

**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**



Trabajo Fin de Carrera de la Licenciatura en Físicas

**Simulación Numérica de la Propagación  
de Ondas Electromagnéticas Mediante el  
Método Leapfrog ADI-FDTD**

Autor: *Sara Pérez Carabaza*  
Director del proyecto: *José Antonio Pereda Fernández*

Santander, Septiembre 2013



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos y organización de la memoria . . . . .	2
<b>2. El método Leapfrog ADI-FDTD para ondas <math>TM^z</math></b>	<b>5</b>
2.1. Descripción del problema diferencial . . . . .	5
2.2. Aproximación en diferencias finitas . . . . .	6
2.3. Discretización temporal . . . . .	8
2.3.1. Método FDTD (Finite Difference Time Domain) . . . . .	8
2.3.2. Método ADI-FDTD (Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain) . . . . .	10
2.3.3. Método Leapfrog ADI-FDTD . . . . .	12
2.4. Discretización espacial . . . . .	13
2.4.1. Definición del dominio de cómputo . . . . .	13
2.4.2. Discretización de las ecuaciones . . . . .	15
2.5. Condiciones de contorno . . . . .	15
2.6. Algoritmo Leapfrog ADI-FDTD . . . . .	16
2.7. Fuente o excitación . . . . .	20
2.7.1. Sinusoidal . . . . .	20
2.7.2. Gaussiana modulada . . . . .	20
2.8. Propiedades numéricas . . . . .	22
2.8.1. Estabilidad . . . . .	22
2.8.2. Relación de dispersión . . . . .	24
<b>3. Resultados</b>	<b>25</b>
3.1. Propiedades del método Leapfrog ADI-FDTD . . . . .	25
3.1.1. Resolución de la ecuación de dispersión numérica . . . . .	25
3.1.2. Comportamiento del error de la constante de fase . . . . .	28
3.1.3. Orden de la aproximación del método . . . . .	31
3.2. Simulaciones . . . . .	32
3.2.1. Implementación del algoritmo . . . . .	33
3.2.2. Comprobación de la ecuación de dispersión . . . . .	34
3.2.3. Propagación del modo $TE_{10}^z$ en una guía de onda rectangular . . . . .	38
<b>4. Resumen y principales conclusiones</b>	<b>41</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El electromagnetismo es la rama de la física que estudia los campos electromagnéticos y sus interacciones con la materia, y cuyas aplicaciones están presentes en nuestra vida cotidiana. Los conceptos teóricos relacionados con el electromagnetismo se resumieron en un conjunto de leyes formuladas a través de experiencias realizadas por diversos científicos a lo largo del siglo XIX. En la segunda mitad de siglo éstas fueron sintetizadas por James Clerk Maxwell en cuatro ecuaciones diferenciales vectoriales, conocidas como ecuaciones de Maxwell.

El estudio de la resolución de las ecuaciones de Maxwell mediante métodos numéricos se conoce como electromagnetismo computacional. Las técnicas de electromagnetismo computacional surgen de la necesidad de resolver las ecuaciones de Maxwell en situaciones que se encuentran fuera del alcance de los métodos analíticos. Gracias a los ordenadores, mediante el uso de simulaciones computacionales, el método científico es mucho más rápido y barato. En la actualidad dichas técnicas, que ayudan a visualizar la actividad de las ondas electromagnéticas sobre un objeto, tienen amplia aplicación en diversas áreas. Por ejemplo, en la ingeniería de antenas o ingeniería de microondas se emplean para la predicción y optimización del desempeño de sistemas electromagnéticos complejos antes de su construcción o para el diagnóstico de fallos, de modo que se reduce el tiempo y costo requeridos en la solución de problemas prácticos. El electromagnetismo computacional es un área de trabajo interdisciplinaria que involucra la física, el análisis matemático, la ingeniería y la programación.

Una de las técnicas numéricas más antiguas empleadas para resolver las ecuaciones de Maxwell con ayuda del ordenador, es usando el método de diferencias finitas (FD, por sus siglas en inglés). Este método aproxima las derivadas por diferencias finitas, y es muy común en la resolución de ecuaciones diferenciales.

El método FDTD (Finite Difference Time Domain) fue desarrollado por Kane Yee en 1966 para resolver las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo. A grandes rasgos, el método consiste en dividir el espacio problema en una malla formada por una serie de celdas en las que se sitúan los campos. De esta manera los campos pasan de ser una variable continua a una discreta, separados por incremento espacial  $\Delta_s$ . Las ecuaciones de Maxwell son reemplazadas por un sistema de ecuaciones explícitas expresadas en diferencias finitas respecto al tiempo y el espacio, y definidas sobre dominios finitos. Dichas ecuaciones expresan los valores de los campos en un instante temporal en función de los valores de los campos en instantes anteriores. Las ecuaciones del método se resuelven iterativamente, una vez por cada instante temporal, separados por un incremento temporal  $\Delta_t$ . Al resolverlas de manera cíclica se obtienen los valores de los campos electromagnéticos a lo largo del tiempo sobre los puntos

definidos en la malla. El error de las soluciones obtenidas disminuirá cuanto menores sean los incrementos espacial y temporal, es decir, cuanto mejor sea la aproximación en diferencias.

El método FDTD es un método explícito y condicionalmente estable. Para que la solución no diverja el incremento temporal está limitado por la condición de estabilidad de Courant-Friedrich-Levy (CFL). Esta condición relaciona el incremento temporal con el incremento espacial. Debido a su eficacia en gran variedad de problemas y su sencillez, el FDTD es un método muy popular, usado en varios simuladores comerciales. Sin embargo, este resulta inapropiado en problemas que presentan una geometría muy detallada. Estos problemas necesitan un mallado muy fino que, debido a la condición de estabilidad, impone incrementos temporales muy pequeños y en consecuencia un gran número de iteraciones que hacen que el algoritmo sea muy lento.

Una manera de resolver esta limitación es desarrollar métodos incondicionalmente estables. Namiki propuso en 1999 el método incondicionalmente estable ADI-FDTD (del inglés Alternating Direction Implicit) [4]. La ventaja que presentan los métodos incondicionalmente estables al eliminar la condición de estabilidad, tiene el coste de que pasan a ser métodos implícitos. La resolución de ecuaciones implícitas es más lenta, y por tanto el tiempo de una iteración del algoritmo de un método incondicionalmente estable implícito, siempre será mayor que un método condicionalmente estable explícito. Por ejemplo, la resolución de cada iteración temporal del ADI es aproximadamente unas cuatro veces más lenta que la del FDTD convencional [5]. Por tanto, para un mismo incremento temporal el FDTD convencional resulta la opción más rápida y el ADI no tiene interés. Sin embargo, en los casos de mallado fino, donde el excesivamente pequeño incremento temporal máximo permitido para el FDTD obliga a realizar un gran número de iteraciones, haciendo que su resolución sea muy lenta, los métodos incondicionalmente estables son una alternativa. La libre elección del incremento temporal del ADI permite escoger un incremento temporal mayor, pudiendo realizar así un número de iteraciones menor a la cuarta parte de las necesarias con el FDTD y reduciendo de esta manera el tiempo total de simulación.

Recientemente se ha propuesto un nuevo método incondicionalmente estable, el Leapfrog ADI-FDTD [6]. Éste es una reformulación de su predecesor el ADI-FDTD, que siguiendo un esquema temporal de cálculo de tipo leapfrog consigue ahorrar tiempo y memoria.

## 1.1. Objetivos y organización de la memoria

El trabajo realizado se enmarca dentro de la actividad que desarrolla el Grupo de Electromagnetismo del Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Cantabria en el ámbito del modelado numérico mediante métodos de diferencias finitas.

El objetivo de este trabajo de fin de carrera se centra en el desarrollo, estudio de las propiedades numéricas e implementación del método Leapfrog ADI-FDTD. Se ha formulado y desarrollado las ecuaciones del método, estudiado su estabilidad y dispersión e implementado en MatLab. Además, se ha comprobado la dispersión del método obtenida de la simulación coincide con la relación de dispersión obtenida teóricamente.

El contenido del trabajo se ha organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se introducen los principales tipos de métodos en diferencias finitas en el electromagnetismo, de forma que se facilite la comparación de unos con otros.

A continuación, se desarrollan las ecuaciones del método Leapfrog ADI-FDTD, las condiciones de contorno y los tipos de excitación utilizados. Por último se realiza un estudio de las propiedades numéricas del método.

- En el capítulo 3 se presentan los resultados obtenidos. En la primera parte del capítulo se estudia la dispersión del método, primero de manera teórica, resolviendo la relación de dispersión numérica del método en función de los distintos parámetros característicos y después comparándola con la dispersión obtenida mediante la simulación. Además, se ha utilizado el algoritmo implementado para la simulación de la propagación del modo  $TE_{10}^x$  en una guía rectangular.
- En el capítulo 4, se exponen las principales conclusiones del trabajo.



## Capítulo 2

# El método Leapfrog ADI-FDTD para ondas $TM^z$

En 1966 Yee desarrolló el Método en Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD por sus siglas en inglés) que resuelve mediante diferencias finitas las ecuaciones de Maxwell. Se trata de un método explícito y condicionalmente estable que resulta demasiado lento para problemas que necesitan un mallado espacial fino debido a la condición de estabilidad. Como solución a este problema concreto surgieron los métodos incondicionalmente estables como el ADI-FDTD, y posteriormente el Leapfrog ADI-FDTD. A veces se suele referir a todos estos métodos como métodos FDTD, y al primer método desarrollado por Yee como método FDTD convencional.

Las ecuaciones en diferencias de los métodos FDTD calculan los valores de los campos en el instante actual, a partir de los valores en los campos en instante anteriores. El dominio de cómputo se divide en una malla o red, formada por la repetición de celdas elementales cuadradas de longitud  $\Delta_s$ , en las que se sitúan los campos electromagnéticos para un instante de tiempo dado. De esta forma se consigue calcular una aproximación de la solución del problema continuo original en un conjunto discreto de puntos. Las ecuaciones en diferencias se resuelven iterativamente, en instantes de tiempo separados por el incremento temporal  $\Delta_t$ .

El primer objetivo de este capítulo es presentar los distintos métodos FDTD, comparándolos y viendo las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos. Después se ha desarrollado con mayor profundidad el método Leapfrog ADI-FDTD, ya que es el método en el que se centra el trabajo. Para terminar, se estudian sus propiedades numéricas.

### 2.1. Descripción del problema diferencial

Se considera como punto de partida las ecuaciones de Maxwell del rotacional para medios lineales, no dispersivos e isotrópicos; la ecuación de Faraday (2.1a) y la ecuación de Ampère-Maxwell (2.1b)

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.1b)$$

donde  $\vec{E}$  (V/m) es el campo eléctrico,  $\vec{H}$  (A/m) el campo magnético, y  $\vec{J}$  (A/m<sup>2</sup>) la densidad de corriente eléctrica. El medio se caracteriza por su permeabilidad magnética  $\mu$  y su permitividad eléctrica  $\epsilon$ . Estas ecuaciones pueden expresarse en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu}(B - A)E \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}(A - B)H - \frac{1}{\epsilon}J \quad (2.2b)$$

donde  $H = [H_x, H_y, H_z]^T$ ,  $E = [E_x, E_y, E_z]^T$ ,  $J = [J_x, J_y, J_z]^T$  y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Si se utiliza como excitación un campo que no varíe según la dirección  $z$ , y además la estructura problema no presenta tampoco dicha variación, entonces las derivadas respecto de  $z$  serán nulas, resultando dos grupos de ecuaciones mutuamente desacoplados:

Ondas  $TE^z$  ( $E_x, E_y, H_z$ ):

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - J_x, \quad (2.4a)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - J_y, \quad (2.4b)$$

$$\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (2.4c)$$

Ondas  $TM^z$  ( $H_x, H_y, E_z$ )

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.5a)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.5b)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \quad (2.5c)$$

En el caso de las ondas TE (Transverse Electric) el campo eléctrico está contenido en el plano XY. Mientras que en el caso de las ondas TM (Transverse Magnetic) es el campo magnético el que está contenido en el plano XY. En la polarización respecto a la dirección  $z$ , los campos varían en la dirección  $x$  e  $y$ , pero son invariantes en  $z$ . El objetivo del trabajo es estudiar el método Leapfrog ADI-FDTD para la polarización  $TM^z$ .

## 2.2. Aproximación en diferencias finitas

Los métodos FDTD son un caso particular del método de Diferencias Finitas, que es un método estándar para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Estas técnicas permiten sustituir un problema de tipo diferencial por otro equivalente de tipo algebraico. La

ecuación diferencial continua original se resuelve de manera aproximada en un conjunto finito de puntos localizados en el dominio de cómputo.

Las expresiones en diferencias permiten calcular el valor de la derivada de una función en un punto a partir de los valores de la función en otros puntos del dominio. Existen distintas expresiones en diferencias. Dada una ecuación diferencial, su aproximación en diferencias no es única. El orden de convergencia de la aproximación dependerá de la aproximación en diferencias utilizada y no de la ecuación diferencial de partida.

Una de las aproximaciones en diferencias más usadas es la aproximación centrada de segundo orden:

$$\frac{dU(t)}{dt} \simeq \frac{U(t + 1/2\Delta_t) - U(t - 1/2\Delta_t)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2)$$

donde  $U$  es una función continua cuya derivada respecto a la variable  $t$  se quiere aproximar y  $\Delta_t$  el incremento infinitesimal de la variable independiente. Si definimos el operador finito diferencia centrada  $\delta$  como

$$\delta U(t) \equiv U(t + 1/2\Delta_t) - U(t - 1/2\Delta_t)$$

podemos expresar la aproximación en diferencias de una forma más compacta

$$\frac{dU(t)}{dt} \simeq \frac{\delta U(t)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2)$$

En la práctica, nos interesa obtener aproximaciones para la derivada parcial respecto de alguna variable manteniendo el resto constantes. Para distinguir en qué dirección es aplicada la aproximación, añadiremos un subíndice al operador  $\delta$  que lo indique. Por ejemplo, la derivada parcial respecto al tiempo de la función  $U(x, y, t)$  se puede aproximar por:

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\delta_t U(x, y, t)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2)$$

donde  $\delta_t$  es el operador diferencia centrada respecto a la variable  $t$ .

Para la resolución de ecuaciones diferenciales mediante el uso de diferencias finitas deben realizarse los siguientes pasos:

- Discretización de la región de interés, construcción de una malla o red de celdas elementales.
- Aplicación de la aproximación en diferencias a las ecuaciones diferenciales. Pasando de unas ecuaciones en derivadas parciales (EDP) a ecuaciones en diferencias finitas (EDF).
- Imposición de las condiciones de borde.
- Resolución mediante algún método numérico conocido de las ecuaciones en diferencias.

Los métodos en diferencias finitas pueden ser explícitos o implícitos. En los métodos explícitos todas las ecuaciones en diferencias son ecuaciones explícitas y en general son más sencillos de resolver.

### 2.3. Discretización temporal

Las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo son ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son los campos electromagnéticos  $E(x, y, z, t)$  y  $H(x, y, z, t)$ . Los métodos FDTD se obtienen tras sustituir las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias respecto a las variables espaciales y al tiempo. Luego es necesario hacer una discretización espacial y temporal del dominio. Los métodos FDTD utilizan la discretización espacial de Yee. Pero la discretización temporal puede variar de un método a otro (incluido el esquema en diferencias utilizado).

