

Estudio de las Propiedades Numéricas de los Métodos FDTD de Dos Pasos

A. Grande⁽¹⁾, J. A. Pereda⁽²⁾, A. Serroukh⁽²⁾, I. Barba⁽¹⁾, A. C. Cabeceira⁽¹⁾ y J. Represa⁽¹⁾

⁽¹⁾ Dpto. de Electricidad y Electrónica, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Spain.

⁽²⁾ Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones, Universidad de Cantabria, 39005 Santander, Spain.

Abstract—In this work we analyze several two-stage split-step finite-difference time-domain (2SS-FDTD) schemes and compare their performance with that of the traditional FDTD formulation. We present the numerical dispersion relations and the local truncation errors. All the schemes studied show error terms that depend on the time step multiplied by the spatial derivatives. We show that these error terms are especially critical in the locally one-dimensional (LOD)-FDTD scheme. To illustrate the relevance of these terms we simulate the propagation of the fundamental mode in a rectangular waveguide with a narrow iris.

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de pasos fraccionados o multipaso permiten la resolución numérica de problemas físicos de gran complejidad. Estos métodos empezaron a desarrollarse en la década de los cincuenta [1]. Sin embargo, fue en el año 1999 cuando comenzaron a aplicarse a los métodos en diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD, del inglés *Finite Difference Time Domain*) dando lugar a técnicas como el método de dirección implícita alternante (ADI-FDTD, del inglés *Alternating-Direction Implicit*) o el método localmente unidimensional (LOD-FDTD, del inglés *Locally One-Dimensional*) [2]-[4]. El principio en el que se basan estos métodos es descomponer el operador que caracteriza el problema en una suma de operadores con una estructura más simple y que den lugar problemas más sencillos de resolver computacionalmente. La principal ventaja que presentan los métodos de pasos fraccionados (SS-FDTD, del inglés *Split-Step*) es que permiten una importante reducción del coste computacional manteniendo la estabilidad incondicional del esquema.

En este trabajo presentamos un estudio analítico de las propiedades numéricas de varios métodos de dos pasos (2SS-FDTD). En particular analizaremos los esquemas ADI-FDTD, LOD-FDTD y el método de dos ciclos (TC-2SS-FDTD, del inglés *Two-Cycle*) [1]-[4]. Revisaremos sus formulaciones, presentaremos sus relaciones de dispersión y su error de truncamiento local. Todos los esquemas estudiados presentan términos de error que dependen de potencias del paso temporal multiplicadas por derivadas espaciales. En el caso del esquema ADI- y TC-FDTD estos términos son de segundo orden en el tiempo. Sin embargo, veremos que el esquema LOD-FDTD presenta términos de error que son de primer orden, lo que

dará lugar a errores importantes en aquellos problemas en los que los campos varíen fuertemente en el espacio. Para mostrar este comportamiento analizaremos la propagación del modo fundamental en una guía de onda WR75 con un iris.

II. MÉTODOS 2SS-FDTD

Las ecuaciones del rotacional de Maxwell para ondas TM_z en medios isótropos sin pérdidas pueden escribirse como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = [R]\vec{U} \quad (1)$$

donde

$$\vec{U} = [E_z, H_x, H_y]^T. \quad (2)$$

La idea fundamental de los métodos de pasos fraccionados parte de descomponer la matriz $[R]$ en una suma de operadores con una estructura más simple. En los esquemas que vamos a analizar la matriz $[R]$ se representa como la suma de dos operadores

$$[R] = [A] + [B] \quad (3)$$

siendo

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De forma que el problema original (1) se aproxima en cada intervalo temporal por dos problemas más sencillos conectados mediante las condiciones de contorno. El resultado es un algoritmo más sencillo de resolver y que requiere menos trabajo computacional que el problema original.

A. ADI-FDTD

El método ADI-FDTD puede considerarse como una aproximación de segundo orden del esquema de Crank-Nicolson (CN)-FDTD. Formulado como un algoritmo de dos subintervalos temporales puede escribirse como

$$\left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \vec{U}^n \quad (4a)$$

$$\left([I] - \frac{\Delta t}{2} [B] \right) \vec{U}^{n+1} = \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4b)$$

donde $[I]$ es la matriz identidad 3×3 y \vec{U}^n es el valor del vector de campo (2) evaluado en $n\Delta t$.

