

PROBLEMAS ESPECTRALES EN BARRAS DELGADAS

(Spectral problems in thin bars)

Trabajo de Fin de Máster
para acceder al

MÁSTER EN MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Autor:
Pablo Benavent Ocejó

Directores:
Delfina Gómez Gandarillas
María Eugenia Pérez Martínez

Julio-2025

Resumen

Consideramos el espectro del operador de Laplace en modelos de estructuras de barras 3D con una pequeña sección transversal que depende de un parámetro ϵ . Las condiciones de contorno son, principalmente, de tipo mixto (Dirichlet-Neumann). Estudiamos el comportamiento asintótico de los valores propios, y de las funciones propias asociadas, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En particular, los aproximamos por los de un modelo 1D que tiene en cuenta la geometría del dominio original. Los cálculos explícitos y numéricos ilustran el interés de este estudio cuando el parámetro se hace pequeño, para distintas condiciones de contorno. Para diversos dominios, mostramos el distinto comportamiento asintótico del espectro dependiendo de las condiciones de contorno.

Palabras clave: Problema espectral, pequeño parámetro, problema límite, comportamiento asintótico, perturbaciones espectrales.

Abstract

We consider the spectrum of the Laplace operator on 3D rod structures with a small cross section that depends on a ϵ parameter. The boundary conditions are mainly of mixed (Dirichlet-Neumann) type. We study the asymptotic behaviour of the eigenvalues, and of the associated eigenfunctions, when $\epsilon \rightarrow 0$. In particular, we approximate them by those of a 1D model that takes into account the geometry of the original domain. Explicit and numerical calculations illustrate the interest of this study when the parameter becomes small, for different boundary conditions. For different domains, we show the different asymptotic behaviour of the spectrum depending on the boundary conditions.

Key words: Spectral problem, small parameter, boundary problem, asymptotic behaviour, spectral perturbations.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mis directoras, Delfina y María Eugenia, por guiarme a lo largo de este trabajo y por todo el tiempo dedicado a este proyecto.

Agradezco también a mi familia y amigos, especialmente a mi madre y mi abuela, por su apoyo incondicional y su constante motivación.

Asimismo, quiero agradecer a todas las personas que han sido parte de mi formación, tanto académica como personal, y que seguirán siendo fundamentales en mi desarrollo futuro. En especial, a aquellas que me han inspirado, aconsejado y motivado a seguir mis ideas y a luchar por ellas, ya que en gran medida he llegado hasta aquí gracias a su influencia y apoyo.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a quienes ya no están con nosotros, pero que siempre cuidaron de mí. Y, por supuesto, quiero agradecer a quien lea este trabajo por su tiempo e interés en él.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Problema a estudiar	2
1.2. Software utilizado	2
2. Herramientas de la teoría espectral de operadores	4
2.1. Preliminares	4
2.2. Problema espectral para formas bilineales	6
2.2.1. Principio de min-max	8
2.2.2. Nociones sobre espacios de Sobolev	9
3. Resultados de perturbaciones espectrales	11
3.1. Lema de Vishik-Liusternik	11
3.2. Problemas dependientes de un pequeño parámetro	13
4. Aplicación de la teoría de perturbaciones a estructuras delgadas	23
4.1. Algunos ejemplos de dominios	24
4.2. Planteamiento del problema	26
4.3. El problema límite	29
4.4. Convergencia con conservación de la multiplicidad	31
5. Cálculos explícitos y simulaciones numéricas con condiciones mixtas	37
6. Cálculos explícitos y simulaciones numéricas con otras condiciones de contorno	44
6.1. Condiciones de Neumann	44
6.2. Condiciones de Dirichlet	47
Referencias	51

1. Introducción

Este trabajo se sitúa en el contexto del análisis asintótico de problemas para perturbaciones singulares en los que aparece un pequeño parámetro que tiene gran influencia en el comportamiento de las soluciones. Así, abordamos el comportamiento asintótico de los valores propios y las correspondientes funciones propias para el operador de Laplace en modelos de estructuras de barras delgadas, cuando el diámetro de la sección transversal tiende a cero. En concreto, trabajamos en dominios 3D de tamaño $O(1)$ a lo largo de la dirección longitudinal y $O(\epsilon)$ en las otras dos direcciones, que denominamos *direcciones transversales*.

Este tipo de estructuras aparecen en numerosos diseños de la Ciencia y la Ingeniería que contienen barras o tubos delgados, pero desde el punto de vista matemático existen lagunas en la descripción de los valores propios y funciones propias en su dependencia del pequeño parámetro en estructuras 3D; en particular el modelo con condiciones de contorno mixtas que consideramos en este trabajo es todavía un problema abierto en la literatura de la Matemática Aplicada. El interés desde el punto de vista dinámico es evidente, tanto para los modelos que surgen en difusión o en vibraciones de estructuras tubulares y/o multiestructuras (ver [1], [7], [10]).

Los cálculos explícitos para ciertas geometrías de estas estructuras (de tipo prisma) muestran el diferente comportamiento asintótico de los valores propios y funciones propias dependiendo de las condiciones de contorno. Dichos cálculos son importantes para esclarecer el orden de magnitud de las denominadas bajas frecuencias, su comportamiento asintótico, a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, y el de las funciones propias asociadas, observando lo diferente que es dicho comportamiento dependiendo de las condiciones de contorno. Estos cálculos explícitos también muestran que para capturar oscilaciones de las funciones propias diferentes de las longitudinales, con condiciones de contorno mixtas o de Neumann, necesitamos tratar con las altas frecuencias. Asimismo, muestran que el comportamiento es muy distinto para condiciones de contorno de Dirichlet.

Aunque para condiciones de Dirichlet (Neumann respectivamente) el comportamiento de los valores propios ha sido estudiado en [3] ([1], respectivamente), creemos que la estructura de las funciones propias necesita un estudio más detallado. Por ello, en las secciones finales proporcionamos cálculos explícitos junto con gráficos que ilustran distintos fenómenos para las funciones propias. Las figuras se han obtenido mediante métodos numéricos utilizando la *PDE Toolbox* de MATLAB 2024b y muestran lo importante que es un análisis asintótico en el caso de que los cálculos explícitos no funcionen. De hecho, observamos inestabilidades numéricas cuando el diámetro $O(\epsilon)$ se hace más pequeño (por ejemplo, para un prisma, cuando $\epsilon = 0,005$ ya se detectan tales inestabilidades).

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el comportamiento de las bajas frecuencias para condiciones de contorno mixtas (Dirichlet-Neumann) y proporcionar un problema límite. Hemos obtenido un problema de Dirichlet unidimensional que tiene en cuenta la geometría del dominio. Los valores propios de dicho problema aproximan el espectro del problema original con conservación de la multiplicidad. Además, también se proporciona una aproximación de las funciones propias en un cierto sentido (ver [7] para el caso 2D y [2] para el caso 3D).

En cuanto a la estructura de esta memoria, en la parte introductoria presentamos el problema a estudiar y el software empleado. Posteriormente, introducimos algunos conceptos y resultados de la teoría espectral de operadores, en particular el principio del min-max, que utilizamos a lo largo del trabajo.

En la tercera sección proporcionamos ciertos resultados de perturbaciones espectrales que nos permiten obtener convergencia espectral para operadores dependientes de un pequeño parámetro ϵ cuando verifican ciertas condiciones. A continuación, aplicamos estos resultados al problema planteado en una estructura delgada con condiciones de contorno mixtas, probando dos resultados: uno de identificación del problema límite y el otro de convergencia con conservación de la multiplicidad.

Finalmente, en las dos últimas secciones proporcionamos cálculos explícitos junto con gráficos que ilustran distintos fenómenos para las funciones propias considerando diferentes condiciones de contorno.

1.1. Problema a estudiar

A lo largo de estas páginas vamos a estudiar un problema de valores propios en distintos dominios tridimensionales, G_ϵ , dependientes de un pequeño parámetro $\epsilon > 0$ que hacemos tender a cero. En dichos dominios consideraremos diversas condiciones de contorno con el objetivo de estudiar y comparar el comportamiento de las soluciones. En concreto, vamos a tratar el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u^\epsilon = \lambda^\epsilon u^\epsilon & \text{en } G_\epsilon \\ + \text{condiciones de contorno} \end{cases}, \quad (1)$$

donde Δ representa el operador de Laplace, es decir,

$$\Delta u^\epsilon = u_{xx}^\epsilon + u_{yy}^\epsilon + u_{zz}^\epsilon$$

y λ^ϵ el valor propio con u^ϵ la función propia asociada.

En cuanto a las condiciones de contorno, consideraremos tres tipos:

- Condiciones de Dirichlet.
- Condiciones de Neumann.
- Condiciones de tipo mixto (Dirichlet y Neumann).

De manera general, a estos problemas se llega mediante la separación de variables a partir de problemas de evolución para la ecuación de ondas y del calor.

1.2. Software utilizado

A continuación presentamos el software utilizado para la realización del trabajo.

En primer lugar es necesario tener los dominios tridimensionales en archivos .stl, que han sido creados con dos tipos de software. Para los dominios sencillos, como los ortoedros, se ha programado en Python un método que permite crear la figura en un archivo .stl, y en la creación de dominios más complejos se emplea Blender, un software libre para diseños tridimensionales, entre otras cosas, que

nos permite exportar dichas figuras a archivos .stl.

Para resolver el problema numéricamente hemos usado MATLAB (versión R2024b), en concreto su paquete *PDE Toolbox*, pues tiene integrados métodos para la resolución de problemas de valores propios. MATLAB permite importar una geometría de un archivo .stl e indicar las ecuaciones y las condiciones de contorno en el dominio para la resolución del problema.

2. Herramientas de la teoría espectral de operadores

En esta sección introducimos conceptos y resultados conocidos de teoría espectral que nos serán de utilidad a lo largo de la memoria, basándonos en [4], [5], [8], [9] y [10].

2.1. Preliminares

Vamos a recordar ciertos aspectos necesarios sobre espacios de Hilbert y operadores.

Consideramos $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a su producto escalar y $\| \cdot \|$ su norma asociada.

En primer lugar nos será útil la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

También debemos tener en cuenta un par de nociones de convergencia, en concreto la convergencia débil y fuerte en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dada una sucesión $\{x_n\}_n$ y un elemento x en $\mathcal{H}$ decimos que:

- $\{x_n\}_n$ converge fuerte a x si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ y se suele expresar por $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$.
- $\{x_n\}_n$ converge débil a x si $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ para cualquier $\varphi \in \mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H}'$ denota el dual de $\mathcal{H}$. Se suele expresar por $x_n \rightharpoonup x$ o bien se escribe $x_n \rightarrow x$ en $\mathcal{H}$ -débil cuando $n \rightarrow \infty$.

Como consecuencia del Teorema de Riesz, esto equivale a

$$\langle x_n, v \rangle \rightarrow \langle x, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Asimismo, tenemos el siguiente resultado práctico que emplearemos a lo largo de la memoria (ver Sección 3 del Capítulo 1 de [10]).

Proposición 2.1. *En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable, cualquier subconjunto B de $\mathcal{H}$ acotado es precompacto para la topología débil, esto es, para cualquier sucesión $\{b_n\}_n$ de B podemos extraer una subsucesión en B que converge débilmente. En particular, si B es una bola cerrada, el límite pertenece a B .*

Recordamos que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se dice separable si contiene un subconjunto denso y numerable.

Por otro lado, consideramos T un operador lineal en $\mathcal{H}$, es decir una aplicación lineal $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Recordamos las definiciones de valor y vector propio de un operador.

Definición 2.2 (Valor y vector propio). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado un operador T en $\mathcal{H}$, se dice que un escalar $\mu \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T si existe $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \mu x$ y diremos que x es un vector propio asociado a μ .*

Con todo lo anterior, a lo largo de estas páginas vamos a considerar espacios de Hilbert separables y operadores lineales $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tales que:

1. El operador T es continuo, es decir, si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, entonces $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es equivalente a que el operador esté acotado, es decir, $\|T\| < \infty$ donde

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

La norma anterior se define en el espacio de los operadores lineales continuos de $\mathcal{H}$, que se suele denotar por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

2. T es compacto, es decir, si $x_n \rightarrow x$ en $\mathcal{H}$ -débil, entonces $Tx_n \rightarrow Tx$ en la norma de $\mathcal{H}$ cuando $n \rightarrow \infty$.
3. T es autoadjunto, es decir, se tiene que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}$.
4. T es positivo, es decir $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ y, además, $Tx \neq 0$ si $x \neq 0$.

A continuación se enuncia un resultado sobre los valores propios de un operador T que verifica las condiciones anteriores.

Teorema 2.3. *Bajo las hipótesis 1 – 4 anteriores, el operador T posee un número infinito numerable de valores propios positivos que convergen a 0, es decir,*

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \dots \rightarrow 0,$$

y cada valor propio tiene multiplicidad finita. Además, si E_i denota el espacio propio asociado a μ_i , entonces los espacios E_i son ortogonales entre si y su suma directa es todo el espacio $\mathcal{H}$.

Por otro lado, seleccionando una base ortonormal en cada E_i y suponiendo que cada μ_i se repite tantas veces como su multiplicidad, podemos obtener una base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios y los valores propios se pueden escribir como

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k \geq \dots \rightarrow 0.$$

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en [10], concretamente en la Sección 4 del Capítulo 1. Un resultado alternativo (Teorema de Hilbert-Schmidt) se puede encontrar enunciado y demostrado en [9], concretamente en la Sección 6 del Capítulo 16. $\square$

2.2. Problema espectral para formas bilineales

En esta sección introducimos algunos conceptos y resultados convenientes, siguiendo las referencias [8] y [10].

Definición 2.4. Sea $\mathcal{V}$ un espacio de Hilbert. Una aplicación $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **forma bilineal** si es lineal en ambas componentes, es decir, si se cumple que

- i) Para todos $v_1, v_2, w \in \mathcal{V}$, tenemos que $\Phi(v_1 + v_2, w) = \Phi(v_1, w) + \Phi(v_2, w)$.
- ii) Para todos $v, w_1, w_2 \in \mathcal{V}$, tenemos que $\Phi(v, w_1 + w_2) = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, w_2)$.
- iii) Para todos $v, w \in \mathcal{V}$ y para todo $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Phi(\lambda v, w) = \lambda \Phi(v, w) = \Phi(v, \lambda w)$.

Además, diremos que la forma bilineal es

- **Simétrica** si se verifica que $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ para cualesquiera elementos $v, w \in \mathcal{V}$.
- **Continua** si existe una constante M tal que para cualesquiera $v, w \in \mathcal{V}$ se tiene

$$\Phi(v, w) \leq M \|v\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}}.$$

- **Coerciva o $\mathcal{V}$ -elíptica** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\Phi(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

A lo largo de esta memoria, consideraremos formas bilineales simétricas, continuas y coercivas en el siguiente contexto abstracto: dos espacios de Hilbert $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ reales, separables de dimensión infinita con $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$, una inyección continua y compacta de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ denso en $\mathcal{H}$. Con estas condiciones, Φ define un producto escalar cuya norma asociada es equivalente a la de $\mathcal{V}$.

Dado f un elemento de $\mathcal{H}$, consideramos el problema que consiste en encontrar $u \in \mathcal{V}$ tal que

$$\Phi(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (2)$$

Notemos que $\langle f, v \rangle$ denota el producto escalar en $\mathcal{H}$ y define un elemento del dual de $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$, con la identificación

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}' \subset \mathcal{V}'.$$

La existencia y unicidad de solución del problema (2) viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.5 (Lax-Milgram). *Supongamos que la forma bilineal Φ es simétrica, continua y coerciva. Entonces, para cada $L \in \mathcal{V}'$ el problema*

$$\Phi(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

tiene una única solución $u_L \in \mathcal{V}$ y la aplicación lineal $L \rightarrow u_L$ es continua de $\mathcal{V}'$ en $\mathcal{V}$.

Demostración. Se puede encontrar en [8], concretamente en la Sección 2 del Capítulo 2. □

Ahora consideramos el problema espectral asociado a (2) consistente en buscar $u \neq 0$ en $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi(u, v) = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3)$$

Bajo las hipótesis del Teorema 2.5, podemos definir un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ tal que dado $f \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\Phi(Tf, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (4)$$

Con el operador T anterior, reescribimos el problema espectral (3) como un problema espectral para el operador T en $\mathcal{H}$

$$u = \lambda Tu. \quad (5)$$

Lema 2.6. *Supongamos que la inyección canónica de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{H}$ es compacta y que la forma bilineal Φ simétrica, continua y coerciva. Entonces el operador T , definido previamente, es compacto de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$.*

Lema 2.7. *Supongamos que la forma bilineal Φ es simétrica, continua y coerciva. Entonces, considerando en el espacio $\mathcal{V}$ el producto escalar dado por Φ , el operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ es*

(i) *Simétrico: para todos $u, v \in \mathcal{V}$, se tiene que $\Phi(Tu, v) = \Phi(u, Tv)$.*

(ii) *Positivo: para todo $v \in \mathcal{V}$ no nulo, tenemos que $\Phi(Tv, v) > 0$.*

Teorema 2.8. *Supongamos que la inyección canónica de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{H}$ es compacta y que la forma bilineal Φ es simétrica, continua y coerciva. Entonces, los valores propios del problema (3) forman una sucesión creciente que tiende a $+\infty$, es decir,*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots \rightarrow +\infty,$$

donde suponemos que cada valor propio se repite tantas veces como su multiplicidad, y existe una base de Hilbert ortonormal de $\mathcal{H}$, $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, formada por vectores propios asociados a los valores propios:

$$\Phi(\varphi_m, v) = \lambda_m \langle \varphi_m, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}; \quad m = 1, 2, \dots$$

Además, la sucesión $\{\frac{\varphi_m}{\sqrt{\lambda_m}}\}_{m=1}^\infty$ forma una base de Hilbert ortonormal del espacio $\mathcal{V}$ considerando el producto escalar dado por Φ .

