reason when using the concept of function in the Economics classroom. In particular, attention is focused on the use of graphical representations to capture relationships between economic quantities. Through a task-based questionnaire, the ways of thinking of a group of first-year high school students are analyzed as they engage with tasks involving the representation and interpretation of simple functional relationships presented within a familiar economic context.

This study includes both the tasks posed in the questionnaire and the analysis of the responses provided by the participants. The students solved activities related to real-life contexts such as transport fares, saving for a trip, and wheat agricultural production. Based on the analysis of the results obtained, the use of the GeoGebra software is proposed as a didactic resource to improve the interpretation of mathematical functions applied to economic situations.

The collected data reveals that students face significant difficulties when representing relationships presented to them verbally. Regarding the interpretation of given representations, it is observed that they struggle even to make sense of the slope in simple linear relationships.

Based on the information gathered, the GeoGebra software is used to design a series of dynamic constructions aimed at helping students overcome the identified difficulties and develop the ability to reason in covariational terms.

Keywords: functions, dependent variable, independent variable, covariational reasoning, GeoGebra, graphical representation.

1. INTRODUCCIÓN

Las funciones desempeñan un papel fundamental en las asignaturas introductorias a la economía de la educación secundaria. Los libros de texto de la materia están llenos de representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que recogen formalmente la relación entre distintas magnitudes económicas. La representación gráfica de la frontera de posibilidades de producción, la tabular de las funciones de costes o la algebraica de las funciones de oferta y demanda, son algunos de los ejemplos más conocidos.

La construcción de modelos abstractos constituye una herramienta básica para representar y analizar situaciones reales en disciplinas como las Matemáticas y la Economía. Estos modelos incluyen conceptos fundamentales como funciones, variables o pendiente, que permiten establecer relaciones entre diferentes magnitudes.

Dada la relevancia del concepto de función, resulta fundamental que el profesor de economía sea capaz de conectar los conocimientos matemáticos previos con el uso real de dichos conceptos en el aula de economía. Estudios previos destacan la importancia de un enfoque interdisciplinar para lograr un aprendizaje significativo.

Actualmente existen recursos tecnológicos que pueden ser incorporados como herramienta didáctica en este proceso de enseñanza. GeoGebra permite manipular representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de funciones, facilitando la visualización y comprensión de conceptos matemáticos relacionados con situaciones económicas.

Este trabajo se centra en el caso de la representación gráfica de las funciones y persigue los siguientes objetivos:

1. Revisar brevemente la propuesta teórica del razonamiento covariacional como marco desde el que lograr que los alumnos den sentido al concepto de función como herramienta para recoger patrones de relaciones entre magnitudes económicas.
2. Analizar las formas de razonar de un grupo de estudiantes cuando se enfrentan a tareas de elaboración e interpretación de representaciones gráficas en contextos económicos sencillos.
3. Utilizar la información obtenida para diseñar una propuesta didáctica basada en el uso de construcciones dinámicas con GeoGebra que facilite el desarrollo del razonamiento covariacional.

Este TFG se organiza en tres partes que coinciden con los tres objetivos indicados además de esta Introducción y una sección final de Conclusiones. La primera de ellas trata el marco teórico del proyecto y aborda la transición del concepto de función desde el aula de matemáticas al aula de economía y el razonamiento covariacional. La segunda parte consta de un análisis detallado del razonamiento de los estudiantes a partir de un cuestionario dividido en tareas de representación e interpretación. Por último, la tercera parte trata la presentación de una propuesta didáctica basada en construcciones dinámicas con GeoGebra.

2. FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

2.1. LAS FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

Con la implantación de la nueva ley educativa, la LOMLOE, se ha incrementado la importancia sobre la comprensión de los conceptos y las competencias que deben desarrollar los alumnos. Esta ley tiene como objetivo que el alumnado comprenda los conceptos que se enseñan en clase en lugar de limitarse a aplicar simplemente aprendizaje descontextualizado.

Uno de los contenidos donde esta falta de contextualización es evidente es el concepto de función. La función está definida como la herramienta que se utiliza para modelizar y estudiar multitud de fenómenos sociales, naturales, científicos, etc. Las funciones describen relaciones entre magnitudes de tal manera que, conociendo el valor de alguna de ellas, se obtiene el valor de la otra, es decir, facilita recoger la relación entre variables dependiente e independiente y a hacer frente a situaciones de la vida diaria (Colera Jiménez et al., 2022). A su vez, las competencias propuestas en la LOMLOE persiguen que los estudiantes sean capaces de reconocer, en otras materias y situaciones, los conceptos trabajados en la clase de matemáticas.

A pesar del enfoque competencial sugerido por la LOMLOE, en la práctica docente prevalece una metodología procedimental, centrada en la resolución mecánica de ejercicios sin conexión con situaciones de la vida real. Este alejamiento entre teoría y práctica impide que los estudiantes apliquen los conceptos matemáticos a situaciones reales y a otras disciplinas como la economía (Barnett & Ceci, 2002).

Esta perspectiva matemática se aleja de la realidad en la que se aplican las funciones. En el caso de la economía, encontramos las relaciones entre el precio y la demanda, la función de producción, etc. Sin embargo, estas aplicaciones no se suelen trabajar en el aula de Matemáticas. A causa de este distanciamiento, los estudiantes encuentran dificultades a la hora de aplicar conceptos matemáticos a contextos económicos (Barnett & Ceci, 2002). Con el fin de que el alumnado sea capaz de construir una imagen conceptual, se propone la integración entre representación y concepto (Sierpinska, 2014).

En los cursos de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales, los alumnos que cursan la asignatura de Economía estudian el concepto de función analizando situaciones de ingresos-costes, oferta-demanda, etc. En estos cursos, se da más importancia a la contextualización de los problemas. Se trata de hacer que los estudiantes comprendan lo que está siendo explicado en lugar de limitarse a seguir un procedimiento mecánico (Lesh & Kelly, 2000).

Aun así, la enseñanza de las funciones mantiene predominantemente un enfoque procedimental, lo que hace más difícil que los alumnos trabajen la conexión entre un contexto realista y un problema matemático específico. Si nos fijamos en algunos de los libros que se usan en esta etapa educativa, como son el de Anaya y el de Tu Libro de Bachillerato, vemos que las actividades se centran en la resolución de ejercicios mediante procedimientos mecánicos. (Narváez Villena et al., 2022; Córdoba Vázquez & Rodríguez Gallego, 2020). Como consecuencia, los estudiantes presentan dificultades a la hora de relacionar el contexto real con el problema planteado. Esta limitación en la enseñanza tiene implicaciones directas en asignaturas como Economía, donde el uso de funciones exige una comprensión más contextualizada y flexible. No obstante, para comprender plenamente el papel de las funciones en la economía, es esencial considerar cómo se presentan en los libros de texto y en las prácticas de aula. En los libros de Economía, las funciones no se abordan de forma abstracta, como en Matemáticas, sino aplicadas a contextos reales mediante el uso de tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Este uso simultáneo de diversas representaciones funcionales exige que el alumnado desarrolle una capacidad de coordinación entre ellas, algo que no siempre se fomenta adecuadamente en la enseñanza matemática previa. Por ejemplo, es frecuente encontrar representaciones gráficas como la frontera de posibilidades de producción o las curvas de oferta y demanda, acompañadas de sus respectivas tablas de valores concretos o expresiones algebraicas. Esta integración permite al estudiante analizar una misma relación funcional desde diferentes perspectivas, favoreciendo así una comprensión contextualizada. Sin embargo, cuando el tratamiento de las funciones en Matemáticas se limita a una enseñanza mecánica y descontextualizada, se dificulta la transferencia de este conocimiento a otras disciplinas como la Economía. Además, algunos libros de texto de Economía introducen funciones con más de una variable. Este nivel de dificultad puede resultar problemático si el alumnado no ha desarrollado previamente un razonamiento variacional sólido.

Por todo ello, resulta fundamental no solo que los estudiantes aprendan a manejar correctamente las distintas formas de representación de una función (algebraica, tabular y gráfica), sino también que sean capaces de describir verbalmente la relación funcional y de razonar sobre su variación. Comprender las funciones en términos de razón de cambio es clave para aplicar estos conocimientos a fenómenos económicos, donde la variación de una magnitud afecta simultáneamente a otra (Amy Ellis et al., 2022).

La falta de una comprensión del concepto de función, combinada con una enseñanza procedimental en Matemáticas, contribuye a que los estudiantes tengan dificultades para aplicar estos conocimientos en contextos económicos reales. Para facilitar la comprensión del concepto de función tanto en el aula de Matemáticas como en la de Economía es fundamental implementar actividades enfocadas en el modelado de situaciones reales. Esto conlleva la inclusión de análisis y el empleo de herramientas digitales como la que proponemos en este proyecto para comprender las funciones. De esta forma, los estudiantes serán capaces de resolver problemas con mayor fluidez (Ruiz Estrada, 2017).

2.2. LAS FUNCIONES DESDE LA PERSPECTIVA DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

Según lo comentado en apartados anteriores, el nuevo currículum de matemáticas de la ley educativa LOMLOE tiene como prioridad ayudar a los alumnos a adoptar una visión que haga comprendan los conceptos en lugar de memorizarlos. Adoptar una visión que permita comprender la relación entre variables es positivo para los alumnos (Castillo-Garsow, 2012). El objetivo es que los estudiantes comprendan cómo funciona la variación entre variables, es decir, que sean capaces de ver el cambio continuo entre magnitudes (Amy Ellis et al., 2022; Altindis et al., 2024)

Dentro de los muchos enfoques, nos vamos a centrar en el constructivismo radical. Lo que sostiene el constructivismo radical es que el conocimiento no se transfiere, sino que se construye individualmente. Cada estudiante construye el conocimiento a partir de sus experiencias anteriores. De esta forma, cada alumno percibe los conceptos de manera diferente e individual. Estudiar la forma en la que reflexionan los estudiantes es muy complejo ya que cada individuo interpreta y construye el conocimiento a partir de sus propias experiencias. Una forma factible de estudiarlo es la creación de modelos de segundo orden. Estos modelos son representaciones creadas por el docente para tratar de deducir el proceso de razonamiento de sus alumnos (Von Glasersfeld, 1995). Estos modelos permiten identificar la forma en la que piensan los alumnos de manera que puedan ser orientados hacia la forma en la que buscamos que piensen, con la posibilidad de implementar prácticas educativas diferentes (Von Glasersfeld, 2002).

Uno de los problemas más comunes a los que se enfrenta el alumnado es dar significado a los símbolos (Smith et al., 2014). Al no comprender la situación real, los estudiantes manipulan las expresiones sin conocer su significado y por lo tanto con desconocimiento de lo que están haciendo. Según el constructivismo radical una forma para mejorar esta situación es el razonamiento cuantitativo. Lo que se busca a través del razonamiento cuantitativo es conseguir que los estudiantes vean las magnitudes detrás de los símbolos matemáticos. Usar como magnitudes conceptos que ellos conozcan y les resulten más familiares fomenta una mejor compresión por parte de los estudiantes (Amy Ellis et al., 2022; Barnett & Ceci, 2002).

Una vez los alumnos son capaces de reconocer estas situaciones, pueden avanzar hacia un razonamiento más complejo, como el razonamiento covariacional. Este tipo de razonamiento implica que los estudiantes deben ser capaces de ver la variación simultánea en dos magnitudes. Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que reflexionen sobre la relación existente entre el dinero que están dispuestos a gastar y la cantidad de unidades que quieren conseguir de un bien que ellos consuman.

Dentro del razonamiento covariacional se pueden distinguir cinco niveles (ver Tabla 1), más concretamente: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa, ratio media y ratio instantánea (Carlson et al., 2002).

Tabla 2.2.1. Acciones mentales del marco de la covariación

Acción mental	Descripción de la acción mental
Acción mental 1 (MA 1)	Coordinación del valor de una variable con cambios en la otra.
Acción mental 2 (MA 2)	Coordinación de la dirección de cambios de una variable con cambios en la otra.
Acción mental 3 (MA 3)	Coordinación de la cuantía de la variación de una variable con la variación de la otra variable.
Acción mental 4 (MA 4)	Coordinación de la tasa media de variación de la función con los incrementos constantes de variación de la otra variable.
Acción mental 5 (MA 5)	Coordinación de la tasa marginal de la función con las variaciones continuas de la variable independiente para todo el dominio de la función

Fuente: (Carlson et al., 2002)

Esta forma de visualizarlo permite al profesor acompañar el desarrollo del razonamiento del estudiante. De tal forma, si un estudiante es capaz de llegar al nivel cuatro, los tres niveles anteriores son superados automáticamente (Carlson et al., 2002).