A continuación se van a presentar los distintos métodos FDTD, la formulación se ha escrito en 3D y antes de realizar la discretización espacial al igual que en [1]. De esta manera las expresiones quedan más sencillas y compactas, y se pueden comparar fácilmente los distintos métodos.

En los métodos FDTD el tiempo es discretizado como  $t = n\Delta_t$  donde  $n$  es el índice temporal  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\Delta_t$  el incremento temporal.

#### 2.3.1. Método FDTD (Finite Difference Time Domain)

El método de diferencias finitas FDTD convencional es el más utilizado, debido a la consistencia y simplicidad del algoritmo. A continuación se van a obtener las ecuaciones del método FDTD tal y como fueron propuestas por Yee en 1966.

La aproximación en diferencias respecto al tiempo utilizada en el FDTD convencional es la aproximación centrada de segundo orden. Teniendo en cuenta la discretización temporal  $t = n\Delta_t$  con  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\begin{aligned} \frac{dU(x, y, z, t)}{dt} &\simeq \frac{U(x, y, z, (n + 1/2)\Delta_t) - U(x, y, z, (n - 1/2)\Delta_t)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2) = \\ &\frac{\delta_t U(x, y, z, n\Delta_t)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2) \end{aligned}$$

siendo  $\delta_t$  el operador diferencia centrada respecto al tiempo.

Por comodidad, a partir de ahora el instante temporal se indicará con el superíndice  $n$ . De manera que la expresión anterior puede expresarse de forma más compacta como

$$\frac{dU(x, y, z, t)}{dt} \simeq \frac{\delta_t U^n(x, y, z)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2) = \frac{U^{n+1/2}(x, y, z) - U^{n-1/2}(x, y, z)}{\Delta_t} + O(\Delta_t^2) \quad (2.6)$$

Puesto que en este apartado se van a presentar las ecuaciones antes de realizar la discretización espacial, en lo que sigue sólo se mostrará la dependencia temporal de los campos.

Las ecuaciones del método FDTD se obtienen tras realizar la aproximación en diferencias respecto del tiempo (2.6) en las ecuaciones de Maxwell (2.2). La discretización del campo eléctrico se realiza para el instante  $n + 1/2$  y la del campo magnético en  $n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t H^n}{\Delta_t} &= \frac{1}{\mu} (B - A) E^n \\ \frac{\delta_t E^{n+1/2}}{\Delta_t} &= \frac{1}{\epsilon} (A - B) H^{n+1/2} - \frac{1}{\epsilon} J^{n+1/2} \end{aligned}$$

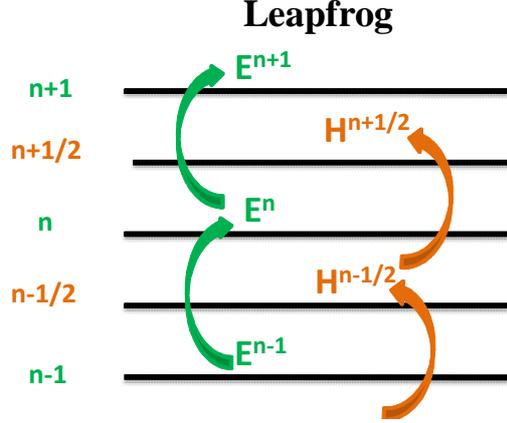


Figura 2.1: Esquema temporal de cálculo leapfrog.

De esta manera las ecuaciones en diferencias quedan en instantes enteros para el campo eléctrico y en instantes intermedios para el campo magnético:

$$\frac{H^{n+1/2} - H^{n-1/2}}{\Delta_t} = \frac{1}{\mu}(B - A)E^n$$

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta_t} = \frac{1}{\epsilon}(A - B)H^{n+1/2} - \frac{1}{\epsilon}J^{n+1/2}$$

despejando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$H^{n+1/2} = H^{n-1/2} + \frac{\Delta_t}{\mu}(BE^n - AE^n) \quad (2.7a)$$

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\Delta_t}{\epsilon}(AH^{n+1/2} - BH^{n+1/2}) - \frac{\Delta_t}{\epsilon}J^{n+1/2} \quad (2.7b)$$

Aunque todavía faltaría realizar la discretización espacial y establecer las condiciones de contorno, las ecuaciones (2.7) son las que se implementan en el método FDTD. Partiendo de  $H^{n-1/2}$  y  $E^n$  conocidos se calcula primero  $H^{n+1/2} = f_1(H^{n-1/2}, E^n)$  con (2.7b) y después  $E^{n+1} = f_2(E^n, H^{n+1/2})$  con (2.7a). Una vez conocidos  $H^{n+1/2}$  y  $E^{n+1}$  se pueden calcular los valores de los campos en el siguiente paso temporal y así indefinidamente hasta el número de iteraciones deseadas.

El esquema temporal de cálculo del método se muestra en la figura 2.1. Los campos eléctricos y magnéticos se intercalan en el tiempo en intervalos de  $1/2\Delta_t$  lo que se conoce como una implementación “leapfrog” o intercalada en el tiempo. Aunque la denominación leapfrog se reserva para el método Leapfrog ADI-FDTD, el método FDTD convencional se trata también de un método leapfrog. En los esquemas temporales leapfrog por cada iteración temporal se calculan una única vez los valores de los campos.

El método FDTD convencional es un método condicionalmente estable y debe cumplir la condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL) :

$$\Delta t = s \cdot \Delta_{t_{\max}} \quad \text{con } s \leq 1 \quad (2.8)$$

donde  $s$  recibe el nombre de parámetro de estabilidad.

La estabilidad del método determina un intervalo temporal máximo posible en función de las dimensiones de la celda unidad de la malla:

$$\Delta t_{\text{máx}} = \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} + \frac{1}{\Delta_z^2} \right)^{-1/2} \quad (2.9)$$

donde  $\Delta_x, \Delta_y$  y  $\Delta_z$  son los incrementos espaciales de la malla, producto de la discretización espacial del dominio.

Como podemos ver en la condición de estabilidad (2.9), mallados espaciales finos imponen incrementos temporales máximos pequeños, haciendo que la resolución del problema sea excesivamente lenta en estos casos.

### 2.3.2. Método ADI-FDTD (Alternating Direction Implicit Finite Difference Time Domain)

Como solución a los elevados tiempos de computación del método FDTD convencional para problemas con un mallado espacial fino surgieron los métodos incondicionalmente estables como el ADI-FDTD.

El esquema en diferencias utilizado en la discretización temporal es el esquema en diferencias de Crank-Nicolson. Este esquema en diferencias se trata de una aproximación de segundo orden en tiempo, implícito y numéricamente estable. Discretizando en el tiempo las ecuaciones de Maxwell (2.2) mediante el esquema de Crank-Nicolson resulta:

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\epsilon}(A - B)(H^{n+1} + H^n) + \frac{1}{\epsilon}J^{n+1/2} + O(\Delta_t^2) \quad (2.10a)$$

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\mu}(B - A)(E^{n+1} + E^n) + O(\Delta_t^2) \quad (2.10b)$$

Podemos expresar el sistema de ecuaciones anterior en su forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2\epsilon}(A - B) \\ -\frac{\Delta t}{2\mu}(B - A) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{n+1} \\ H^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2\epsilon}(A - B) \\ \frac{\Delta t}{2\mu}(B - A) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^n \\ H^n \end{pmatrix} \\ + \Delta t \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}J^{n+1/2} \\ 0 \end{pmatrix} + O(\Delta_t^3)$$

Si ahora agrupamos los términos, podemos escribir el sistema de la siguiente manera

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2}A_x - \frac{\Delta t}{2}A_y \right) U^{n+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2}A_x + \frac{\Delta t}{2}A_y \right) U^n + \Delta t S^{n+1/2} + O(\Delta_t^3) \quad (2.11)$$

donde  $U^{n+1} = [E^{n+1}, H^{n+1}]$ ,  $U^n = [E^n, H^n]$ ,  $S^{n+1/2} = [\frac{1}{\epsilon}J^{n+1/2}, 0]$  y

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & +\frac{A}{\epsilon} \\ -\frac{A}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{\epsilon} \\ +\frac{B}{\mu} & 0 \end{pmatrix}$$

El método de Crank-Nicolson es incondicionalmente estable. Sin embargo, es implícito e involucra matrices llenas, lo cual conduce a tiempos de computación inaceptables. Una manera de aliviar este problema es la técnica ADI, este método divide las ecuaciones diferenciales en

dos. La ventaja de la técnica ADI es que las ecuaciones que se resuelven en cada paso son más simples y se pueden resolver como un sistema tri-diagonal.

Sumando el término  $\frac{\Delta_t^2}{4}A_xA_yU^{n+1}$  en el primer miembro de la ecuación (2.11), restando el término  $\frac{\Delta_t^2}{4}A_xA_yU^n$  en el segundo miembro y factorizando obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{\Delta_t}{2}A_x\right) \left(I - \frac{\Delta_t}{2}A_y\right) U^{n+1} &= \left(I + \frac{\Delta_t}{2}A_x\right) \left(I + \frac{\Delta_t}{2}A_y\right) U^n \\ &+ \Delta_t S^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta_t^2}{4}A_xA_y(U^{n+1} - U^n) + O(\Delta_t^3) \end{aligned}$$

Despreciando el término de error, la ecuación anterior se puede escribir en dos pasos (splitting)

$$\left(I - \frac{\Delta_t}{2}A_x\right) U^{n+1/2} = \left(I + \frac{\Delta_t}{2}A_y\right) U^n + \frac{\Delta_t}{2}S^{n+1/2}, \quad (2.12a)$$

$$\left(I - \frac{\Delta_t}{2}A_y\right) U^{n+1/2} = \left(I + \frac{\Delta_t}{2}A_x\right) U^{n+1/2} + \frac{\Delta_t}{2}S^{n+1/2}. \quad (2.12b)$$

Las ecuaciones (2.12) son la base del método ADI-FDTD. Sin considerar las fuentes, tras sustituir las matrices y operar se obtienen las ecuaciones del método ADI-FDTD:

Paso 1:

$$\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon}A\frac{1}{\mu}B\right) E^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon}A\frac{1}{\mu}A\right) E^n + \frac{\Delta_t}{2\epsilon}(A - B)H^n \quad (2.13a)$$

$$H^{n+1/2} = H^n + \frac{\Delta_t}{2\mu}(BE^{n+1/2} - AE^n) \quad (2.13b)$$

Paso 2:

$$\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon}B\frac{1}{\mu}A\right) E^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon}B\frac{1}{\mu}B\right) E^{n+1/2} + \frac{\Delta_t}{2\epsilon}(A - B)H^{n+1/2} \quad (2.14a)$$

$$H^{n+1} = H^{n+1/2} + \frac{\Delta_t}{2\mu}(BE^{n+1/2} - AE^{n+1}) \quad (2.14b)$$

Una vez realizada la discretización espacial y considerado las condiciones de contorno se obtienen las ecuaciones finales del ADI-FDTD: sistema tri-diagonal para el cálculo de  $E$  y ecuaciones explícitas para el cálculo de  $H$ . El esquema de cálculo del algoritmo se divide en dos pasos, en el primero se calculan los campos en instantes intermedios y en el segundo los campos en instantes enteros. Luego por cada iteración se calculan los valores de los campos dos veces.

En la figura 2.2 se muestra el esquema temporal de cálculo del ADI-FDTD. Como podemos observar los campos eléctricos y magnéticos se evalúan tanto en instantes temporales enteros como intermedios. Luego, el método ADI-FDTD no sigue un esquema temporal leapfrog como el FDTD convencional.

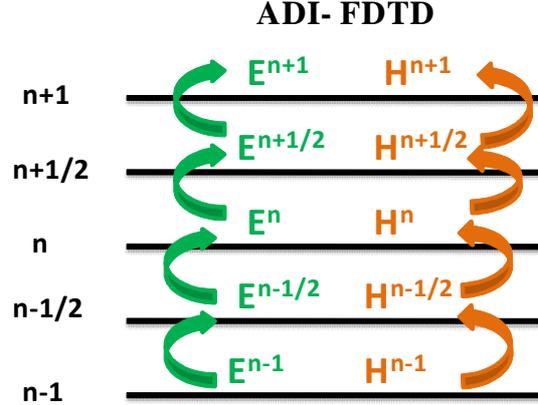


Figura 2.2: Esquema temporal de cálculo del método ADI-FDTD.

El método ADI-FDTD supone una ventaja frente al FDTD convencional en los casos que requieren un mallado fino. Sin embargo, se trata de un método implícito cuyo coste computacional es aproximadamente cuatro veces mayor al FDTD convencional.

### 2.3.3. Método Leapfrog ADI-FDTD

El método Leapfrog ADI-FDTD es, al igual que el método ADI-FDTD, un método incondicionalmente estable. Éste consiste en una reformulación más eficiente del ADI-FDTD, que consigue disminuir el coste computacional al seguir un esquema temporal de cálculo tipo leapfrog por dos razones:

- Los valores de los campos se calculan una vez por cada iteración, realizando así un único paso en vez de dos.
- El campo eléctrico se define en instantes enteros y el magnético en intermedios de forma que sólo hay que definir dos variables  $E^n, H^{n-1/2}$ , en vez de cuatro  $E^n, H^n, E^{n+1/2}$  y  $H^{n+1/2}$ .

Para obtener un esquema de tipo leapfrog a partir de las ecuaciones del ADI-FDTD (2.13) debemos eliminar los valores del campo eléctrico en instantes intermedios y del campo magnético en instantes enteros. Se ha seguido el mismo procedimiento algebraico que en [6], quedando de esta manera las ecuaciones del método Leapfrog ADI-FDTD:

$$\left(I - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon} B \frac{1}{\mu} A\right) H^{n+1/2} = \left(I - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon} B \frac{1}{\mu} A\right) H^{n-1/2} + \frac{\Delta_t}{\mu} (BE^n - AE^n) \quad (2.15a)$$

$$\left(I - \frac{\Delta_t^2}{4\mu} B \frac{1}{\epsilon} A\right) E^{n+1} = \left(I - \frac{\Delta_t^2}{4\mu} B \frac{1}{\epsilon} A\right) E^n + \frac{\Delta_t}{\epsilon} (AH^{n+1/2} - BH^{n+1/2}) \quad (2.15b)$$

Si comparamos las ecuaciones del método con las del FDTD convencional, podemos ver la similitud. El método Leapfrog ADI-FDTD puede tratarse como una perturbación del método FDTD convencional [3]. Tanto el Leapfrog ADI-FDTD como el FDTD convencional siguen un esquema temporal de cálculo de tipo leapfrog, figura 2.1.

Si comparamos los dos métodos incondicionalmente estables, el método Leapfrog ADI-FDTD al calcular los campos una única vez por cada paso temporal, resulta más rápido y además utiliza menos memoria que su predecesor, el ADI-FDTD [2]. Otra ventaja de este método es que al ser parecido al popular FDTD convencional abre la posibilidad de realizar implementaciones híbridas; en las que se utilice el FDTD convencional para el cálculo de estructuras generales y el leapfrog ADI-FDTD para el cálculo de zonas donde se necesite un mallado espacial fino.