Demostración. De los lemas previos, se deduce que el Teorema 2.3 puede aplicarse al operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, donde $\mathcal{V}$ está dotado del producto escalar Φ . Por tanto, tenemos que sus valores propios μ_m son estrictamente positivos, forman una sucesión decreciente que tiende a 0 y existe una base de Hilbert ortonormal de $\mathcal{V}$ formada por los vectores propios v_m tales que $Tv_m = \mu_m v_m$.

Por (3) y (5), deducimos que los valores propios del problema vienen dados por

$$\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}.$$

Por otro lado, usando la definición del operador (4) y que $Tv_m = \mu_m v_m$, para todo $v \in \mathcal{V}$ tenemos que

$$\Phi(v_m, v) = \lambda_m \Phi(Tv_m, v) = \lambda_m \langle v_m, v \rangle. \quad (6)$$

Consideremos los vectores $\varphi_m = \sqrt{\lambda_m} v_m$ y veamos que forman una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

- En primer lugar, veamos que los vectores φ_m son ortonormales. De (6), tenemos lo siguiente:

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \frac{1}{\lambda_m} \Phi(\varphi_m, \varphi_n) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m}} \Phi(v_m, v_n) = \delta_{mn},$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$.

- Veamos que con los vectores φ_m generan todo el espacio. Para ello, basta ver que si tenemos $f \in \mathcal{H}$ tal que $\langle f, \varphi_m \rangle = 0$ para todo $m \geq 1$, entonces $f = 0$.

Si $\langle f, \varphi_m \rangle = 0$ para todo $m \geq 1$, en particular tendremos que $\langle f, v \rangle = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$, pues el conjunto $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una base de Hilbert de $\mathcal{V}$. Por tanto, como $\mathcal{V}$ es denso en $\mathcal{H}$, tenemos que $f = 0$, lo que permite concluir que el conjunto $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

□

2.2.1. Principio de min-max

Vamos a ver a continuación el Principio de min-max, que nos da una caracterización de los valores propios y nos permite obtener estimaciones en las secciones posteriores.

Definición 2.9 (Cociente de Rayleigh). Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ y Φ los espacios y forma del Teorema 2.8. Definimos el cociente de Rayleigh de un elemento no nulo $v \in \mathcal{V}$ como

$$R(v) = \frac{\Phi(v, v)}{\|v\|_{\mathcal{H}}^2}.$$

Sean $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ los valores propios (ordenados de menor a mayor) y $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ una base ortonormal formada por los vectores propios asociados. Se tiene la siguiente expresión a partir del Teorema 2.8

$$\Phi(v, v) = \sum_{m \geq 1} \lambda_m \langle v, \varphi_m \rangle^2.$$

Si calculamos el cociente de Rayleigh, distinguimos dos casos:

- Si $v = \varphi_m$, entonces $R(\varphi_m) = \lambda_m$ para cualquier $m \geq 1$.
- Si $v = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i$, entonces tenemos que $R(v) = \frac{\sum_{i \geq 1} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i \geq 1} \alpha_i^2}$.

Como $\lambda_j \geq \lambda_1$ para cualquier $j \geq 2$, tenemos que $R(v) \geq \lambda_1$, de donde también deducimos que

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in \mathcal{V} \\ v \neq 0}} R(v).$$

Denotamos por V_m al subespacio de $\mathcal{V}$ generado por los m primeros vectores propios y por $V_m^{\perp}$ al ortogonal de V_m en $\mathcal{V}$ según el producto escalar dado por Φ , es decir, al conjunto

$$V_m^{\perp} = \{v \in \mathcal{V} : \Phi(v, \varphi_i) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq m\}.$$

Teniendo en cuenta (6), también se puede expresar como

$$V_m^\perp = \{v \in \mathcal{V} : \langle v, \varphi_i \rangle = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq m\}.$$

Si tomamos $v = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i \in V_{m-1}^\perp$, tenemos que $\alpha_i = 0$ para $1 \leq i \leq m-1$ y el cociente de Rayleigh cumple que

$$R(v) = \frac{\sum_{i \geq m} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i \geq m} \alpha_i^2} \geq \lambda_m,$$

de donde se deduce que

$$\lambda_m = \min_{\substack{v \in V_{m-1}^\perp \\ v \neq 0}} R(v). \quad (7)$$

Teorema 2.10 (Principio de min-max). *Bajo las hipótesis del Teorema 2.8, tenemos que*

$$\lambda_m = \min_{E_m \in \mathcal{V}_m} \max_{\substack{v \in E_m \\ v \neq 0}} R(v),$$

donde $\mathcal{V}_m$ denota el conjunto de los subespacios E_m de dimensión m del espacio $\mathcal{V}$.

Demostración. En primer lugar consideramos $E_m = V_m$, siendo V_m el subespacio definido previamente. Consideramos $v \in V_m$ no nulo, de forma que podemos escribir $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$. El cociente de Rayleigh para dicho elemento es

$$R(v) = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2}.$$

Como los valores propios forman una sucesión creciente, tenemos que $\lambda_i \leq \lambda_m$ para $1 \leq i \leq m$, lo que nos lleva a que $R(v) \leq \lambda_m$ y por tanto, a que

$$\max_{\substack{v \in V_m \\ v \neq 0}} R(v) = \lambda_m.$$

Solo nos falta ver que para cualquier subespacio $E_m \subset \mathcal{V}$ de dimensión m se cumple que

$$\lambda_m \leq \max_{\substack{v \in E_m \\ v \neq 0}} R(v).$$

Para ello, podemos tomar $v \in E_m$ no nulo de forma que $\langle v, \varphi_i \rangle = 0$ para $1 \leq i \leq m-1$, es decir, un elemento tal que $v \in E_m \cap V_{m-1}^\perp$. De esta forma, por (7), sabemos que $\lambda_m \leq R(v)$, de donde se concluye al resultado. $\square$

2.2.2. Nociones sobre espacios de Sobolev

En esta sección introducimos resultados de espacios de Sobolev que se utilizan a lo largo del trabajo de manera explícita e implícita. En particular los espacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ de la Sección 2.2 están relacionados con espacios H^1 y L^2 .

Dado un dominio (abierto y conexo) acotado $G \subset \mathbb{R}^3$, definimos $H^1(G)$ como la completación de $\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ con respecto a la norma

$$\|u\|_{H^1(G)} = \left(\|u\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Los elementos de $H^1(G)$ son funciones de $L^2(G)$ tales que su derivada débil pertenece a $L^2(G)$.

Cuando la frontera de G , ∂G , es suficientemente regular, tiene sentido hablar de la traza de $u \in H^1(G)$ como una función $u|_{\partial G} \in L^2(\partial G)$.

Teorema 2.11. *Sea G un dominio acotado con frontera Lipschitziana. Se tiene:*

- *La inclusión $H^1(G)$ en $L^2(G)$ es compacta (Teorema de Rellich-Kondrakov) y densa.*
- *Existe una constante C , dependiente de G únicamente, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\partial G)} \leq C \|u\|_{H^1(G)} \quad \forall u \in H^1(G).$$

Para los resultado anterior, véase Teorema 1.2 del Capítulo 1 de [6] o Capítulo 9 de [4] o Capítulo 2 de [10].

Finalmente, observamos que en el caso unidimensional (ver Teorema 8.8 del Capítulo 8 de [4]), se da la siguiente inclusión compacta

$$H^1(l_0, l_1) \subset \mathcal{C}([l_0, l_1]).$$

3. Resultados de perturbaciones espectrales

El objetivo de la sección es introducir varios teoremas de perturbaciones espectrales que están bien adaptados para obtener convergencia espectral cuando los operadores y los espacios dependen de un pequeño parámetro ϵ . Seguimos las demostraciones de [6] que, además, se han complementado y resultan más clarificadoras.

3.1. Lema de Vishik-Liusternik

Comenzamos con un lema sobre aproximación de valores propios y vectores propios (adaptado de la referencia original [11]), que nos será útil en otros resultados.

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal autoadjunto, continuo y compacto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Supongamos que existen un valor real $\mu > 0$ y un vector $u \in \mathcal{H}$ de manera que $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$ y*

$$\|\mathcal{A}u - \mu u\|_{\mathcal{H}} \leq \alpha \quad \text{para } \alpha > 0 \text{ constante.} \quad (8)$$

Entonces, existe un valor propio μ_i del operador $\mathcal{A}$ de forma que

$$|\mu_i - \mu| \leq \alpha. \quad (9)$$

Además, para cualquier $d > \alpha$, existe un vector $\hat{u}$ tal que

$$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{2\alpha}{d}, \quad \|\hat{u}\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad (10)$$

y $\hat{u}$ es una combinación lineal de vectores propios del operador $\mathcal{A}$ asociados a los valores propios de $\mathcal{A}$ en el intervalo $[\mu - d, \mu + d]$.

Demostración. En $\mathcal{H}$, consideramos $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal formada por los vectores propios del operador $\mathcal{A}$ asociados a los valores propios $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, esto es, $\mathcal{A}\varphi_k = \mu_k\varphi_k$, con $k = 1, 2, 3, \dots$. Dicha base existe por el Teorema 2.3. Entonces, escribimos:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k; \quad \mathcal{A}u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu_k \varphi_k; \quad c_k = \langle u, \varphi_k \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Por hipótesis, tenemos que

$$\|\mu u - \mathcal{A}u\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \mu u - \mathcal{A}u, \mu u - \mathcal{A}u \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\mu - \mu_k) \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} c_k (\mu - \mu_k) \varphi_k \right\rangle \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\mu_k - \mu)^2 \leq \alpha^2.$$

En (*) se usan las propiedades de linealidad del producto escalar, así como el hecho de que los φ_k forman una base ortonormal.

Sea μ_i el valor propio de $\mathcal{A}$ que verifica $|\mu - \mu_i| = \min_k |\mu - \mu_k|$. Entonces:

$$|\mu_i - \mu|^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \alpha^2$$

y, por tanto, como $1 = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, se concluye la primera parte, es decir, que $|\mu_i - \mu| \leq \alpha$.

Veamos la segunda parte. Fijamos la siguiente notación:

$$\mathcal{A}u - \mu u = w; \quad w = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k.$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mu_k - \mu) \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k,$$

de donde se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \leq \alpha^2.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu \neq \mu_j$ para cualquier j , de forma que, igualando coeficientes, $c_k = \frac{\beta_k}{\mu_k - \mu}$. Sea $u_0 = \sum_l c_l \varphi_l$, donde la suma se toma sobre todos los índices l tales que $\mu_l \in [\mu - d, \mu + d]$. Así, tenemos que

$$u = u_0 + \sum_k \frac{\beta_k}{\mu_k - \mu} \varphi_k = u_0 + v,$$

donde la suma $v = \sum_k \frac{\beta_k}{\mu_k - \mu} \varphi_k$ se toma sobre los índices k tales que $\mu_k \notin [\mu - d, \mu + d]$. Tenemos que:

$$\|v\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle v, v \rangle = \left\langle \sum_k \frac{\beta_k}{\mu_k - \mu} \varphi_k, \sum_k \frac{\beta_k}{\mu_k - \mu} \varphi_k \right\rangle \stackrel{(*)}{=} \sum_k \left(\frac{\beta_k}{\mu_k - \mu} \right)^2 \stackrel{(**)}{\leq} \frac{\alpha^2}{d^2} \Rightarrow \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\alpha}{d}.$$

En (*) se tiene en cuenta que $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es base ortonormal y en (**) se emplean las desigualdades $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \leq \alpha^2$ y, como $|\mu_k - \mu| > d$, tenemos que $(\mu_k - \mu)^2 > d^2$, de donde concluimos que $\frac{1}{d^2} > \frac{1}{(\mu_k - \mu)^2}$.

Consideramos $\hat{u} = \frac{u_0}{\|u_0\|_{\mathcal{H}}}$ y veamos que es el vector que estábamos buscando. Claramente es un vector unitario. Teniendo en cuenta que $\|u - u_0\|_{\mathcal{H}} = \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\alpha}{d}$, $\|u_0\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ y $\|u_0\|_{\mathcal{H}} \geq \|u\|_{\mathcal{H}} - \|v\|_{\mathcal{H}}$, se sigue que:

$$\|u - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} \leq \|u - u_0\|_{\mathcal{H}} + \|u_0 - \hat{u}\|_{\mathcal{H}} = \|v\|_{\mathcal{H}} + 1 - \|u_0\|_{\mathcal{H}} \leq \|v\|_{\mathcal{H}} + 1 - \|u\|_{\mathcal{H}} + \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{2\alpha}{d}.$$

Con esto concluimos la prueba del lema. $\square$

3.2. Problemas dependientes de un pequeño parámetro

En numerosos problemas matemáticos podemos encontrarnos con parámetros (pequeños o grandes) que afectarán de una forma u otra a la solución, tanto a nivel analítico como a nivel numérico. Dichos parámetros pueden aparecer en las ecuaciones del problema, en las condiciones adicionales, en los datos o en el dominio de resolución, relacionados con parámetros de tipo físico o geométrico.

La teoría que vamos a tratar se centra en la dependencia de la solución en términos de los pequeños parámetros. Nosotros tenemos un problema dependiente de un parámetro $0 < \epsilon \ll 1$ y queremos aproximar la solución cuando ϵ tiende a cero. Desarrollaremos la base teórica para cualquier conjunto de operadores que verifique ciertas propiedades que presentamos a continuación (condiciones $C_1 - C_4$).

De esta forma, vamos a introducir la siguiente notación:

- u_ϵ , que denota una solución de un problema P_ϵ dependiente del parámetro ϵ .
- u_0 que es la solución de un problema P_0 , denominado el problema límite, que se corresponde con la solución a la que tiende u_ϵ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en una cierta topología.

Para ello, vamos a considerar espacios de funciones donde se buscan u_ϵ y u_0 . En concreto, consideraremos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_\epsilon$ y $\mathcal{H}_0$ (separables, como se menciona al principio de la memoria), respectivamente, con sus productos escalares y consideraremos operadores lineales y continuos $\mathcal{A}_\epsilon$ en $\mathcal{H}_\epsilon$ y $\mathcal{A}_0$ en $\mathcal{H}_0$, de forma que $Im(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H}_0$, donde $\mathcal{V}$ es un subespacio de $\mathcal{H}_0$ e $Im(\mathcal{A}_0)$ denota la imagen del operador $\mathcal{A}_0$. Además, se supone que dichos espacios y operadores verifican las siguientes condiciones:

- **Condición 1** (C_1): Existen operadores lineales continuos $R_\epsilon : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_\epsilon$ y una constante $\gamma > 0$ tales que

$$\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon f_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0, f_0 \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{para cualquier } f_0 \in \mathcal{V}. \quad (11)$$

- **Condición 2** (C_2): Los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\mathcal{A}_0$ son positivos, compactos y autoadjuntos. Además, las normas de los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ están acotadas por una constante independiente de ϵ .
- **Condición 3** (C_3): Para cualquier $f \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}_0$ se tiene que

$$\|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

- **Condición 4** (C_4): La familia de operadores $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ es uniformemente compacta en el siguiente sentido: para cada sucesión $\{f_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ de $\mathcal{H}_\epsilon$ tal que $\sup_\epsilon \|f_\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} < \infty$, podemos extraer una subsucesión $\{f_{\epsilon'}\}_{\epsilon' > 0}$ tal que para algún $w_0 \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$\|\mathcal{A}_{\epsilon'} f_{\epsilon'} - R_{\epsilon'} w_0\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0. \quad (13)$$

A partir de las condiciones $C_1 - C_4$, introducimos ciertos resultados que nos servirán para demostraciones posteriores.