En contraste con la visión de Carlson et al., (2002), Johnson (2015) sugiere que este razonamiento es más flexible. No lo observa desde un enfoque jerárquico, sino que explica que un estudiante puede llegar a un nivel superior sin la necesidad de haber "superado" los anteriores. Esta visión tiene más en cuenta el entorno en el que se encuentra el estudiante y analiza cómo puede influir esto a su nivel de comprensión.

En definitiva, incorporar el razonamiento covariacional en la educación puede potenciar la comprensión del concepto de función y su habilidad para aplicarlo a situaciones realistas (Ruiz Estrada, 2017).

2.3. RAZONAMIENTO COVARIACIONAL Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

La representación gráfica constituye una de las muchas formas existentes para comprender las relaciones entre variables. En muchas ocasiones, los estudiantes no ven estas gráficas de forma continua, lo que dificulta su interpretación (Fernández et al., 2014; Carlson et al., 2002).

En la mayoría de los casos la resolución de un problema que sólo dispone de enunciado escrito supone un reto para los alumnos. Durante el estudio sobre el razonamiento covariacional, Johnson (2015) sugiere un modelo para analizar el comportamiento de los estudiantes a la hora de realizar una representación gráfica. Esta forma de análisis consiste en seguir una secuencia de pasos a la hora de representar una gráfica. El primer paso es observar si el estudiante reconoce las variables involucradas. A continuación, se evalúa su capacidad de reconocer la relación existente entre ellas y si percibe cómo varía una en función de la otra. Por último, se observa si el estudiante es capaz de representar la relación gráficamente. Además de esta secuencia de pasos, también revela que no todos los estudiantes emplean el mismo método. Tras leer el enunciado, los alumnos pueden optar por representar la situación de tres maneras distintas: algebraica, gráfica o tabular.

En primer lugar, el uso del método algebraico puede implicar una aplicación más mecánica de los procedimientos (Tall & Vinner, 1981). Lo habitual es que no conciban la función como relación entre variables sino simplemente la creación de valores puntuales. Los estudiantes que optan por escoger este método suelen tener un razonamiento covariacional menos desarrollado ya que aún no han comprendido la idea de cambio simultáneo entre variables (Castillo-Garsow, 2012).

En segundo lugar, aquellos alumnos que optan por el método tabular tratan de encontrar una relación directa entre los valores de input y output. Este método es propio de los primeros niveles del pensamiento covariacional, dado que los estudiantes que lo eligen no tienen una visión desarrollada al completo. Además, tienden a centrarse en comparar valores individuales ya que les da la capacidad de obtener resultados más concretos y manipulables (Carlson et al., 2002).

Otra forma en la que los estudiantes son capaces de procesar y comunicar la variación simultánea de dos variables es mediante simulaciones interactivas y dinámicas. Se ha demostrado que favorece una mejor comprensión de la variación de dos magnitudes simultáneamente (Panorkou & Germia, 2021). En este sentido cabe señalar la importancia de modelos más visuales y dinámicos, que permitan la fácil representación de fenómenos económicos (Ruiz Estrada, 2017).

Del mismo modo, también se han propuesto actividades y talleres que hagan uso del espacio y el cuerpo. Al tratarse de un enfoque diferente, los estudiantes desarrollan el pensamiento covariacional, no sólo mediante la vista, sino empleando otros sentidos. Por ejemplo, Smith et al., (2014), proponen pedir a los estudiantes que usen los brazos para representar los cambios en la forma de una función. Asimismo, Jonsson et al.,

(2014) proponen el uso de modelos físicos que muestran variaciones de temperatura como recurso para favorecer la comprensión de los cambios simultáneos entre variables. Actividades de este tipo promueven una comprensión más profunda de los procedimientos implicados.

En conclusión, acompañar la interpretación y creación de representaciones gráficas con simulaciones, experimentos y actividades favorece la comprensión del concepto de función y su representación gráfica. Diversificar las estrategias metodológicas en la enseñanza de la representación gráfica, no solo favorece el desarrollo del pensamiento covariacional sino también la adaptación de diferentes puntos de vista.

3. ANALIZANDO EL RAZONAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES DE ECONOMÍA

3.1. MÉTODOS

3.1.1. Diseño del cuestionario

En un primer momento, decidimos realizar un cuestionario con el fin de obtener respuestas más concretas y poder ver los pasos que los estudiantes siguen en su razonamiento mientras resuelven los ejercicios. El cuestionario iba a ser utilizado para realizar dos entrevistas grabadas en video a dos alumnas voluntarias que cursan la asignatura de Economía de primero de Bachillerato. Estas entrevistas se realizaron de forma individual, garantizando un entorno cómodo con el fin de facilitar una comunicación abierta. La primera entrevista tuvo una duración de 45 minutos y la segunda entrevista una duración de 30 minutos.

Con el fin de tener una visión más completa, aplicamos el cuestionario a la clase entera de Economía del mismo grupo. Este grupo está formado por nueve alumnos de primero de Bachillerato. Durante el cuestionario, no fue posible intervenir en el proceso de resolución de los estudiantes como en las entrevistas, por lo que incluimos un par de preguntas más que completaran las respuestas de los estudiantes (Ver Tareas 4 y 5 apartado b), Anexo II). La duración del cuestionario fue aproximadamente de 40 minutos. Este cuestionario nos permite conocer los conocimientos sobre la función, la pendiente y la relación entre variables de la totalidad del grupo.

Las tareas propuestas en el cuestionario están divididas en dos bloques: un primer bloque de representación gráfica y un segundo bloque de interpretación. Las tareas tienen como objetivo hacer a los estudiantes representar y explicar situaciones cotidianas a través de conceptos matemáticos. (Ver Anexo II).

3.1.2. Bloque I: tareas de representación

Las dos primeras tareas piden a los alumnos que representen dos situaciones realistas. En la primera de ellas tienen que representar una función que consta de dos intervalos: uno en el que la función es constante y otro en el que es lineal creciente. En la segunda tarea tienen que saber representar una función a tramos a partir de un contexto de ahorro.

En la **Tarea 1**, se pide a los estudiantes representar una situación en la que se puede observar un componente fijo, más concretamente, la tarifa fija de un servicio de transporte (Ver Tarea 1, Anexo II). Los estudiantes deben ser capaces de dibujar ambos trozos.

El ejercicio plantea la existencia de una tarifa fija de 5 euros que cubre los primeros 3 kilómetros de recorrido, aumentando la cuantía por kilómetro en 1 euro si se supera esta distancia. Por tanto, la representación gráfica representa un coste fijo hasta los 3 kilómetros y un aumento lineal cuando se supera esa distancia, donde la pendiente la de la función es 1.

En la **Tarea 2**, se pide a los estudiantes que imaginen una situación en la que deben de ahorrar una cantidad de dinero que consideren necesaria para poder irse de viaje. Se les plantea un primer ingreso de 100 euros el primer día y un ahorro de 10 euros que se produce únicamente cada lunes (Ver Tarea 2, Anexo II).

Uno de los aspectos que se quieren analizar a través de esta tarea es la forma en la que los alumnos conciben la variable de tiempo. De esta forma vemos cómo los estudiantes conciben la relación entre el tiempo y el ahorro semanal y cómo la representan.

3.1.3. Bloque II: tareas de interpretación

Las tres siguientes tareas se centran en la forma de razonar de los estudiantes sobre su concepto de pendiente. Se pide a los alumnos que identifiquen el valor de la pendiente y que expliquen con sus propias palabras la información que recoge la representación gráfica.

La **Tarea 3** se centra en el concepto de pendiente y los cambios que esta puede sufrir. El ejercicio está planteado de tal forma que el estudiante debe imaginar una situación de repostaje de gasolina para un coche (Ver Tarea 3, Anexo II). El fin de esta tarea es sondear si el estudiante interpreta adecuadamente los cambios de la pendiente. Además, queremos averiguar si los estudiantes a corrigen el origen de la recta al cambiar el precio por litro.

En la situación inicial, el precio de la gasolina es de 1€/l. Esta condición se les da representada en una gráfica y dando como ejemplo un repostaje de 20 litros a 20 euros. A continuación, se les pregunta cómo cambia la situación si el precio de la gasolina aumenta hasta 2€/l. Los participantes deben de dibujar en esa misma gráfica en la que está representada la situación inicial, el cambio que sufre la función al aumentar el precio por litro.

En la **Tarea 4** se propone a los participantes que analicen y expliquen con sus propias palabras cuál es el valor de la pendiente de la función representada. En esta ocasión, presentamos una relación directa entre la cantidad de terreno disponible para cultivar, medido en hectáreas, y la cantidad total de producción de trigo, medida en toneladas, que se puede obtener con esas hectáreas (Ver Tarea 4, Anexo II).

En una figura (Ver Tarea 4, Anexo II) se les muestra la función $T(h)$ que representa la relación que existe entre las hectáreas y las toneladas de producción de trigo. En esta ocasión se trata de una función lineal.

En el primer apartado de la tarea se pide a los alumnos que determinen el valor de la pendiente de la función $T(h)$. Los participantes pueden obtenerla de varias maneras. En el segundo apartado se les requiere que expliquen con sus propias palabras la situación representada en la figura (Ver Tarea 4, Anexo II).

En la **Tarea 5** se propone una situación muy similar a la de la tarea anterior. En este ejercicio tenemos como objetivo averiguar cómo conciben la nueva situación, queremos averiguar si son capaces de ver que la productividad disminuye (Ver Tarea 5, Anexo II). La diferencia con la tarea anterior es que se ha introducido un modelo no lineal, reflejo de una situación más compleja que representa rendimientos decrecientes.

En el primer apartado de la tarea, se busca que los estudiantes expliquen con sus palabras el cambio que han percibido al pasar de una tarea a otra. Al tratarse de una forma curva, la pendiente ya no es constante a lo largo de todo el dominio, sino que va a cambiando conforme nos movemos sobre su dominio. En el segundo apartado, deben explicar con sus palabras el cambio en la productividad que viene representado en la figura a una persona que no tiene conocimientos sobre el tema (Ver Tarea 5, Anexo II).

3.2. RESULTADOS

En este apartado vamos a analizar los resultados que hemos obtenido tras llevar a cabo las dos entrevistas y el cuestionario. Estudiaremos las respuestas de los participantes y el proceso de razonamiento que siguen a lo largo de la realización de las tareas. En el caso de los resultados de las entrevistas, hemos revisado los videos correspondientes a cada una y hemos evaluado las respuestas de las participantes.

Dado que, en las entrevistas y en el cuestionario intervienen varios individuos, hemos dividido a los participantes en dos grupos distintos: los estudiantes Estudiante 1 y Estudiante 2 son los correspondientes a las entrevistas y los estudiantes E3 al E12 los correspondientes al cuestionario.

3.2.1 Bloque I: tareas de representación

Como hemos explicado previamente, la **Tarea 1** presentaba el reto de plasmar una función gráficamente. Los participantes tenían que ser capaces de distinguir entre la tarifa fija y la variable. En el momento de analizar las respuestas de las entrevistas y el cuestionario vemos que los participantes se encuentran con alguna dificultad a la hora de representar la función a tramos, especialmente la parte de la tarifa fija. En muchas ocasiones, una tarifa fija la interpretan como un coste que va aumentando poco a poco o incluso ignoran la posibilidad de recorrer menos de 3 kilómetros. Este tipo de fallos en la concepción del enunciado reflejan dificultades en el área de interpretación de las funciones a trozos.