### Polarización $TM^z$

Para la obtención de las ecuaciones del Leapfrog ADI-FDTD de la polarización  $TM^z$ , que son las que se van a implementar, partimos de las ecuaciones en 3D (2.15). Utilizamos como excitación un campo que no varíe según la dirección  $z$  y además la estructura problema no presenta tampoco dicha variación. De esta manera obtenemos las ecuaciones para la polarización  $TM^z$  (2.16); una ecuación explícita para el cálculo de  $H_x$ . y dos ecuaciones implícitas para el cálculo de  $E_z$  y  $H_y$ .

$$H_x^{n+1/2} = H_x^{n-1/2} - \frac{\Delta_t}{\mu} \frac{\partial E_z^n}{\partial y} \quad (2.16a)$$

$$\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x}\right) H_y^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x}\right) H_y^{n-1/2} + \frac{\Delta_t}{\mu} \frac{\partial E_z^n}{\partial x} \quad (2.16b)$$

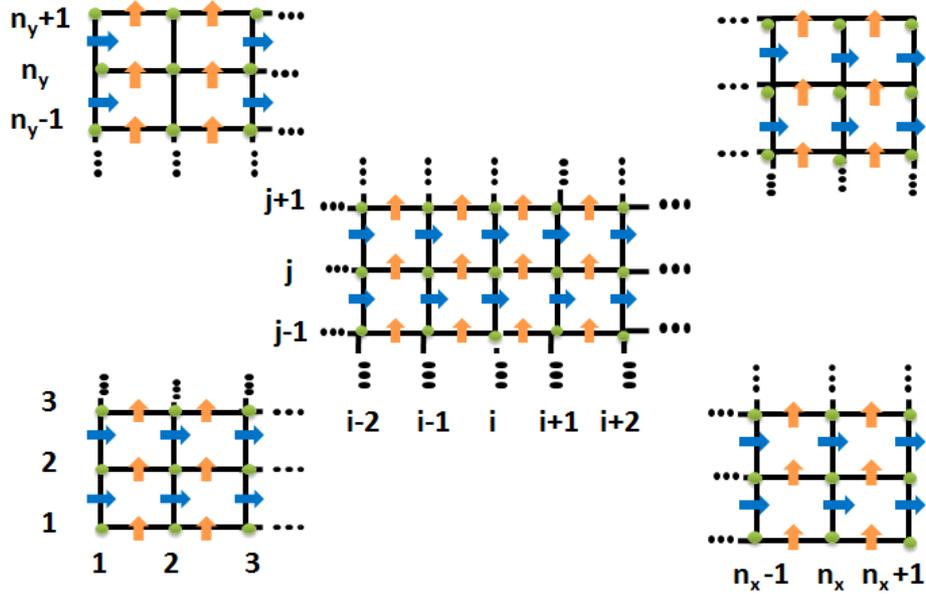
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y}\right) E_z^{n+1} &= \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y}\right) E_z^n \\ &+ \frac{\Delta_t}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial H_x^{n+1/2}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.16c)$$

## 2.4. Discretización espacial

### 2.4.1. Definición del dominio de cómputo

En los métodos en diferencias finitas la ecuación diferencial continua original se resuelve de forma aproximada en un conjunto finito de puntos localizados en el dominio donde se desea encontrar la solución. Para poder llevar a cabo esta sustitución de diferenciales por incrementos, se discretiza el espacio-tiempo mediante una malla o red. Los campos electromagnéticos pasan de ser continuos a ser discretos, tomando una serie de valores en determinados puntos de la malla.

Comenzamos definiendo el dominio, teniendo en cuenta que debe ser finito. En nuestro caso será una región rectangular en la que uno de los ejes se asocia con la dirección espacial  $x$  y el otro con la  $y$ . El dominio se divide en  $n_x$  celdas rectangulares iguales de tamaño  $\Delta_x \times \Delta_y$  en la dirección  $x$ , y  $n_y$  celdas en la dirección  $y$ , denominadas celdas unidad. Para referirnos a los vértices de las celdas empleamos la notación  $(x, y) \equiv (i\Delta_x, j\Delta_y) \equiv (i, j)$ , donde  $i$  es el índice espacial para  $x$  y  $j$  para  $y$ . Siguiendo esta notación el centro de una celda genérica  $i, j$  sería  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ . En la figura 2.3 se puede ver un esquema de la malla utilizada.

Figura 2.3: Malla espacial para las ondas  $TM^z$ .

Una vez definido el dominio de cómputo es necesario definir las incógnitas y situarlas sobre éste. Las incógnitas son los campos electromagnéticos  $E_z$ ,  $H_x$  y  $H_y$  que se sitúan intercalados sobre la malla siguiendo el esquema de Yee, un esquema robusto que se utiliza en la mayoría de los métodos FDTD. Para el caso de la polarización  $TM^z$  el campo eléctrico se sitúa en los nodos de la malla y los campos magnéticos en los centros de las aristas. En la figura 2.4 podemos ver la distribución de los campos para una celda unidad genérica  $i, j$ .

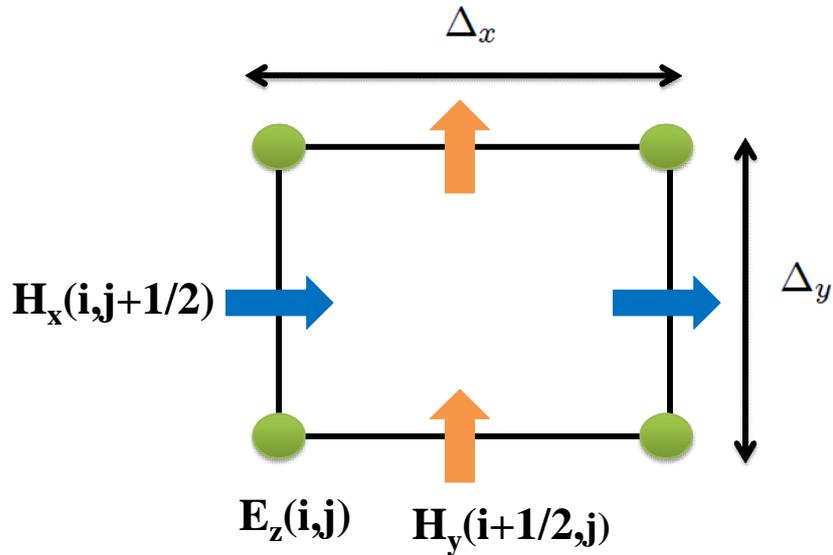


Figura 2.4: Celda unidad.

Como hemos mencionado anteriormente el tiempo es discretizado como  $t = n\Delta_t$ , donde  $n$  es el índice de paso temporal  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Entonces una función del espacio y el tiempo representada en la malla en un punto  $(x, y)$  en el instante de tiempo  $t$ , toma la siguiente forma en notación resumida:

$$U(x, y, t) \equiv U(i\Delta_x, j\Delta_y, n\Delta_t) \equiv U^n(i, j)$$

### 2.4.2. Discretización de las ecuaciones

Anteriormente obtuvimos el conjunto de ecuaciones del método Leapfrog ADI-FDTD para la polarización  $TM^z$  tras realizar la discretización temporal (2.16). Ahora vamos a discretizar respecto al espacio las ecuaciones obtenidas. Para ello se utiliza la aproximación en diferencias finitas centrada de segundo orden:

$$\frac{dU(i, j)}{dx} = \frac{U(i + 1/2, j) - U(i - 1/2, j)}{\Delta_x} = \frac{\delta_x U(i, j)}{\Delta_x} \quad (2.17a)$$

$$\frac{dU(i, j)}{dy} = \frac{U(i, j + 1/2) - U(i, j - 1/2)}{\Delta_y} = \frac{\delta_y U(i, j)}{\Delta_y} \quad (2.17b)$$

Tras realizar la discretización espacial, las ecuaciones (2.16) quedan:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \epsilon_{i,j}} \delta_y \frac{1}{\mu_{i,j}} \delta_y\right) E_z^{n+1}(i, j) &= \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \epsilon_{i,j}} \delta_y \frac{1}{\mu_{i,j}} \delta_y\right) E_z^n(i, j) \\ &+ \frac{\Delta_t}{\epsilon_{i,j}} \left(\frac{\delta_x}{\Delta_x} H_y^{n+1/2}(i, j) - \frac{\delta_y}{\Delta_y} H_x^{n+1/2}(i, j)\right) \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$H_x^{n+1/2}(i, j + 1/2) = H_x^{n-1/2}(i, j + 1/2) - \frac{\Delta_t}{\mu_{i,j+1/2}} \frac{\delta_y}{\Delta_y} E_z^n(i, j + 1/2) \quad (2.18b)$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{i+1/2,j}} \delta_x \frac{1}{\epsilon_{i+1/2,j}} \delta_x\right) H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j) = \\ &\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{i+1/2,j}} \delta_x \frac{1}{\epsilon_{i+1/2,j}} \delta_x\right) H_y^{n-1/2}(i + 1/2, j) + \frac{\Delta_t}{\mu_{i+1/2,j}} \frac{\delta_x}{\Delta_x} E_z^n(i + 1/2, j) \end{aligned} \quad (2.18c)$$

Las ecuaciones obtenidas se aplican a todas las celdas del dominio de estudio. Los valores de los campos se calculan a partir de los valores de los campos en celdas próximas. Esto supone un problema para el cálculo de los campos en las celdas del contorno, ya que no se conocen los valores de los campos de sus celdas contiguas. Es por esto que los valores de los campos de las celdas del contorno necesitan una consideración aparte, y el problema se resuelve teniendo en cuenta las condiciones de contorno.

## 2.5. Condiciones de contorno

En este trabajo se han considerado las condiciones de contorno de conductor eléctrico perfecto (PEC del inglés), que además son las más sencillas de implementar. Esto significa que si la onda llega al borde de la malla se reflejará.

Las condiciones de contorno de conductor eléctrico perfecto son:

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{a}_n &= 0 \implies (\vec{E}_n + \vec{E}_t) \times \vec{a}_n = 0 \implies \vec{E}_t = 0 \\ \vec{B} \cdot \vec{a}_n &= 0 \implies (\vec{B}_n + \vec{B}_t) \cdot \vec{a}_n = 0 \implies \vec{B}_n = 0\end{aligned}$$

donde  $\vec{a}_n$  es el vector unitario normal a la pared metálica. Si el material que está en contacto con la pared metálica es isótropo, entonces podemos reescribir la ecuación anterior como  $\vec{H} \cdot \vec{a}_n = 0 \implies \vec{H}_n = 0$ .

A la hora de implementar el algoritmo, lo único que haremos para tener condiciones de contorno de un conductor perfecto es mantener a cero las componentes del campo eléctrico y magnético en los bordes del dominio de cómputo. Teniendo en cuenta la discretización espacial (figura 2.3) las condiciones para el campo magnético quedan:

$$\begin{aligned}H_x(1, j) &= H_x(n_x + 1, j) = 0 & j = 1/2, \dots, n_y + 1/2 \\ H_y(i, 1) &= H_y(i, n_y + 1) = 0 & i = 1/2, \dots, n_x + 1/2\end{aligned}$$

y en el caso del campo eléctrico

$$\begin{aligned}E_z(i, 1) &= E_z(i, n_y + 1) = 0 & i = 1, \dots, n_x + 1 \\ E_z(1, j) &= E_z(n_x + 1, j) = 0 & j = 1, \dots, n_y + 1\end{aligned}$$

## 2.6. Algoritmo Leapfrog ADI-FDTD

De las ecuaciones obtenidas para el cálculo de los campos, las ecuaciones para el cálculo de  $H_y$  (2.18c) y  $E_z$  (2.18a) son implícitas, y la ecuación para el cálculo de  $H_x$  (2.18b) explícita. La ecuación explícita es la utilizada en la implementación del método, las otras dos se expresan en forma de sistema matricial. El desarrollo de la formulación matricial se encuentra a continuación.

Primero se ha expresado el sistema matricial para el cálculo de  $H_y$ . Operando el miembro de la derecha de la ecuación (2.18c) se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\delta_x \frac{1}{\epsilon_{i+1/2,j}}\delta_x\right) H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i,j}} H_y^{n+1/2}(i-1/2, j) \\ \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\left(\frac{1}{\epsilon_{i,j}} + \frac{1}{\epsilon_{i+1,j}}\right)\right) H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) &- \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i+1,j}} H_y^{n+1/2}(i+3/2, j)\end{aligned}$$

El primer término del segundo miembro de (2.18c) es igual a la ecuación anterior pero aplicado a  $H_y^{n-1/2}$ , y en el segundo término tenemos:

$$\frac{\Delta_t}{\mu_{i+1/2,j}} \frac{\delta_x}{\Delta_x} E_z^n(i+1/2, j) = \frac{\Delta_t}{\Delta_x\mu_{i+1/2,j}} (E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j))$$

Luego, tras las operaciones, la ecuación para el cálculo de  $H_y^{n+1/2}$  queda:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i,j}}H_y^{n+1/2}(i-1/2,j) + \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\left(\frac{1}{\epsilon_{i,j}} + \frac{1}{\epsilon_{i+1,j}}\right)\right)H_y^{n+1/2}(i+1/2,j) \\ & - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i+1,j}}H_y^{n+1/2}(i+3/2,j) = \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i,j}}H_y^{n-1/2}(i-1/2,j) \\ & + \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\left(\frac{1}{\epsilon_{i,j}} + \frac{1}{\epsilon_{i+1,j}}\right)\right)H_y^{n-1/2}(i+1/2,j) \\ & - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i+1,j}}H_y^{n-1/2}(i+3/2,j) - \frac{\Delta_t}{\Delta_x\mu_{i+1/2,j}}(E_z^n(i+1,j) - E_z^n(i,j)) \end{aligned}$$

Para un  $j$  arbitrario el sistema a resolver es:

$$X_j H_{y,j}^{n+1/2} = RHS_j \quad (2.19)$$

La matriz de coeficientes tiene la siguiente forma

$$X_j = \begin{bmatrix} B_{1,j} & C_{1,j} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_{2,j} & B_{2,j} & C_{2,j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & A_{i,j} & B_{2,j} & C_{1,j} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{n_x-1,j} & B_{n_x-1,j} & C_{n_x-1,j} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{n_x,j} & B_{n_x,j} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i,j}} & B_{i,j} &= 1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\left(\frac{1}{\epsilon_{i,j}} + \frac{1}{\epsilon_{i+1,j}}\right) & C_{i,j} &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i+1,j}} \\ B_{1,j} &= 1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{1+1/2,j}\epsilon_{2,j}} & C_{1,j} &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{1+1/2,j}\epsilon_{2,j}} \\ A_{n_x,j} &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{n_x+1/2,j}\epsilon_{n_x,j}} & B_{i,n_x} &= 1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{n_x+1/2,j}\epsilon_{n_x,j}} \end{aligned}$$

Y el miembro de la derecha de la ecuación (2.19):

$$RHS_j = [RHS(1,j), RHS(2,j), \dots, RHS(n_x,j)]^T$$

siendo

$$\begin{aligned} RHS_j(i,j) &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i,j}}H_{y,j}^{n-1/2}(i-1/2,j) \\ & + \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}}\left(\frac{1}{\epsilon_{i,j}} + \frac{1}{\epsilon_{i+1,j}}\right)\right)H_{y,j}^{n-1/2}(i+1/2,j) - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2\mu_{i+1/2,j}\epsilon_{i+1,j}}H_{y,j}^{n-1/2}(i+3/2,j) \\ & + \frac{\Delta_t}{\Delta_x\mu_{i+1/2,j}}(E_z^n(i+1,j) - E_z^n(i,j)) \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned}
RHS_j(1, j) &= \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{1+1/2, j} \epsilon_{2, j}}\right) H_{y, j}^{n-1/2}(1 + 1/2, j) \\
&+ \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{1+1/2, j} \epsilon_{2, j}}\right) H_{y, j}^{n-1/2}(1 + 3/2, j) + \frac{\Delta_t}{\Delta_x \mu_{1+1/2, j}} E_z^n(2, j) \quad (2.20b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RHS_j(n_x, j) &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{n_x+1/2, j} \epsilon_{n_x, j}} H_{y, j}^{n-1/2}(n_x - 1/2, j) \\
&+ \left(1 - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_{n_x+1/2, j} \epsilon_{n_x, j}}\right) H_{y, j}^{n-1/2}(n_x + 1/2, j) - \frac{\Delta_t}{\Delta_x \mu_{n_x+1/2, j}} E_z^n(n_x, j) \quad (2.20c)
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema para el cálculo de  $H_y$ , ecuación (2.19), se obtiene la solución de los valores del campo en la columna  $j$  del dominio, en el instante  $t = (n + 1/2)\Delta_t$ :

$$H_{y, j}^{n+1/2} = [H_y^{n+1/2}(1 + 1/2, j), H_y^{n+1/2}(2 + 1/2, j), \dots, H_y^{n+1/2}(n_x + 1/2, j)]^T$$

Resolviendo  $n_y - 1$  sistemas como el de la ecuación (2.19) para  $j = 2, \dots, n_y$  obtendremos  $H_y^{n+1/2}$  en todos los puntos de la malla.