Proposición 3.2. *La condición C_1 implica que si las sucesiones $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, $\{g_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ y los elementos f_0 , g_0 son tales que*

$$\|f_\epsilon - R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0; \quad \|g_\epsilon - R_\epsilon g_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (14)$$

entonces

$$\langle f_\epsilon, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0, g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}. \quad (15)$$

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle f_\epsilon, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} &= \langle f_\epsilon, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \langle R_\epsilon f_0, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} + \langle R_\epsilon f_0, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &= \langle f_\epsilon - R_\epsilon f_0, g_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} + \langle g_\epsilon - R_\epsilon g_0, R_\epsilon f_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|f_\epsilon - R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \|g_\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|g_\epsilon - R_\epsilon g_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \|R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ por (14)}. \end{aligned}$$

En (*) hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Ahora solo nos falta ver que, en efecto, $\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0, g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}$. Para ello vamos a usar la Identidad de Polarización:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} [\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] = \frac{1}{4} [\langle u+v, u+v \rangle - \langle u-v, u-v \rangle].$$

Tenemos que

$$\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \frac{1}{4} [\langle R_\epsilon(f_0 + g_0), R_\epsilon(f_0 + g_0) \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \langle R_\epsilon(f_0 - g_0), R_\epsilon(f_0 - g_0) \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon}].$$

Por la condición C_1 , tenemos que

$$\langle R_\epsilon(f_0 + g_0), R_\epsilon(f_0 + g_0) \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0 + g_0, f_0 + g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}; \quad \langle R_\epsilon(f_0 - g_0), R_\epsilon(f_0 - g_0) \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0 - g_0, f_0 - g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

Por las propiedades del producto escalar (real), podemos escribir:

$$\langle f_0 + g_0, f_0 + g_0 \rangle = \langle f_0, f_0 \rangle + 2\langle f_0, g_0 \rangle + \langle g_0, g_0 \rangle; \quad \langle f_0 - g_0, f_0 - g_0 \rangle = \langle f_0, f_0 \rangle - 2\langle f_0, g_0 \rangle + \langle g_0, g_0 \rangle.$$

Por tanto, uniendo todo lo anterior:

$$\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \frac{1}{4} [\gamma \langle f_0 + g_0, f_0 + g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0} - \gamma \langle f_0 - g_0, f_0 - g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}] = \frac{\gamma}{4} [4\langle f_0, g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}] = \gamma \langle f_0, g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

Finalmente, concluimos que $\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon g_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0, g_0 \rangle_{\mathcal{H}_0}$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y, con ello, la demostración. $\square$

Proposición 3.3. *Las condiciones C_2 y C_3 implican que si $f_\epsilon \in \mathcal{H}_\epsilon$, $f_0 \in \mathcal{V}$ y*

$$\|f_\epsilon - R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (16)$$

entonces

$$\|\mathcal{A}_\epsilon f_\epsilon - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular y la definición de norma de un operador, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\epsilon f_\epsilon - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} &\leq \|\mathcal{A}_\epsilon(f_\epsilon - R_\epsilon f_0)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f_0 - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\leq \|\mathcal{A}_\epsilon\| \|(f_\epsilon - R_\epsilon f_0)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f_0 - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon}. \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que $\|f_\epsilon - R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0$ y, por la condición C_2 , sabemos que los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ están acotados, lo que implica que $\|\mathcal{A}_\epsilon\| \|(f_\epsilon - R_\epsilon f_0)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Por otro lado, por la condición C_3 tenemos que $\|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f_0 - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. De esta forma, podemos concluir (17). $\square$

Nuestro objetivo es relacionar los valores propios de los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\mathcal{A}_0$ y poder estimar la diferencia entre los vectores propios y los valores propios asociados a cada uno de ellos cuando ϵ es muy pequeño. Para ello consideramos los siguientes problemas espectrales P_ϵ y P_0 :

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k = \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k, & k = 1, 2, \dots; \quad u_\epsilon^k \in \mathcal{H}_\epsilon \\ \mu_\epsilon^1 \geq \mu_\epsilon^2 \geq \dots \geq \mu_\epsilon^k \dots; & \mu_\epsilon^k > 0 \\ \langle u_\epsilon^l, u_\epsilon^m \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \delta_{lm} \end{cases} \quad (18)$$

$$(P_0) \begin{cases} \mathcal{A}_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, & k = 1, 2, \dots; \quad u_0^k \in \mathcal{H}_0 \\ \mu_0^1 \geq \mu_0^2 \geq \dots \geq \mu_0^k \geq \dots; & \mu_0^k > 0 \\ \langle u_0^l, u_0^m \rangle_{\mathcal{H}_0} = \delta_{lm} \end{cases} \quad (19)$$

donde los valores propios se repiten tantas veces como su multiplicidad, y δ_{lm} hace referencia a la delta de Kronecker.

Observación 3.4. Notemos que para cada k fijo, los valores propios $\{\mu_\epsilon^k\}_{\epsilon>0}$ están acotados, pues los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ lo están. De hecho, tenemos lo siguiente:

$$\|\mu_\epsilon^k u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} = \|\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \Rightarrow \mu_\epsilon^k \underset{(*)}{=} \mu_\epsilon^k \|u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \|\mathcal{A}_\epsilon\| \|u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \underset{(*)}{\leq} C,$$

donde en $(*)$ usamos que $\|u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} = 1$ por como está definido el problema (18) y la acotación de los $\mathcal{A}_\epsilon$.

Así, para cada k se pueden extraer subsucesiones convergentes de $\{\mu_\epsilon^k\}_{\epsilon>0}$.

Para comparar los valores propios y los vectores propios de los problemas (18) y (19), primero veremos un par de resultados previos que describen algunas propiedades de los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\mathcal{A}_0$.

Proposición 3.5. Sean $\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0$ y R_ϵ operadores verificando $C_1 - C_4$ y $\{u_\epsilon^k\}_{k=1}^\infty, \{\mu_\epsilon^k\}_{k=1}^\infty$ sucesiones de vectores y valores propios respectivamente del problema (18). Para cada k fijo, sean μ_* un escalar y $u_* \in \mathcal{V}$ tales que (por subsucesiones que seguimos denotando por ϵ)

$$\|u_\epsilon^k - R_\epsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0; \quad \mu_\epsilon^k \rightarrow \mu_* \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (20)$$

Entonces u_*, μ_* son, respectivamente, un vector y un valor propio del operador $\mathcal{A}_0$, es decir, se verifica que $\mathcal{A}_0 u_* = \mu_* u_*$, con $u_* \neq 0$.

Demostración. Tomando $f_\epsilon = u_\epsilon^k$, $f_0 = u_*$ en la Proposición 3.3, (16), y usando (20) junto a (17) se sigue que

$$\|\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (21)$$

Además, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \|R_\epsilon(\mu_* u_* - \mathcal{A}_0 u_*)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} &= \|\mu_* R_\epsilon u_* - \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k + \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|\mu_* R_\epsilon u_* - \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &= \|\mu_* R_\epsilon u_* - \mu_\epsilon^k R_\epsilon u_* + \mu_\epsilon^k R_\epsilon u_* - \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\leq \|(\mu_* - \mu_\epsilon^k) R_\epsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mu_\epsilon^k (R_\epsilon u_* - u_\epsilon^k)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} + \|\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon}, \end{aligned}$$

donde en (*) hemos usado que $\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k = \mu_\epsilon^k u_\epsilon^k$.

Teniendo en cuenta la hipótesis (20), los dos primeros términos de la última expresión tienden a cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y el tercer término tiende a cero por (21). Con ello, se tiene que

$$\|R_\epsilon(\mu_* u_* - \mathcal{A}_0 u_*)\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

de donde, aplicando la condición C_1 , (11), deducimos que $\mathcal{A}_0 u_* = \mu_* u_*$. Falta ver que, en efecto, se verifica $u_* \neq 0$.

De acuerdo a (20), $\|u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} - \|R_\epsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y aplicando (11), sabemos que

$$\|R_\epsilon u_*\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma^{\frac{1}{2}} \|u_*\|_{\mathcal{H}_0}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la formulación del problema (18) y que $\|u_\epsilon^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} = 1$, concluimos que $\gamma^{\frac{1}{2}} \|u_*\|_{\mathcal{H}_0} = 1$ y, por tanto, que $u_* \neq 0$. $\square$

A grandes rasgos, lo que nos dice el resultado anterior es que, si las sucesiones $\{u_\epsilon^k\}_{\epsilon>0}$ y $\{\mu_\epsilon^k\}_{\epsilon>0}$ “se aproximan” a algo, ese algo ha de ser un vector propio y un valor propio del operador $\mathcal{A}_0$.

El siguiente resultado nos permite asegurar que, bajo las condiciones descritas previamente, el k -ésimo valor propio de (18) tiende al k -ésimo valor propio de (19) cuando ϵ tiende a 0.

Teorema 3.6. Sean $\mathcal{A}_\epsilon$, $\mathcal{A}_0$ y R_ϵ operadores verificando las condiciones $C_1 - C_4$. Entonces se tiene que

$$\mu_\epsilon^k \rightarrow \mu_0^k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

donde μ_ϵ^k y μ_0^k son los k -ésimos valores propios de los problemas (18) y (19) respectivamente.

Demostración. En primer lugar, probemos las siguientes desigualdades

$$c_0 \geq \mu_\epsilon^j \geq c(j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

donde $c_0, c(j)$ son constantes independientes de ϵ y, además, c_0 no depende de j . Para la cota superior basta con tener en cuenta la acotación de los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$; ver Observación 3.4.

Por tanto, se tiene que $\mu_\epsilon^k \leq \|\mathcal{A}_\epsilon\| < c_0$, con c_0 la cota para cualquier $\mathcal{A}_\epsilon$.

Para la cota inferior, fijado $j > 0$, sean $\tilde{\mu}_0^1 > \dots > \tilde{\mu}_0^{j+1}$ valores propios de $\mathcal{A}_0$ y $\tilde{u}_0^1, \dots, \tilde{u}_0^{j+1}$ los vectores propios asociados tales que $\|\tilde{u}_0^l\|_{\mathcal{H}_0} = 1$ con $l = 1, \dots, j+1$. Tomando $f = \tilde{u}_0^k$ en la condición C_3 , (12), para cada $k = 1, \dots, j+1$, obtenemos que

$$\|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon \tilde{u}_0^k - R_\epsilon \mathcal{A}_0 \tilde{u}_0^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Como $\mathcal{A}_0 \tilde{u}_0^k = \tilde{\mu}_0^k \tilde{u}_0^k$, de lo anterior deducimos que

$$\alpha_\epsilon = \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon \tilde{u}_0^k - \tilde{\mu}_0^k R_\epsilon \tilde{u}_0^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Entonces, aplicando el Lema 3.1 para

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\epsilon, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_\epsilon, \quad \mu = \tilde{\mu}_0^k, \quad u = \frac{R_\epsilon \tilde{u}_0^k}{\|R_\epsilon \tilde{u}_0^k\|_{\mathcal{H}_\epsilon}} \quad \text{y} \quad \alpha_\epsilon \leq \min \left\{ \frac{\tilde{\mu}_0^k - \tilde{\mu}_0^{k+1}}{3}, \frac{\tilde{\mu}_0^{k-1} - \tilde{\mu}_0^k}{3} \right\}$$

(de forma que evitamos solapamientos entre los intervalos que separan los valores propios), existe una sucesión $\mu_\epsilon^{m(k,\epsilon)}$ con $\mu_\epsilon^{m(k,\epsilon)} \rightarrow \tilde{\mu}_0^k$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ para $k = 1, \dots, j+1$, donde $\mu_\epsilon^{m(k,\epsilon)}$ son valores propios del problema (18) con

$$\mu_\epsilon^{m(1,\epsilon)} > \dots > \mu_\epsilon^{m(j+1,\epsilon)}$$

para todo ϵ más pequeño que algún $\delta_j > 0$. Así, la desigualdad (22) es válida, pues $\mu_\epsilon^j \geq \mu_\epsilon^{m(j,\epsilon)}$ y $\mu_\epsilon^{m(j+1,\epsilon)} \rightarrow \tilde{\mu}_0^{j+1}$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Teniendo en cuenta (22), que $\mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^j = \mu_\epsilon^j u_\epsilon^j$ y usando un proceso de diagonalización, de la condición C_4 , (13), concluimos que existen vectores $u_*^j \in \mathcal{V}$ y valores μ_*^j tales que

$$\|\mu_{\epsilon'}^j u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = \|\mathcal{A}_{\epsilon'} u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0; \quad \mu_{\epsilon'}^j \rightarrow \mu_*^j \quad (23)$$

para una subsucesión $\epsilon' \rightarrow 0$ y $j = 1, 2, \dots$. Ahora, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|\mu_*^j u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} &= \|\mu_*^j u_{\epsilon'}^j - \mu_{\epsilon'}^j u_{\epsilon'}^j + \mu_{\epsilon'}^j u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \\ &\leq \|(\mu_*^j - \mu_{\epsilon'}^j) u_{\epsilon'}^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} + \|\mu_{\epsilon'}^j u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}}, \end{aligned}$$

y de (23) se sigue que los dos sumandos de la derecha tienden a 0 cuando $\epsilon' \rightarrow 0$ y, por tanto, se concluye

$$\|u_{\epsilon'}^j - R_{\epsilon'} \frac{1}{\mu_*^j} u_*^j\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0. \quad (24)$$

En virtud de la Proposición 3.5, u_*^j es un vector propio asociado al valor propio μ_*^j de $\mathcal{A}_0$, con $u_*^j \neq 0$. Tomando $f_\epsilon = u_{\epsilon'}^j$, $f_0 = \frac{1}{\mu_*^j} u_*^j$, $g_\epsilon = u_{\epsilon'}^k$ y $g_0 = \frac{1}{\mu_*^k} u_*^k$ en la Proposición 3.2 y usando la Proposición 3.3 junto a (24), obtenemos

$$\delta_{jk} = \langle u_{\epsilon'}^j, u_{\epsilon'}^k \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow \frac{\gamma}{\mu_*^k \mu_*^j} \langle u_*^j, u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0 \implies \langle u_*^j, u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_0} = \frac{\mu_*^k \mu_*^j}{\gamma} \delta_{jk}. \quad (25)$$

De esta manera los u_*^j , son ortogonales. Por tanto, hay un número infinito de μ_*^j (distintos) que convergen a 0 cuando $j \rightarrow \infty$. Si no convergiera a 0, encontraríamos una subsucesión que converge a algo distinto y tendríamos un número finito de valores propios y alguno de ellos con multiplicidad infinita.

Veamos que los vectores $U^j = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu_*^j} u_*^j$ con $j = 1, 2, \dots$, forman una base ortonormal en $\mathcal{H}_0$. Supongamos que no es el caso. Entonces existe un vector $U \in \mathcal{V}$ de forma que para algún μ_0^k tenemos que

$$\mathcal{A}_0 U = \mu_0^k U, \quad \langle U, U^j \rangle_{\mathcal{H}_0} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \|U\|_{\mathcal{H}_0} = 1. \quad (26)$$

Tomemos $f_0 = U$ en la condición C_3 , (12). Entonces $\|\mathcal{A}_{\epsilon'} R_{\epsilon'} U - R_{\epsilon'} \mathcal{A}_0 U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon' \rightarrow 0$, lo que lleva a

$$\|\mathcal{A}_{\epsilon'} U_{\epsilon'} - \mu_0^k U_{\epsilon'}\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = \alpha(\epsilon') \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0, \quad \|U_{\epsilon'}\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = 1, \quad (27)$$

donde

$$U_{\epsilon'} = \frac{R_{\epsilon'} U}{\|R_{\epsilon'} U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}}} \quad (28)$$

ya que, por la condición C_1 , $\|R_{\epsilon'} U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow \gamma^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}_0} = \gamma^{\frac{1}{2}}$.

Tomando $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\epsilon'}$, $H = \mathcal{H}_{\epsilon'}$, $\alpha = \alpha(\epsilon')$, $u = U_{\epsilon'}$ y $\mu = \mu_0^k$ en el Lema 3.1, (27) implica que hay una sucesión de valores propios $\mu_{\epsilon'}$ de los operadores $\mathcal{A}_{\epsilon'}$ que converge a μ_0^k cuando $\epsilon' \rightarrow 0$. Para ϵ' suficientemente pequeño, como $\mu_*^j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, podemos encontrar valores tales que $\mu_*^j \geq \mu_0^k > \mu_*^{j+1}$. Considerando sucesiones tales que $\mu_{\epsilon'}^j \rightarrow \mu_*^j$ y $\mu_{\epsilon'}^{j+1} \rightarrow \mu_*^{j+1}$, tenemos que $\mu_{\epsilon'}^{j+1} < \mu_{\epsilon'} < \mu_{\epsilon'}^j$. Si no fuera así, existiría una subsucesión $\mu_{\epsilon'}^{k(\epsilon')}$ de los $\mu_{\epsilon'}$ tal que $\mu_{\epsilon'}^{k(\epsilon')} > \mu_{\epsilon'}^j$ o $\mu_{\epsilon'}^{k(\epsilon')} < \mu_{\epsilon'}^{j+1}$ y tomando límites, tendríamos que o bien $\mu_0^k > \mu_*^j$ o bien $\mu_0^k < \mu_*^{j+1}$, lo que lleva en cualquier caso a un absurdo. Por tanto, existe un $\mu_*^{m_k}$ tal que $\mu_*^{m_k} = \mu_0^k$.

Tomando

$$d = \frac{1}{2} \inf_j \inf_{\mu_*^j \neq \mu_0^k} |\mu_0^k - \mu_*^j|$$

en el Lema 3.1 y suponiendo que la multiplicidad de $\mu_*^{m_k}$ es l , esto es, $\mu_*^{m_k} = \mu_*^{m_k+1} = \dots = \mu_*^{m_k+l-1}$, entonces el intervalo $[\mu_0^k - d, \mu_0^k + d]$ puede contener solo aquellos valores propios del operador $\mathcal{A}_0$ que coinciden con $\mu_*^{m_k}$ y, además, por (23) tenemos que para ϵ' suficientemente pequeño, el intervalo $[\mu_0^k - d, \mu_0^k + d]$ solo puede contener los valores propios $\mu_{\epsilon'}^{m_k}, \dots, \mu_{\epsilon'}^{m_k+l-1}$ de $\mathcal{A}_{\epsilon'}$ asociados a los vectores propios $u_{\epsilon'}^{m_k}, \dots, u_{\epsilon'}^{m_k+l-1}$. En virtud del Lema 3.1 y (27), para ϵ' suficientemente pequeño, existe un vector $\bar{u}_{\epsilon'} = \sum_{i=0}^{l-1} c_{\epsilon'}^i u_{\epsilon'}^{m_k+i}$ con $\|\bar{u}_{\epsilon'}\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = 1$ de forma que

$$\|U_{\epsilon'} - \bar{u}_{\epsilon'}\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \leq \frac{2\alpha(\epsilon')}{d}. \quad (29)$$

Tomando una subsucesión $\epsilon'' \rightarrow 0$ tal que $c_{\epsilon''}^i \rightarrow c_*^i$ cuando $\epsilon'' \rightarrow 0$, de acuerdo a (24) obtenemos que

$$\|\bar{u}_{\epsilon''} - R_{\epsilon''} \bar{u}_*\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon'' \rightarrow 0,$$

donde

$$\bar{u}_* = \frac{1}{\mu_0^k} \sum_{i=0}^{l-1} c_*^i u_*^{m_k+i} \quad (30)$$

En consecuencia, usando (28) y (29) tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R_{\epsilon''} U}{\|R_{\epsilon''} U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}}} - R_{\epsilon''} \bar{u}_* \right\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} &= \|U_{\epsilon''} - \bar{u}_{\epsilon''} + \bar{u}_{\epsilon''} - R_{\epsilon''} \bar{u}_*\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \\ &\leq \|U_{\epsilon''} - \bar{u}_{\epsilon''}\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} + \|\bar{u}_{\epsilon''} - R_{\epsilon''} \bar{u}_*\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon'' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Asi, denotando $\eta_{\epsilon''} = \|R_{\epsilon''} U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}}$ podemos escribir

$$\left\| \frac{R_{\epsilon''} U}{\|R_{\epsilon''} U\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}}} - R_{\epsilon''} \bar{u}_* \right\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} = \frac{1}{\eta_{\epsilon''}} \|R_{\epsilon''} (U - \eta_{\epsilon''} \bar{u}_*)\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \quad \text{con } \eta_{\epsilon''} \rightarrow \gamma^{\frac{1}{2}},$$

y llegamos a

$$\begin{aligned} \|R_{\epsilon''} (U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*)\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} &= \|R_{\epsilon''} (U - \eta_{\epsilon''} \bar{u}_*) + (\eta_{\epsilon''} - \gamma^{\frac{1}{2}}) R_{\epsilon''} \bar{u}_*\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \\ &\leq \|R_{\epsilon''} (U - \eta_{\epsilon''} \bar{u}_*)\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} + |\gamma^{\frac{1}{2}} - \eta_{\epsilon''}| \|R_{\epsilon''} \bar{u}_*\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon'' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con ello, por la condición C_1 , (11), tenemos que

$$\|R_{\epsilon''} (U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*)\|_{\mathcal{H}_{\epsilon''}}^2 = \langle R_{\epsilon''} (U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*), R_{\epsilon''} (U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*) \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon''}} \rightarrow \gamma \langle U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*, U - \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_* \rangle_{\mathcal{H}_0},$$

y como el límite de la izquierda es cero, por la unicidad del límite se sigue que $U = \gamma^{\frac{1}{2}} \bar{u}_*$.