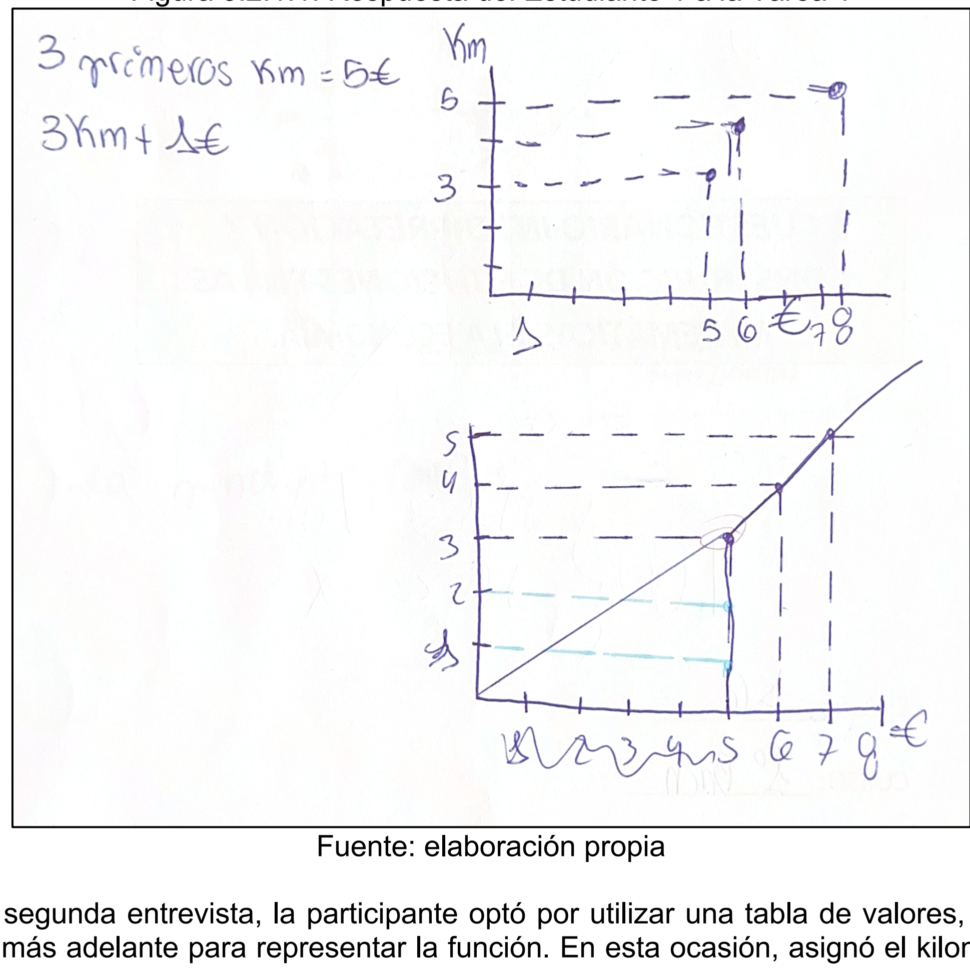
Esta tarea nos permite analizar los pasos que siguen los estudiantes a la hora de abordar la representación de una función gráficamente. Observamos cómo comprenden los conceptos y cómo deciden plasmarlos en el papel.

A lo largo de la primera entrevista, la participante comenzó escribiendo los datos de forma esquematizada. Tras terminar de escribirlos, empezó directamente con la representación gráfica sin la necesidad de contar con apoyo algebraico, dibujando los ejes. La participante, ubicó de forma no convencional los ejes, situando los kilómetros como variable dependiente y el dinero como variable independiente. Esto indica una falta de comprensión a la hora de evaluar la relación existente entre las variables.

En un principio, únicamente dio valores en los ejes cuando se trataba de 3 kilómetros y 5 euros, pero más tarde añadió como puntos de referencia hasta los 5 kilómetros y 8 euros. Después, procedió a dibujar puntos como si fueran coordenadas para a continuación, unirlos en una línea completamente recta que partía desde el punto de origen (0,0) hasta el (8,5). Mientras dibujaba y unía los puntos, cuestionó la forma en la que debía representar la tarifa fija. Esto demuestra que, a pesar de no haber sabido resolver bien el ejercicio en un primer instante, era consciente de que la relación km-precio no era la misma todo el tiempo, sino que cambiaba conforme aumentaba la distancia recorrida. Tras una reflexión guiada en la que se le proponía imaginarse cómo cambiaba el importe si aumentaba muy poco a poco la distancia recorrida, logró ajustar la representación correctamente.

En este proceso observamos como muestra pequeños indicios de pensamiento covariacional ya que se plantea el cambio que tiene lugar en el coste cuando varía la distancia recorrida.

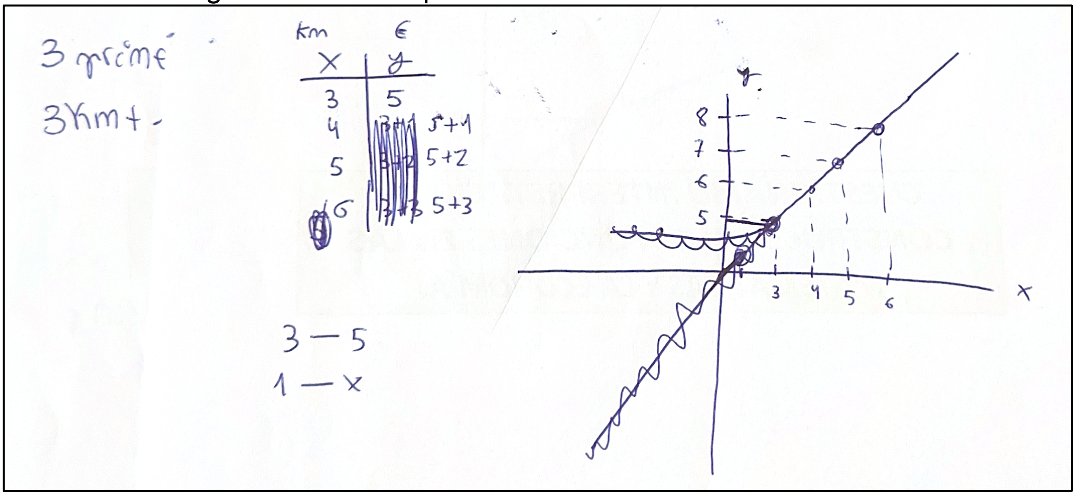
Figura 3.2.1.1. Respuesta del Estudiante 1 a la Tarea 1



Fuente: elaboración propia

En la segunda entrevista, la participante optó por utilizar una tabla de valores, que le sirvió más adelante para representar la función. En esta ocasión, asignó el kilometraje al eje de abscisas y el dinero al de ordenadas. Tras terminar la tabla de valores recurrió a una regla de tres que la llevó a unir los puntos en una línea recta como la otra participante había hecho en su entrevista. Tras una serie de preguntas que la hicieron situarse en una distancia recorrida intermedia de 2 kilómetros, comprendió que había un coste inicial fijo. A partir de ahí, corrigió su gráfica sin más intervenciones.

Figura 3.2.1.2 Respuesta del Estudiante 2 a la Tarea 1



Fuente: elaboración propia

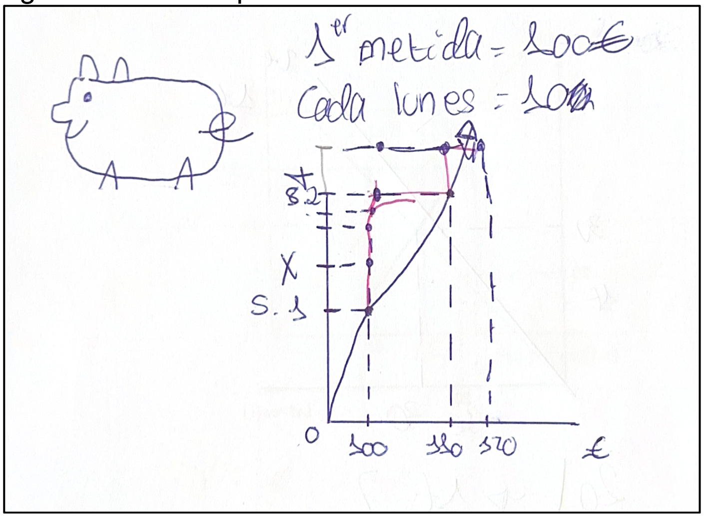
En el cuestionario realizado al resto de estudiantes, detectamos tres soluciones diferentes:

- La primera, de un total de nueve alumnos, tres de ellos comenzaron la representación de la función en el punto (3,5) dando a entender que el servicio de transporte solo comenzaba a operar a partir de los 3 kilómetros y obviando la parte de tarifa fija.
- En segundo patrón, tres de los nueve participantes invirtieron los ejes, colocando en el eje de abscisas el importe a pagar y el eje de ordenadas los kilómetros recorridos. Esto provocó representaciones dudosas ya que todos ellos representaron la tarifa fija y la variable correctamente, pero siguiendo los ejes equivocados.
- Tres de los estudiantes representaron correctamente la función, asignando a los ejes las variables de forma convencional y teniendo en cuenta la función a tramos.

En general, los resultados reflejan la dificultad que abordan los participantes a la hora de coordinar los cambios en las variables habiendo una parte de la función que es constante. Hablando en términos de pensamiento covariacional, nos indica que es un reto para ellos representar el comportamiento a tramos de una función pero que tienen una concepción más o menos convencional de la relación existente entre las variables.

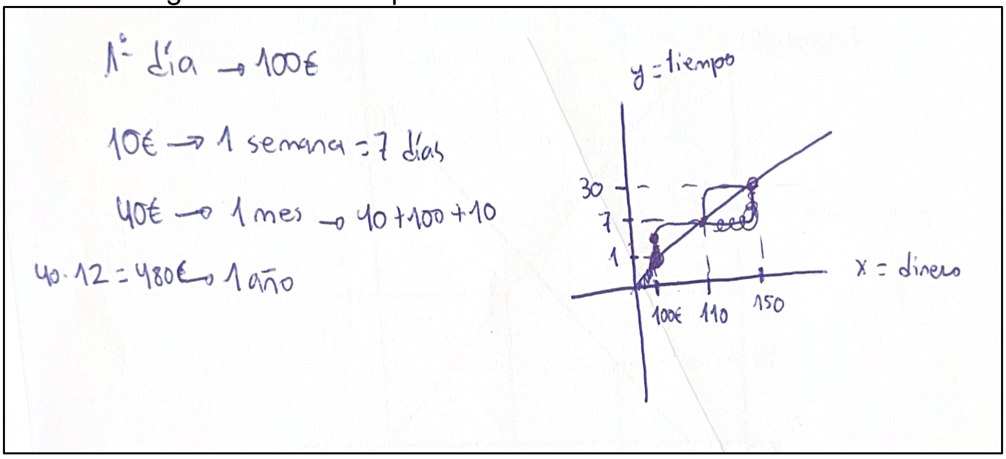
En la **Tarea 2**, los estudiantes debían representar la relación entre el ahorro y el tiempo. En ambas entrevistas, las participantes optaron por escribir de forma esquematizada los datos para después proceder a la representación gráfica. En esta ocasión, ambas participantes invirtieron los ejes, concibiendo el tiempo como variable dependiente. En cuanto a la elección temporal, la primera participante decidió utilizar semanas como medida temporal mientras que la segunda optó por utilizar los días. A continuación, al igual que en la tarea anterior, optaron por dibujar puntos y después unirlos dando como resultado una línea recta que partía desde el punto de origen (0,0). Esto implica un aumento continuo del ahorro cuando en realidad a lo largo de semana no se produce ninguno.

Figura 3.2.1.3 Respuesta del Estudiante 1 a la Tarea 2



Fuente: elaboración propia

Figura 3.2.1.4. Respuesta del Estudiante 2 a la Tarea 2



Fuente: elaboración propia

Con el objetivo de hacerlas reflexionar sobre su representación gráfica, preguntamos sobre la cantidad de dinero ahorrado que tendrían en días específicos de la semana, como por ejemplo un martes o un sábado. Ante esto, las participantes respondieron con la cantidad correcta de dinero, lo que demuestra que comprendían la situación en la que se encontraba su ahorro pero que no eran capaces de plasmarlo en la gráfica. A través de este método, imaginando que se situaban en los diferentes días de la semana y dibujando puntos muy juntos unos de otros, ambas fueron capaces de finalmente representar los datos del enunciado.