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad a través de los proyectos TEC2010-21496-C03-01, CONSOLIDER CSD2008-00066 y el subprograma Ramón y Cajal RYC-2010-06922.

El ciclo computacional completo del esquema ADI-FDTD puede escribirse como

$$\vec{U}^{n+1} = T^{ADI} \vec{U}^n$$

donde T^{ADI} es el operador transición que viene dado por

$$T^{ADI} = \left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [B] \right)^{-1} \left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [A] \right)^{-1} \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [A] \right) \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [B] \right).$$

Desarrollando T^{ADI} en serie de potencias de Δ_t obtenemos

$$T^{ADI} = [I] + \Delta_t [R] - \frac{\Delta_t^2}{2} [R]^2 + \mathcal{O}(\Delta_t^3).$$

Comparando esta expresión con el desarrollo del operador transición T^{CN} del esquema de CN¹ dado por (7) observamos que coinciden hasta el segundo orden en Δ_t .

1) *Relación de Dispersión Numérica:* Para ondas TM_z , la relación de dispersión numérica del esquema ADI-FDTD viene dada por

$$\tan^2 \left(\frac{\omega \Delta_t}{2} \right) = \frac{\Delta_t^2 K_x^2}{\epsilon \mu} + \frac{\Delta_t^2 K_y^2}{\epsilon \mu} + \frac{\Delta_t^4 K_x^2 K_y^2}{\epsilon^2 \mu^2} \quad (8)$$

donde

$$K_\alpha = \frac{\sin(\tilde{k}_\alpha \Delta_\alpha / 2)}{\Delta_\alpha} \quad (\alpha = x, y) \quad (9)$$

y siendo \tilde{k}_α el número de ondas numérico en la dirección α .

2) *Error de Truncamiento Local:* El error de truncamiento local del método ADI-FDTD podemos encontrarlo en [5]. Para el caso TM_z dicho error se reduce a

$$\vec{\tau}_{ADI} = \begin{bmatrix} 2h_t & -\frac{h_y}{\epsilon} & \frac{h_x}{\epsilon} \\ -\frac{h_y}{\mu} & 2h_t & 0 \\ \frac{h_x}{\mu} & \boxed{-\frac{g_{yxx}}{\mu}} & 2h_t \end{bmatrix} \vec{U} \quad (10)$$

siendo

$$h_u = -\frac{\Delta_t^2}{24} \frac{\partial^3}{\partial u^3} \quad (11)$$

$$g_{uvw} = -\frac{\Delta_t^2}{4\epsilon\mu} \frac{\partial^3}{\partial u \partial v \partial w} \quad (12)$$

y

$$\vec{U} = \left[E_z(\vec{r}_1, t_1), H_x(\vec{r}_2, t_2), H_y(\vec{r}_3, t_3) \right]^T$$

¹ La aproximación de (1) conforme al esquema de CN puede escribirse como

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [R] \right) \vec{U}^{n+1} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [R] \right) \vec{U}^n \quad (5)$$

donde la expresión de [R] viene dada por (3). Despejando el valor de \vec{U}^{n+1} podemos escribir $\vec{U}^{n+1} = T^{CN} \vec{U}^n$, siendo T^{CN} el operador transición del esquema de CN-FDTD dado por

$$T^{CN} = \left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [R] \right)^{-1} \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [R] \right). \quad (6)$$

Desarrollando T^{CN} en serie de potencias en Δ_t obtenemos

$$T^{CN} = [I] + \Delta_t [R] - \frac{\Delta_t^2}{2} [R]^2 + \mathcal{O}(\Delta_t^3). \quad (7)$$

donde $t_m \in (n\Delta_t, (n+1)\Delta_t)$ y \vec{r}_m están dentro de una elipse con centro en $(i\Delta_x, j\Delta_y)$ y semiejes $(\Delta_x/2, \Delta_y/2)$. Cabe destacar que los términos encuadrados son términos de error de segundo orden exclusivos del esquema ADI-FDTD.