Ahora bien, de (30) concluimos que U es una combinación lineal de los vectores U^j para $j = 0, 1, \dots, l-1$, lo que entra en contradicción con (26).

Por tanto, los vectores U^j , $j = 1, 2, \dots$, forman una base ortonormal en $\mathcal{H}_0$ y tenemos todos los valores propios, es decir, $\mu_0^j = \mu_*^j$, concluyendo la prueba del resultado para la subsucesión ϵ' .

Finalmente, por reducción al absurdo, si no fuera cierta la convergencia de los valores propios para la sucesión original ϵ , para cada k podríamos extraer una subsucesión y repetiríamos el proceso anterior, obteniendo los mismos límites y llegando a contradicción. $\square$

Con los resultados previos, podemos demostrar el siguiente teorema, que permite estimar la diferencia entre los valores propios de los problemas (18) y (19).

Teorema 3.7. Sean los espacios $\mathcal{H}_\epsilon$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{V}$ y los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$, $\mathcal{A}_0$ y R_ϵ verificando las cuatro condiciones $C_1 - C_4$. Entonces, hay una sucesión $\{\beta_\epsilon^k\}$ tal que $\beta_\epsilon^k \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $0 < \beta_\epsilon^k < \mu_0^k$ y

$$|\mu_\epsilon^k - \mu_0^k| \leq \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu_0^k - \beta_\epsilon^k} \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon u - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

donde μ_ϵ^k , μ_0^k son los k -ésimos valores propios de los problemas (18) y (19) respectivamente, y $N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) = \{u \in \mathcal{H}_0 : \mathcal{A}_0 u = \mu_0^k u\}$ es el espacio propio del operador $\mathcal{A}_0$ correspondiente al valor propio μ_0^k .

Demostración. Fijamos k y consideramos la sucesión $\mu_\epsilon^k u_\epsilon^k = \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k$. Por el Teorema 3.6, $\mu_\epsilon^k \rightarrow \mu_0^k$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y, por (24), existe una subsucesión $\epsilon' \rightarrow 0$ y un vector $u_*^k \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \subset \mathcal{V}$ tal que

$$\|\mu_0^k u_{\epsilon'}^k - R_{\epsilon'} u_*^k\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0; \quad \|u_*^k\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \frac{|\mu_0^k|^2}{\gamma}. \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ son autoadjuntos, tenemos

$$\mu_\epsilon^k \langle u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle \mathcal{A}_\epsilon u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle u_\epsilon^k, \mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon},$$

lo que nos lleva a

$$0 = \mu_\epsilon^k \langle u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \mu_0^k \langle u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} + \mu_0^k \langle u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} - \langle u_\epsilon^k, \mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon},$$

de donde obtenemos

$$(\mu_\epsilon^k - \mu_0^k) \langle u_\epsilon^k, R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle u_\epsilon^k, \mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon u_*^k - \mu_0^k R_\epsilon u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon}. \quad (33)$$

Por otro lado, de (32) y de la Proposición 3.2 tomando $f_\epsilon = u_\epsilon^k$ y $g_\epsilon = R_\epsilon u_*^k$ se sigue que:

$$\langle u_{\epsilon'}^k, R_{\epsilon'} u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = \mu_0^k \langle u_{\epsilon'}^k, R_{\epsilon'} \frac{1}{\mu_0^k} u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow \frac{\gamma}{\mu_0^k} \|u_*^k\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \mu_0^k > 0 \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0.$$

Fijando $\langle u_{\epsilon'}^k, R_{\epsilon'} u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} = \mu_0^k + \alpha_{\epsilon'}$, donde $\alpha_{\epsilon'} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon' \rightarrow 0$, de (33) y (32) se deduce la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} |\mu_{\epsilon'}^k - \mu_0^k| &\leq \frac{|\langle u_{\epsilon'}^k, \mathcal{A}_{\epsilon'} R_{\epsilon'} u_*^k - R_{\epsilon'} \mathcal{A}_0 u_*^k \rangle_{\mathcal{H}_{\epsilon'}}|}{|\mu_0^k + \alpha_{\epsilon'}|} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{|\mu_0^k + \alpha_{\epsilon'}|} \|\mathcal{A}_{\epsilon'} R_{\epsilon'} \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^k} u_*^k - R_{\epsilon'} \mathcal{A}_0 \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu_0^k} u_*^k\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu_0^k - |\alpha_{\epsilon'}|} \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_{\epsilon'} R_{\epsilon'} u - R_{\epsilon'} \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}}, \end{aligned} \quad (34)$$

donde en (*) se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en (**) basta con tener en cuenta la desigualdad $|\mu_0^k + \alpha_{\epsilon'}| \geq \mu_0^k - |\alpha_{\epsilon'}|$, de donde deducimos que $\frac{1}{|\mu_0^k + \alpha_{\epsilon'}|} \leq \frac{1}{\mu_0^k - |\alpha_{\epsilon'}|}$.

Por tanto, la estimación (31) se cumple para una subsucesión $\epsilon' \rightarrow 0$ y $\beta_{\epsilon'}^k = |\alpha_{\epsilon'}|$.

Veamos que para ϵ suficientemente pequeño podemos construir β_ϵ^k verificando las condiciones del teorema. Primero, afirmamos que existe una constante $C \geq \gamma^{-\frac{1}{2}}$ verificando la desigualdad

$$|\mu_\epsilon^k - \mu_0^k| \leq C \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon u - R_\epsilon \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \quad (35)$$

para cada ϵ suficientemente pequeño. Procedemos por reducción al absurdo, si para cualquier $\bar{c} > 0$ existe un $\epsilon_{\bar{c}}$ tal que no se verifica la desigualdad, es decir,

$$|\mu_{\epsilon_{\bar{c}}}^k - \mu_0^k| > \bar{c} \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_{\epsilon_{\bar{c}}} R_{\epsilon_{\bar{c}}} u - R_{\epsilon_{\bar{c}}} \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_{\epsilon_{\bar{c}}}}$$

entonces, tomando una sucesión $C_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos $\mu_{\epsilon_n}^k$ verificando

$$|\mu_{\epsilon_n}^k - \mu_0^k| > C_n \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_{\epsilon_n} R_{\epsilon_n} u - R_{\epsilon_n} \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_{\epsilon_n}}.$$

Repitiendo el proceso desde (32) hasta (34), podemos extraer una subsucesión ϵ'_n tal que

$$C_{\epsilon'_n} \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_{\epsilon'_n} R_{\epsilon'_n} u - R_{\epsilon'_n} \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'_n}} > |\mu_{\epsilon'_n}^k - \mu_0^k| > C'_n \sup_{\substack{u \in N(\mu_0^k, \mathcal{A}_0) \\ \|u\|_{\mathcal{H}_0} = 1}} \|\mathcal{A}_{\epsilon'_n} R_{\epsilon'_n} u - R_{\epsilon'_n} \mathcal{A}_0 u\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'_n}},$$

con $C_{\epsilon'_n} = \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu_0^k - \beta_{\epsilon'_n}^k} \rightarrow \gamma^{-\frac{1}{2}}$ y C'_n la constante C_n asociada a ϵ'_n .

Ahora bien, de la desigualdad anterior, tenemos que el primer término tiende a un valor finito y el tercero tiende a infinito, lo que lleva a un absurdo, luego (35) es cierta, donde podemos tomar $C \geq \gamma^{-\frac{1}{2}}$.

Definimos C_ϵ como el ínfimo de las constantes $C \geq \gamma^{-\frac{1}{2}}$ verificando (35). Por otro lado, tomemos β_ϵ^k tal que $C_\epsilon = \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu_0^k - \beta_\epsilon^k}$, obteniendo

$$\beta_\epsilon^k = \mu_0^k - \frac{\mu_0^k \gamma^{-\frac{1}{2}}}{C_\epsilon}.$$

Nos falta ver que, en efecto, $\beta_\epsilon^k \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Supongamos que no es así. Entonces construimos una subsucesión $\epsilon'' \rightarrow 0$ tal que $\beta_{\epsilon''}^k > c > 0$ para alguna constante c y repitiendo el proceso desde (32) hasta (34), existe una subsucesión ϵ' de la sucesión ϵ'' de forma que (31) se cumple con $\beta_{\epsilon'}^k \rightarrow 0$, lo que lleva a una contradicción y concluimos la demostración. $\square$

También se puede obtener una estimación de la aproximación de los vectores propios, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Sea $k \geq 0$ y $m \geq 1$ enteros tales que $\mu_0^k > \mu_0^{k+1} = \dots = \mu_0^{k+m} > \mu_0^{k+m+1}$, es decir, la multiplicidad del valor propio μ_0^{k+1} del problema (19) es m , considerando que $\mu_0^0 = \infty$. Entonces, para cualquier $w \in N(\mu_0^{k+1}, \mathcal{A}_0)$ con $\|w\|_{\mathcal{H}_0} = 1$, existe una combinación lineal $\bar{u}_\epsilon$ de los vectores propios $u_\epsilon^{k+1}, \dots, u_\epsilon^{k+m}$ del problema (18) tal que*

$$\|\bar{u}_\epsilon - R_\epsilon w\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \leq M_k \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon w - R_\epsilon \mathcal{A}_0 w\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (36)$$

donde M_k es una constante independiente de ϵ .

Demostración. En el Lema 3.1, tomamos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\epsilon$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\epsilon$, $u = \frac{R_\epsilon w}{\|R_\epsilon w\|_{\mathcal{H}_\epsilon}}$, $\mu = \mu_0^{k+1}$ y $d > 0$ de forma que el intervalo $[\mu_0^{k+1} - d, \mu_0^{k+1} + d]$ solo contenga a los valores propios $\mu_0^{k+1} = \dots = \mu_0^{k+m}$ del operador $\mathcal{A}_0$ y ningún otro.

Tomamos $\alpha_\epsilon = \|R_\epsilon w\|_{\mathcal{H}_\epsilon}^{-1} \|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon w - R_\epsilon \mathcal{A}_0 w\|_{\mathcal{H}_\epsilon}$ que converge a cero por C_3 y C_1 , dado que

$$\|R_\epsilon w\|_{\mathcal{H}_\epsilon}^2 \rightarrow \gamma \|w\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \gamma \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Aplicando la segunda parte del Lema 3.1, existe un vector $\bar{u}_\epsilon$ que es combinación lineal de los vectores propios del operador $\mathcal{A}_\epsilon$ asociados a los valores propios de dicho operador en el intervalo $[\mu_0^{k+1} - d, \mu_0^{k+1} + d]$, verificando (36).

Por el Teorema 3.6, los valores propios μ_ϵ^l con $l = k + 1, \dots, k + m$ convergen a $\mu_0^{k+1} = \dots = \mu_0^{k+m}$ y $\mu_\epsilon^k \rightarrow \mu_0^k$, $\mu_\epsilon^{k+m+1} \rightarrow \mu_0^{k+m+1}$, para $\epsilon \rightarrow 0$, luego para ϵ suficientemente pequeño en el intervalo $[\mu_0^{k+1} - d, \mu_0^{k+1} + d]$ solo encontramos los valores propios $\{\mu_\epsilon^l\}_{l=k+1}^{k+m}$. Por tanto, $\bar{u}_\epsilon$ solo puede ser combinación lineal de los vectores propios $u_\epsilon^{k+1}, \dots, u_\epsilon^{k+m}$. $\square$

4. Aplicación de la teoría de perturbaciones a estructuras delgadas

En esta sección aplicamos la teoría de perturbaciones espectrales introducida en la sección anterior a un problema planteado en una barra delgada con condiciones de contorno mixtas.

En primer lugar describimos el dominio donde se va a plantear el problema. Para ello consideramos un dominio acotado (abierto y conexo) tipo barra (abreviando una *barra*) $G \subset \mathbb{R}^3$ con frontera Lipschitziana, que supondremos situado a lo largo del eje X_1 . Concretamente, G admite una representación de la forma siguiente

$$G = \bigcup_{x_1 \in (l_0, l_1)} \{(x_1, x_2, x_3) : (x_2, x_3) \in D_{x_1}\}, \quad (37)$$

donde D_{x_1} son las secciones transversales, es decir, dado $x_1 \in (l_0, l_1)$ fijo, D_{x_1} es un dominio abierto del plano que depende de x_1 y tal que $(0, 0) \in \overline{D_{x_1}}$. Además, supondremos que el área de las secciones D_{x_1} cumple que

$$0 < c_0 < |D_{x_1}| \leq c_1, \quad \forall x_1 \in [l_0, l_1], \quad (38)$$

para algunas constantes c_0 y c_1 independientes de x_1 .

Denotamos por ∂G a la frontera de G , que está formada por la unión de dos caras planas, denotadas por Γ_0 y Γ_1 , y una superficie lateral $\Gamma_l \subset \mathbb{R}^3$. En concreto, vamos a considerar $\overline{\Gamma}_0 = \overline{G} \cap \{x_1 = l_0\}$, $\overline{\Gamma}_1 = \overline{G} \cap \{x_1 = l_1\}$ para cualesquiera constantes $l_0 \leq 0 < l_1$ y la frontera será $\partial G = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_l$. Por simplicidad, en la descripción se ha considerado que el origen de coordenadas está en $\overline{G}$.

Ahora, sea $\epsilon \in (0, 1)$ un pequeño parámetro que haremos tender a 0 y consideramos el dominio G_ϵ siguiente:

$$G_\epsilon = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, \frac{x_2}{\epsilon}, \frac{x_3}{\epsilon}) \in G\},$$

es decir,

$$G_\epsilon = \bigcup_{x_1 \in (l_0, l_1)} \{(x_1, x_2, x_3) : (x_2, x_3) \in D_{x_1}^\epsilon\} \quad \text{con } D_{x_1}^\epsilon = \epsilon D_{x_1}$$

Denotamos por Γ_ϵ^D las dos caras perpendiculares al eje X_1 , esto es:

$$\Gamma_\epsilon^D = \Gamma_0^\epsilon \cup \Gamma_1^\epsilon \quad \text{con} \quad \overline{\Gamma}_0^\epsilon = \overline{G_\epsilon} \cap \{x_1 = l_0\} \quad \text{y} \quad \overline{\Gamma}_1^\epsilon = \overline{G_\epsilon} \cap \{x_1 = l_1\},$$

y la superficie lateral es $\Gamma_\epsilon^l = \partial G_\epsilon \setminus \overline{\Gamma_\epsilon^D}$. Notemos que, de (38), se deduce

$$0 < c_0 \epsilon^2 < |D_{x_1}^\epsilon| \leq c_1 \epsilon^2, \quad \forall x_1 \in [l_0, l_1] \quad (39)$$

4.1. Algunos ejemplos de dominios

Con el objetivo de clarificar el tipo de dominios que estamos considerando a lo largo de esta sección (ver también Secciones 5 y 6), vamos a mostrar algunos ejemplos.

1. **Prisma y/o cilindro:** En el caso de que $D_{x_1} = D$ para cualquier $x_1 \in (l_0, l_1)$, G es un dominio tubular $G = (l_0, l_1) \times D$, por ejemplo un prisma cuya expresión puede ser la de un ortoedro

$$G_\epsilon = (0, 1) \times (0, \epsilon) \times (0, \epsilon).$$

También se puede considerar un cilindro de radio ϵ y longitud $h = 1$.