Por otro lado, en el cuestionario que se entregó a toda la clase:

- Tres de los nueve participantes invirtieron los ejes, colocando el dinero como variable independiente. A pesar de ello, reconocieron que el ahorro aumentaba una vez por semana, dando a entrever que comprendían el funcionamiento de la función. Uno de ellos, se ayudó de una línea recta auxiliar para representar la función de forma correcta lo que nos indica un esfuerzo por estructurar su pensamiento de forma visual.
- El resto de los participantes eligieron de forma convencional la situación de las variables en los ejes, sin embargo, solo tres de ellos representaron la función de forma escalonada desde un principio. Los tres restantes dibujaron una función

completamente lineal a través de puntos. Solamente uno de los participantes optó por realizar una tabla de valores para aclarar sus ideas, lo que nos sugiere que necesitaba un apoyo más visual para ver los cambios discretos en las variables.

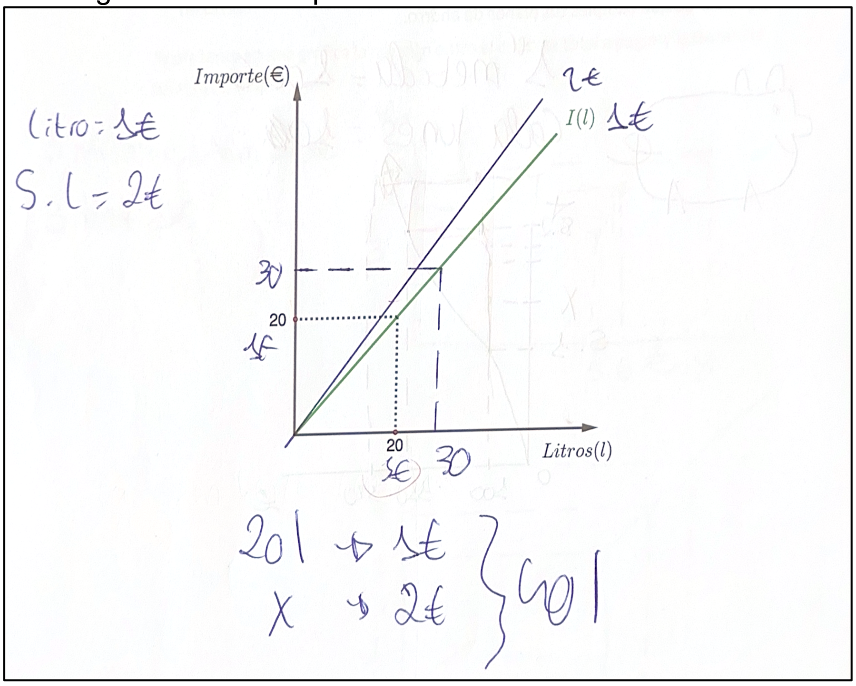
En conclusión, esta tarea nos muestra que los participantes se enfrentan a varios retos cuando se trata de representar un crecimiento discreto en una función. Aunque muchos de los participantes no tuvieron ninguna dificultad en la resolución, hay evidencias de un desarrollo parcial del razonamiento covariacional.

3.2.2 Bloque II: tareas de interpretación

En la **Tarea 3**, los participantes se encontraban con una gráfica que representa la relación entre dos variables (litros consumidos e importe a pagar) en la que la pendiente de la función equivale a la unidad.

A lo largo de las entrevistas, ambas participantes identificaron correctamente el comportamiento de la función y no hicieron ningún cambio al origen de la función. En la primera entrevista, la participante optó por seleccionar valores concretos y calcular la pendiente matemáticamente. Tras obtener el valor numérico de la pendiente de la situación inicial, procedió a dibujar correctamente el aumento en el precio por litro. Sin embargo, a la hora de representarlo en la gráfica, no situó correctamente los valores que había hallado previamente (los 40 litros no corresponden con lo dibujado en la gráfica).

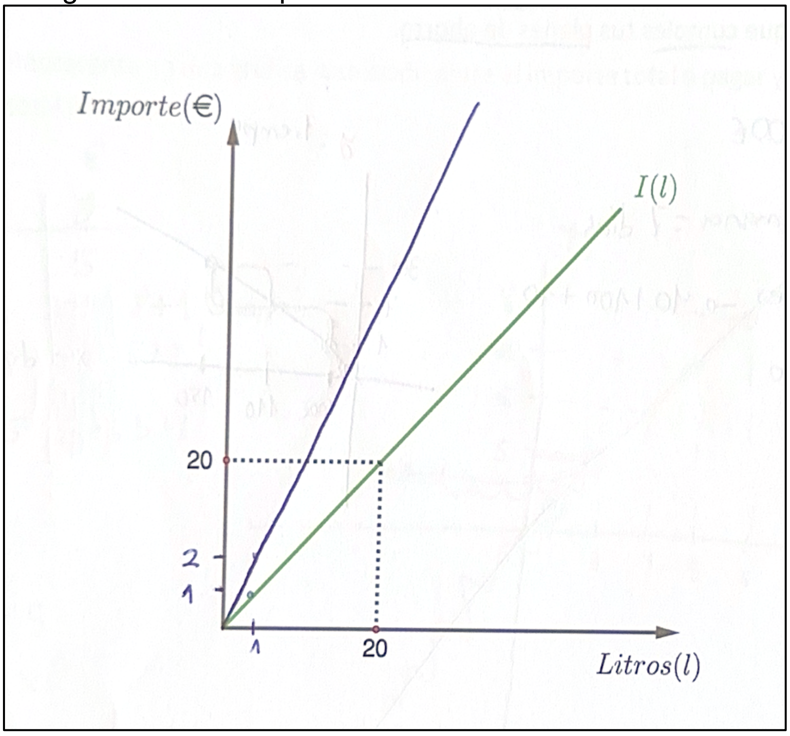
Figura 3.2.2.1 Respuesta del Estudiante 1 a la Tarea 3



Fuente: elaboración propia

En la segunda entrevista, la participante recurrió a una interpretación menos matemática y más visual. Resaltó los datos del enunciado y detectó que la pendiente pasaba a ser “el doble de la anterior” justificando su razonamiento de forma hablada. A pesar de no haber utilizado instrumentos matemáticos, representó correctamente el cambio relativo en la figura.

Figura 3.2.2.2 Respuesta del Estudiante 2 a la Tarea 3



Fuente: elaboración propia

En el cuestionario aplicado en el aula, la totalidad de los estudiantes lograron representar de forma correcta el cambio en el valor de la pendiente. La mayoría de ellos hizo uso de la siguiente ecuación matemática para lograr plasmar la nueva situación:

$$y = mx$$

Además, en el apartado b) de esta tarea se les instó a explicar el significado del cambio que acababan de representar. La respuesta obtenida más común fue que la función "aumentaba más rápido" o que "subía el doble". Esto nos muestra que los participantes tenían una idea intuitiva de la relación existente entre las variables. Si bien no todos utilizaron el término de la pendiente de la recta, está claro que entendían el cambio producido y cómo afectaba a las variables.

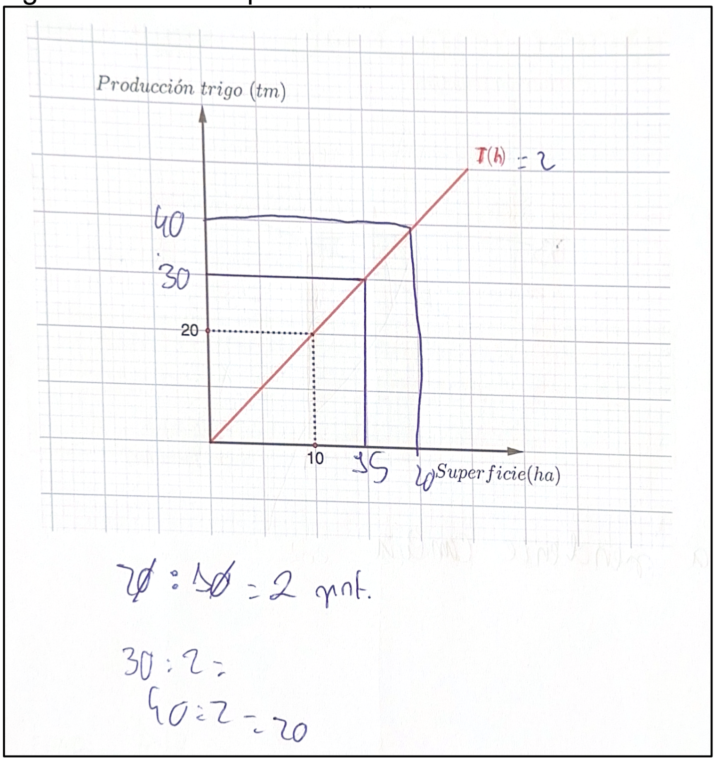
De todas las tareas del cuestionario, esta tarea fue la más sencilla para ellos. Sus respuestas fueron claras y concisas mostrando que entienden el crecimiento lineal y las relaciones entre variables de la tarea. Además, es interesante observar cómo hay formas de razonamiento diferentes, algunas más matemáticas y otras más visuales, que llevan a los participantes a obtener respuestas muy similares. De todos modos, ninguno de los estudiantes hizo uso de lenguaje formal como por ejemplo la tasa de variación, lo que sugiere un enfoque con términos menos formales y económicos.

La **Tarea 4** se pedía a los participantes hallar el valor de la pendiente de una función a partir de la representación gráfica.

En el transcurso de las entrevistas, las dos participantes siguieron estrategias distintas. En la primera entrevista, la participante añadió varios valores del dominio como referencia. Más concretamente, los valores del dominio que escogió representar fueron

15 y 20 en el eje *x* y 30 y 40 en el eje *y*. De esta forma, logró hallar la pendiente de forma totalmente numérica. Esta forma de conseguir nuevas referencias evidencia indicios de pensamiento covariacional en lo que a coordinar cambios se refiere.

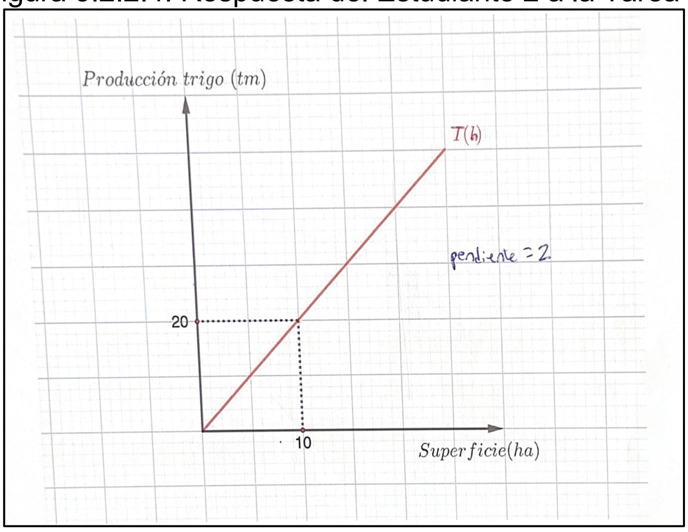
Figura 3.2.2.3. Respuesta del Estudiante 1 a la Tarea 4



Fuente: elaboración propia

En la segunda entrevista, la participante identificó de primera mano que la pendiente era “el doble” indicando que tomaba como referencia la representación de la tarea anterior. Si bien su respuesta fue correcta, tuvo dificultades para justificar cómo había llegado a esa conclusión en términos cuantitativos.

Figura 3.2.2.4. Respuesta del Estudiante 2 a la Tarea 4



Fuente: elaboración propia

Por otro lado, en el aula:

- Ocho de los nueve participantes hallaron correctamente el valor de la pendiente.
- El participante restante no halló el valor a la pendiente y comenzó directamente con la explicación sobre la información que recogía la gráfica.