De manera análoga, a partir de la ecuación para el cálculo de  $E_z^{n+1}$ , (2.18a) se obtiene el sistema matricial para el cálculo de los valores de  $E_z^{n+1}$ :

$$Y_j E_{z, i}^{n+1} = RHS_i \quad (2.21)$$

con matriz de coeficientes:

$$Y_i = \begin{bmatrix} B_{1, j} & C_{1, j} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_{2, j} & B_{2, j} & C_{2, j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & A_{i, j} & B_{2, j} & C_{1, j} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_{n_x-1, j} & B_{n_x-1, j} & C_{n_x-1, j} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{n_x, j} & B_{n_x, j} \end{bmatrix}$$

donde,

$$RHS_i = [RHS(i, 1), RHS(i, 2), \dots, RHS(i, n_y + 1)]^T$$

siendo

$$\begin{aligned}
RHS_i(i, j) &= \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \epsilon_{i, j}} \left(\frac{1}{\mu_{i, j+1/2}} + \frac{1}{\mu_{i, j-1/2}}\right)\right) E_z^{n+1}(i, j) \\
&- \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \mu_{i, j-1/2} \epsilon_{i, j}} E_z^{n+1}(i, j-1) - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \mu_{i, j+1/2} \epsilon_{i, j}} E_z^{n+1}(i, j+1) \\
&+ \frac{\Delta_t}{\epsilon_{i, j} \Delta_x} \left(H_y^{n+1/2}(i + 1/2, j) - H_y^{n+1/2}(i - 1/2, j)\right) \\
&- \frac{\Delta_t}{\epsilon_{i, j} \Delta_y} \left(H_y^{n+1/2}(i, j + 1/2) - H_y^{n+1/2}(i, j - 1/2)\right) \quad (2.22a)
\end{aligned}$$

$$RHS_i(i, 1) = RHS_i(i, n_y + 1) = 0 \quad (2.22b)$$

y

$$A_{i,j} = -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2\mu_{i,j-1/2}\epsilon_{i,j}} \quad B_{i,j} = 1 + \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2\epsilon_{i,j}} \left( \frac{1}{\mu_{i,j+1/2}} + \frac{1}{\mu_{i,j-1/2}} \right) \quad C_{i,j} = -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2\epsilon_{i,j}\mu_{i,j+1/2}}$$

Resolviendo el sistema (2.21) se obtiene la solución de los valores del campo en la fila  $i$  del dominio, en el instante  $t = n\Delta_t$ :

$$E_{z,i}^{n+1} = [E_z^{n+1}(i, 1), E_z^{n+1/2}(i, 2), \dots, E_z^{n+1}(i, n_y + 1)]^T$$

Resolviendo  $n_x - 1$  sistemas como el de la ecuación (2.21) para  $i = 2, \dots, n_x$  obtendremos  $E_{z,i}^{n+1}$  en todos los puntos de la malla en un instante temporal dado.

En resumen, el algoritmo Leapfrog ADI-FDTD sigue los siguientes pasos en cada iteración temporal (partimos de los valores de  $H_x^{n-1/2}$ ,  $H_y^{n+1/2}$  y  $E_z^{n-1}$ ):

- Cálculo de  $H_x^{n+1/2}$  mediante (2.18b)
- Cálculo de  $RHS_j^n$  con (2.22) y se resuelven  $n_y - 1$  sistemas tri-diagonales como (2.19) para el cálculo de  $H_y^{n+1/2}$  en todos los puntos de la malla.
- Cálculo de  $RHS_i^n$  con (2.22) y se resuelven  $n_x - 1$  sistemas tri-diagonales como (2.21) para el cálculo de  $E_z^{n+1}$  en todos los puntos de la malla.

Tras realizar estos pasos se conocen los valores de  $H_x^{n+1/2}$ ,  $H_y^{n+1/2}$  y  $E_z^{n+1}$  y se procede a calcular los valores de los campos en el siguiente paso temporal. El diagrama de flujo se muestra en la figura 2.5.

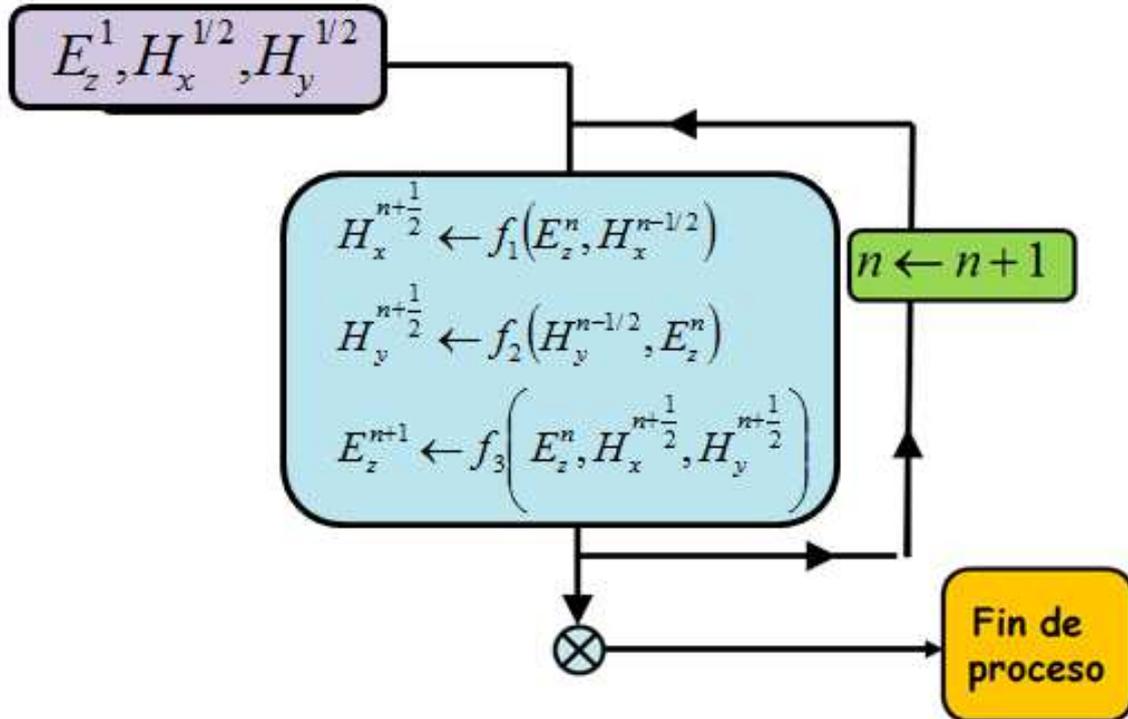


Figura 2.5: Diagrama de flujo del método Leapfrog ADI-FDTD.

## 2.7. Fuente o excitación

Los algoritmos FDTD nos dan la propagación de la onda a lo largo del tiempo, pero para ello es necesario introducir fuentes. La excitación que se introduce a través de la componente  $J_z$  en uno o varios puntos de la malla, (2.5c). Se han implementado dos tipos de excitaciones según su distribución frecuencial; armónica y gaussiana modulada en frecuencia.

### 2.7.1. Sinusoidal

La excitación armónica es una función seno que en cada iteración temporal toma el valor:

$$h^n \equiv h(n\Delta_t) = A \sin(\omega_0 n\Delta_t + \phi_0) \quad (2.23)$$

donde  $A$  es la amplitud,  $f_0$  la frecuencia y  $\phi_0$  el desfase inicial.

### 2.7.2. Gaussiana modulada

La expresión de la excitación de tipo gaussiana modulada en frecuencia viene dada por la siguiente ecuación:

$$h(t) = A e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (2.24)$$

donde los parámetros  $\alpha$  y  $n_0$  caracterizan al pulso gaussiano. La transformada de fourier del pulso gaussiano es:

$$|H(f)| = e^{-(\pi f/\alpha)^2}$$

En la figura 2.6 se muestra una excitación de tipo gaussiana modulada, vemos como el pulso gaussiano envuelve a la modulación en frecuencia de la señal.

Para el correcto funcionamiento del algoritmo las fuentes deben ser suaves y no comenzar bruscamente. El parámetro  $\alpha$  nos permite definir la atenuación de la gaussiana, si la atenuación deseada a una determinada frecuencia  $f_c$  es  $-A_f$  dB entonces

$$-A_f = 20 \log |H(f_c)| = e^{-(\pi f_c/\alpha)^2}$$

despejando

$$\alpha = \frac{\pi f_c}{\sqrt{\ln 10^{A_f/20}}}$$

En la figura 2.6 se representa un pulso gaussiano para  $A_f = 50$ .

Si deseamos una atenuación del valor de la gaussiana en  $t = 0$  respecto a su valor máximo de  $-A_t$  dB entonces

$$-A_t = 20 \log \left( \frac{h(0)}{h_{\text{máx}}} \right)$$

despejando

$$n_0 = \frac{\sqrt{\ln 10^{A_t/20}}}{\alpha \Delta_t}$$

En la figura 2.7 se representa un pulso gaussiano para  $A_t = 200$ .

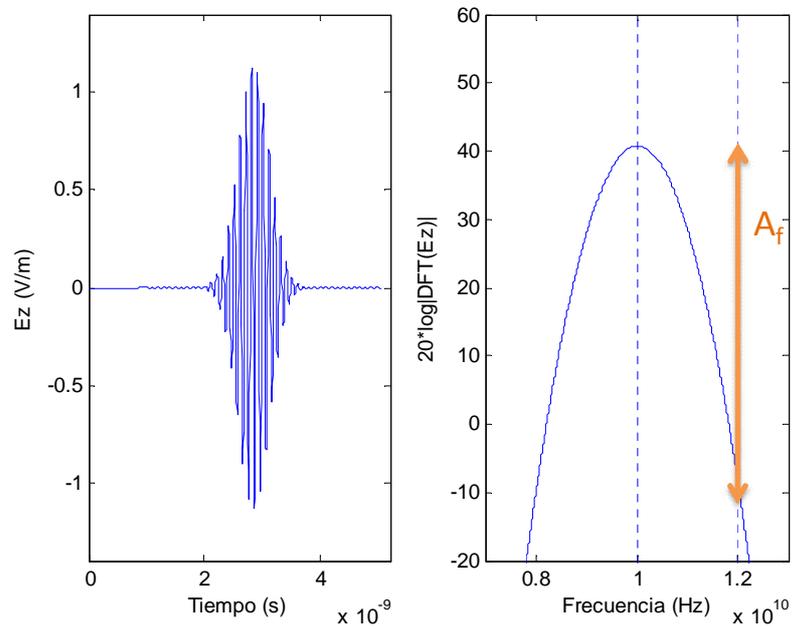


Figura 2.6: Excitación de tipo gaussiana modulada y su transformada de Fourier,  $f_0 = 10$  GHz,  $f_c = 1,2$  GHz y  $A_f = 50$ .

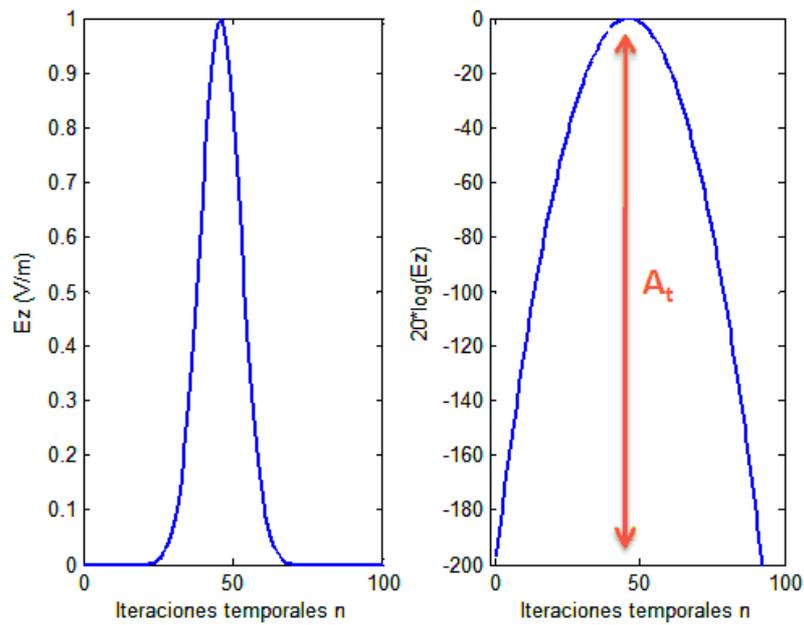


Figura 2.7: Excitación de tipo pulso gaussiano,  $f_c = 20$  GHz y  $A_t = 200$ .

## 2.8. Propiedades numéricas

La aplicación satisfactoria de los métodos FDTD para resolver problemas concretos depende en gran medida del conocimiento de las propiedades numéricas del método, en particular de la estabilidad y de la dispersión numérica. En este apartado se van a estudiar las propiedades numéricas del método Leapfrog ADI-FDTD. Se desea comprobar la estabilidad del método y obtener su relación de dispersión.

### 2.8.1. Estabilidad

Los métodos en diferencias finitas se obtienen tras aplicar la aproximación en diferencias finitas a las ecuaciones del rotacional de Maxwell. Debido a la precisión finita de cálculo de un ordenador, cuando una ecuación en diferencias se resuelve mediante un proceso iterativo, se producen errores de redondeo. Los errores pueden crecer con el número de iteraciones o permanecer acotados. Estudiar la estabilidad de un esquema en diferencias consiste en determinar las condiciones que deben cumplir los parámetros del problema para que los errores de redondeo permanezcan acotados a lo largo del proceso de cálculo.

Para comprobar la estabilidad del método Leapfrog ADI FDTD se ha utilizado el método de Von Neumann, al igual que en [7]. El análisis de estabilidad de von Neumann se basa en la descomposición de los errores en serie de Fourier, quedándose con el primer término del desarrollo.