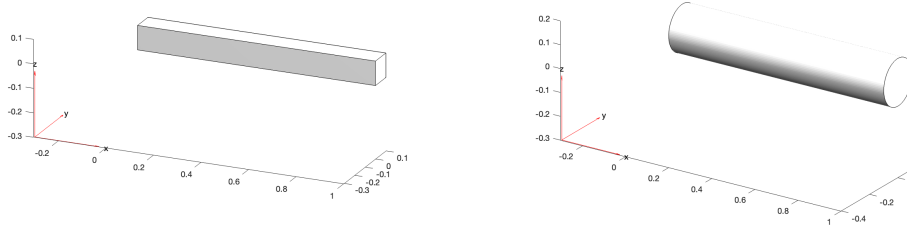


Figura 1: A la izquierda, ortoedros con $\epsilon = 0,1$ y a la derecha, un cilindro con radio $\epsilon = 0,1$

2. **Unión de dos prismas:** La unión de dos prismas de distinto tamaño como, por ejemplo, dos ortoedros que están en contacto a través de una de sus caras y cuyas expresiones sean

$$G_{\epsilon_1} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon); \quad G_{\epsilon_2} = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

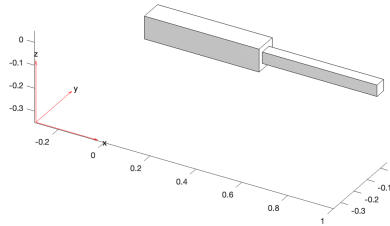


Figura 2: Unión de dos ortoedros con $\epsilon = 0,05$

3. **Ortoedros cruzados:** También nos sirve un dominio con ortoedros cruzados, u otras configuraciones, como vemos en la siguiente figura.

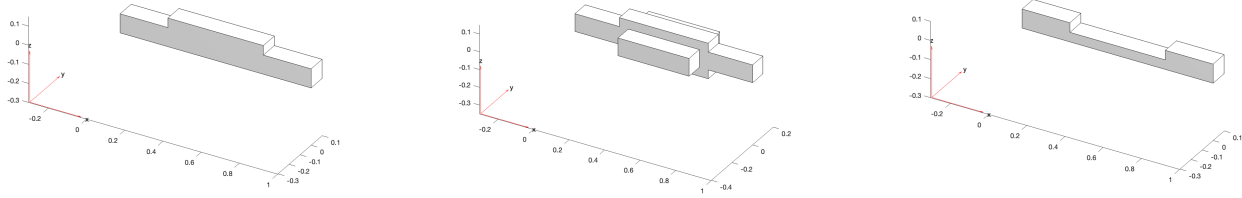


Figura 3: Ortoedros cruzados con diferentes configuraciones y $\epsilon = 0,1$

4. **Bóvedas o dominios ondulados:** Otro tipo de dominio con el que vamos a trabajar es uno con forma de bóveda. De manera general, podemos considerar dominios cuya expresión es

$$G_\epsilon = (0, 1) \times (0, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon h(x_1)),$$

donde h es cierta función positiva continua.

También pueden servir dominios que presenten algún tipo de ondulación, como vemos en la siguiente figura.

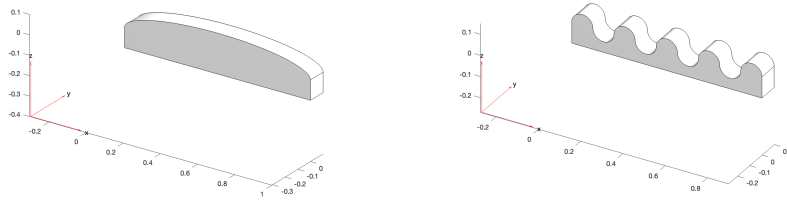


Figura 4: A la izquierda, bóveda con $\epsilon = 0,1$ y, a la derecha, un dominio con ondulaciones.

5. **Dominios más generales:** Dominios cuya expresión se escribe como

$$G_\epsilon = (l_0, l_1) \times (-\epsilon h_1(x_1), \epsilon h_2(x_1)) \times (-\epsilon h_3(x_1), \epsilon h_4(x_1)),$$

donde las funciones h_j son regulares uniformemente acotadas:

$$0 < c_0 < h_j(x_1) < c_1 \quad \forall x_1 \in (l_0, l_1),$$

de forma que nos aseguramos que se verifica la condición (38) y que proporcionen un dominio G con frontera Lipschitziana.

Dentro de este tipo, se pueden incluir la unión de prismas, los ortoedros cruzados y los dominios con ondulaciones.

4.2. Planteamiento del problema

Vamos a centrarnos en el problema de valores propios para el operador de Laplace con condiciones de contorno mixtas (Dirichlet-Neumann):

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = \lambda_\epsilon u_\epsilon & \text{en } G_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{en } \Gamma_\epsilon^D \\ \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial G_\epsilon \setminus \overline{\Gamma_\epsilon^D} \end{cases}. \quad (40)$$

donde n es el vector normal exterior a ∂G_ϵ . Para obtener la formulación débil del problema (40), definimos $H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$ como la completación de

$$\{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G_\epsilon}) : u = 0 \text{ en } \Gamma_\epsilon^D\}, \quad (41)$$

considerando la norma usual de $H^1(G_\epsilon)$, dada por

$$\|u\|_{H^1(G_\epsilon)} = \left(\|u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Supongamos que existe una solución regular u_ϵ de (40) y consideramos v en el espacio (41) de forma que

$$\int_{G_\epsilon} (-\Delta u_\epsilon) v dx = \lambda_\epsilon \int_{G_\epsilon} u_\epsilon v dx.$$

Usando la identidad de Green, reescribimos la integral de la izquierda como

$$\int_{G_\epsilon} (-\Delta u_\epsilon) v dx = \int_{G_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx - \int_{\partial G_\epsilon} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} v dS_x.$$

Ahora bien, como $v = 0$ en Γ_ϵ^D y $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n} = 0$ en $\partial G_\epsilon \setminus \overline{\Gamma_\epsilon^D}$, lo anterior se reduce a

$$\int_{G_\epsilon} (-\Delta u_\epsilon) v dx = \int_{G_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx.$$

Así, la formulación débil del problema (40) consiste en buscar $(\lambda_\epsilon, u_\epsilon) \in \mathbb{R} \times H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$ con $u_\epsilon \not\equiv 0$ de forma que

$$\int_{G_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla v dx = \lambda_\epsilon \int_{G_\epsilon} u_\epsilon v dx \quad \forall v \in H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D). \quad (42)$$

Recíprocamente, si (42) tiene una solución regular, se verifica (40) en el sentido de las distribuciones considerando $v \in \mathcal{C}_0^\infty(G_\epsilon)$ en (42) y usando la identidad de Green. La condición en Γ_ϵ^D viene dada por la pertenencia al espacio $H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$ y la condición en $\partial G_\epsilon \setminus \overline{\Gamma_\epsilon^D}$ se tiene de forma natural.

Para aplicar el Teorema 2.8, definimos la forma bilineal

$$\phi_\epsilon(u, v) = \int_{G_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad u, v \in H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D). \quad (43)$$

Veamos que ϕ_ϵ es simétrica, continua y coerciva. La primera condición es inmediata. La continuidad se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \int_{G_\epsilon} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| = |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(G_\epsilon)}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(G_\epsilon)} \|\nabla v\|_{L^2(G_\epsilon)} \leq \|u\|_{H^1(G_\epsilon)} \|v\|_{H^1(G_\epsilon)}.$$

Finalmente, para probar la coercividad, necesitamos una desigualdad de Poincaré en G_ϵ

$$\int_{G_\epsilon} v^2 dx \leq C \int_{G_\epsilon} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in H(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D), \quad (44)$$

con C una constante independiente de ϵ y v . A continuación demostramos (44).

En primer lugar, para una función regular v que se anulan en Γ_ϵ^D , y $(x_1, x_2, x_3) \in G_\epsilon$, consideramos $w(x_1) = v(x_1, x_2, x_3)$, de forma que $w(l_0) = 0$ y $w(l_1) = 0$. Tenemos que

$$w(x_1) = \int_{l_0}^{x_1} w'(t) dt \Rightarrow |w(x_1)|^2 = \left| \int_{l_0}^{x_1} w'(t) dt \right|^2.$$

Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obteniendo

$$|w(x_1)|^2 \leq (x_1 - l_0)^2 \int_{l_0}^{x_1} |w'(t)|^2 dt \leq (l_1 - l_0)^2 \int_{l_0}^{x_1} |w'(t)|^2 dt, \quad (45)$$

esto es,

$$|v(x_1, x_2, x_3)|^2 \leq C \int_{l_0}^{x_1} |\partial_t v(t, x_2, x_3)|^2 dt,$$

siendo $C = (l_1 - l_0)^2$ y, en consecuencia, integrando para $(x_2, x_3) \in D_{x_1}^\epsilon$ y después para $x_1 \in (l_0, l_1)$, llegamos a

$$\int_{G_\epsilon} v^2 dx \leq C \int_{G_\epsilon} |\nabla v|^2 dx, \quad (46)$$

donde C es una constante independiente de ϵ y v . De esta forma, teniendo en cuenta que el espacio de funciones 41 es denso en $H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$, podemos usar un argumento de densidad para obtener (44).

De (44), se obtiene que

$$\|u\|_{H^1(G_\epsilon)}^2 = \|u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2 \leq (1 + C^2) \|\nabla u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2,$$

y podemos deducir que

$$\phi_\epsilon(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(G_\epsilon)}^2 \geq \frac{1}{1 + C^2} \|u\|_{H^1(G_\epsilon)}^2.$$

Con todo lo anterior, podemos aplicar el Teorema 2.8 a la forma bilineal ϕ_ϵ tomando los espacios $\mathcal{V} = H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$ y $\mathcal{H} = L^2(G_\epsilon)$, lo que nos lleva a que los valores propios del problema (42) cumplen

$$0 < \lambda_\epsilon^1 \leq \lambda_\epsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\epsilon^n \leq \dots \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde los valores propios se repiten tantas veces como su multiplicidad. Además, vamos a considerar el conjunto de funciones propias $\{u_\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ de forma que sean una base ortogonal de $H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$ y $L^2(G_\epsilon)$, sujetas a la condición de normalización siguiente:

$$\int_{G_\epsilon} |u_\epsilon|^2 dx = \epsilon^2. \quad (47)$$

Veamos en primer lugar que, para un valor fijo de ϵ , los valores propios λ_ϵ^n están acotados superior e inferiormente.

Lema 4.1. *Supongamos la hipótesis de acotación uniforme (38). Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos la acotación*

$$0 < C_0 \leq \lambda_\epsilon^n \leq C_n \quad \forall \epsilon > 0, \quad (48)$$

donde C_0 y C_n son constantes independientes de ϵ

Demostración. Haciendo uso de la desigualdad de Poincaré, (44), llegamos a la cota inferior para la desigualdad (48), ya que se tiene

$$\lambda_\epsilon^n \geq \lambda_\epsilon^1 = \frac{\int_{G_\epsilon} |\nabla u_\epsilon^1|^2 dx}{\int_{G_\epsilon} |u_\epsilon^1|^2 dx} \geq \frac{\int_{G_\epsilon} |u_\epsilon^1|^2 dx}{C \int_{G_\epsilon} |u_\epsilon^1|^2 dx} = \frac{1}{C} := C_0.$$

Veamos la cota superior. Para ello, usando el principio del min-max (Teorema 2.10) con la forma bilineal ϕ_ϵ , tenemos que

$$\lambda_\epsilon^n = \min_{E_n \subset H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)} \max_{\substack{v \in E_n \\ v \neq 0}} \frac{\int_{G_\epsilon} |\nabla v|^2 dx}{\int_{G_\epsilon} v^2 dx},$$

donde E_n denota un subespacio de dimensión n de $H^1(G_\epsilon, \Gamma_\epsilon^D)$, y el mínimo se toma sobre todos los subespacios de dimensión n . Escribiendo $u(x_1, x_2, x_3) := u(x_1)$ para cada $u \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0, l_1)$, podemos tomar el espacio E_n^* generado por los vectores propios $\{u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^n\}$ asociados a los valores propios $\{\lambda_0^1, \lambda_0^2, \dots, \lambda_0^n\}$ del problema de Dirichlet en (l_0, l_1) :

$$\begin{cases} u'' + \lambda_0 u = 0, & x_1 \in (l_0, l_1) \\ u(l_0) = u(l_1) = 0 \end{cases}.$$

De esta forma, teniendo en cuenta que el área de las secciones transversales cumple la acotación (39), obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\lambda_\epsilon^n \leq \max_{\substack{v \in E_n^* \\ v \neq 0}} \frac{\int_{l_0}^{l_1} \int_{D_{x_1}^\epsilon} (v'(x_1))^2 dx_2 dx_3 dx_1}{\int_{l_0}^{l_1} \int_{D_{x_1}^\epsilon} (v(x_1))^2 dx_2 dx_3 dx_1} \leq \frac{c_1}{c_0} \max_{\substack{v \in E_n^* \\ v \neq 0}} \frac{\int_{l_0}^{l_1} (v'(x_1))^2 dx_1}{\int_{l_0}^{l_1} (v(x_1))^2 dx_1} = \frac{c_1}{c_0} \lambda_0^n$$

Con ello, concluimos la cota superior y, por tanto, la demostración del lema. $\square$

4.3. El problema límite

En esta sección identificamos el problema límite de (42) (o equivalentemente de (40)) con un problema unidimensional asociado a modelos de difusión/vibraciones en medios no homogéneos, cuyas características físicas tienen en cuenta la geometría del dominio original.

Para ello, introducimos una variable auxiliar, $y = (y_1, y_2, y_3)$ que se denomina *stretching variable* (variable de alargamiento), cuya conexión con la variable original $x = (x_1, x_2, x_3)$ viene dada por el cambio que transforma G_ϵ en G :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{x_2}{\epsilon}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\epsilon}. \quad (49)$$

Denotando por $U_\epsilon(y) := u_\epsilon(y_1, \epsilon y_2, \epsilon y_3)$ reescribimos el problema (42) como

$$\int_G (\partial_{y_1} U_\epsilon \partial_{y_1} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_2} U_\epsilon \partial_{y_2} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_3} U_\epsilon \partial_{y_3} V) dy = \lambda_\epsilon \int_G U_\epsilon V dy \quad \text{con } U, V \in H^1(G, \Gamma^D), \quad (50)$$

siendo $H^1(G, \Gamma^D)$ la compleción de

$$\{u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{G}) : u = 0 \text{ en } \Gamma^D\} \quad (51)$$

con la norma usual de $H^1(G)$, donde $\Gamma^D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Ahora, la normalización (47), pasa a ser

$$\int_G |U_\epsilon|^2 dy = 1. \quad (52)$$

Consideramos la forma bilineal asociada a (50)

$$\Phi_\epsilon(U, V) = \int_G (\partial_{y_1} U \partial_{y_1} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_2} U \partial_{y_2} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_3} U \partial_{y_3} V) dy. \quad (53)$$

Cabe destacar que la forma bilineal Φ_ϵ , (53), es simétrica, continua y coerciva por razonamientos análogos a los realizados para la forma ϕ_ϵ , (43), y, con ello, tenemos que Φ_ϵ define un producto escalar, cuya norma asociada es equivalente a la de $H^1(G)$ (véase (44) para $\epsilon = 1$). Además, los valores propios de ambos problemas son los mismos, (42) y (50), pues únicamente se han reescalado las dimensiones del dominio.

Teniendo en cuenta la normalización (52), (50) y la acotación dada por (48), para cada n fijo, considerando la notación $\lambda_\epsilon = \lambda_\epsilon^n$ y $U_\epsilon = U_\epsilon^n$, podemos escribir

$$\int_G (|\partial_{y_1} U_\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_2} U_\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_3} U_\epsilon|^2) dy = \lambda_\epsilon \leq C_n,$$

y tenemos las cotas siguientes

$$\|U_\epsilon\|_{H^1(G)} \leq C_n, \quad \|\partial_{y_2} U_\epsilon\|_{L^2(G)} \leq C_n \epsilon, \quad \|\partial_{y_3} U_\epsilon\|_{L^2(G)} \leq C_n \epsilon, \quad (54)$$

donde las constantes dependen del n -ésimo valor propio.

Con las cotas anteriores, (54), para cualquier sucesión de $(\lambda_\epsilon, U_\epsilon)$, podemos extraer una subsucesión (que seguimos denotando por ϵ) de forma que

$$\lambda_\epsilon \rightarrow \lambda_0, \quad U_\epsilon \rightarrow U_0 \quad \text{en } H^1(G)\text{-débil cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (55)$$

para algún valor $\lambda_0 > 0$ y $U_0 \in H^1(G, \Gamma^D)$. Además, considerando de nuevo (54), tenemos que

$$\|\partial_{y_2} U_\epsilon\|_{L^2(G)} \rightarrow 0, \quad \|\partial_{y_3} U_\epsilon\|_{L^2(G)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

es decir:

$$\partial_{y_i} U_\epsilon \rightarrow 0 \quad \text{en } L^2(G) \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0 \text{ para } i = 2, 3. \quad (56)$$

De esta manera, U_ϵ converge a U_0 en $L^2(G)$ y las derivadas $\partial_{y_i} U_\epsilon$ convergen a $\partial_{y_i} U_0$ en el sentido de las distribuciones para $i = 1, 2, 3$. Teniendo en cuenta (56), por la unicidad del límite se tiene que $\partial_{y_i} U_0 = 0$ para $i = 2, 3$, es decir, U_0 es independiente de y_2 e y_3 , lo que permite escribir $U_0(y_1, y_2, y_3) = U_0(y_1)$, $U_0 \in H_0^1(l_0, l_1)$.