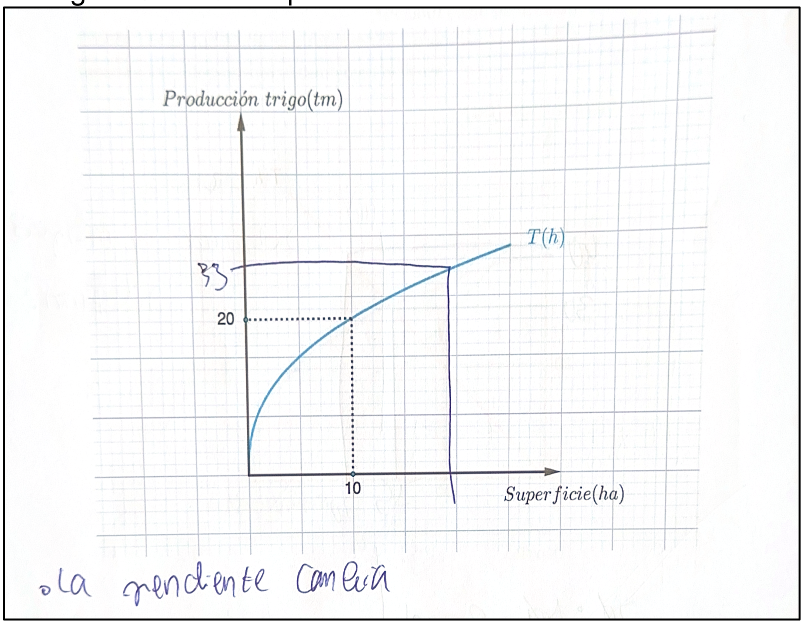
En este apartado, la mayoría de los participantes explicaba esta situación expresando que "a más hectáreas, más trigo se produce" evitando el término de tasa de variación. Este hecho es bastante relevante ya que evidencia que presentan muy poca conexión entre el aspecto matemático y la comprensión gráfica, característico de razonamiento covariacional más avanzado.

En resumen, el desuso del concepto de tasa de variación nos indica la necesidad de profundizar en la enseñanza a través de métodos que favorezcan el pensamiento covariacional y que hagan que relacionen conceptos matemáticos con los enseñados en el aula de Economía. De este modo, los alumnos tendrían la capacidad de conectar conceptos entre expresiones más matemáticas y situaciones cotidianas.

En esta la **Tarea 5** los participantes debían interpretar y explicar la nueva situación representada en la gráfica. En contraste con las tareas anteriores, en este se presentaba una función no lineal, la cual requiere un razonamiento covariacional más avanzado.

En el apartado a), ambas participantes supieron identificar el cambio en la pendiente y además, se ayudaron de la tarea anterior. La primera participante explicó que "al principio de la gráfica, la función sube más y luego va más despacio", interpretando la inclinación de la función correctamente.

Figura 3.2.2.5 Respuesta del Estudiante 1 a la Tarea 5



Fuente: elaboración propia

La segunda de las participantes lo expresó en términos de crecimiento. Indicó que "al inicio el crecimiento va más rápido". No obstante, aunque ninguna de las dos hizo uso del término de tasa de variación, demostraron comprender el cambio que se producía en la relación entre las variables. Supieron determinar que el cambio ya no es constante como consecuencia de la forma curva de la función.

En el cuestionario, las respuestas más comunes a la pregunta se dividieron en dos grupos:

- Un primer grupo formado por ocho alumnos que explicaron que la pendiente variaba “a lo largo de la curva”.
- Un segundo grupo formado por el alumno restante que no percibió ninguna diferencia.

En el apartado b), las entrevistadas explicaron que “aunque use más tierra, no quiere decir que vaya a producir lo mismo, produzco menos”. Aunque no hicieron uso de vocabulario matemático, supieron identificar los rendimientos decrecientes de la tierra.

En el cuestionario general:

- Ocho de los nueve participantes hicieron uso del término de la pendiente para explicar que “su valor no es constante a lo largo de la curva”. Algunos de ellos incluso utilizaron términos como “crecimiento desacelerado” y expresiones como “el aumento progresivo cada vez es menor” para explicar la situación representada en la gráfica.
- Solo un participante describió la pendiente de la función como si fuera constante, igual que en el caso de la tarea anterior. Explicó que “el crecimiento es uniforme”.

Durante la resolución del ejercicio, los participantes hicieron uso de ayudas visuales, es decir, hacían sus propias representaciones y esquemas para ayudarse a visualizar la situación. En estos casos vemos indicios de comprensión sobre la relación entre variables. Comprenden los cambios que afectan a estas variables, algo propio de un nivel de pensamiento covariacional más avanzado.

En conclusión, a partir de esta tarea hemos podido identificar a aquellos participantes que ya han comenzado a desarrollar un pensamiento covariacional más avanzado y los pasos que siguen en su razonamiento. Al tratarse de una tarea más compleja a causa del uso de una función no lineal, obtenemos un indicador sobre la capacidad de entender gráficas no lineales de los participantes.

4. LAS CONSTRUCCIONES DINÁMIMCAS COMO RECURSO PARA FACILITAR EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL: UNA PROPUESTA

A partir de la creación del cuestionario y de las respuestas obtenidas tanto en las entrevistas como en el cuestionario, se ha diseñado una propuesta didáctica que trata de mejorar la comprensión de la representación gráfica y la interpretación sobre las funciones y su aplicación. Esta propuesta toma como ejemplo las cinco tareas del cuestionario anterior, aunque es extrapolable a más ejercicios. Esta vez los estudiantes van a tener la oportunidad de interactuar con las diferentes variables que se plantean en los ejercicios. La propuesta propone utilizar como herramienta GeoGebra, un software que sirve para utilizar herramientas matemáticas de forma gráfica e interactiva. Es gratuito, relativamente fácil de aprender y muy intuitivo. Con su uso vamos a conseguir que los estudiantes tengan la capacidad de modificar a su gusto los parámetros de las funciones con el fin de que mejoren la comprensión sobre ellas. Previamente a realizar las tareas con GeoGebra, se explicará a los alumnos cómo utilizar el programa para poder introducir funciones, deslizadores, etc.

4.1. TAREA 1

En el primer ejercicio se plantea la misma situación que en la tarea 1. Dado que la mayoría de los estudiantes no logró dibujar correctamente la tarifa fija en su primer intento, mediante el uso de GeoGebra serán capaces de modificar el trayecto recorrido, especialmente en una distancia de 0 a 3 kilómetros. Esto les dará la posibilidad de observar el importe que resultaría de recorrer esa distancia. (Tarea 1 en GeoGebra, ver Tarea 1 Anexo III).

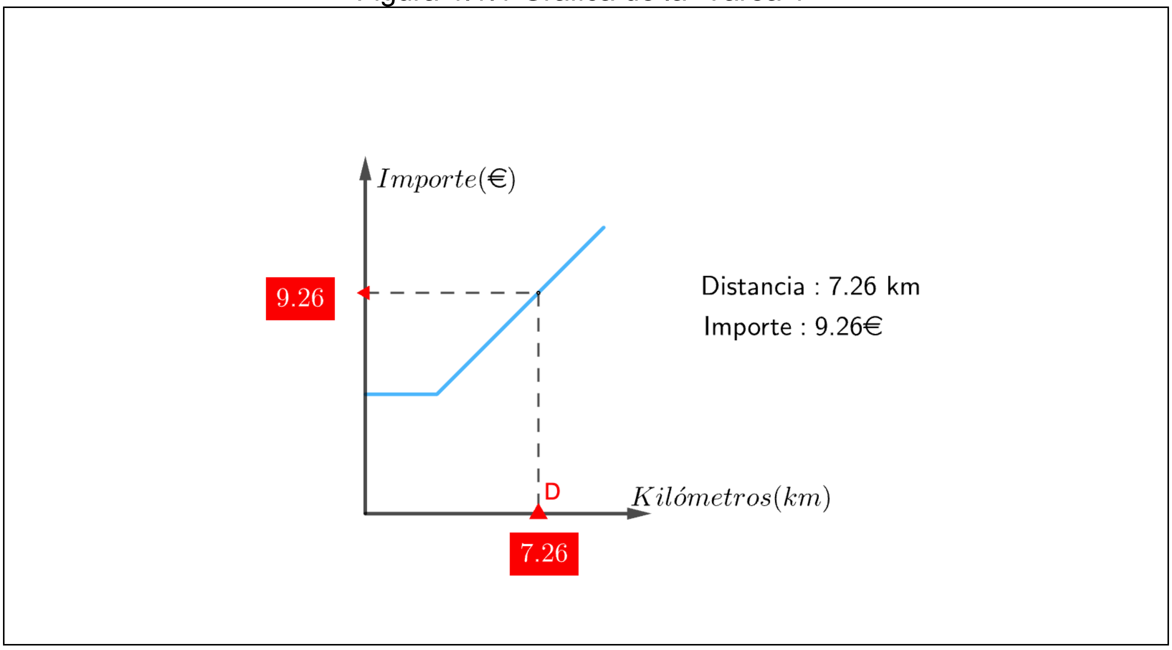
En este ejercicio hemos usado la siguiente función para representar la situación del enunciado:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 5 + x - 3 & si \quad 3 < x \leq 10 \end{cases}$$ donde x es la distancia recorrida.

Los alumnos pueden cambiar el valor de la variable independiente arrastrando el punto D ,que representa los kilómetros recorridos, y ver cómo cambia al mismo tiempo el valor de la variable dependiente. Esto facilita la adquisición de la idea de covariación

Ver cómo va cambiando el importe a pagar con la distancia recorrida, permite ver la transición de tarifa fija a tarifa variable. Asimismo, el alumno puede apreciar el cambio en el valor de la pendiente y conectarlo con la situación representada en la gráfica.

Figura 4.1.1 Gráfica de la “Tarea 1”



Fuente: elaboración propia

4.2. TAREA 2

En esta ocasión, la función no es continua, sino que presenta saltos cada vez que comienza una semana. En ese momento, el ahorro aumenta repentinamente. Una función a tramos puede ser difícil de comprender, es por ello por lo que el uso de GeoGebra permite visualizar de forma interactiva las discontinuidades de una función a tramos.

Esta propuesta usando GeoGebra trata de construir la función permitiendo a los alumnos interactuar con el número de días que estarán ahorrando. (Tarea 2 en GeoGebra, ver Tarea 2 Anexo III)).

En esta ocasión hemos tomado un umbral de tiempo de 42 días por lo que la función usada en el programa es:

$$f(n) = \begin{cases} 100 & si \quad 0 \leq n \leq 7 \\ 110 & si \quad 7 \leq n \leq 14 \\ 120 & si \quad 14 \leq n \leq 21 \\ 130 & si \quad 21 \leq n \leq 28 \\ 140 & si \quad 28 \leq n \leq 35 \\ 150 & si \quad 35 \leq n \leq 42 \end{cases} \text{ donde } n \text{ son los días}$$

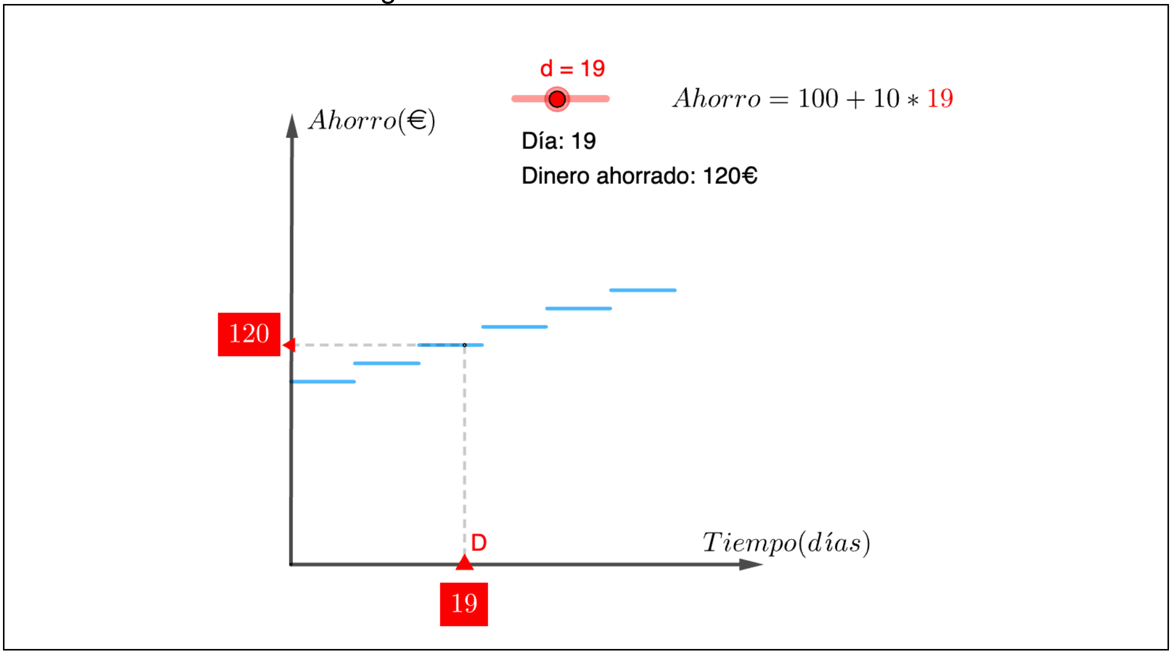
Y donde el punto D también se puede desplazar a lo largo del dominio de la función, cambiando el día en el que nos situamos.