B. LOD-FDTD

En el método LOD-FDTD cada paso temporal se divide en dos subpasos (2SS-FDTD). A continuación, se considera una aproximación de tipo CN en cada uno de los subintervalos temporales. El algoritmo resultante puede escribirse como

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [A] \right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [A] \right) \vec{U}^n \quad (13a)$$

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2} [B] \right) \vec{U}^{n+1} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2} [B] \right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (13b)$$

Escribiendo (13) en un único paso temporal tenemos

$$\vec{U}^{n+1} = T^{LOD} \vec{U}^n$$

donde T^{LOD} es el operador transición del esquema LOD-FDTD que puede escribirse como

$$T^{LOD} = T_B^{CN} T_A^{CN}$$

siendo T_A^{CN} y T_B^{CN} los operadores transición que se obtienen sustituyendo en (6) la matriz [R] por [A] y [B], respectivamente.

Desarrollando T^{LOD} en serie de potencias de Δ_t obtenemos

$$T^{LOD} = [I] + \Delta_t [R] - \frac{\Delta_t^2}{2} \{ [A]^2 + 2[B][A] + [B]^2 \} + \mathcal{O}(\Delta_t^3).$$

Puesto que los operadores [A] y [B] no conmutan, entonces $[A]^2 + 2[B][A] + [B]^2 \neq [R]^2$ y el error del esquema LOD-FDTD es de primer orden en Δ_t [1].

1) *Relación de Dispersión Numérica:* Para ondas TM_z , el método LOD-FDTD presenta la misma relación de dispersión dada en (8) para el esquema ADI-FDTD.

2) *Error de Truncamiento Local:* Siguiendo el procedimiento dado en [5], el error de truncamiento local obtenido puede escribirse como [6]

$$\vec{\tau}_{LOD} = \begin{bmatrix} 2h_t & -\frac{h_y}{\epsilon} & \frac{h_x}{\epsilon} \\ -\frac{h_y}{\mu} & 2h_t & \boxed{\frac{\Delta_t}{2\epsilon\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} \\ \frac{h_x}{\mu} & \boxed{-\frac{\Delta_t}{2\epsilon\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} & 2h_t \end{bmatrix} \vec{U} \quad (14)$$

donde h_u viene dado en (11). De nuevo, los términos encuadrados son términos de error de primer orden en Δ_t característicos del esquema LOD-FDTD. Por ello, es importante señalar que el método LOD-FDTD y el ADI-FDTD no tienen el mismo orden de exactitud en el tiempo aunque ambos esquemas presenten la misma relación de dispersión.

C. TC-2SS-FDTD

El tercer esquema 2SS-FDTD que analizaremos es el método TC-2SS-FDTD que aproxima (1) en el intervalo

temporal $(n-1)\Delta_t \leq t \leq (n+1)\Delta_t$ de la forma [1]

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2}[A]\right) \vec{U}^{n-\frac{1}{2}} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2}[A]\right) \vec{U}^{n-1} \quad (15a)$$

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2}[B]\right) \vec{U}^n = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2}[B]\right) \vec{U}^{n-\frac{1}{2}} \quad (15b)$$

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2}[B]\right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2}[B]\right) \vec{U}^n \quad (15c)$$

$$\left([I] - \frac{\Delta_t}{2}[A]\right) \vec{U}^{n+1} = \left([I] + \frac{\Delta_t}{2}[A]\right) \vec{U}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (15d)$$

Esto significa que el algoritmo resuelve el sistema de ecuaciones (13) en el intervalo $(n-1)\Delta_t \leq t \leq n\Delta_t$ y a continuación, en el intervalo $n\Delta_t \leq t \leq (n+1)\Delta_t$, el mismo sistema de ecuaciones pero en orden inverso.

Despejando \vec{U}^{n+1} podemos escribir

$$\vec{U}^{n+1} = T^{TC} \vec{U}^{n-1}$$

donde T^{TC} es el operador transición del esquema TC-2SS-FDTD que puede escribirse como

$$T^{TC} = T_A^{CN} T_B^{CN} T_B^{CN} T_A^{CN}$$

siendo T_A^{CN} y T_B^{CN} los operadores transición que se obtienen sustituyendo en (6) la matriz $[R]$ por $[A]$ y $[B]$, respectivamente.