Ahora solo nos falta identificar el problema que verifica el par (λ_0, U_0) . Para ello, vamos a tomar límites en (50) para funciones de la forma $V = \varphi(y_1) \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0, l_1)$. Con ello, tenemos

$$\int_G \partial_{y_1} U_\epsilon \varphi' dy = \lambda_\epsilon \int_G U_\epsilon \varphi dy.$$

De acuerdo a (55), cuando $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos la expresión

$$\int_G \partial_{y_1} U_0 \varphi' dy = \lambda_0 \int_G U_0 \varphi dy \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0, l_1). \quad (57)$$

Teniendo en cuenta la representación del dominio G , (37), podemos reescribir (57) como sigue

$$\int_{l_0}^{l_1} \int_{D_{y_1}} \partial_{y_1} U_0 \varphi' dy_1 dy_2 dy_3 = \lambda_0 \int_{l_0}^{l_1} \int_{D_{y_1}} U_0 \varphi dy_1 dy_2 dy_3 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0, l_1).$$

Usando un argumento de densidad para funciones de $H_0^1(l_0, l_1)$, obtenemos la formulación

$$\int_{l_0}^{l_1} |D_{y_1}| \partial_{y_1} U_0 \varphi' dy_1 = \lambda_0 \int_{l_0}^{l_1} |D_{y_1}| U_0 \varphi dy_1 \quad \forall \varphi \in H_0^1(l_0, l_1), \quad (58)$$

que se corresponde con la formulación débil del siguiente problema con condiciones Dirichlet

$$\begin{cases} -\partial_{x_1}(|D_{x_1}| \partial_{x_1} U_0) = \lambda_0 |D_{x_1}| U_0, & x_1 \in (l_0, l_1) \\ U_0(l_0) = 0, & U_0(l_1) = 0 \end{cases}. \quad (59)$$

Con los desarrollos anteriores, y teniendo en cuenta que $U_0 \neq 0$ debido a la normalización (52) y la convergencia fuerte en $L^2(G)$ (véase (55)), se ha demostrado el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *Supongamos que el área de las secciones transversales del dominio G , $|D_{x_1}|$, es una función continua a trozos para $x_1 \in (l_0, l_1)$ verificando la condición (38). Sean $\{\lambda_\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ y $\{U_\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ valores y vectores propios del problema (50), respectivamente. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, y para cualquier subsucesión de ϵ (que seguimos denotando por ϵ), tal que*

$$\lambda_\epsilon^n \rightarrow \lambda_0^*; \quad U_\epsilon^n \rightarrow U_0^* \quad \text{en } H^1(G)\text{-débil cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

entonces λ_0^ es un valor propio de (58) y U_0^* es una función propia asociada.*

4.4. Convergencia con conservación de la multiplicidad

Teniendo en cuenta los resultados de la Sección 3.2, vamos a identificar los elementos $\mathcal{H}_\epsilon$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{A}_\epsilon$, $\mathcal{A}_0$ y R_ϵ que aparecen en la teoría espectral presentada en la Sección 3 (ver condiciones $C_1 - C_4$).

- **Espacios $\mathcal{H}_\epsilon$ y $\mathcal{V}_\epsilon$:** En el problema dependiente de ϵ , consideramos $\mathcal{H}_\epsilon = L^2(G)$ con el producto escalar usual; el dominio siempre es fijo y no depende de ϵ . Además, también se considera el subespacio $\mathcal{V}_\epsilon = H^1(G, \Gamma^D)$ dotado del producto escalar dado por la forma bilineal Φ_ϵ , (53).
- **Espacios $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{V}_0$:** En el caso del problema límite, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, nos quedamos con un dominio unidimensional en el eje X_1 , luego tenemos que $\mathcal{H}_0 = L^2(l_0, l_1)$ con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_0} = \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| u v dx_1.$$

También consideramos el subespacio $\mathcal{V}_0 = H_0^1(l_0, l_1)$ dotado con el producto escalar dado por

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{V}_0} = \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| u' v' dx_1.$$

Notemos que la norma asociada al producto escalar considerado en $\mathcal{V}_0$ es equivalente al usual en $H^1(l_0, l_1)$ debido a la desigualdad de Poincaré en dimensión uno (ver (44)) y la acotación (38).

- **Operador $\mathcal{A}_\epsilon$:** El operador $\mathcal{A}_\epsilon : \mathcal{H}_\epsilon \rightarrow \mathcal{H}_\epsilon$, que envía $f \in \mathcal{H}_\epsilon$ a un elemento $u_f^\epsilon \in \mathcal{V}_\epsilon \subset \mathcal{H}_\epsilon$ ($\mathcal{A}_\epsilon f = u_f^\epsilon$), siendo u_f^ϵ la única solución del problema

$$\Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \quad \forall v \in \mathcal{V}_\epsilon,$$

esto es,

$$\int_G (\partial_{y_1} u_f^\epsilon \partial_{y_1} v + \epsilon^{-2} \partial_{y_2} u_f^\epsilon \partial_{y_2} v + \epsilon^{-2} \partial_{y_3} u_f^\epsilon \partial_{y_3} v) dy = \int_G f v dy \quad \forall v \in \mathcal{V}_\epsilon. \quad (60)$$

La existencia y unicidad se tienen por el Teorema 2.5. Recordamos la definición de Φ_ϵ

$$\Phi_\epsilon(U, V) = \int_G (\partial_{y_1} U \partial_{y_1} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_2} U \partial_{y_2} V + \epsilon^{-2} \partial_{y_3} U \partial_{y_3} V) dy,$$

y que la forma bilineal Φ_ϵ es simétrica, continua y coerciva (ver desarrollo de (43) a (50)). Ahora veamos que el operador $\mathcal{A}_\epsilon$ es continuo, compacto, autoadjunto y positivo.

- *Continuo:* Usando la desigualdad de Poincaré para el dominio fijo G , que se obtiene de forma análoga a la del dominio G_ϵ , (44), tenemos que

$$\|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq C \|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}.$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 &\leq \int_G (|\partial_{y_1} u_f^\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_2} u_f^\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_3} u_f^\epsilon|^2) dy = \Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, u_f^\epsilon) = \langle f, u_f^\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|f\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \|u_f^\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \stackrel{(**)}{\leq} C \|f\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \|\nabla u_f^\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon}, \end{aligned}$$

usando en (*) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en (**) la desigualdad de Poincaré. De lo anterior deducimos que

$$\|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq C\|f\|_{L^2(G)}, \quad (61)$$

y por tanto, utilizando de nuevo la desigualdad de Poincaré

$$\|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq K\|f\|_{L^2(G)}.$$

De esta forma, hemos visto que

$$\|\mathcal{A}_\epsilon f\|_{L^2(G)} \leq K\|f\|_{L^2(G)},$$

es decir, el operador $\mathcal{A}_\epsilon$ es acotado y, por tanto, es continuo. Además, la constante es independiente de ϵ , lo que implica que es uniformemente acotado.

- *Compacto*: La inclusión del espacio de Sobolev $\mathcal{V}_\epsilon = H^1(G, \Gamma^D)$ en $\mathcal{H}_\epsilon = L^2(G)$ es compacta. Ver Teorema 2.11.

Queremos ver que si $f_n \rightarrow f$ en $L^2(G)$ -débil cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $u_{f_n}^\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon f_n \rightarrow u_f^\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon f$ fuerte en $L^2(G)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $\mathcal{A}_\epsilon$ es continuo, tenemos que $\mathcal{A}_\epsilon f_n \rightarrow \mathcal{A}_\epsilon f$ en $L^2(G)$ -débil cuando $n \rightarrow \infty$. Por definición de $\mathcal{A}_\epsilon$, tenemos que $u_{f_n}^\epsilon, u_f^\epsilon \in \mathcal{V}_\epsilon$ y, utilizando la cota (61) para $f \equiv f_n$, se demuestra la convergencia débil $u_{f_n}^\epsilon \rightarrow u_f^\epsilon$ en $H^1(G)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Al ser la inclusión compacta, la convergencia es fuerte en $L^2(G)$.

- *Autoadjunto*: Como la forma bilineal es simétrica, tenemos que

$$\langle \mathcal{A}_\epsilon f, g \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle u_\epsilon^f, g \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle g, u_\epsilon^f \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \Phi_\epsilon(u_\epsilon^g, u_\epsilon^f) = \Phi_\epsilon(u_\epsilon^f, u_\epsilon^g) = \langle f, u_\epsilon^g \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} = \langle f, \mathcal{A}_\epsilon g \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon}.$$

- *Positivo*: Es directo porque $\langle \mathcal{A}_\epsilon f, f \rangle = \Phi_\epsilon(u_\epsilon^f, u_\epsilon^f) \geq 0$ y solo se anula si $u_\epsilon^f \equiv 0$ porque Φ_ϵ define un producto escalar equivalente al usual en $H^1(G, \Gamma^D)$, lo que implica $f \equiv 0$ por la unicidad de solución del problema (60).

Cabe destacar que los valores propios del operador $\mathcal{A}_\epsilon$ son los inversos de los valores propios de la forma Φ_ϵ , es decir, los valores de $\mathcal{A}_\epsilon$ son

$$\mu_\epsilon^n = \frac{1}{\lambda_\epsilon^n}.$$

- **Operador $\mathcal{A}_0$** : El operador $\mathcal{A}_0 : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, que envía $f \in \mathcal{H}_0$ a un elemento $u_f \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{H}_0$ ($\mathcal{A}_0 f = u_f$), siendo u_f la única solución del problema

$$\int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| u_f'(x_1) v'(x_1) dx_1 = \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| f v dx_1 \quad \forall v \in \mathcal{V}_0,$$

esto es,

$$\Phi_0(u_f, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \forall v \in \mathcal{V}_0,$$

donde

$$\Phi_0(u, v) := \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| u'(x_1) v'(x_1) dx_1.$$

La existencia y unicidad de la solución u_f se obtiene, de nuevo, por el Teorema 2.5. Para ello,

veamos que Φ_0 es una forma bilineal simétrica, continua y coerciva en $\mathcal{V}_0$. Las dos primeras condiciones son inmediatas. La continuidad se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |\Phi_0(u, v)| &= \left| \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| u'(x_1) v'(x_1) dx_1 \right| \leq \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |u'(x_1)| |D_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |v'(x_1)| dx_1 \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{V}_0} \|v\|_{\mathcal{V}_0}. \end{aligned}$$

Finalmente, la coercividad se sigue de la definición del producto escalar en $\mathcal{V}_0$.

- **Operador R_ϵ :** El operador $R_\epsilon : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_\epsilon$ es tal que dado $f \in \mathcal{H}_0 = L^2(l_0, l_1)$, tenemos que $(R_\epsilon f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)$. Notese que conservamos la notación de la Sección 3, pero al ser el dominio fijo, R_ϵ es una extensión independiente de ϵ .

Nos falta ver que se verifican las condiciones $C_1 - C_4$ con los elementos anteriores.

- **Comprobación condición C_1 :** Debemos ver que

$$\langle R_\epsilon f_0, R_\epsilon f_0 \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow \gamma \langle f_0, f_0 \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{para cualquier } f_0 \in \mathcal{V}_0 = H_0^1(l_0, l_1)$$

para algún $\gamma > 0$. Tenemos que

$$\|R_\epsilon f_0\|_{\mathcal{H}_\epsilon}^2 = \int_G |f_0|^2 dy = \int_{l_0}^{l_1} |f_0(x_1)|^2 dx_1 \int_{D_{x_1}} dy_2 dy_3 = \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| |f_0(x_1)|^2 dx_1 = \|f_0\|_{\mathcal{H}_0}^2.$$

Entonces, basta tomar $\gamma = 1 > 0$ para que se verifique la condición.

- **Comprobación condición C_2 :** Se ha verificado al presentar los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\mathcal{A}_0$ que son positivos, compactos y autoadjuntos y, además, las normas de los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ están acotadas por una constante independiente de ϵ .
- **Comprobación condición C_3 :** Debemos ver que para cualquier $f \in \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{H}_0$ se tiene que

$$\|\mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f - R_\epsilon \mathcal{A}_0 f\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Fijado $f \in \mathcal{V}_0 = H_0^1(l_0, l_1)$, denotamos por $u_f^\epsilon = \mathcal{A}_\epsilon R_\epsilon f$ y por $u_f^0 = R_\epsilon \mathcal{A}_0 f$. El objetivo es ver que $u_f^\epsilon \rightarrow u_f^0$ en $\mathcal{H}_\epsilon = L^2(G)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ donde u_f^0 verifica que

$$\Phi_0(u_f^0, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \forall v \in H_0^1(l_0, l_1). \quad (62)$$

En primer lugar vamos a ver que u_f^ϵ y su gradiente están acotados en $L^2(G)$. Partiendo de la formulación débil, tenemos que

$$\Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, v) = \langle R_\epsilon f, v \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \quad \forall v \in H^1(G, \Gamma^D). \quad (63)$$

Tomando $v = u_f^\epsilon$, escribimos

$$\Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, u_f^\epsilon) = \langle f, u_f^\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon}.$$

Tenemos el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 &\leq \int_G (|\partial_{y_1} u_f^\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_2} u_f^\epsilon|^2 + \epsilon^{-2} |\partial_{y_3} u_f^\epsilon|^2) dy = \Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, u_f^\epsilon) = \langle f, u_f^\epsilon \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \|f\|_{L^2(G)} \|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \stackrel{(**)}{\leq} C \|f\|_{L^2(G)} \|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}, \end{aligned}$$

usando en (*) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en (**) la desigualdad de Poincaré en un dominio fijo.

Ahora, dividiendo entre $\|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}$ lo anterior, tenemos que

$$\|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq C \|f\|_{L^2(G)}.$$

Además, podemos obtener una cota para $\|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}$, pues por la desigualdad de Poincaré se tiene

$$\|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq K \|\nabla u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq \hat{K} \|f\|_{L^2(G)}.$$

Esto implica que

$$\Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, u_f^\epsilon) \leq \|f\|_{L^2(G)} \|u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq \hat{K} \|f\|_{L^2(G)}^2,$$

y por tanto, se obtiene

$$\|\partial_{y_1} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 + \epsilon^{-2} \|\partial_{y_2} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 + \epsilon^{-2} \|\partial_{y_3} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq \hat{K} \|f\|_{L^2(G)}^2,$$

de donde deducimos que

$$\epsilon^{-2} \|\partial_{y_2} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq \hat{K} \|f\|_{L^2(G)}^2 \Rightarrow \|\partial_{y_2} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq \hat{K} \epsilon \|f\|_{L^2(G)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0, \quad (64)$$

$$\epsilon^{-2} \|\partial_{y_3} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq \hat{K} \|f\|_{L^2(G)}^2 \Rightarrow \|\partial_{y_3} u_f^\epsilon\|_{L^2(G)} \leq \hat{K} \epsilon \|f\|_{L^2(G)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (65)$$

Las convergencias (64) y (65) indican que las funciones límite de las subsucesiones u_f^ϵ no dependen de las variables y_2 y y_3 (reescribiendo el razonamiento entre (56) y (57)).

Con todo lo anterior, tenemos que la sucesión u_f^ϵ está acotada y, por tanto, de cada sucesión existe una subsucesión ϵ' tal que $u_{f'}^{\epsilon'} \rightarrow u$ en $H^1(G)$ -débil y, al ser la inclusión de $H^1(G)$ en $L^2(G)$ compacta, la convergencia es fuerte en $L^2(G)$ para algún $u \in H^1(G, \Gamma^D)$. Vamos a identificar u con $u_f^0 = R_\epsilon \mathcal{A}_0 f$ y por la unicidad de solución del problema (62), se tendrá que toda la sucesión converge a u_f^0 . Para ello tomamos funciones $v_\epsilon \in H^1(G)$ de la forma

$$v_\epsilon(y_1, y_2, y_3) := v(y_1) \quad \text{con } v \in \mathcal{C}_0^\infty(l_0, l_1).$$

Tenemos que

$$\Phi_\epsilon(u_f^\epsilon, v_\epsilon) = \int_G \partial_{y_1} u_f^\epsilon \partial_{y_1} v_\epsilon dy \rightarrow \int_G \partial_{y_1} u \partial_{y_1} v dy = \int_{l_0}^{l_1} |D_{x_1}| \partial_{x_1} u \partial_{x_1} v dx_1 = \Phi_0(u, v), \quad (66)$$

y como $\gamma = 1$ en la condición C_1 , haciendo uso de la Proposición 3.2 tenemos que

$$\langle R_\epsilon f, v_\epsilon \rangle_{L^2(G)} \rightarrow \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}_0}$$

Teniendo en cuenta la igualdad (63), y que $u = 0$ en Γ^D , un argumento de densidad nos permite concluir que

$$\Phi_0(u, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}_0} \quad \forall v \in H_0^1(l_0, l_1),$$

y por tanto verifica (62). Por la unicidad del límite $u = \mathcal{A}_0 f$. Es decir, $u_\epsilon^\epsilon \rightarrow \mathcal{A}_0 f = R_\epsilon \mathcal{A}_0 f$ en $L^2(G)$, lo que concluye la comprobación de la condición C_3 .

- **Comprobación condición C_4 :** Debemos ver que la familia de operadores $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es uniformemente compacta en el siguiente sentido: para cada sucesión $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de $\mathcal{H}_\epsilon$ tal que $\sup_\epsilon \|f_\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} < \infty$, podemos extraer una subsucesión $\{f_{\epsilon'}\}_{\epsilon'>0}$ tal que para algún $w_0 \in \mathcal{V}_0$ se tiene que

$$\|\mathcal{A}_{\epsilon'} f_{\epsilon'} - R_{\epsilon'} w_0\|_{\mathcal{H}_{\epsilon'}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon' \rightarrow 0.$$

Sea $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una sucesión de $\mathcal{H}_\epsilon = L^2(G)$ acotada, es decir, $\sup_\epsilon \|f_\epsilon\|_{L^2(G)} < \infty$. Consideramos la sucesión $u_\epsilon := \mathcal{A}_\epsilon f_\epsilon$, que pertenece a $L^2(G)$, esto es, u_ϵ la solución de

$$\Phi_\epsilon(u_\epsilon, v) = \langle f_\epsilon, v \rangle_{\mathcal{H}_\epsilon} \quad \forall v \in H^1(G, \Gamma^D). \quad (67)$$

Como los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$ son uniformemente acotados y la sucesión $\{f_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es acotada, entonces la sucesión $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ definida anteriormente es acotada en $L^2(G)$, es decir, $\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}_\epsilon} \leq C$ para alguna constante $C > 0$. Entonces, reescribiendo el desarrollo de la condición C_3 (ver (63)-(65)), obtenemos una cota para el gradiente, es decir, $\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(G)} \leq K$ y los posibles límites de $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ son independientes de y_2 e y_3 .