Los estudiantes podrían representar esta situación de forma algebraica con el fin de ayudarse a la hora de la representación gráfica. La función que deben usar es:

$$A(d) = 100 + 10d$$

Donde:
- $A(d)$ es el ahorro total,
- d es el tiempo transcurrido contado en días.

Figura 4.2.1 Gráfica de la “Tarea 2”



Fuente: elaboración propia

A través del uso de los deslizadores de GeoGebra los estudiantes visualizarán los saltos en la función de una manera diferente. Esto favorece el identificar los cambios en la relación entre las variables dependientes e independientes. Podrán ver cómo, a lo largo de la semana, el dinero permanece constante y que solamente los lunes aumenta su ahorro. Al igual que en la construcción de la Tarea 1, el alumno también puede desplazar el punto D para favorecer la distinción entre variable dependiente (la cantidad de dinero que hay en la hucha) y la variable independiente (el tiempo).

4.3. TAREA 3

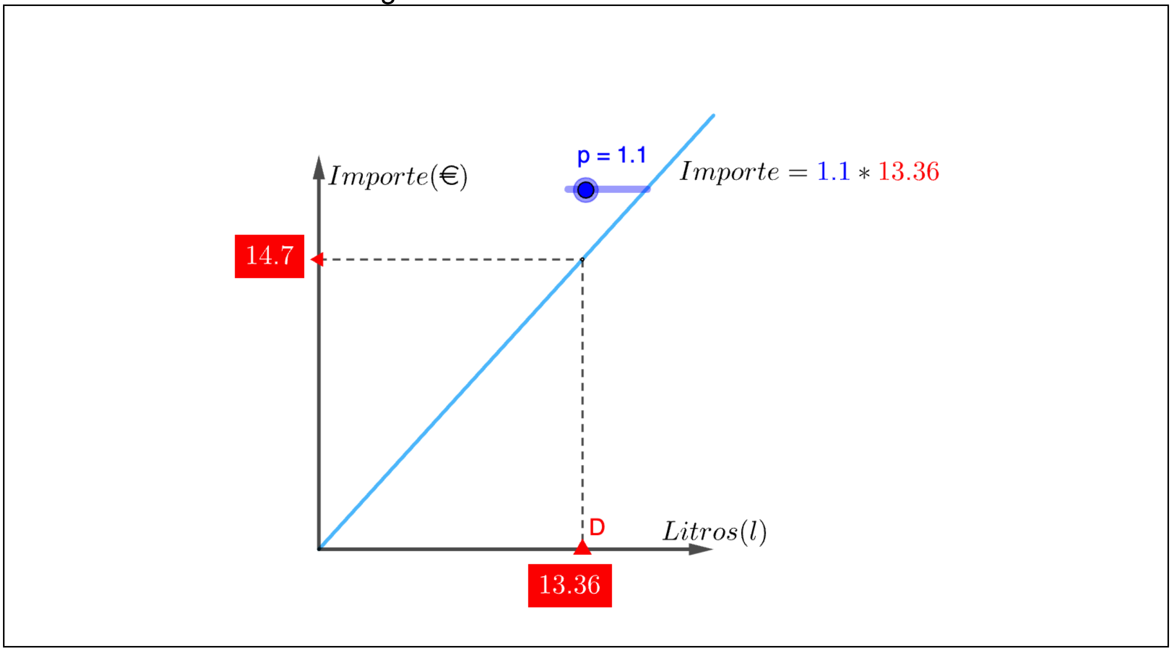
En esta tarea queremos conseguir que el alumnado entienda y aplique correctamente el concepto de pendiente. Mediante GeoGebra podemos enfocar la pendiente como si fuera una razón de cambio lo que hace que lo estudiantes puedan representar y analizar las tasas de variación. Para ello, podrán interactuar con los parámetros de la función (el valor de la pendiente de la función, que en este caso es el precio "p"). (Tarea 3 en GeoGebra, ver Tarea 3 Anexo III)). Al mover p, cambia toda la pendiente, de tal manera que pueden ver una función para cada posible p. En cambio, al mover D, pueden ver cómo responder la variable dependiente ante un cambio en la variable independiente.

La función utilizada en el programa es:

$$f(x) = px \; si \; 0 \leq x \leq 20 \text{ donde,}$$

- p es el valor de la pendiente,
- x es el número total de litros.

Figura 4.3.1 Gráfica de la "Tarea 3"



Fuente: elaboración propia

Al igual que en el ejercicio anterior, el análisis algebraico es complementario al análisis visual, permitiendo hallar la pendiente original y la nueva en el caso de no comprender bien la situación con la lectura del enunciado. Para ello, las funciones que podrían utilizar son:

$$I(l) = \boldsymbol{pl}$$

Donde $I(l)$ es el importe a pagar y l es el número de litros.

Desde este punto de vista algebraico, los estudiantes pueden ver desde un enfoque más matemático el valor de la pendiente. De esta forma, los participantes pueden valorar el cambio y analizar cómo afecta a la representación gráfica.

A través del uso de GeoGebra podrán ver cómo una variación en el precio afecta a la inclinación de la recta y a la relación entre el importe y los litros.

4.4. TAREA 4

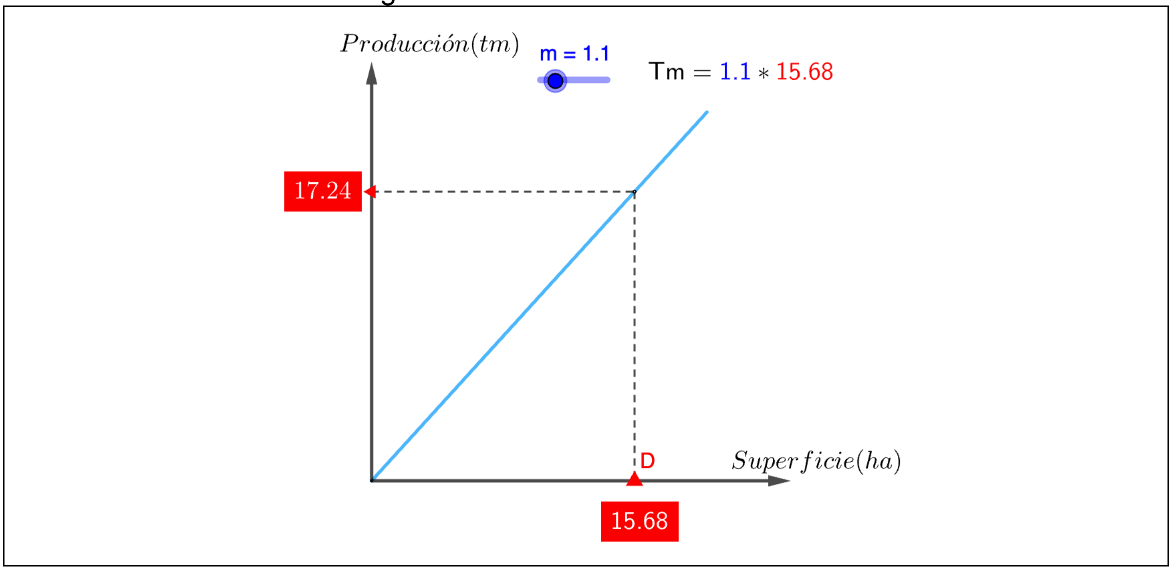
Centrándonos más en la interpretación del valor numérico de la pendiente, en esta cuarta tarea proponemos el uso interactivo de GeoGebra con el fin de que los estudiantes tengan la oportunidad de entender el significado económico del valor de la pendiente. En este caso los estudiantes podrán modificar los parámetros de la función, como el valor de la pendiente "m" y como el número de hectáreas que van a usar con el punto D. (Tarea 4 en GeoGebra, ver Tarea 4 Anexo III)).

La función de producción usada en el programa es:

$$f(h) = mh \quad si \quad 0 \leq h \leq 20 \text{ donde,}$$

- m es el valor de la pendiente,
- h es el número de hectáreas de cultivo.

Figura 4.4.1 Gráfica de la "Tarea 4"



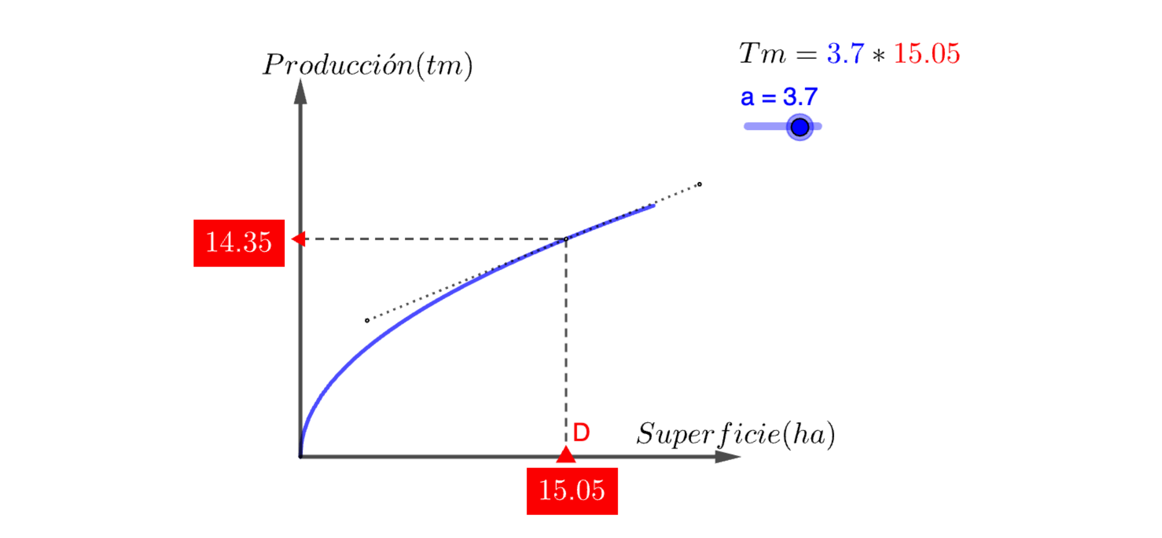
Fuente: elaboración propia

Esta interacción permite a alumnos asimilar el concepto de pendiente y el efecto que conlleva que haya variaciones en el parámetro.

4.5. TAREA 5

Por último, en la quinta tarea trabajaremos con una función no lineal. Esto implica que la pendiente no es constante a lo largo del dominio de la función. El uso de GeoGebra permite que estudiantes sean capaces de manipular los parámetros de la función como el valor de la pendiente y el número de hectáreas disponible. Al mover D, cambia el número de hectáreas disponibles. De esta forma, los estudiantes pueden ir viendo cómo cambia el valor de la pendiente. Además, cuando se trata de cambios pequeñas, la recta tangente es una buena aproximación a la curva. (Tarea 5 en GeoGebra, ver Tarea 5 Anexo III)).

Figura 4.5.1 Gráfica de la "Tarea 5"



Fuente: elaboración propia

De esta manera los alumnos podrán ver cómo se comporta una función no lineal y el crecimiento no constante de forma más visual. Esto hará que sea más fácil para ellos entender el significado de la pendiente y la relación entre las variables cuando el crecimiento no es constante.