El método consiste en sustituir soluciones de la forma

$$U^n(i, j) = U_0 Z^n e^{-\mathbf{j}(i\Delta_x k_x + j\Delta_y k_y)} \quad (2.25)$$

en las ecuaciones del método y operar hasta expresarlas de la forma  $U^{n+1} = ZU^n$ . Se ha escrito en negrita la unidad imaginaria  $\mathbf{j}$  para distinguirla de los índices espaciales. La variable compleja  $Z$  se denomina factor de amplificación y proporciona el crecimiento del error en una iteración temporal ( $\varepsilon^{n+1}(i, j) = Z\varepsilon^n(i, j)$ ). El criterio de estabilidad de von Neumann afirma que para que el esquema sea estable debe cumplirse  $|Z| \leq 1$ . Es decir, que el error no crezca a medida que aumentan las iteraciones temporales.

Procedemos entonces a comprobar la estabilidad de nuestro algoritmo. Como hemos dicho, para empezar se sustituyen expresiones de los campos del tipo (2.25) en las ecuaciones características del método (2.18). Una manera rápida de hacerlo es sustituir directamente los autovalores de los operadores en diferencias:

$$\delta_\xi U^n \Rightarrow -2\mathbf{j} \sin\left(\frac{\Delta_\xi k_\xi}{2}\right) U^n$$

$$\delta_\xi^2 U^n \Rightarrow -4 \sin^2\left(\frac{\Delta_\xi k_\xi}{2}\right) U^n$$

con  $\xi = x, y$ .

Las ecuaciones resultantes tras las sustituciones se muestran a continuación. Para simplificar los cálculos se ha considerado las ecuaciones para medios homogéneos.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_y^2 \epsilon \mu} \sin^2 \left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)\right) E_z^{n+1} &= \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_y^2 \epsilon \mu} \sin^2 \left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)\right) E_z^n \\ &+ \frac{\Delta_t}{\epsilon} \left( \frac{2\mathbf{j} \sin\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)}{\Delta_y} H_x^{n+1/2} + \frac{-2\mathbf{j} \sin\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)}{\Delta_x} H_y^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$H_x^{n+1/2} = H_x^{n-1/2} + \mathbf{j} \frac{\Delta_t}{\mu} \frac{\sin\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)}{\Delta_y} E_z^n \quad (2.26b)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_x^2 \epsilon \mu} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)\right) H_y^{n+1/2} &= \\ \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_x^2 \epsilon \mu} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)\right) H_y^{n-1/2} &- 2\mathbf{j} \frac{\Delta_t}{\mu} \frac{\sin\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)}{\Delta_x} E_z^n \end{aligned} \quad (2.26c)$$

Ahora teniendo en cuenta que  $U^{n+1} = ZU^n$  resulta el siguiente sistema homogéneo:

$$AU^n = 0$$

donde  $U^n = (E_z^n, H_x^{n-1/2}, H_y^{n-1/2})$  y la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_y^2 \epsilon \mu} \sin^2\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)\right) (Z - 1) & -\mathbf{j} \frac{2\Delta_t}{\epsilon} Z \frac{\sin\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)}{\Delta_y} & \mathbf{j} \frac{2\Delta_t}{\epsilon} Z \frac{\sin\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)}{\Delta_x} \\ -\mathbf{j} \frac{2\Delta_t}{\mu} \frac{\sin\left(\frac{k_y \Delta_y}{2}\right)}{\Delta_y} & (Z - 1) & 0 \\ \mathbf{j} \frac{2\Delta_t}{\mu} \frac{\sin\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)}{\Delta_x} & 0 & \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{\Delta_x^2 \epsilon \mu} \sin^2\left(\frac{k_x \Delta_x}{2}\right)\right) (Z - 1) \end{pmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución distinta a la trivial su determinante debe ser nulo. Igualando el determinante a cero obtenemos el siguiente polinomio:

$$P(Z) = (Z - 1)S(Z)$$

donde

$$S(Z) = (1 + \nu_y^2) (1 + \nu_x^2) Z^2 + 2Z [(1 + \nu_y^2) (1 + \nu_x^2) - 2] + (1 + \nu_y^2) (1 + \nu_x^2) \quad (2.27)$$

y

$$\nu_\xi^2 = \frac{\Delta_t^2}{\epsilon \mu \Delta_\xi^2} \sin^2 \left( \frac{\tilde{k}_\xi \Delta_\xi}{2} \right) \quad \text{con } \xi = x, y$$

Las dos raíces del polinomio de estabilidad  $S(Z)$  son complejas conjugadas y de módulo unidad. Luego se cumple el criterio de estabilidad como queríamos demostrar. El método es incondicionalmente estable.

### 2.8.2. Relación de dispersión

Se define la relación de dispersión como relación entre la frecuencia y número de onda. La relación de dispersión, ecuación (2.29), se obtiene tras sustituir una onda plana en las ecuaciones de Maxwell para la polarización  $TM^z$  (2.5). Las ondas planas son ondas de frecuencia constante, cuyos frentes de onda son planos paralelos de amplitud constante normales al vector de onda  $\vec{k}$ . Las ondas planas tienen la siguiente expresión:

$$U(\vec{r}, t) = U_0 e^{-\mathbf{j}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.28)$$

La relación de dispersión es:

$$\omega^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} (k_x^2 + k_y^2) \quad (2.29)$$

Sin embargo, debido a la aplicación del método de diferencias finitas, en los resultados obtenidos con FDTD aparecen efectos de dispersión y anisotropía, que no tienen origen físico. Estos efectos se deben a la sustitución de un problema continuo por uno discreto, y deben ser estudiados, para evitar en la medida de lo posible, que afecten a los resultados.

La relación de dispersión numérica del método se obtiene de manera análoga al sustituir una onda plana en las ecuaciones características del método (2.18). La expresión de una onda plana una vez discretizada queda:

$$U^n(i, j) = U_0 e^{\mathbf{j}\omega n \Delta_t} e^{-\mathbf{j}(i\Delta_x k_x + j\Delta_y k_y)} \quad (2.30)$$

Aprovechando los cálculos realizados anteriormente para el estudio de la estabilidad, es equivalente a sustituir  $Z = e^{\mathbf{j}\omega n \Delta_t}$  en el polinomio  $S(Z)$ . De esta manera obtenemos la ecuación de dispersión numérica del método:

$$\begin{aligned} \tan^2\left(\frac{\omega \Delta_t}{2}\right) &= \frac{\Delta_t^2}{\epsilon\mu\Delta_x^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta_x}{2}\right) + \frac{\Delta_t^2}{\epsilon\mu\Delta_y^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta_y}{2}\right) \\ &+ \frac{\Delta_t^2}{\epsilon\mu\Delta_x^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta_x}{2}\right) \frac{\Delta_t^2}{\epsilon\mu\Delta_y^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta_y}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $\Delta_t$  es el paso temporal,  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  las dimensiones de la celda y  $\tilde{k}$  la constante de fase numérica (para distinguirla de la constante de fase exacta  $k$ ).

La ecuación de dispersión obtenida se trata de una ecuación no lineal. Nos indica que la velocidad de fase numérica  $\tilde{v}$  está condicionada por la frecuencia y el ángulo de propagación.

$$\tilde{v}_p(f) = \frac{\omega}{\tilde{k}} \neq \text{const.}$$

Además de la dispersión numérica (dependencia de la frecuencia), tenemos la anisotropía numérica (dependencia del ángulo de propagación). En el capítulo 3 se estudiarán estos fenómenos con mayor profundidad.

# Capítulo 3

## Resultados

En este capítulo se muestran los resultados del trabajo. El contenido está organizado de la siguiente manera:

- En la primera parte se ha estudiado la dispersión del método, ecuación (2.31), en función de los distintos parámetros de los que depende: el ángulo de propagación  $\phi$ , el número de celdas por longitud de onda  $N_\lambda$ , y el parámetro de estabilidad  $s$ . Los resultados se han presentado en función del error relativo, ya que lo que nos interesa no es el valor de la constante de fase, sino la diferencia entre los datos numéricos ( $\tilde{k}$ ) con los exactos ( $k$ ), es decir, el error que introduce el algoritmo. Además, se ha comprobado que el Leapfrog ADI-FDTD se trata de un método de segundo orden.
- En la segunda parte se presentan los resultados obtenidos con las simulaciones del método implementado. Se ha obtenido la constante de fase a partir de las simulaciones y comparado ésta con la constante de fase numérica obtenida de manera teórica a partir de la ecuación de dispersión.
- Por último, a modo de ejemplo, se ha simulado la propagación de una onda plana en una guía rectangular.

### 3.1. Propiedades del método Leapfrog ADI-FDTD

#### 3.1.1. Resolución de la ecuación de dispersión numérica

En el capítulo 2 obtuvimos la relación de dispersión del método Leapfrog ADI-FDTD (2.31). Ahora vamos estudiar la dispersión del método en función de los distintos parámetros de los que depende. La ecuación de dispersión del método es una ecuación trascendente, por tanto para su resolución buscaremos los ceros de la función  $F$ :

$$\begin{aligned} F(\omega, \tilde{k}, \phi, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_t) = & \tan^2\left(\frac{\omega\Delta_t}{2}\right) - \frac{\Delta_t^2}{\varepsilon\mu\Delta_x^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta_x}{2}\right) - \frac{\Delta_t^2}{\varepsilon\mu\Delta_y^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta_y}{2}\right) \\ & - \frac{\Delta_t^2}{\varepsilon\mu\Delta_x^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta_x}{2}\right) \frac{\Delta_t^2}{\varepsilon\mu\Delta_y^2} \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta_y}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $\tilde{k} = \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2}$  es la constante de propagación numérica. La ecuación de dispersión depende tanto de la frecuencia  $f$ , como de los incrementos espaciales  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  y del incremento temporal  $\Delta_t$ .

La expresión general de la constante de propagación de una onda en un medio es  $\gamma = jk = \alpha + j\beta$ , donde  $\alpha$  se denomina constante de atenuación y  $\beta$  constante de fase. En el caso de un medio sin pérdidas, como el considerado en los resultados, la constante de atenuación es nula  $\alpha = 0$ , de manera que  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k$ .

La constante de propagación es el módulo del vector de onda, un vector paralelo a la dirección de propagación de la onda plana. Podemos expresar las componentes del vector de onda como  $\tilde{k}_x = \tilde{k} \cos \phi$  y  $\tilde{k}_y = \tilde{k} \sin \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo de propagación de la onda plana, ángulo entre el vector de onda  $\vec{k}$  y el eje de abscisas, figura 3.1.

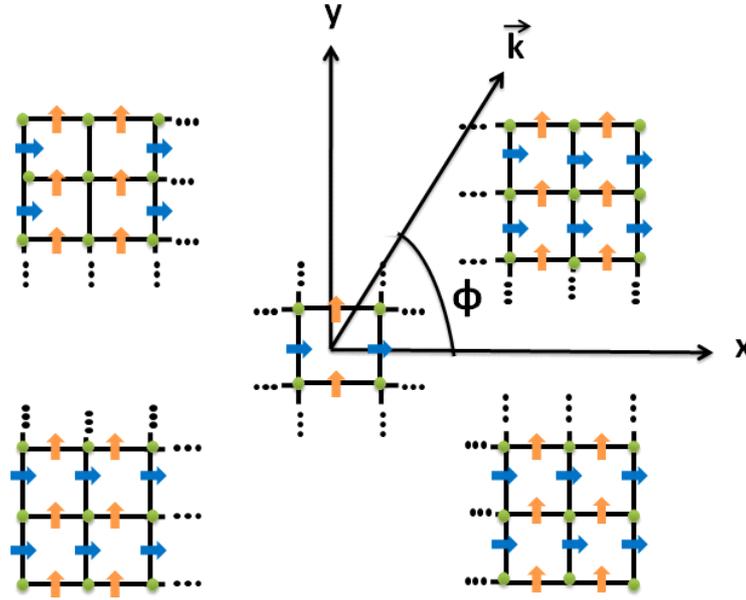


Figura 3.1: Esquema dominio de cómputo. Ángulo de propagación  $\phi$  y vector de onda  $k$ .

Teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Celdas cuadradas;  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_s$ .
- Propagación en el vacío,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$ .

La ecuación (3.1) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 F(f, \tilde{k}, \phi, \Delta_s, \Delta_t) = & \tan^2(\pi f \Delta_t) - \frac{c^2 \Delta_t^2}{\Delta_s^2} \sin^2\left(\frac{\Delta_s \tilde{k} \cos \phi}{2}\right) - \frac{c^2 \Delta_t^2}{\Delta_s^2} \sin^2\left(\frac{\Delta_s \tilde{k} \sin \phi}{2}\right) \\
 & - \frac{c^4 \Delta_t^4}{\Delta_s^4} \sin^2\left(\frac{\Delta_s \tilde{k} \cos \phi}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\Delta_s \tilde{k} \sin \phi}{2}\right) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

donde  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792598 \text{ m/s}$  es la velocidad de la luz en el vacío.

El incremento espacial se puede definir en función del número de celdas por longitud de onda  $N_\lambda$ :

$$\Delta_s = \frac{\lambda}{N_\lambda} \quad (3.3)$$

El incremento de tiempo se puede definir en función de el número de incrementos temporales por periodo  $N_t$

$$\Delta_t = \frac{T}{N_t} \quad (3.4)$$

o en función del parámetro de estabilidad  $s$ , ecuación (3.6).

Recordemos que el método leapfrog ADI-FDTD es un método numérico y que por tanto sus soluciones llevan asociado un error, que hace que aparezca una dispersión y anisotropía de origen no físico. Queremos saber cómo afectan los distintos parámetros a la dispersión. Se han buscado los valores de la constante de fase  $\tilde{k}$  que anulan  $F(f, \tilde{k}, \phi, \Delta_s, \Delta_t)$ , considerando como datos  $\Delta_s, \Delta_t$  y  $\phi$ . Para ello se ha implementado la ecuación en MatLab y mediante la función `fminsearch()` se van barriendo los valores de la constante de fase  $\tilde{k}$  hasta encontrar el valor que anula  $F$ .

En la figura 3.2 se muestran los valores de  $\tilde{k}$  encontrados para distintos valores del ángulo de propagación  $\phi$ . En la gráfica de la izquierda se muestra la constante de fase (parte imaginaria) y en la gráfica derecha la constante de atenuación (parte real). Además se ha representado la constante de fase exacta ( $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ). Podemos ver como el método introduce error en la constante de fase, pero no introduce pérdidas. También se puede observar la dependencia del error de la constante de fase con el ángulo de propagación. Se ha representado desde  $\phi = 0^\circ$  a  $\phi = 90^\circ$ , pues para ángulos mayores hay simetría como veremos más adelante. El error es máximo para ondas que se propagan en la dirección de los ejes ( $\phi = 0^\circ, 90^\circ$ ) y mínimo para ondas que se propagan en la dirección diagonal ( $\phi = 45^\circ$ ).