De esta forma, podemos extraer una subsucesión $\{u_{\epsilon'}\}_{\epsilon'>0}$ convergente en $L^2(G)$ fuerte y débil en $H^1(G)$, es decir,

$$u_{\epsilon'} \rightarrow u \quad \text{en } L^2(G) \text{ para algún } u \in H^1(G, \Gamma^D).$$

Como $u = 0$ en Γ^D y es independiente de y_2 e y_3 , podemos identificar u con $R_{\epsilon'} w_0$ para algún $w_0 \in \mathcal{V}_0 = H_0^1(l_0, l_1)$, lo que concluye la comprobación de la condición C_4 .

Con todos los desarrollos anteriores, aplicamos el Teorema 3.6 y el Teorema 3.8 a los operadores $\mathcal{A}_\epsilon$, $\mathcal{A}_0$ y R_ϵ definidos previamente y a los espacios $\mathcal{H}_\epsilon = L^2(G)$ y $\mathcal{H}_0 = L^2(l_0, l_1)$, y tenemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 4.3. *Supongamos que el área de las secciones transversales del dominio G , $|D_{x_1}|$, es una función continua a trozos para $x \in (l_0, l_1)$ verificando la condición (38). Sean $\{\lambda_\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ los valores propios del problema (50) y $\{U_\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$ vectores propios, formando una base ortonormal en $L^2(G)$ (ver (52)). Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\lambda_\epsilon^n \rightarrow \lambda_0^n \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

donde λ_0^n es el n -ésimo valor propio de (59). Además, para cada sucesión ϵ , se puede extraer una subsucesión (que seguimos denotando por ϵ) tal que

$$U_\epsilon^n \rightarrow U_*^n \quad \text{en } H^1(G)\text{-débil cuando } \epsilon \rightarrow 0,$$

siendo U_*^n una función propia asociada a λ_0^n y tal que $\{U_*^n\}_{n=1}^\infty$ forman una base de $H_0^1(l_0, l_1)$ y $L^2(l_0, l_1)$.

Asimismo, para cada U_0 función propia del problema límite asociada a λ_0 valor propio con multiplicidad m , $\lambda_0^k < \lambda_0^{k+1} = \lambda_0^{k+2} = \dots = \lambda_0^{k+m} < \lambda_0^{k+m+1}$, con $\|U_0\|_{\mathcal{H}_0} = 1$, existe una combinación lineal $\bar{U}_\epsilon$ de las funciones propias $U_\epsilon^{k+1}, \dots, U_\epsilon^{k+m}$ del problema (40) tal que

$$\|\bar{U}_\epsilon - U_0\|_{L^2(G)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (68)$$

5. Cálculos explícitos y simulaciones numéricas con condiciones mixtas

Para ilustrar los resultados obtenidos en la sección anterior, vamos a mostrar cálculos explícitos y simulaciones numéricas para condiciones de contorno mixtas en distintos dominios tipo barra.

En primer lugar, consideramos el caso más simple de un prisma, es decir, cuando los dominios G y G_ϵ se pueden expresar como sigue

$$G = (0, l_1) \times (0, 1) \times (0, 1) \quad G_\epsilon = (0, l_1) \times (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \quad (69)$$

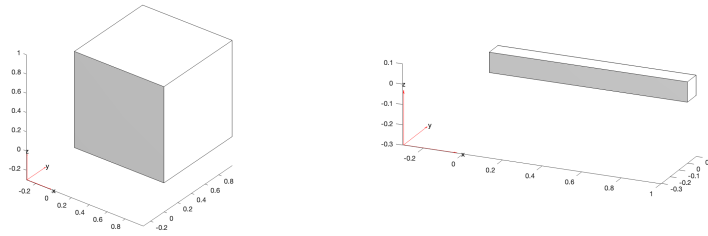


Figura 5: A la izquierda, dominio G y a la derecha dominio G_ϵ con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$

En este caso, el problema (40) se escribe

$$\begin{cases} -u_{xx}^\epsilon(x, y, z) - u_{yy}^\epsilon(x, y, z) - u_{zz}^\epsilon(x, y, z) = \lambda^\epsilon u^\epsilon(x, y, z) & \text{en } G_\epsilon = (0, l_1) \times (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u^\epsilon(0, y, z) = u^\epsilon(l_1, y, z) = 0, & (y, z) \in (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u_y^\epsilon(x, 0, z) = u_y^\epsilon(x, \epsilon, z) = 0, & (x, z) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \\ u_z^\epsilon(x, y, 0) = u_z^\epsilon(x, y, \epsilon) = 0, & (x, y) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \end{cases} \quad (70)$$

y podemos calcular los valores propios y funciones propias de forma explícita aplicando separación de variables. Así, buscamos soluciones de la forma $u^\epsilon(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$ con F , G y H no idénticamente nulas, de forma que llegamos a los siguientes problemas en una dimensión:

$$\begin{aligned} F''(x) + \gamma F(x) &= 0, \quad x \in (0, l_1); \quad F(0) = F(l_1) = 0 \\ G''(y) + \mu_\epsilon G(y) &= 0, \quad y \in (0, \epsilon); \quad G'(0) = G'(\epsilon) = 0 \\ H''(z) + \tilde{\mu}_\epsilon H(z) &= 0, \quad z \in (0, \epsilon); \quad H'(0) = H'(\epsilon) = 0 \end{aligned}$$

donde $\lambda^\epsilon = \gamma + \mu_\epsilon + \tilde{\mu}_\epsilon$. Resolviendo los problemas anteriores, se obtienen las siguientes expresiones de los valores propios y funciones propias asociadas:

$$\lambda_{knm}^\epsilon = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\epsilon}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (71)$$

$$u_{knm}^\epsilon = F_k(x)G_n(y)H_m(z) = A_{knm} \sin\left(\frac{k\pi}{l_1}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{\epsilon}z\right) \quad A_{knm} \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (72)$$

De (71) y (72), tenemos que para ϵ pequeño, las oscilaciones de las funciones propias correspondientes a bajas frecuencias son longitudinales (asociadas a los parámetros $n = m = 0$), es decir, $\lambda^\epsilon = O(1)$ y las oscilaciones solo se dan a lo largo del eje X_1 . Para poder apreciar oscilaciones transversales de las funciones propias debemos considerar las altas frecuencias, esto es, $\lambda^\epsilon = O(\epsilon^{-2})$.

A continuación vamos a mostrar algunas imágenes de las soluciones que obtenemos de forma numérica y utilizando la *PDE Toolbox* de MATLAB, [14]. En todos los casos, se van a mostrar 3 imágenes: la función propia en 3D; algunas secciones transversales (que denominaremos *rodajas*) de la figura vistas en una escala en la que se aprecia la estructura delgada, que muestran las oscilaciones de las funciones propias en el interior del dominio; finalmente, las *rodajas* reescaladas para observar en detalle el comportamiento de la función propia, tanto en una parte de la frontera, como en el interior del dominio. Además, todas las imágenes tienen un gráfico de color que va de colores fríos a colores cálidos según aumenta el valor de la función propia correspondiente. La estructura de las imágenes se repetirá para todos los casos que vamos a estudiar.

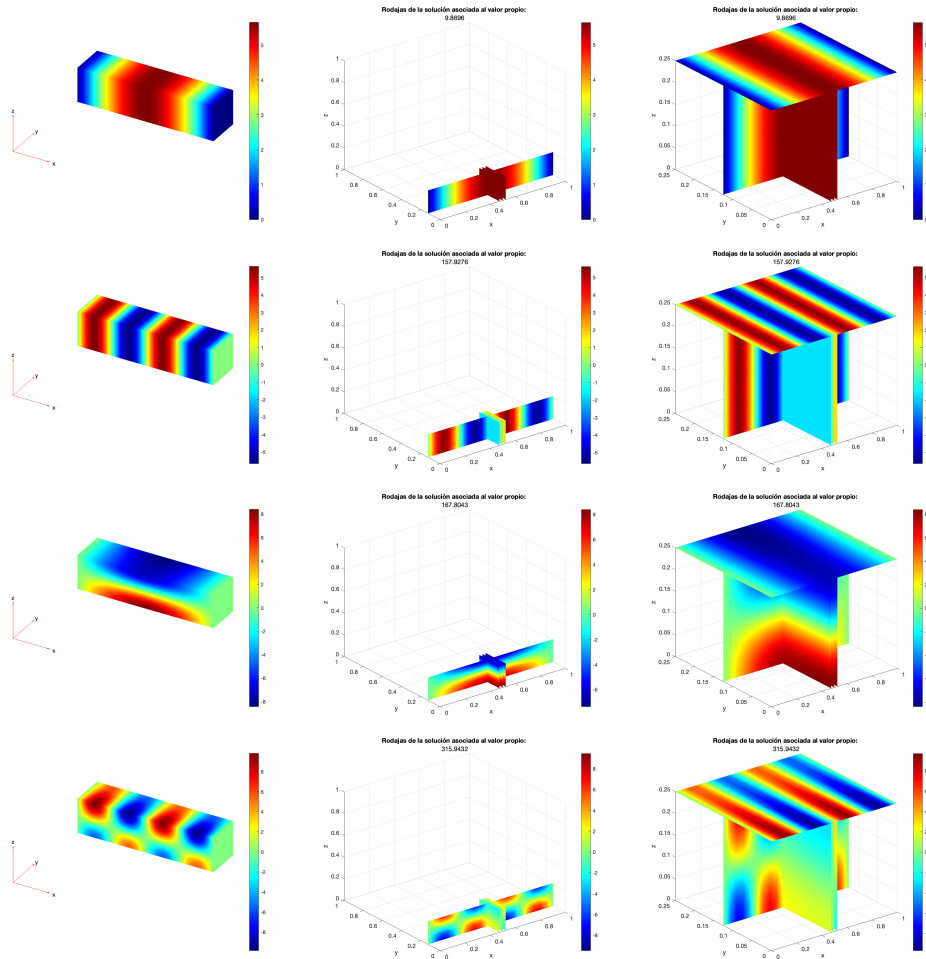


Figura 6: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_4^\epsilon = 16\pi^2 \approx 157,9276$, $\lambda_5^\epsilon = 17\pi^2 \approx 167,8043$ y $\lambda_{12}^\epsilon = 32\pi^2 \approx 315,9432$ para el problema (70) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,25$.

En todos los casos se muestra una función propia asociada al primer valor propio no nulo y una de las primeras que ilustra el cambio de oscilaciones. Observamos que la función propia asociada al primer valor propio es positiva en los diferentes dominios.

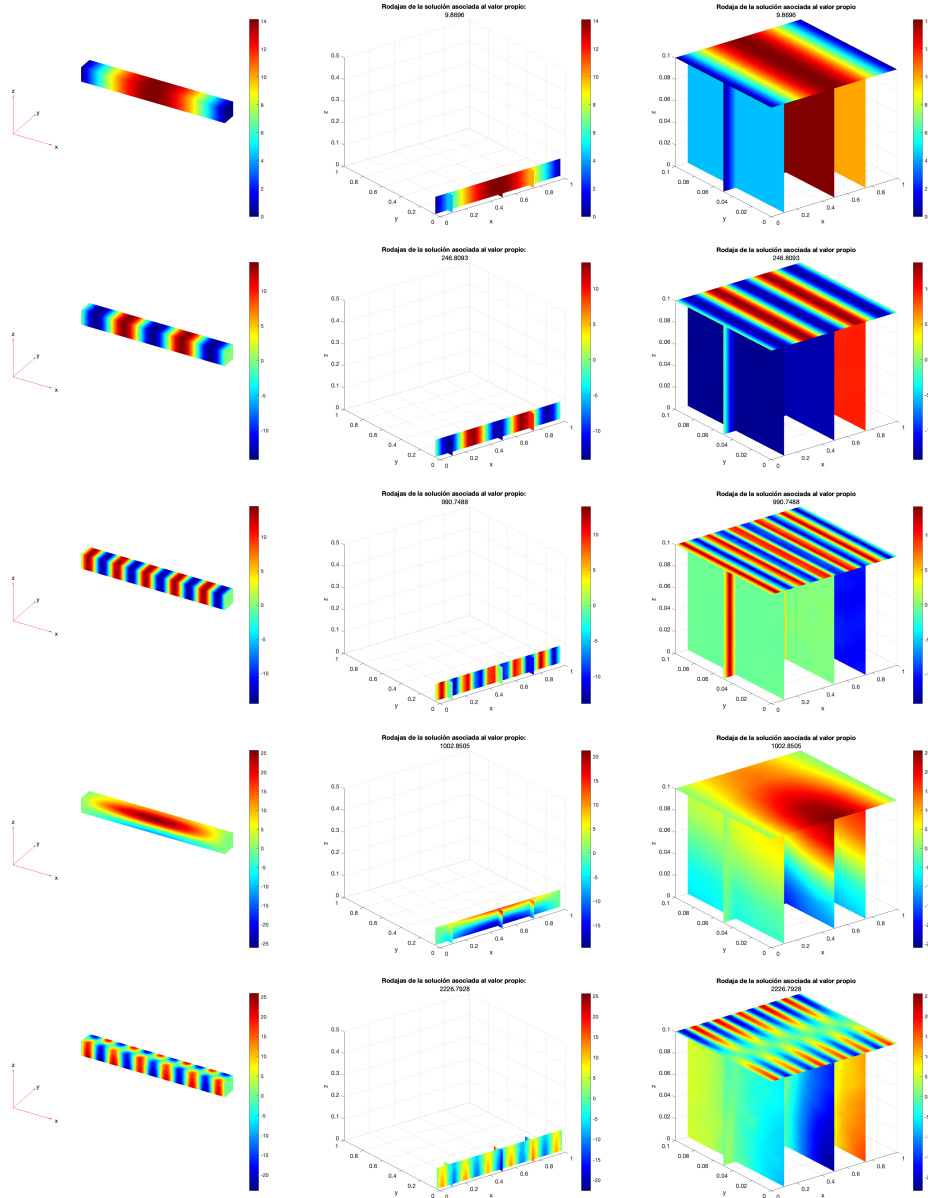


Figura 7: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_5^\epsilon = 25\pi^2 \approx 246,8093$, $\lambda_{10}^\epsilon = 100\pi^2 \approx 990,7488$, $\lambda_{11}^\epsilon = 101\pi^2 \approx 1002,8505$ y $\lambda_{40}^\epsilon = 225\pi^2 \approx 2226,7928$ para el problema (70) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$.

La Figura 6 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_4^\epsilon = 16\pi^2 \approx 157,9276$, $\lambda_5^\epsilon = 17\pi^2 \approx 167,8043$ y $\lambda_{12}^\epsilon = 32\pi^2 \approx 315,9432$ para el problema (70) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,25$. Observamos que es necesario llegar al valor propio $\lambda_5^\epsilon = 17\pi^2 \approx 167,8043$, asociado a los parámetros $k = 1$, $n = 0$ y $m = 1$, para comenzar a apreciar oscilaciones transversales.

La Figura 7 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_5^\epsilon = 25\pi^2 \approx 246,8093$, $\lambda_{10}^\epsilon = 100\pi^2 \approx 990,7488$, $\lambda_{11}^\epsilon = 101\pi^2 \approx 1002,8505$ y $\lambda_{40}^\epsilon = 225\pi^2 \approx 2226,7928$ para el problema (70), tomando $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$. En este caso, observamos que es necesario llegar al valor propio $\lambda_{11}^\epsilon = 101\pi^2 \approx 1002,8505$, asociado a los parámetros $k = 1$, $n = 0$ y $m = 1$, para comenzar a apreciar oscilaciones transversales.

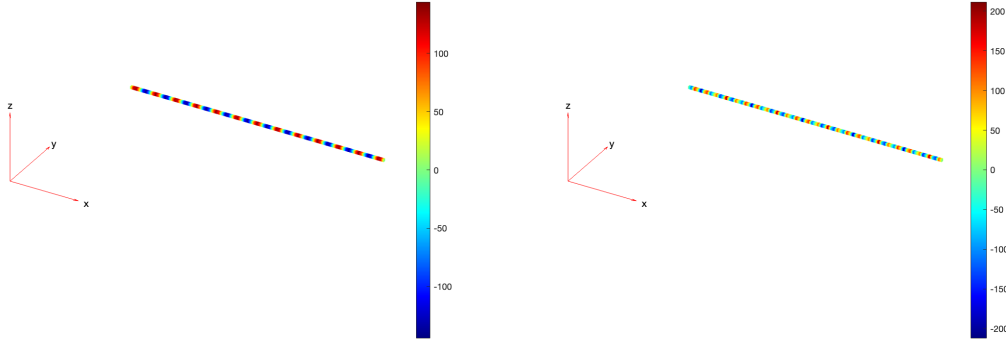


Figura 8: De izquierda a derecha, aproximaciones numéricas en 3D de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_{25}^\epsilon = 625\pi^2 \approx 6265,8906$ y $\lambda_{50}^\epsilon = 2500\pi^2 \approx 30256,2278$, para el problema (70) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,01$.

La Figura 8 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_{25}^\epsilon = 625\pi^2 \approx 6265,8906$ y $\lambda_{50}^\epsilon = 2500\pi^2 \approx 30256,2278$ para el problema (70) cuando reducimos el parámetro ϵ a 0,01. Se observa que para números de valores propios considerablemente más grandes, todavía no se aprecian oscilaciones transversales.