5. CONCLUSIONES

La información recogida a través de las entrevistas y cuestionarios ha puesto de manifiesto que los estudiantes tienen grandes dificultades para interpretar la representación gráfica de relaciones funcionales sencillas. En particular, la interpretación de la pendiente en términos covariacionales no les resulta sencilla ni siquiera en relaciones lineales en contextos económicos familiares. Esto les sitúa en una mala posición para extender esa interpretación al concepto de derivada, fundamental en estudios de economía.

Los resultados muestran que, aunque los estudiantes reconocen nociones básicas sobre función y su representación gráfica, estos conceptos suelen estar incompletos. En las entrevistas se observa que los alumnos se apoyan en procedimientos mecánicos, como tablas de valores, sin razonar profundamente. También presentan dificultades para identificar y representar funciones a trazos, algo esencial para interpretar situaciones reales. Estas dificultades aumentan cuando deben representar relaciones a partir de descripciones verbales, actividad poco habitual para ellos, ya que suelen trabajar a partir de representaciones algebraicas. Su razonamiento refleja una concepción de función basada en correspondencias discretas, uniendo puntos sin reflexionar sobre el significado del cambio continuo. Otro concepto problemático es la pendiente: muchos conocen la fórmula, pero no su significado como tasa de variación ni su vinculación con las variables. Por tanto, los resultados sugieren que los estudiantes se beneficiarían de propuestas didácticas que fomenten un razonamiento menos mecánico y favorezcan el desarrollo del pensamiento covariacional.

Las construcciones dinámicas, como las que ofrece GeoGebra, facilitan esta transición, ayudando a coordinar representaciones gráficas y algebraicas, concebir el cambio continuo y asociar cambios en variables dependientes e independientes. La posibilidad de manipular estas construcciones favorece el aprendizaje. El uso de GeoGebra permite a los estudiantes interactuar con funciones, pendiente y variables, fomentando una comprensión más profunda mediante la visualización inmediata de cambios. Esta propuesta contribuye a conectar conceptos matemáticos y económicos, potenciando la aplicación de conocimientos matemáticos en contextos económicos reales. Además, GeoGebra destaca por su gratuidad, facilidad de uso y amplio uso en la enseñanza de matemáticas.

En conclusión, implementar GeoGebra para trabajar con construcciones dinámicas favorece el desarrollo del pensamiento covariacional, mejora la comprensión de funciones y relaciones variables, y promueve una visión integrada de matemáticas y economía, esencial para entender contextos reales.

Este TFG nació de mi interés por la enseñanza, especialmente de la economía en la etapa de la educación secundaria. Me ha permitido acercarme a la investigación en didáctica de las matemáticas y de la economía, analizar el razonamiento estudiantil y explorar GeoGebra como recurso docente, enriqueciendo mi visión sobre la labor del profesorado de economía, algo que espero aprovechar en mi futuro profesional.

6. REFERENCIAS

Altindis, Nigar, Bowe, Kathleen A., Couch, Brock, Bauer, Christopher F., & Aikens, Melissa L. (2024). Exploring the role of disciplinary knowledge in students' covariational reasoning during graphical interpretation. *International Journal of STEM Education*, *11*(1). https://doi.org/10.1186/s40594-024-00492-5

Amy Ellis, Zekiye Özgür, & Muhammen Faith Dogan. (2022). *ConceptualAnalysisEarlyFunction_Ellis_2022*.

Barnett, Susan M., & Ceci, Stephen J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, *128*(4), 612–637. https://doi.org/10.1037/0033-2909.128.4.612

Carlson, Marilyn, Jacobs, Sally, Coe, Edward, Larsen, Sean, & Hsu, Eric. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study the authors of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Standards documents called for students to be able to analyze patterns of change in various. In *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 33, Issue 5). Vinner & Dreyfus. www.nctm.org.

Castillo-Garsow, Carlos. (2012). *Running head: Continuous quantitative reasoning 1 Continuous Quantitative Reasoning*.

Colera Jiménez, J., García Pérez, R., Colera Cañas, R., Oliveira González, M. J., & Aicardo, A. (2022). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* (1st ed.). Anaya Educación.

Córdoba Vázquez, María del Carmen, & Rodríguez Gallego, Eva María. (2020). *Economía 1º Bachillerato* (1st ed.). TuLibrodeFP, S.L.U.

Fernández, Ceneida, De Bock, Dirk, Verschaffel, Lieven, & Van Dooren, Wim. (2014). Do students confuse dimensionality and "directionality"? *Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 166–176. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.07.001

Johnson, Heather Lynn. (2015). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 64–90. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946

Jonsson, Bert, Norqvist, Mathias, Liljekvist, Yvonne, & Lithner, Johan. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 20–32. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.08.003

Lesh, Richard A. .., & Kelly, Anthony E. .. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Routledge.

Narváez Villena, Mª Victoria, Rodríguez Gallego, Eduardo José, Rueda Narváez, Francisco, & Toledo Jiménez, Juan. (2022). *Economía 1* (1st ed.). Anaya Educación.

Panorkou, Nicole, & Germia, Erell Feb. (2021). Integrating math and science content through covariational reasoning: the case of gravity. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(4), 318–343. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1814977

Ruiz Estrada, Mario Arturo. (2017). An alternative graphical modeling for economics: Econographicology. *Quality and Quantity*, *51*(5), 2115–2139. https://doi.org/10.1007/s11135-015-0280-3

Sierpinska, Anna. (2014). *On understanding the notion of function*. https://www.researchgate.net/publication/238287243

Smith, Carmen Petrick, King, Barbara, & Hoyte, Jennifer. (2014). Learning angles through movement: Critical actions for developing understanding in an embodied activity. *Journal of Mathematical Behavior*, *36*, 95–108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.001

Tall, David, & Vinner, Shlomo. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Von Glasersfeld, Ernst. (1995). *Radical Constructivism A Way of Knowing and Learning*. https://archive.org/details/radicalconstructO000glas

Von Glasersfeld, Ernst. (2002). *Radical constructivism in mathematics education*.

ANEXO I: DOCUMENTACIÓN COMITÉ DE ÉTICA

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	**COMITÉ DE ÉTICA DE PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN** **Solicitud de visto bueno para TFM**

Estudiante:	LUCÍA VELASCO GUTIÉRREZ
Tutor:	PEDRO ÁLVAREZ CAUSELO
Título tentativo del proyecto: ☒ TFG ☐ TFM	FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ECONOMÍA: LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO EDUCATIVO
Nombre del centro/facultad y del Grado o Máster:	FACULTAD DE CCEE GRADO EN ECONOMÍA

Descripción de las actividades a realizar para las que se solicita el VB del CEPI:

El trabajo planteado supone (marcar cuantas casillas proceda):	**Los abajo firmantes se comprometen a: (obligatorio marcar todas las casillas de una fila si alguna de las casillas de la columna izquierda correspondiente está marcada)**
x Obtención de datos personales y/o de centros educativos o empresas (mediante observaciones, cuestionarios, entrevistas u otras técnicas e instrumentos de recogida de datos). ☐ Intervenciones socio-educativas. ☐ Nada de lo anterior, pero en la misma categoría en cuanto a requisitos de anonimato, confidencialidad y consentimiento (especificar):	x **Garantizar el anonimato de los participantes** (nombres o información capaz de identificar directamente a las personas, centros educativos o empresas donde se recaben estos datos, salvo autorización expresa en el consentimiento informado). x **Asegurar la confidencialidad de los datos** (de forma que los únicos datos que se hagan públicos sean los que se especifican en el consentimiento informado que aceptarán los participantes o sus tutores). x **Conocer y cumplir la legislación** relativa a protección de datos personales (RGPD y LOPDGDD), la Ley Orgánica 1/1996 de Protección Jurídica del Menor; la Ley Orgánica 8/2015 de modificación del sistema de protección a la infancia y a la adolescencia; y la Ley 26/2015 de modificación del sistema de protección a la infancia y a la adolescencia. x **Recabar el consentimiento informado** de los participantes (en el caso de menores o personas sometidas a curatela, de sus familias o tutores; en el caso de centros educativos, asimismo del director/a). Esto se hará mediante (**marcar una de las dos siguientes casillas**): x El modelo de consentimiento del CEPI. ☐ Otro documento (obligatorio adjuntar).
☐ Otros (especificar):	☐ Cumplir los siguientes requisitos (especificar):

CONSENTIMIENTO INFORMADO DEL PARTICIPANTE PARA EL ESTUDIO

Título del Proyecto: *FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ECONOMÍA: LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO EDUCATIVO*

Investigador Principal: LUCÍA VELASCO GUTIÉRREZ

Yo, ____

(Nombre y apellidos en MAYÚSCULAS)

Declaro que:

- He leído la hoja de información que me han facilitado.
- He podido formular las preguntas que he considerado necesarias acerca del estudio.
- He recibido información adecuada y suficiente por el investigador abajo indicado sobre:
    - Los objetivos del estudio y sus procedimientos.
    - Los beneficios e inconvenientes del proceso.
    - Que mi participación es voluntaria y altruista
    - El procedimiento y la finalidad con que se utilizarán mis datos personales y las garantías de cumplimiento de la legalidad vigente.
    - Que en cualquier momento puedo revocar mi consentimiento y solicitar la eliminación de mis datos personales.
    - Que tengo derecho de acceso y rectificación a mis datos personales.

CONSIENTO EN LA PARTICIPACIÓN EN EL PRESENTE ESTUDIO

SÍ **NO**

(marcar lo que corresponda)

Para dejar constancia de todo ello, firmo a continuación:

Fecha ……………………

Firma……………………………

Nombre investigador: Lucía Velasco Gutiérrez

Firma del investigador…..…………………………

APARTADO PARA LA REVOCACIÓN DEL CONSENTIMIENTO

Yo, ……………………………………………………………………………………………

revoco el consentimiento de participación en el proceso, arriba firmado.

Firma y Fecha de la revocación

AUTORIZACIÓN FAMILIAR TRATAMIENTO DE DATOS PERSONALES DE UN MENOR

DECLARACIÓN DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

D./Dña.…………………………………………………. (Padre, madre, Tutor/a legal) y

D/ Dña.…………………………………………………. (Padre, madre, Tutor/a legal) mayor de edad, con domicilio en ………………………………………………y con DNI nº………………………… y DNI nº ……………………

Manifiesto que he leído y entendido la hoja de información que se me ha entregado, y que he recibido información suficiente sobre el mismo.

Comprendo que la participación es **totalmente voluntaria**, siendo posible la retirada del estudio en cualquier momento sin tener que dar explicaciones.

Presto libremente mi conformidad para la participación de mi hijo/a en el Proyecto de Investigación titulado "*FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ECONOMÍA: LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO EDUCATIVO.*"

He sido también informado/a de que **los datos personales** tratados serán protegidos e incluidos en un fichero que deberá estar sometido a y con las garantías del Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), que entró en vigor el 25 de mayo de 2018 que supone la derogación de Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre referidos a la protección de las personas físicas en lo que respecta al tratamiento de datos personales

Tomando ello en consideración, **OTORGO mi CONSENTIMIENTO** para cubrir los objetivos especificados en el proyecto.

Santander, a de de 2025

TÍTULO DEL ESTUDIO: *FUNCIONES, GRÁFICAS Y RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA ECONOMÍA: LAS CONSTRUCCIONES DINÁMICAS COMO RECURSO EDUCATIVO*
INVESTIGADOR: Lucía Velasco Gutiérrez
DIRECTOR: Pedro Álvarez Causelo
CONTACTO: lucia.velasco@alumnos.unican.es
CENTRO de trabajo del investigador:

1. INTRODUCCIÓN

Nos dirigimos a Ud. para informarle sobre **un estudio de investigación**, que llevaremos a cabo en el marco del **Trabajo Fin de Grado** correspondiente al Grado en Economía de la Universidad de Cantabria.

La intención es tan sólo que Ud. reciba **la información correcta y suficiente** para que pueda evaluar y juzgar, si quiere o no que sus datos se incluyan en nuestro estudio.

Para ello le rogamos lea esta hoja informativa con atención, pudiendo consultar con las personas que considere oportuno o pedirnos cualquier aclaración que necesite.

2. PARTICIPACIÓN VOLUNTARIA

Debe saber que su participación en este estudio es **totalmente voluntaria**, y que puede decidir no participar, o cambiar su decisión y retirar su consentimiento en cualquier momento.

3. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ESTUDIO

El estudio consiste en la realización de un análisis exploratorio sobre la forma en la que interpretan los estudiantes de materias de economía representaciones gráficas de relaciones entre variables económicas. Toda la información requerida se obtendrá a partir de su participación en la realización de una serie de tareas.

Esta información se recogerá con el objetivo de identificar las dificultades que encuentra como estudiante a la hora de interpretar este tipo de representaciones. En particular, nos interesa conocer hasta que punto los conocimientos de las materias de matemáticas le son útiles a la hora de comprender o de elaborar por su cuenta representaciones gráficas.

Debe saber que, al aceptar participar en el estudio, no se alterará de ningún modo el trato que reciba durante el curso académico en la materia en cuyo horario se llevan a cabo las tareas.

4. BENEFICIOS Y RIESGOS DERIVADOS DE SU PARTICIPACIÓN EN EL ESTUDIO.

Debe saber que **siempre que lo desee podrá interrumpir su participación en el proyecto**. Aunque no recibirá beneficios personales por participar en este estudio de investigación, su colaboración nos será de gran ayuda para poder llevar a cabo la investigación planteada.

5. CONFIDENCIALIDAD Y TRATAMIENTO DE DATOS

Si decide participar en el estudio únicamente se recogerán los siguientes datos: **Nombre, apellidos, edad y curso académico** en el que se encuentra matriculado.

Debe conocer además que, aunque sus datos se recogerán al completo, **en el estudio no figurarán sus datos personales**, puesto que les someteremos a un proceso de anonimización de manera que nadie externo al proyecto pueda relacionarlos con el mismo.

La custodia de los datos será llevada a cabo por el autor y director de la investigación. Los datos en soporte papel serán destruidos a la finalización del estudio y los datos en soporte informático serán almacenados en un equipo de la UC.

El tratamiento, la comunicación y la cesión de los datos de carácter personal de todos los sujetos participantes se ajustará a lo dispuesto en el Reglamento General de Protección de Datos (RGPD), que entró en vigor el 25 de mayo de 2018 que supone la derogación de Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre referidos a la protección de las personas físicas en lo que respecta al tratamiento de datos personales.

De acuerdo con lo que establece la legislación mencionada, **usted puede ejercer los derechos de acceso, rectificación, supresión, limitación del tratamiento, portabilidad de los datos y oposición**, para lo cual deberá dirigir a la responsable del estudio, para dejar constancia de su decisión.

Para **ejercer sus derechos sobre los datos recogidos**, puede ponerse en contacto con la investigadora responsable, en la dirección de email lucia.velasco@alumnos.unican.es

Autorización del centro educativo

El abajo firmante D/Dª____

con cargo_____________________ del centro educativo ________________________ ___________________________________, ante la petición de *Pedro Álvarez Causelo*, como tutor de la alumna *Lucía Velasco Gutiérrez*, la cual está realizando su TFG correspondiente al Grado en Economía de la Universidad de Cantabria, para poder recoger información necesaria para la realización del mismo del alumnado de este centro, **manifiesta que**:

1.- Ha sido informado sobre la naturaleza y los objetivos del TFG, así como del tipo de información que se recabará de los estudiantes y del procedimiento que se seguirá en el proceso de recogida y en el de tratamiento y custodia de la misma.

2.- Conoce la información facilitada a los estudiantes y a sus tutores, así como el compromiso de disponer de los correspondientes consentimientos informados.

3.- Tiene el compromiso del tutor del TFG de que la recogida de información estará debidamente supervisada por él mismo y por un profesor del centro educativo y de que se respetarán estrictamente la confidencialidad y el anonimato.

Por todo ello, **autoriza** a *Lucía Velasco Gutiérrez* a recoger información en los grupos de estudiantes _______________________, bajo los compromisos arriba mencionados.

Fdo. : ____

Cargo:____

Santander, a ____ de _____ de 2025

ANEXO II: CUESTIONARIO EXPERIMENTO

UC | Universidad de Cantabria

CUESTIONARIO

GRÁFICAS Y FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

EDAD: ____________

CURSO: ____________

Lucía Velasco Gutiérrez

GRÁFICAS Y FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

TAREA 1: TARIFAS

Imagina que necesitas coger un Cabify por la noche. Entras en la aplicación y observas las siguientes condiciones:

- Tienes que pagar una tarifa fija de €5 que incluye los 3 primeros kilómetros de recorrido.
- Si el recorrido supera los 3 km, se te cargará 1€ adicional por cada km recorrido.

Representa en una gráfica la relación entre el importe total a pagar y la distancia total recorrida.

TAREA 2: AHORRO

Dentro de unos meses tienes previsto realizar un viaje a Italia y, con la intención de ir ahorrando, has comprado una hucha. Supón que el primer día metes en ella 100€ que ya tenías ahorrados y que luego vas metiendo cada lunes 10€ que te dan tus padres.

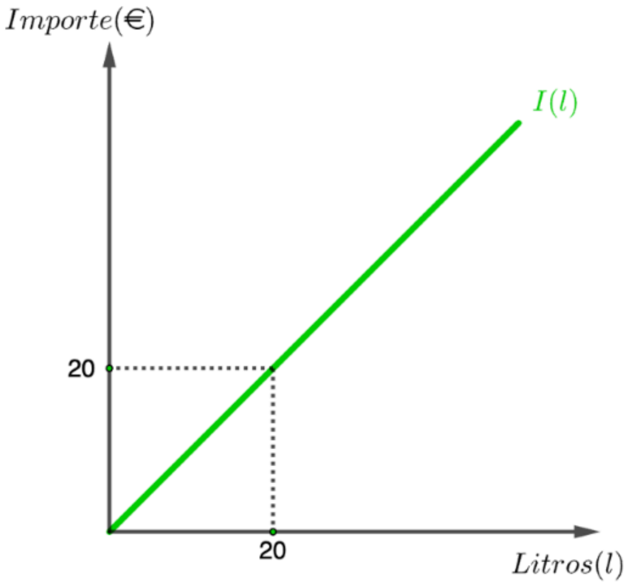
Representa en una gráfica la relación entre el dinero que habrá en ella y el tiempo transcurrido desde el momento en que has comprado la hucha bajo el supuesto de que cumples tus planes de ahorro.

GRÁFICAS Y FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

TAREA 3: GASOLINA

La figura adjunta muestra la relación entre el importe total a pagar y el número de litros de gasolina que son repostados bajo el supuesto de que el precio por litro es de 1€.

Explica cómo cambiaría esa representación gráfica si el precio fuese de 2€/l en lugar de 1€/l. Representa la nueva relación sobre la misma figura, indicando en que se diferencia de la representación original.



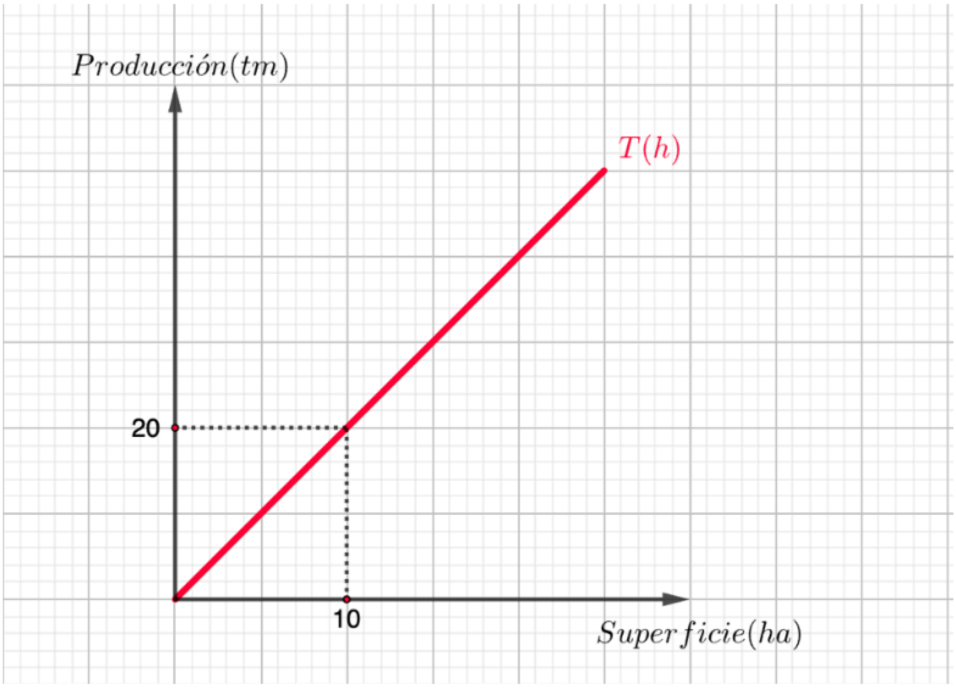
GRÁFICAS Y FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

TAREA 4: FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

En la figura adjunta se representa la función T(h) que recoge la relación que existe entre la cantidad total de trigo, en toneladas, que produce un agricultor de Navarrete y el número total de hectáreas que decide dedicar a dicho cultivo.

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente de dicha función?

b) ¿Cómo le explicarías a alguien no sabe matemáticas la información que recoge la gráfica sobre la relación que existe entre la cantidad de trigo producida y el número de hectáreas que se dedican a ese cultivo?



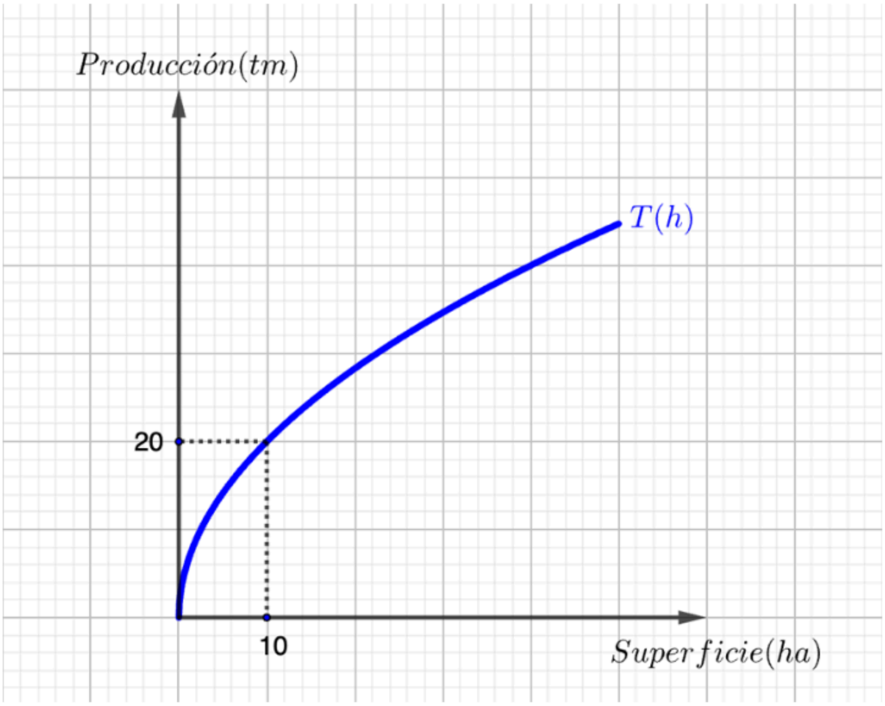
GRÁFICAS Y FUNCIONES: DEL AULA DE MATEMÁTICAS A LA DE ECONOMÍA

TAREA 5: FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN

Imagínate ahora que la relación viniese dada por una función como la representada en la figura adjunta.

a) Describe con tus propias palabras en que se diferencia la nueva situación de la anterior.

b) ¿Cómo le explicarías a alguien no sabe matemáticas la información que recoge la gráfica sobre la relación que existe entre la cantidad de trigo producida y el número de hectáreas que se dedican a ese cultivo?



ANEXO III: ENLACES DE LA PROPUESTA EN GEOGEBRA

Tarea 1: https://www.geogebra.org/classic/kg5nxep3

Tarea 2: https://www.geogebra.org/classic/du9vwbep

Tarea 3: https://www.geogebra.org/classic/kx6xvxeb

Tarea 4: https://www.geogebra.org/classic/brbhhzgz

Tarea 5: https://www.geogebra.org/classic/xphhbmk6