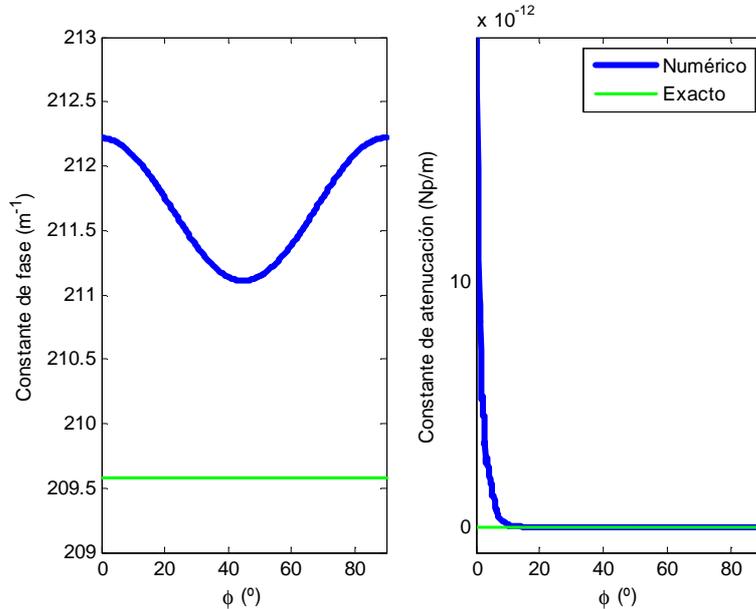


Figura 3.2: Constante de propagación numérica y teórica en función del ángulo de propagación  $\phi$ ,  $f_0 = 10$  GHz,  $N_\lambda = N_t = 20$ .

### 3.1.2. Comportamiento del error de la constante de fase

De ahora en adelante los resultados obtenidos se van a presentar en función del error relativo de la constante de fase:

$$\text{error relativo } \tilde{k} (\%) = 100 \times \frac{\tilde{k} - k}{k} \quad (3.5)$$

donde  $\tilde{k}$  es la constante de fase numérica, obtenida a partir de la ecuación de dispersión del método (3.2), y  $k$  es la constante de fase exacta, obtenida de la ecuación de dispersión exacta (2.29).

Ya en la figura 3.2 vimos que el error dependía del ángulo de propagación. En la figura 3.3 se ha representado el error en función del ángulo de propagación desde  $\phi = 0^\circ$  hasta  $\phi = 360^\circ$ . La dependencia del error de la constante de fase respecto a los ejes de coordenadas es simétrica, por ello, de ahora en adelante en las representaciones sólo se tendrán en cuenta ángulos de propagación del primer cuadrante, de  $\phi = 0^\circ$  a  $90^\circ$ . El error es máximo en los ejes de abscisas y ordenadas  $\phi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  y mínimo en las diagonales  $\phi = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ , respecto a las cuales también presenta simetría. Además, podemos ver como el error para el caso de  $N_\lambda = 40$  es menor que para  $N_\lambda = 20$ .

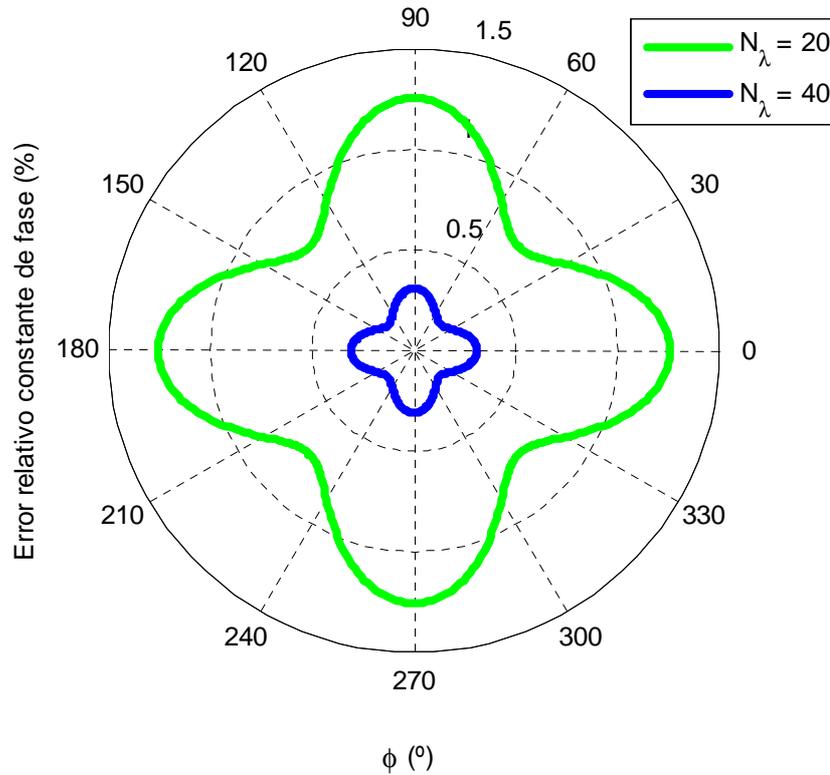


Figura 3.3: Representación polar del error relativo de la constante de fase en función del ángulo de propagación  $\phi$  para el caso  $N_\lambda = N_t$ , con  $N_\lambda = 20$  (verde) y  $N_\lambda = 40$  (azul).

A continuación vamos a estudiar como varía el error en función de los parámetros  $N_\lambda$  y  $N_t$ . Buscamos saber qué valores son necesarios para obtener resultados con un error razonable. En la figura 3.4 se representa el error de la constante de fase en función del número de celdas por longitud de onda (izq.) y en función del número de iteraciones por periodo (dcha.). El error disminuye al aumentar el número de celdas por longitud de onda (disminuir  $\Delta_s$ ) y al aumentar el número de iteraciones por periodo (disminuir  $\Delta_t$ ). Aunque la elección de los parámetros  $N_\lambda$  y  $N_t$  dependerá de la precisión que necesitemos, observando la figura podríamos decir que para obtener resultados que no se alejen mucho de la solución real debido al error que introduce el algoritmo, deberíamos escoger valores tales que  $N_\lambda \gtrsim 20$  y  $N_t \gtrsim 20$ .

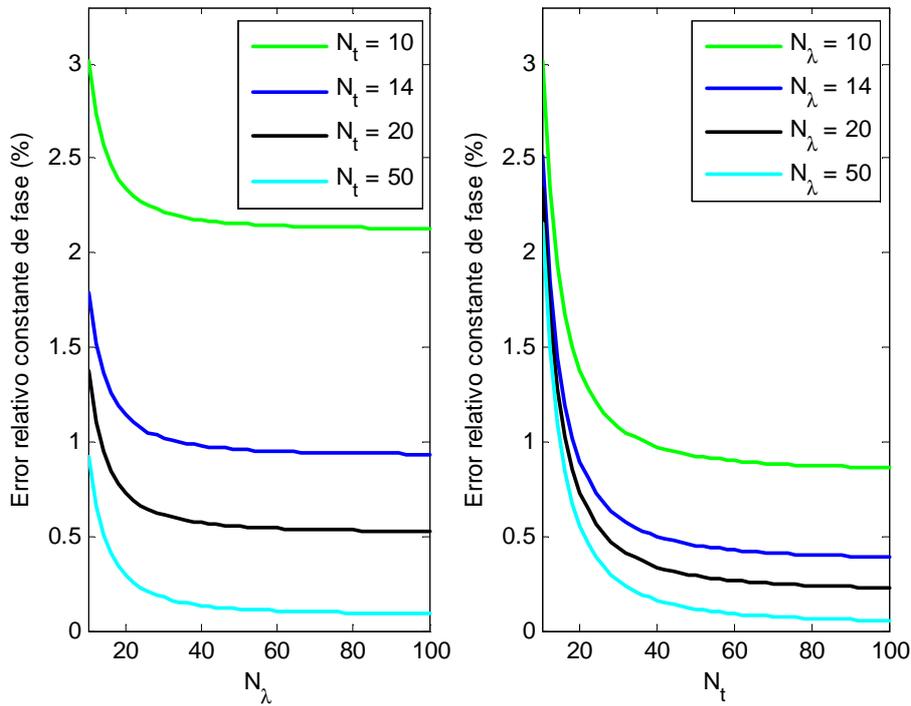


Figura 3.4: Error relativo de la constante de fase en función del número de celdas por longitud de onda  $N_\lambda$  (dcha) y en función del número de iteraciones por periodo  $N_t$  (izq.). Ángulo de propagación  $\phi = 45^\circ$ .

En la figura 3.4 se ha visto la relación entre el error y el incremento temporal, concretamente en función de  $N_t$ , sin ninguna restricción para elegir los valores de éste. Esto se debe a que el método Leapfrog ADI-FDTD es incondicionalmente estable, sin embargo en el caso del FDTD convencional, debido a la condición de estabilidad, deberíamos haber tenido en cuenta la restricción del incremento temporal

Recordemos que para el caso de dos dimensiones la condición de estabilidad del FDTD convencional es:

$$\Delta t = s \cdot \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} \right)^{-1/2} \quad \text{con } s \leq 1 \quad (3.6)$$

De manera que en el FDTD convencional el parámetro de estabilidad debe ser menor o igual que la unidad,  $s \leq 1$ . Sin embargo, en los métodos incondicionalmente estables podemos escoger el incremento temporal que queramos. En el método Leapfrog ADI-FDTD la elección de los incrementos espaciales y temporales vendrá marcada únicamente por la exactitud de la solución que busquemos, sin tener que cumplir ninguna restricción, pudiendo tomar el parámetro de estabilidad  $s$  valores mayores a la unidad.

Queremos determinar en qué casos resulta más conveniente la elección de un método condicionalmente estable y cuales podemos escoger un método incondicionalmente estable manteniendo un error razonable. Debido a la resolución de sistemas implícitos una iteración de un método incondicionalmente estable es siempre más lenta que la de un método condicionalmente estable explícito. Por eso, para que resulte interesante utilizar el método Leapfrog ADI-FDTD debemos usar valores de  $s \geq 3, 4$ , de manera que ahorremos tiempo de computación.

En la figura 3.5 se muestra el error de la constante de fase en función del ángulo de propagación para  $s = 1, 2, 3, 4$ , en la gráfica de la izquierda para  $N_\lambda = 20$  y en la gráfica de la derecha para  $N_\lambda = 40$ . Para estos valores de  $N_\lambda$  el error para  $s \geq 3, 4$  es demasiado grande. Luego para valores de  $N_\lambda$  moderados resulta más conveniente el método FDTD convencional, que además para valores moderados de  $N_\lambda$  presenta tiempos de computación razonables.

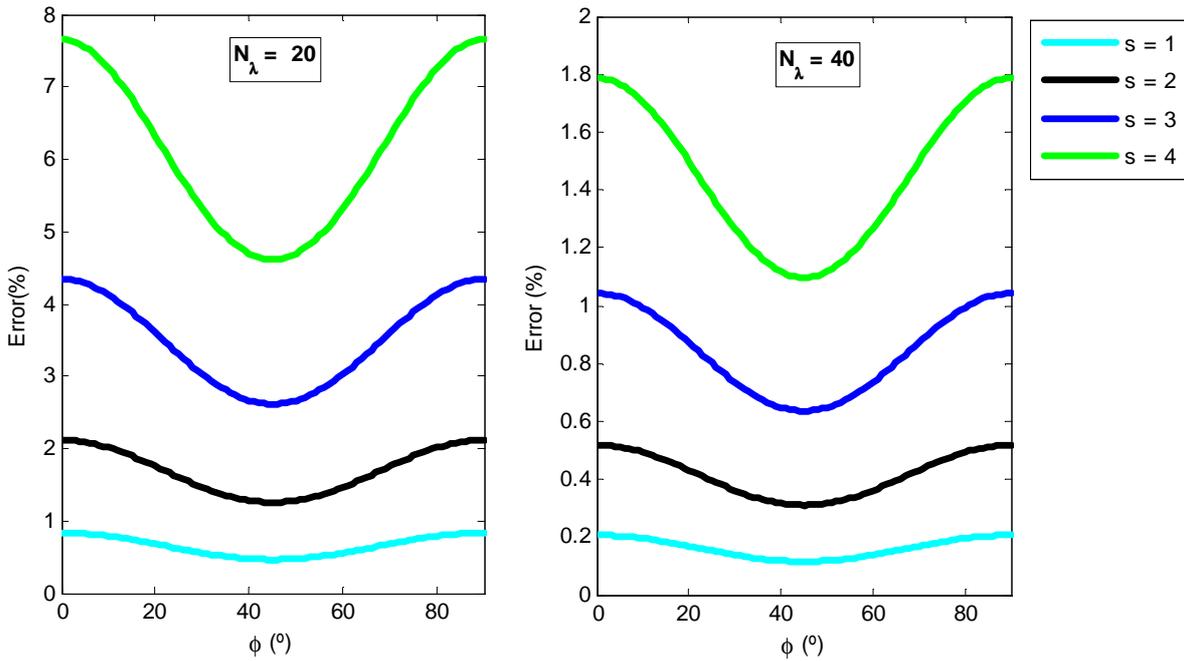


Figura 3.5: Error relativo de la constante de fase en función del ángulo de propagación  $\phi$  con  $s = 1, 2, 3, 4$  para  $N_\lambda = 20$  y  $N_\lambda = 40$ .

Ahora vamos a ver qué ocurre en los casos en los que se requiere un mallado fino (valores de  $N_\lambda$  mayores). En la figura 3.6 se muestra el error de la constante de fase en función del ángulo de propagación para  $s = 1, 2, 4, 6, 12$ , en la gráfica de la izquierda para  $N_\lambda = 80$  y en a

la derecha para  $N_\lambda = 160$ . Observamos como para valores de  $N_\lambda$  en este rango sí que podemos obtener buenos resultados para  $s \geq 3, 4$ , ahorrando tiempo de computación pero manteniendo errores razonables. Podemos mantener un error inferior al 1 % en el caso de  $N_\lambda = 80$  con  $s = 6$  y en el caso de mallado ultrafino  $N_\lambda = 160$  incluso con  $s = 12$ .

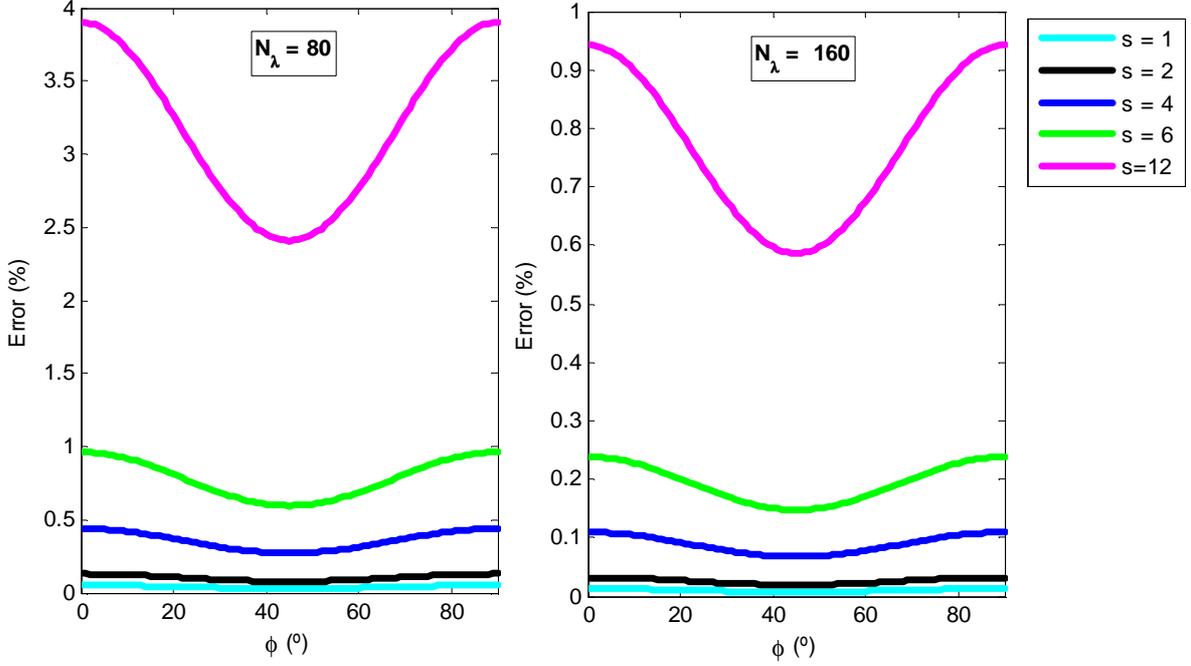


Figura 3.6: Error relativo de la constante de fase en función del ángulo de propagación  $\phi$  para  $s = 1, 2, 4, 6, 8, 12$  para  $N_\lambda = 80$  y  $N_\lambda = 160$ .