Finalmente, desarrollando T^{TC} en serie de potencias en Δ_t obtenemos

$$T^{TC} = [I] + 2\Delta_t[R] - \frac{(2\Delta_t)^2}{2}[R]^2 + \mathcal{O}(\Delta_t^3). \quad (16)$$

Comparando (16) con (7) vemos que, independientemente de que las matrices $[A]$ y $[B]$ conmuten o no, el operador T^{TC} coincide con el operador transición del esquema de CN para un paso temporal doble hasta los términos de segundo orden en Δ_t .

1) *Relación de Dispersión Numérica*: La relación de dispersión numérica del esquema TC-2SS-FDTD puede escribirse como [6]

$$\tan^2(\omega\Delta_t) = \frac{4 \left(\frac{\Delta_t^2 K_x^2}{\mu\epsilon} + \frac{\Delta_t^2 K_y^2}{\mu\epsilon} \right) \left(1 + \frac{\Delta_t^4 K_x^2 K_y^2}{\epsilon^2 \mu^2} \right)}{\left[1 - \left(\frac{K_x^2 \Delta_t^2}{\epsilon\mu} + \frac{K_y^2 \Delta_t^2}{\epsilon\mu} - \frac{\Delta_t^4 K_x^2 K_y^2}{\epsilon^2 \mu^2} \right) \right]^2} \quad (17)$$

donde \tilde{k}_α es el número de ondas numérico dado por (9).

2) *Error de Truncamiento Local*: Siguiendo la notación y el procedimiento dado en [5], llegamos a [6]

$$\vec{\tau}_{TC} = \begin{bmatrix} 2h_t & -\frac{h_y}{\epsilon} \left[\frac{g_{xxy}}{\epsilon} \right] & \frac{h_x}{\epsilon} \left[\frac{g_{xyy}}{\epsilon} \right] \\ -\frac{h_y}{\mu} \left[\frac{g_{xxy}}{\mu} \right] & 2h_t & 0 \\ \frac{h_x}{\mu} \left[\frac{g_{xyy}}{\mu} \right] & 0 & 2h_t \end{bmatrix} \vec{u} \quad (18)$$

donde h_u y g_{uvw} vienen dados en (11) y (12), respectivamente. Los términos de error encuadrados son únicos del método TC-2SS-FDTD. Comprobamos que el esquema TC-2SS-FDTD preserva la exactitud de segundo orden en el tiempo.

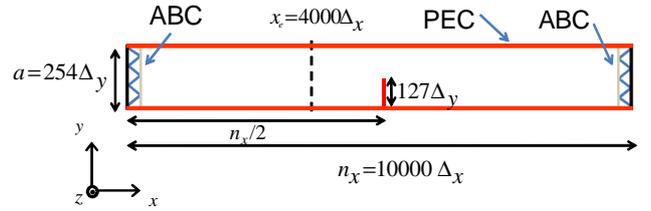


Fig. 1. Geometría de la guía de onda WR75 con un iris de anchura $1\Delta_x$.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para comparar el comportamiento de los esquemas estudiados hemos simulado una guía de onda WR75 con un iris. La geometría del problema se muestra en la Fig.1. Para simular la propagación del modo TE_{10} hemos considerado una excitación modal situada en el plano $x_e = 4000\Delta_x$. Como dependencia temporal de la señal se ha tomado un pulso Gaussiano modulado con una frecuencia central $f_0 = 12.5$ GHz y ancho de banda $BW = 2.5$ GHz. El tamaño de la celda fue $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0.075$ mm. Por lo tanto, la mínima resolución espacial considerada fue $N_{\lambda,\min} = \lambda_{g,\min}/\Delta = 313$, siendo $\lambda_{g,\min}$ la mínima longitud de onda en la guía en el rango de frecuencias de trabajo.

Como referencia, hemos calculado el módulo del coeficiente de reflexión empleando el método FDTD convencional. En ese caso, el paso temporal considerado fue el máximo permitido por la condición de estabilidad $\Delta_{t,\max} = \Delta/(\sqrt{2}c) = 0.0177$ ps. El módulo del parámetro S_{11} calculado usando el métodos ADI- LOD- y TC-2SS-FDTD se presenta en la Fig.2. Estos resultados se han calculado tomando un factor de estabilidad $s = \Delta_t/\Delta_{t,\max} = 10$, lo que implica una resolución temporal mínima de $N_{t,\min} = T_{\min}/\Delta_t = 37.7$.

En la Fig.2 podemos ver cómo el esquema TC-2SS-FDTD presenta mayor error. Sin embargo, los métodos ADI-FDTD y LOD-FDTD proporcionan los mismos valores de los parámetros de scattering. Este resultado está relacionado con el hecho de que ambos esquemas presentan la misma relación de dispersión numérica (8). Sin embargo, mientras que el método ADI-FDTD tiene una exactitud de segundo orden en el tiempo, el esquema LOD-FDTD es sólo de primer orden. Por ello, para mostrar la influencia de los términos de primer orden que obtuvimos en (14) hemos calculado el patrón de campo de la componente E_y en el plano del iris. El resultado se presenta en la Fig.3, donde el nodo 127 corresponde con el extremo del iris. Vemos como cerca del borde del iris la solución dada por el método LOD-FDTD presenta grande errores.

En una segunda simulación hemos considerado un línea de corriente en espacio libre para el caso TM_z y comparado la dispersión numérica de los esquemas en diferencias estudiados. Definimos el error de fase relativo como $\mathcal{E}_\beta = (\tilde{\beta} - \beta)/\beta$, donde $\tilde{\beta}$ y β son el valor numérico y analítico de la constante de fase, respectivamente. Hemos tomado como frecuencia de trabajo $f = 10$ GHz y una celda unidad de tamaño $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$. La resolución espacial se define como $N_s = \lambda/\Delta$, donde λ es la longitud de onda a la frecuencia de trabajo. Análogamente, la resolución temporal se define como $N_t = T/\Delta_t$, siendo T el periodo de la onda.

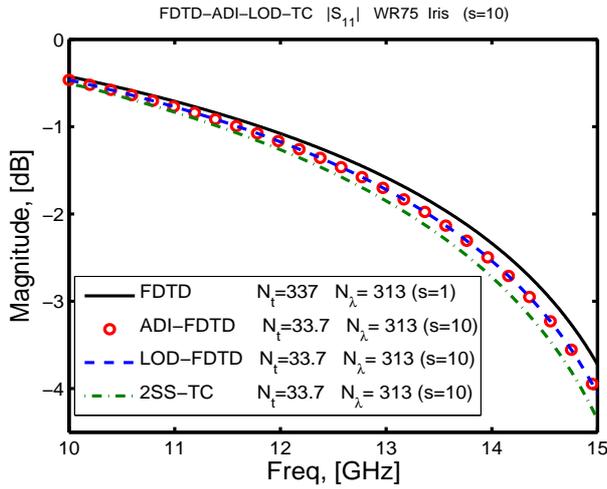


Fig. 2. Módulo del parámetro S_{11} del modo TE_{10} de una guía de onda WR75 con un iris para varios esquemas 2SS-FDTD.

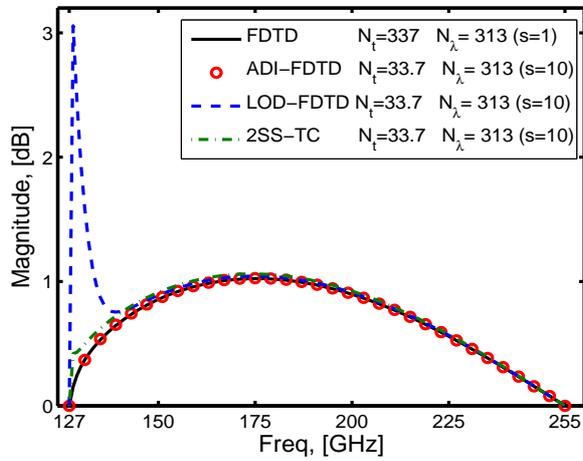


Fig. 3. Patrón de campo de la componente E_y del modo TE_{10} de una guía de onda WR75 con un iris. El patrón se ha extraído en el plano del iris, el nodo 127 corresponde con el extremo del iris.