Resumiendo para mallados normales los métodos condicionalmente estables resultan la mejor opción y para mallados finos los métodos incondicionalmente estables resuelven el problema del excesivo tiempo de cálculo debido a la condición de estabilidad. Dentro de los métodos incondicionalmente estables, la dispersión introducida por el método Leapfrog ADI-FDTD es igual a la introducida por el ADI-FDTD [8], y puesto que el Leapfrog ADI-FDTD es más rápido es mejor opción.

### 3.1.3. Orden de la aproximación del método

El error de un método numérico (valor aproximado menos valor exacto) es en general de la forma:

$$Error(\Delta_s) \simeq C\Delta_s^p \quad (3.7)$$

donde  $C$  es una constante y  $p$  el orden de la aproximación.

La aproximación de diferencias finitas utilizada para la obtención de las ecuaciones del método Leapfrog ADI-FDTD ha sido la aproximación centrada de segundo orden, ecuaciones (2.10) y (2.17). Teniendo además en cuenta que la aplicación reiterada de operadores de orden  $p$  es también un operador de orden  $p$ , esperamos que el método sea de segundo orden ( $p = 2$ ).

Si consideramos el número de celdas por longitud de onda  $N_\lambda$  en vez del tamaño de la celda  $\Delta_s$  y tomamos logaritmos entonces la ecuación (3.7) queda como una recta de pendiente  $m = -2$ :

$$\log(\text{Error}(N_\lambda)) \simeq -p \log N_\lambda + C_2$$

En la figura 3.7 se ha representado el error relativo de la constante de fase en función del número de longitudes de onda en escala doblemente logarítmica para distintos valores del ángulo de propagación. Se ha representado también una recta de pendiente  $m = -2$ . Se puede ver como las rectas obtenidas son paralelas a la recta de pendiente  $m = -2$ , luego queda comprobado que el método Leapfrog ADI-FDTD se trata de un método de segundo orden.

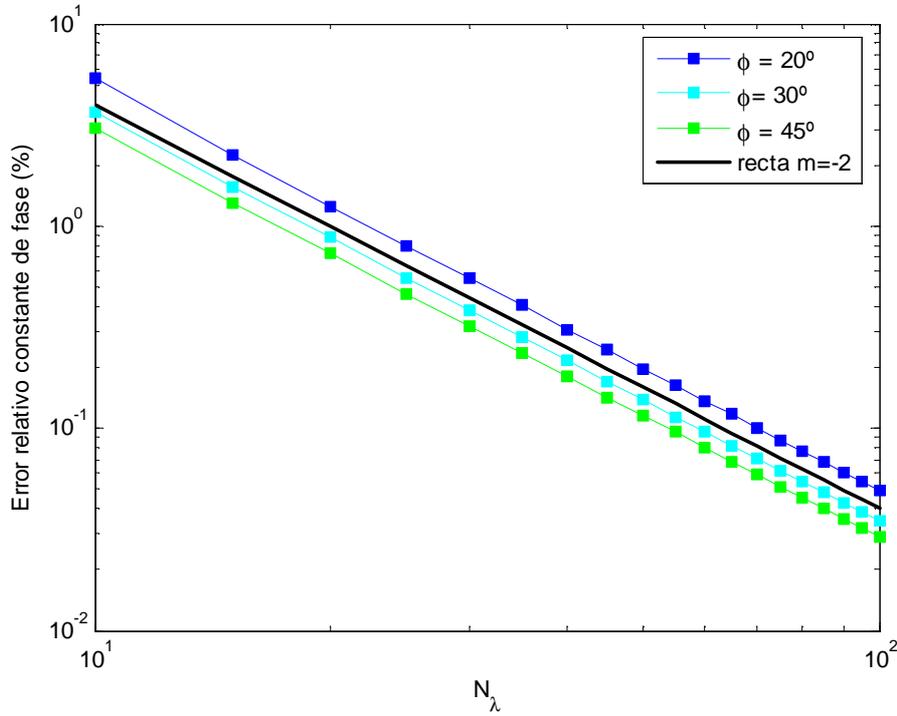


Figura 3.7: Error relativo de la constante de fase en función del número de celdas por longitud de onda para tres ángulos de propagación en escala log-log. En negro recta  $\text{Error}(N_\lambda) \simeq 400N_\lambda^{-2}$ .

### 3.2. Simulaciones

Hasta ahora hemos obtenido valores teóricos de la constante de fase, comparando la constante de fase exacta  $k$  con la constante de fase numérica  $\tilde{k}$ . La constante de fase numérica la obtuvimos a partir de la ecuación de dispersión del algoritmo, que obtuvimos tras sustituir ondas planas en las ecuaciones del método. En este apartado se va a utilizar la implementación del método Leapfrog ADI-FDTD para obtener la constante de fase numérica.

Para empezar se van a comentar algunos detalles de la implementación del algoritmo. Después se va a obtener la constante de fase del método mediante la simulación y comprobar que coincide con la constante de fase numérica  $\tilde{k}$ . Y para terminar se ha implementado la propagación del modo  $TE_{10}^x$  en una guía de onda.

### 3.2.1. Implementación del algoritmo

Para la obtención del algoritmo se han implementado las ecuaciones (2.18b), (2.21) y (2.19). Para poder implementar dichas ecuaciones se han de redefinir los índices espaciales de  $H_x$  y  $H_y$  de manera que todos sean enteros, ecuaciones (3.8). Se han realizado los siguientes cambios  $i + 1/2 \rightarrow i$ ,  $j + 1/2 \rightarrow j$ ,  $i - 1/2 \rightarrow i - 1$ ,  $j - 1/2 \rightarrow j - 1$ , figura 3.8.

$$H_x^{n+1/2}(i, j) = H_x^{n-1/2}(i, j) - \frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1/2}} \frac{\delta_y}{\Delta y} E_z^n(i, j + 1/2) \quad (3.8a)$$

$$X_j H_{y,j}^{n+1/2} = RHS_j \quad (3.8b)$$

$$Y_j E_z^{n+1} = RHS_i \quad (3.8c)$$

con

$$\begin{aligned} RHS_j(i, j) &= -\frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_0 \epsilon_0} H_{y,j}^{n-1/2}(i-1, j) + \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{2\Delta_x^2 \mu_0 \epsilon_0}\right) H_{y,j}^{n-1/2}(i, j) \\ &\quad - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_x^2 \mu_0 \epsilon_0} H_{y,j}^{n-1/2}(i+1, j) + \frac{\Delta_t}{\Delta_x \mu_0} (E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)) \\ RHS_i(i, j) &= \left(1 + \frac{\Delta_t^2}{2\Delta_y^2 \mu_0 \epsilon_0}\right) E_z^{n+1}(i, j) - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \mu_0 \epsilon_0} E_z^{n+1}(i, j-1) - \frac{\Delta_t^2}{4\Delta_y^2 \mu_0 \epsilon_0} E_z^{n+1}(i, j+1) \\ &\quad + \frac{\Delta_t}{\epsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{n+1/2}(i, j) - H_y^{n+1/2}(i-1, j)\right) - \frac{\Delta_t}{\epsilon_0 \Delta_y} \left(H_x^{n+1/2}(i, j) - H_x^{n+1/2}(i, j-1)\right) \end{aligned}$$

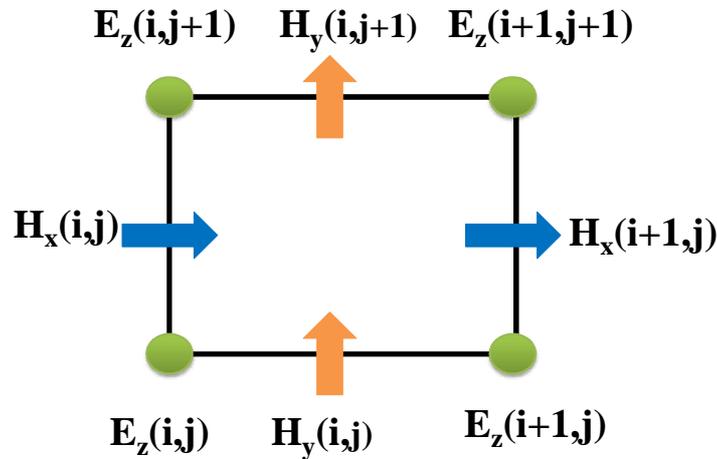


Figura 3.8: Distribución espacial de la celda unidad implementada.

Nótese que el orden de implementación de las ecuaciones es importante, la ecuación (3.8c) para el cálculo de  $E_z^{n+1}$  debe ir la última, pues necesita  $H_y^{n+1/2}$  y  $H_x^{n+1/2}$ . Estas ecuaciones se resuelven por cada iteración temporal del algoritmo.

Para su implementación se definen las matrices de los campos  $E_z$ ,  $H_x$  y  $H_y$  donde el valor de la variable  $a_{ij}$  de la matriz se corresponde con el valor del campo en la celda  $i, j$ . Mediante la función *pcolor* de MatLab, que da un color en función de la magnitud de la variable (colores cálidos para valores positivos y fríos para valores negativos), podemos obtener la representación gráfica de la propagación de la onda a lo largo de la simulación. Sin embargo, guardar los valores de los campos en todo el dominio durante todo el tiempo de la simulación supondría un gran gasto innecesario de memoria. Por ello, únicamente se guardan (muestran) los valores que interesan para el post-procesado.

En el algoritmo implementado se han considerado condiciones de conductor eléctrico perfecto. Al ser el dominio de cómputo finito si se simula durante el tiempo suficiente la onda llegará a las paredes del dominio y se reflejará. Debido a ello, para simular ondas en el espacio libre y poder estudiar su propagación, las simulaciones se pararán antes de que la onda llegue a las paredes del dominio, de manera que la parte de la onda reflejada no distorsione los resultados.

En la implementación se han utilizado las mismas condiciones que en la sección anterior; celdas cuadradas,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_s$  y la permitividad y permeabilidad del vacío,  $\epsilon_o$  y  $\mu_o$ .

### 3.2.2. Comprobación de la ecuación de dispersión

Nuestro objetivo es obtener los valores de la constante de fase a partir de la simulación para poder compararlos con los valores de la constante de fase numérica estudiados en la sección anterior. La constante de fase de la simulación se ha obtenido como en [9], a partir de los valores de los campos en dos puntos del dominio, ecuación (3.12). Para llegar a dicha ecuación consideramos la transformada de Fourier de  $E(t)$  de dos puntos diferentes:

$$E(\omega, r_1) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, r_1) \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=1}^{N_t} E(t, r_1) \cdot e^{-j\omega t} \Delta_t \quad (3.9a)$$

$$E(\omega, r_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t, r_2) \cdot e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=1}^{N_t} E(t, r_2) \cdot e^{-j\omega t} \Delta_t \quad (3.9b)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  indican puntos del mallado.

En el caso de una onda plana tenemos que:

$$E(\omega, r_1) = E_0 \cdot e^{-\gamma r_1} \quad (3.10a)$$

$$E(\omega, r_2) = E_0 \cdot e^{-\gamma r_2} \quad (3.10b)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.9) y calculando el cociente obtenemos:

$$e^{-\gamma L} = \frac{DFT(E(t, r_1))}{DFT(E(t, r_2))}$$

donde  $L$  es la distancia entre los dos puntos, en el caso de dos celdas consecutivas  $L = \Delta_s$ . Despejando la constante de fase de la ecuación anterior llegamos a la siguiente expresión:

$$\gamma = -\frac{1}{L} \ln \left( \frac{DFT(E(t, r_1))}{DFT(E(t, r_2))} \right) \quad (3.11)$$

Puesto que  $\gamma = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ , la parte imaginaria de la ecuación (3.11) es la constante de fase  $\beta$  que buscamos. De esta forma podemos obtener la constante de fase a partir de los valores del campo en dos puntos del dominio.

Ya que tenemos la ecuación de dispersión de una onda plana, lo lógico sería obtener la constante de fase mediante la simulación de una onda plana. Sin embargo, en la práctica es más sencillo utilizar ondas cilíndricas a distancias suficientemente lejanas de la fuente. En el caso de ondas cilíndricas debemos tener en cuenta la disminución en amplitud de la onda con la distancia:

$$E(\omega, r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot e^{-\gamma r}$$

luego,

$$\begin{aligned} E(\omega, r_1) &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cdot e^{-\gamma r_1} \\ E(\omega, r_2) &= \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cdot e^{-\gamma r_2} \end{aligned}$$

quedando entonces la ecuación para el cálculo de la constante de fase:

$$\gamma = -\frac{1}{L} \ln \left( \frac{DFT(E(t, r_1))}{DFT(E(t, r_2))} \cdot \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} \right) \quad (3.12)$$

La implementación de una onda plana se complica debido a que al estar el dominio dividido en celdas no tenemos libertad para escoger los ángulos que queramos. Además, al no haber condiciones absorbentes, la onda se reflejaría en las paredes del dominio modificando los resultados. Es por esto que se ha utilizado como excitación ondas cilíndricas en el centro del dominio, que a una distancia suficiente de la fuente pueden considerarse como ondas planas. Para simular la propagación de una onda cilíndrica basta con introducir una fuente en el centro del dominio y la propagación de ésta originará un frente de onda cilíndrico como en la figura 3.11.

Para saber a partir de que distancia podríamos considerar la onda cilíndrica como plana se ha excitado una onda cilíndrica y hallado su constante de fase a distintas distancias de la fuente a lo largo de la dirección del eje de abscisas ( $\phi = 0^\circ$ ). Se ha calculado la constante de propagación numérica de una onda plana a partir de la ecuación de dispersión (3.2) para  $\phi = 0^\circ$ , y comparado los valores obtenidos con la constante de la onda cilíndrica obtenida a partir de la simulación, ecuación (3.12). En la figura 3.9 se muestra el resultado, podríamos concluir que a distancias mayores de diez longitudes de onda ( $d > 10\lambda$ ) la constante de propagación de una onda cilíndrica se asemeja a la de una onda plana.

Ahora ya disponemos de todo lo necesario para calcular la constante de fase mediante la simulación. Para obtener una figura similar a las de la sección anterior, necesitaremos calcular la constante de fase a distintos ángulos de propagación. Para ello, muestreamos el campo eléctrico en dos puntos distintos a determinados ángulos, es decir, guardaremos el valor del campo en dichos puntos para después poder obtener la constante de fase a partir de la ecuación (3.12). En la figura 3.10 se muestra un esquema de los puntos en los que se ha muestreado el campo. La fuente se coloca en el medio del cómputo y se muestrea el campo a distintos ángulos de propagación manteniendo siempre una distancia mayor de  $10\lambda$  de la fuente.