La Fig.4 muestra el error relativo de la constante de fase numérica en función del ángulo de propagación para diferentes valores de la resolución temporal y espacial de los esquemas estudiados. En dicha figura las líneas corresponden a valores teóricos obtenidos resolviendo las ecuaciones (8) y (17), respectivamente. Los símbolos corresponden a resultados obtenidos numéricamente. Los resultados presentados en Fig.4 muestran que para $\phi \neq n\frac{\pi}{2}$ ($n = 0, 1, \dots$) el esquema ADI-FDTD (y el LOD-FDTD) presentan menos error de dispersión numérica pero mayor anisotropía que el método TC-2SS-FDTD.

IV. CONCLUSION

En este trabajo hemos comparado las propiedades numéricas de los métodos ADI-, LOD- y 2SS-TC-FDTD. Se han revisado sus formulaciones, presentado su relaciones de dispersión numéricas y sus errores de truncamiento local. Los tres esquemas presentan términos de error que dependen de las derivadas

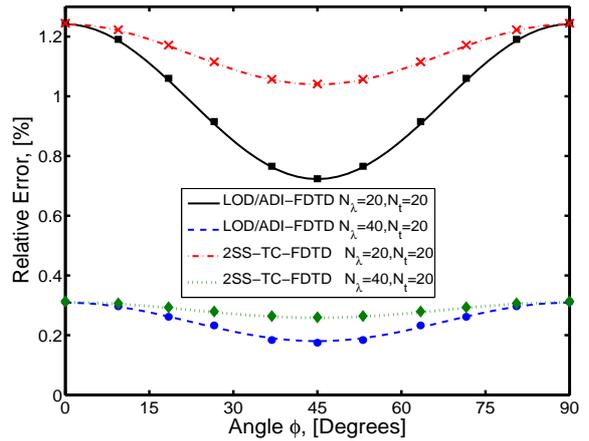


Fig. 4. Error relativo de la constante de fase numérica en función del ángulo de propagación ϕ para varios esquemas 2SS-FDTD.

espaciales de los campos multiplicadas por potencias del intervalo temporal. Sin embargo, mientras que en los esquemas ADI y 2SS-TC-FDTD estos términos son de segundo orden en el tiempo, en el método LOD-FDTD son de primer orden. Para ilustrar la influencia de estos términos de error se ha simulado una guía de onda WR75 con un iris. Aunque los esquemas ADI y LOD-FDTD proporcionan los mismos resultados de los parámetros de scattering, el esquema LOD-FDTD presenta grandes errores en el cálculo del patrón de campo en el plano del iris. Por último se ha comparado el error de dispersión numérica de los distintos esquemas y se ha mostrado que los métodos ADI-FDTD y LOD-FDTD presentan menos error de dispersión pero mayor anisotropía que el método TC-2SS-FDTD.

REFERENCES

- [1] G. I. Marchuk, *Methods of Numerical Mathematics*. New York: Springer-Verlang, 1975.
- [2] T. Namiki, "A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 47, no. 10, pp. 2003–2007, Oct. 1999.
- [3] F. Zheng, Z. Chen, J. Zhang, "A finite-difference time-domain method without the Courant stability conditions," *IEEE Microw. Guided Wave Lett.*, vol. 9, no. 11, pp. 441–443, Nov. 1999.
- [4] J. Shibayama, M. Muraki, J. Yamauchi, H. Nakano, "Efficient implicit FDTD algorithm based on locally one-dimensional scheme," *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 19, pp. 1046–1047, Sep. 2005.
- [5] S. G. Garcia, T.-W. Lee, S. C. Hagness, "On the accuracy of the ADI-FDTD method," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 1, pp. 31–34, 2002.
- [6] A. Grande, J. A. Pereda, A. Serroukh, I. Barba, A. C. Cabeceira, J. Repra, "Reinterpreting Four-Stage Split-Step FDTD Methods as Two-Stage Methods," Submitted to *IEEE Trans. Antennas Propag.*