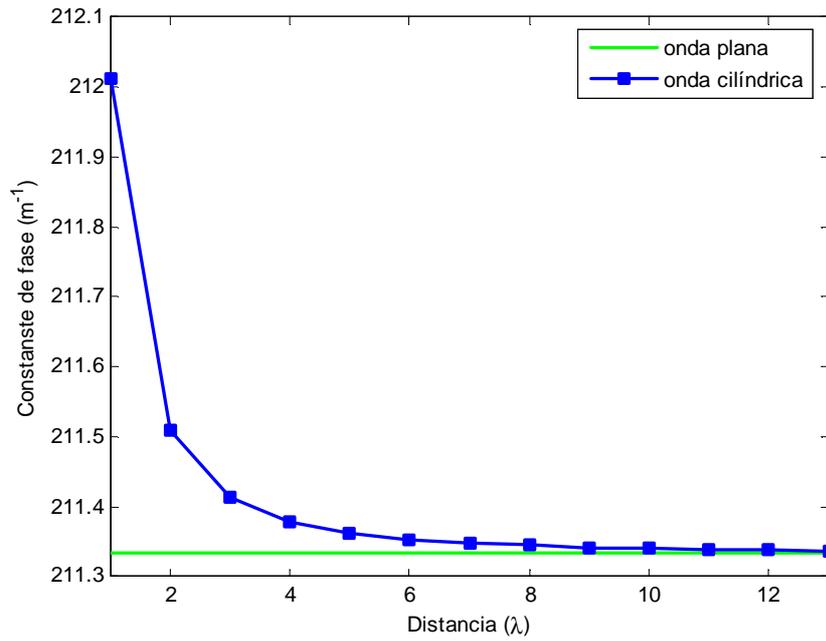


Figura 3.9: Constante de fase de una onda cilíndrica (simulación) y una onda plana (ecuación de dispersión numérica) en función de la distancia a la fuente en longitudes de onda.

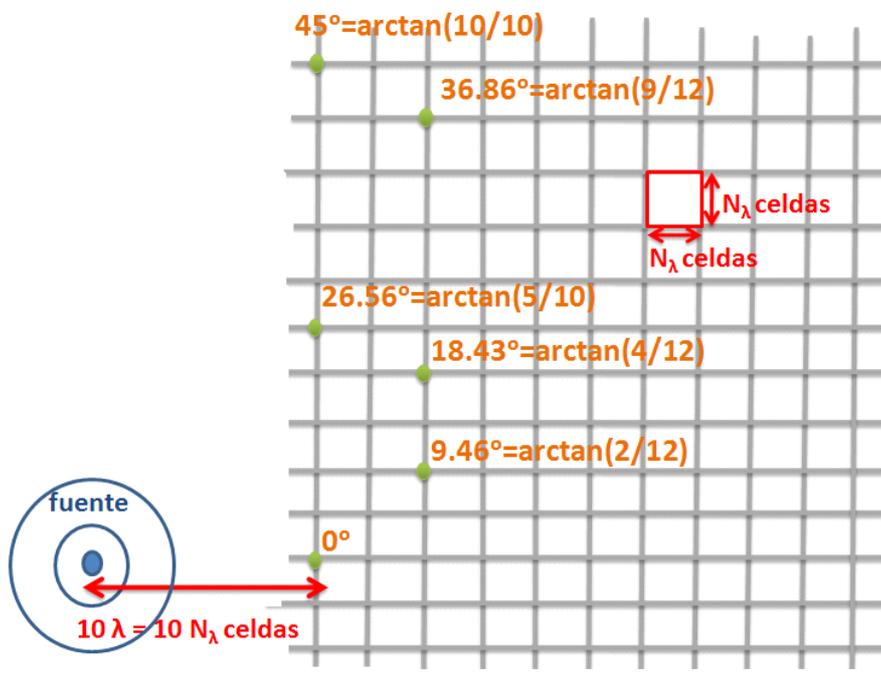


Figura 3.10: Esquema del muestreo realizado.

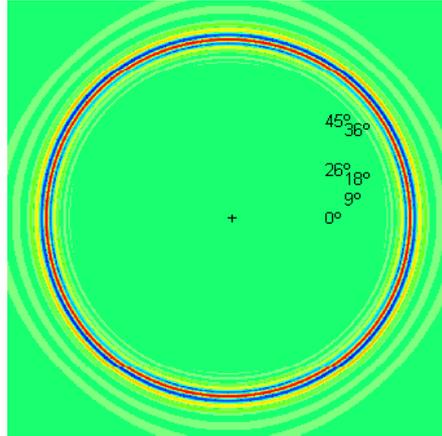


Figura 3.11: Representación gráfica del campo eléctrico en el dominio en un instante de tiempo dado. Marcados los puntos de muestreo a distintos ángulos y la fuente '+'.

Como dijimos anteriormente, a lo largo de la simulación se pinta la representación gráfica del campo  $E_z$  en pantalla. En la figura 3.11 se muestra dicha representación para un instante de tiempo dado. Además también se indican los puntos donde se ha muestreado el campo. Finalmente, en la figura 3.12 se muestra la comparación de la constante de fase numérica teórica y la obtenida mediante la simulación. Observamos que los valores de la constante de fase obtenida mediante la simulación coinciden con los valores teóricos, luego la relación de dispersión obtenida es correcta.

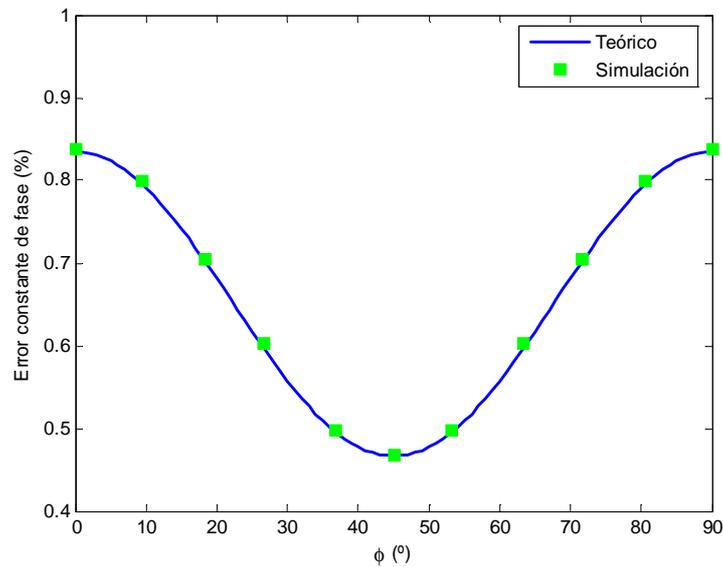


Figura 3.12: Error relativo de la constante de fase numérica obtenida teóricamente y a partir de la simulación.

### 3.2.3. Propagación del modo $TE_{10}^x$ en una guía de onda rectangular

Las guías de onda son estructuras metálicas por las que se transmiten las ondas electromagnéticas. Debido a su baja disipación de energía están especialmente diseñadas para el transporte de señales de alta frecuencia, como las microondas. Las ondas electromagnéticas viajan a través de las guías por medio de diversas configuraciones, conocidas como modos de propagación. En teoría existen un número infinito de modos de propagación y cada uno tiene una frecuencia de corte a partir de la cual se propagan las ondas en la guía.

Por convenio, en las guías de onda los modos TM y TE se definen respecto a la dirección de propagación. De manera que en los modos TE (Transversal Eléctrico), la componente del campo eléctrico en la dirección de propagación es nula. Los distintos modos transversales magnéticos y eléctricos se simbolizan como  $TM_{mn}$  y  $TE_{mn}$ . Por lo general, las guías de onda poseen una sección transversal rectangular, pero pueden tenerla circular o elíptica. En guías rectangulares  $m$  y  $n$  designan números enteros que denotan el número de medias longitudes de onda de intensidad de campo entre cada par de paredes,  $m$  a lo largo del eje  $x$  y  $n$  a lo largo del eje  $y$ . El modo dominante en una guía es el que tiene la frecuencia menor. La guía está diseñada fundamentalmente para operar en un sólo modo a un ancho de banda requerido. Las dimensiones de la guía se escogen de forma que para una señal dada, sólo el modo principal pueda transmitirse, atenuando los demás modos de orden superior. La frecuencia de corte se determinan por las dimensiones de sección transversal de la guía de onda. En una guía de onda rectangular la frecuencia de corte es:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Para una guía de onda rectangular, con la disposición de los campos tal y como se ha implementado en el método, con el campo magnético contenido en el plano XY y el campo eléctrico perpendicular a la dirección de propagación, el modo fundamental es el  $TE_{10}^x$ , figura 3.13.



Figura 3.13: Estructura de los campos del modo  $TE_{10}^x$  en una guía de onda rectangular.

Se ha simulado la propagación del modo transversal eléctrico fundamental  $TE_{10}^x$ . Para su implementación se ha excitado a los campos eléctricos de la columna central del dominio con una fuente de tipo sinusoidal como (2.24), pero cuya amplitud se hace nula en las paredes de la guía:

$$E^n(n_x/2, j) = E^n(n_x/2, j) + \sin\left(\frac{\pi j \Delta_s}{a}\right) \sin(2\pi f n \Delta_t) \quad \text{con } j = 1, \dots, n_y$$

Se han escogido los parámetros característicos de una guía de onda WR75: frecuencia entre 10-15 GHz y  $a=19$  mm. En la figura 3.14 se muestra la propagación del modo  $TE_{10}^x$  en distintos instantes temporales. En la figura superior se ve el comienzo de la propagación de la onda,

en los valores de índice temporal  $n = 450$  y  $n = 699$  la onda se sigue propagando, pero aún no ha llegado a las paredes del dominio. Una vez que la onda alcanza los contornos, puesto que no hay condiciones absorbentes, la onda es reflejada y se forman interferencias ( $n = 1100$  y  $n = 1198$ ).

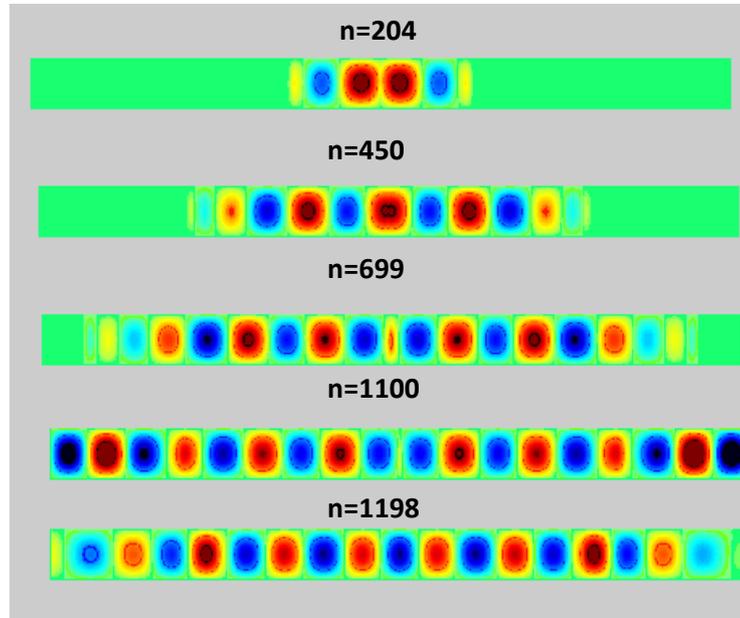


Figura 3.14: Propagación del modo  $TE_{10}^z$ .



## Capítulo 4

# Resumen y principales conclusiones

- Se han revisado algunos de los principales métodos FDTD, viendo sus ventajas y desventajas y comparándolos entre sí.
- Se ha desarrollado el método Leapfrog ADI-FDTD, considerando el problema de la propagación de ondas electromagnéticas para el caso de ondas  $TM^z$  en medios lineales, no dispersivos y sin pérdidas. Se ha explicado el procedimiento para obtener las ecuaciones del método, definido las condiciones de contorno y las fuentes utilizadas en la simulación. Además, se ha comprobado la estabilidad del método y obtenido su relación de dispersión.
- A continuación se estudió la relación de dispersión obtenida en el capítulo 2. Se ha estudiado su comportamiento para diferentes ángulos de propagación y para diferentes tamaños de celda y pasos temporales.
- Posteriormente se compararon los datos obtenidos a partir de la ecuación de dispersión con los datos de la constante de fase obtenidos mediante simulación del método.
- Del estudio de la relación de dispersión se ha concluido que para problemas que necesitan un mallado fino y por tanto valores de  $N_\lambda$  son pequeños, los métodos incondicionalmente estables son la mejor opción. La condición de estabilidad hace que los incrementos temporales de los métodos condicionalmente estables sean excesivamente pequeños, y que por tanto que el método sea muy lento. Sin embargo, en el caso de los métodos incondicionalmente estables podemos escoger incrementos de tiempo mayores ( $s = 2, 3...$ ) pudiendo realizar un menor número de iteraciones y reduciendo así el tiempo total de simulación. Para problemas que requieren un mallado normal los métodos condicionalmente estables son la opción más rápida y eficaz.
- Dentro de los métodos incondicionalmente estables el método Leapfrog ADI-FDTD es mejor opción que su predecesor, el ADI-FDTD. Ambos métodos presentan la misma dispersión, pero el Leapfrog ADI-FDTD al calcular los valores de los campos una única vez por cada iteración reduce el tiempo de computación.
- Comparando los distintos métodos se ha podido ver la similitud entre el método Leapfrog ADI-FDTD y el popular FDTD convencional, facilitando así posibles implementaciones híbridas.



# Bibliografía

- [1] Shun-Chuan Yang, Zhizhang Chen, Yiqiang Yu, Wen-Yan Yin, “*An Unconditionally Stable One-Step Arbitrary-Order Leapfrog ADI-FDTD Method and Its Numerical Proprieties*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.60, NO.4, April 2012.
- [2] Shun-Chuan Yang, Zhizhang Chen, Yiqiang Yu, Wen-Yan Yin, “*An Unconditionally Stable One-Step Leapfrog ADI-FDTD Method and Its Comparisons With Other FDTD Methods*”, IEEE Microwave and Wireless Components Letters, Vol.21, NO.12, December 2011.
- [3] T. H. Gan, E. L. Tan “*Unconditionally Stable Leapfrog ADI-FDTD Method for Lossy Media*”, Progress In Electrodynamics Research M, Vol.26, pp.173-186, 2012.
- [4] Takefumi Namiki, “*A New FDTD Algorithm Based on Alternating-Direction Implicit Method*”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.47. Oct. 1999.
- [5] Fenghua Zheng, “*Toward the Development of a Three-Dimensional Unconditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method*”, IEE Transactions on Microwave Theory and Techiques, Vol.48, Sep.2000.
- [6] S.J. Cooke, M. Botton, T. M. Antonsen Jr y B.Levush, “*A Leapfrog Reformulation of the ADI-FDTD Algorithm*”, International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, pp.187-200, 2009.
- [7] Jian-Yun Gao y Hong-Xing Zheng, “*One-Step Leapfrog Method for Lossy Media and Its Stability Analysis*”, Progress In Electromagnetics Research Letters, Vol.40, pp.49-60, 2013.
- [8] T.H Gan y E.L. Tan, “*Stability and Dispersion Analysis for Three Dimensional Leapfrog ADI-FDTD Method*”, Progress In Electrodynamics Research, Vol.23, pp.1-12, 2012.
- [9] T. Namiki and K. Ito, “*Investigation of Numerical Errors of the Two-dimensional ADI-FDTD Method*”. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 48, pp.1950-1956, Nov.2000.