Las Figuras 6, 7 y 8 ponen de manifiesto la observación realizada previamente sobre la necesidad de alcanzar frecuencias de orden $O(\epsilon^{-2})$ para apreciar oscilaciones transversales.

Cuando los dominios no son ortoedros, en general, el cálculo explícito de los valores propios y las correspondientes funciones propias se vuelve laborioso o imposible. Así, para ilustrar el comportamiento de otros dominios tipo barra, más generales, hacemos uso de aproximaciones numéricas.

Como segundo dominio, consideramos la unión de dos ortoedros, de distinto tamaño, que están en contacto a través de una de sus caras. En concreto, se ha tomado la unión de los siguientes ortoedros (véase Figura 2):

$$G_{\epsilon_1} = \left(0, \frac{1}{2}\right) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon); \quad G_{\epsilon_2} = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \times \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right) \quad (73)$$

La Figura 9 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1^\epsilon \approx 9,8697$, $\lambda_5^\epsilon \approx 173,7835$, $\lambda_7^\epsilon \approx 247,4973$, $\lambda_{11}^\epsilon \approx 332,881$ y $\lambda_{35}^\epsilon \approx 929,793$ para el problema (40) con G_ϵ la unión de los conjuntos dados por (73) y $\epsilon = 0,125$.

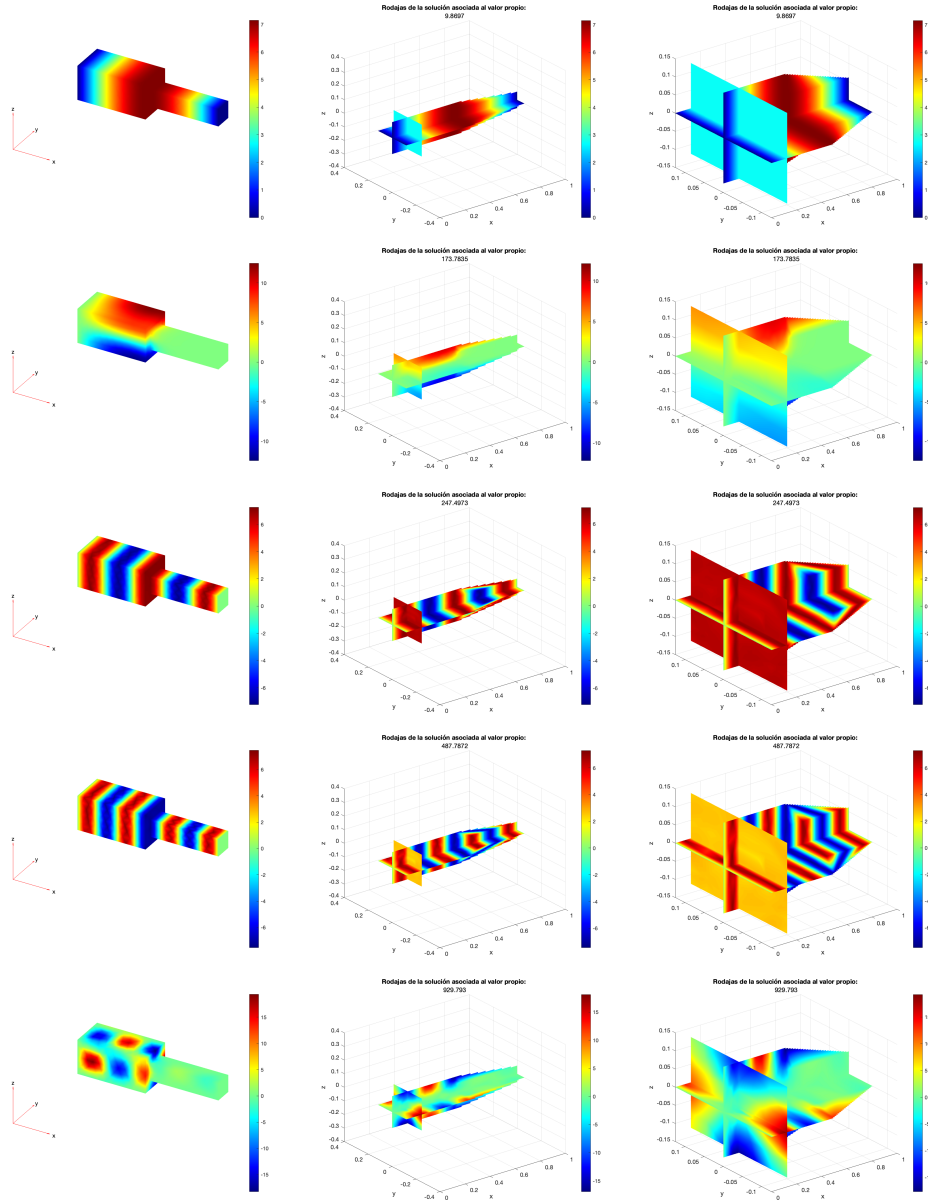


Figura 9: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 9,8697$, $\lambda_5^\epsilon \approx 173,7835$, $\lambda_7^\epsilon \approx 247,4973$, $\lambda_{15}^\epsilon \approx 487,7872$ y $\lambda_{35}^\epsilon \approx 929,793$ para el problema (40) con G_ϵ la unión de los conjuntos dados por (73) y $\epsilon = 0,125$.

La Figura 10 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1^\epsilon \approx 9,8699$, $\lambda_7^\epsilon \approx 492,3832$, $\lambda_{11}^\epsilon \approx 1059,4908$, $\lambda_{15}^\epsilon \approx 1296,63$ y $\lambda_{25}^\epsilon \approx 2268,4598$ para el problema (40) con G_ϵ la unión de los conjuntos dados por (73) y $\epsilon = 0,05$.

Observamos que para $\epsilon = 0,125$, Figura 9, en la función propia asociada al quinto valor propio ya se aprecian oscilaciones transversales, mientras que para $\epsilon = 0,05$, Figura 10, se aprecian en el décimoprimer valor propio. Notamos que las oscilaciones de las funciones propias asociadas a valores propios más grandes pueden ser, de nuevo, longitudinales.

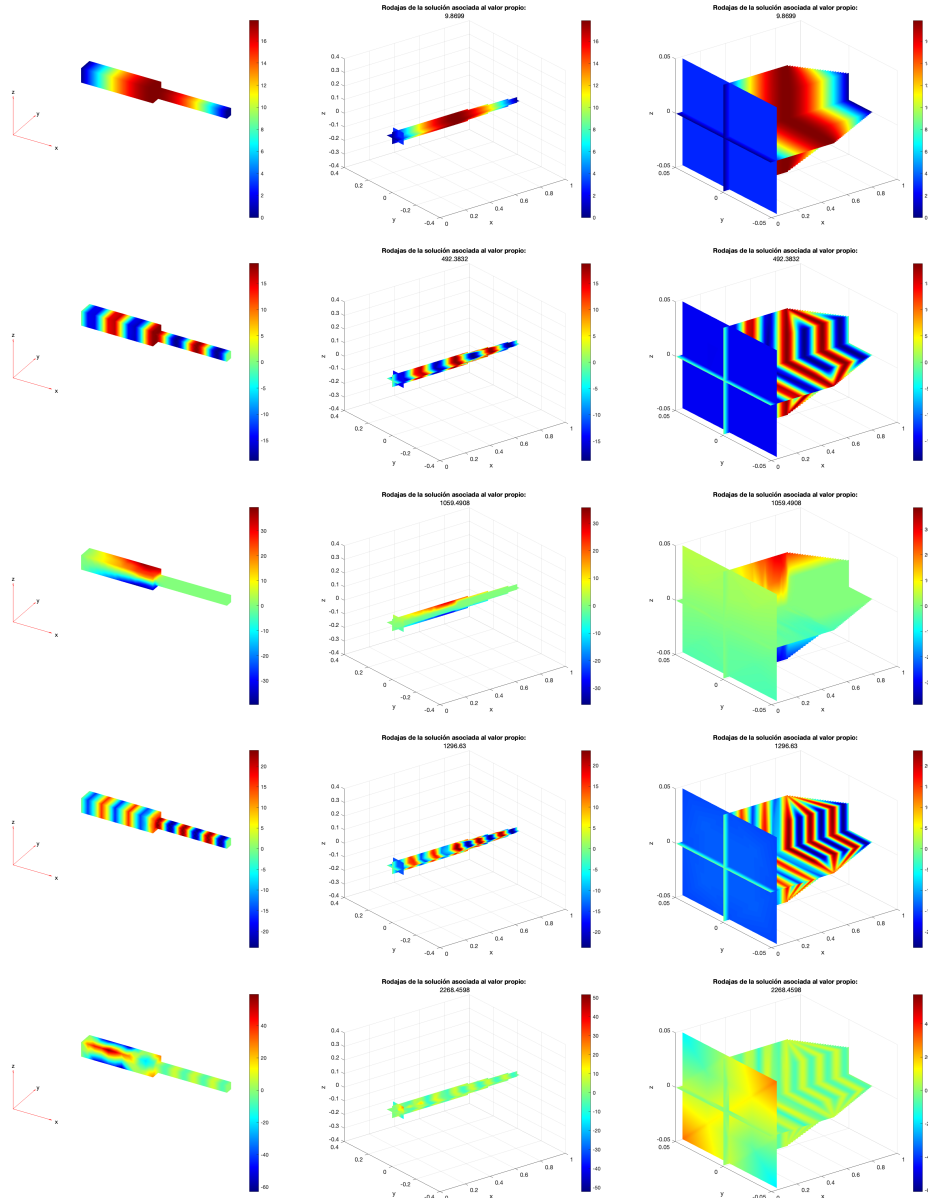


Figura 10: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 9,8699$, $\lambda_7^\epsilon \approx 492,3832$, $\lambda_{11}^\epsilon \approx 1059,4908$, $\lambda_{15}^\epsilon \approx 1296,63$ y $\lambda_{25}^\epsilon \approx 2268,4598$ para el problema (40) con G_ϵ la unión de los conjuntos dados por (73) y $\epsilon = 0,05$.

Como tercer dominio consideramos un dominio tipo bóveda (véase Figura 4), de la forma

$$G_\epsilon = (0, 1) \times (0, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon h(x_1)) \quad (74)$$

donde h es cierta función positiva continua.

La Figura 11 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores propios $\lambda_1^\epsilon \approx 7,851$, $\lambda_5^\epsilon \approx 236,4331$, $\lambda_7^\epsilon \approx 326,3893$, $\lambda_{10}^\epsilon \approx 472,3394$ y $\lambda_{19}^\epsilon \approx 1076,3092$ para el problema (40) con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

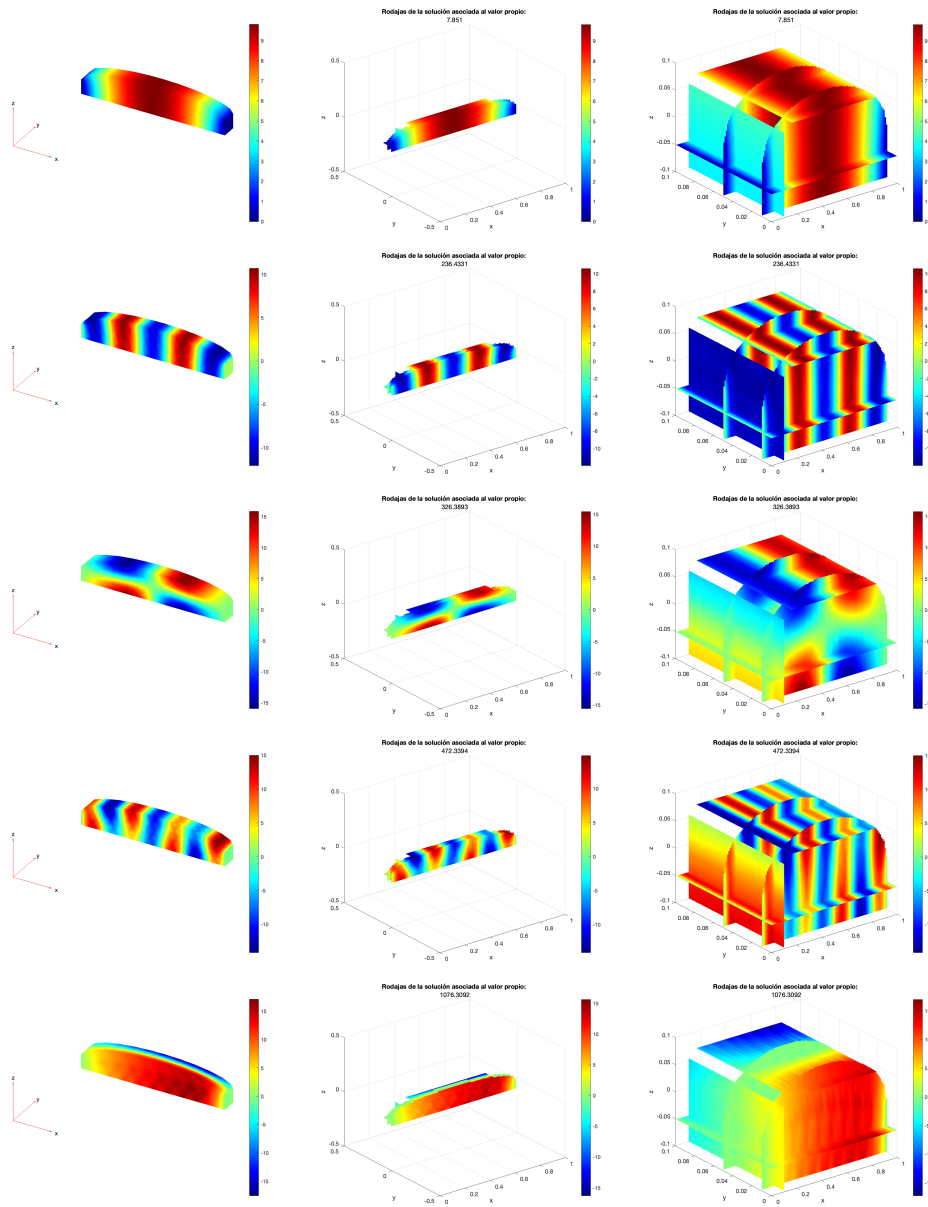


Figura 11: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 7,851$, $\lambda_5^\epsilon \approx 236,4331$, $\lambda_7^\epsilon \approx 326,3893$, $\lambda_{10}^\epsilon \approx 472,3394$ y $\lambda_{19}^\epsilon \approx 1076,3092$ para el problema (40) con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

6. Cálculos explícitos y simulaciones numéricas con otras condiciones de contorno

A modo ilustrativo, en esta sección incluimos los resultados obtenidos cuando en toda la frontera del dominio tenemos condiciones de contorno de Dirichlet o de Neumann.

6.1. Condiciones de Neumann

Siguiendo la estructura de la sección anterior, comenzamos presentando el problema para un prisma con condiciones de Neumann.

$$\begin{cases} -u_{xx}^\epsilon(x, y, z) - u_{yy}^\epsilon(x, y, z) - u_{zz}^\epsilon(x, y, z) = \lambda^\epsilon u^\epsilon(x, y, z) & \text{en } G_\epsilon = (0, l_1) \times (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u_x^\epsilon(0, y, z) = u_x^\epsilon(l_1, y, z) = 0, & (y, z) \in (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u_y^\epsilon(x, 0, z) = u_y^\epsilon(x, \epsilon, z) = 0, & (x, z) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \\ u_z^\epsilon(x, y, 0) = u_z^\epsilon(x, y, \epsilon) = 0, & (x, y) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \end{cases} \quad (75)$$

Igual que antes, se puede resolver explícitamente por separación de variables, llegando a los problemas unidimensionales:

$$\begin{aligned} F'''(x) + \gamma F(x) &= 0, & x \in (0, l_1); & \quad F'(0) = F'(l_1) = 0 \\ G''(y) + \mu_\epsilon G(y) &= 0, & y \in (0, \epsilon); & \quad G'(0) = G'(\epsilon) = 0 \\ H''(z) + \tilde{\mu}_\epsilon H(z) &= 0, & z \in (0, \epsilon); & \quad H'(0) = H'(\epsilon) = 0 \end{aligned}$$

donde $\lambda^\epsilon = \gamma + \mu_\epsilon + \tilde{\mu}_\epsilon$ y obtenemos las siguientes expresiones de los valores propios y funciones propias asociadas:

$$\lambda_{knm}^\epsilon = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\epsilon}\right)^2 \quad k, n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (76)$$

$$u_{knm}^\epsilon = F_k(x)G_n(y)H_m(z) = A_{knm} \cos\left(\frac{k\pi}{l_1}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{\epsilon}z\right) \quad A_{knm} \in \mathbb{R}, \quad k, n, m \in \mathbb{N}_0 \quad (77)$$

De forma similar al problema con condiciones mixtas, de (76) y (77), para valores pequeños de ϵ , las oscilaciones en las funciones propias que se corresponden con las bajas frecuencias son longitudinales (asociadas, de nuevo, a los parámetros $n = m = 0$), y para apreciar las oscilaciones transversales debemos considerar las altas frecuencias.

Notemos que el primer valor propio en este problema es el cero, es decir, $\lambda_0^\epsilon = 0$, y sus funciones propias asociadas son las constantes.

La Figura 12 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_7^\epsilon = 49\pi^2 \approx 484,0867$, $\lambda_{10}^\epsilon = 81\pi^2 \approx 801,5943$, $\lambda_{11}^\epsilon = 100\pi^2 \approx 992,648$ y $\lambda_{17}^\epsilon = 104\pi^2 \approx 1032,7994$ para el problema (75) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$.

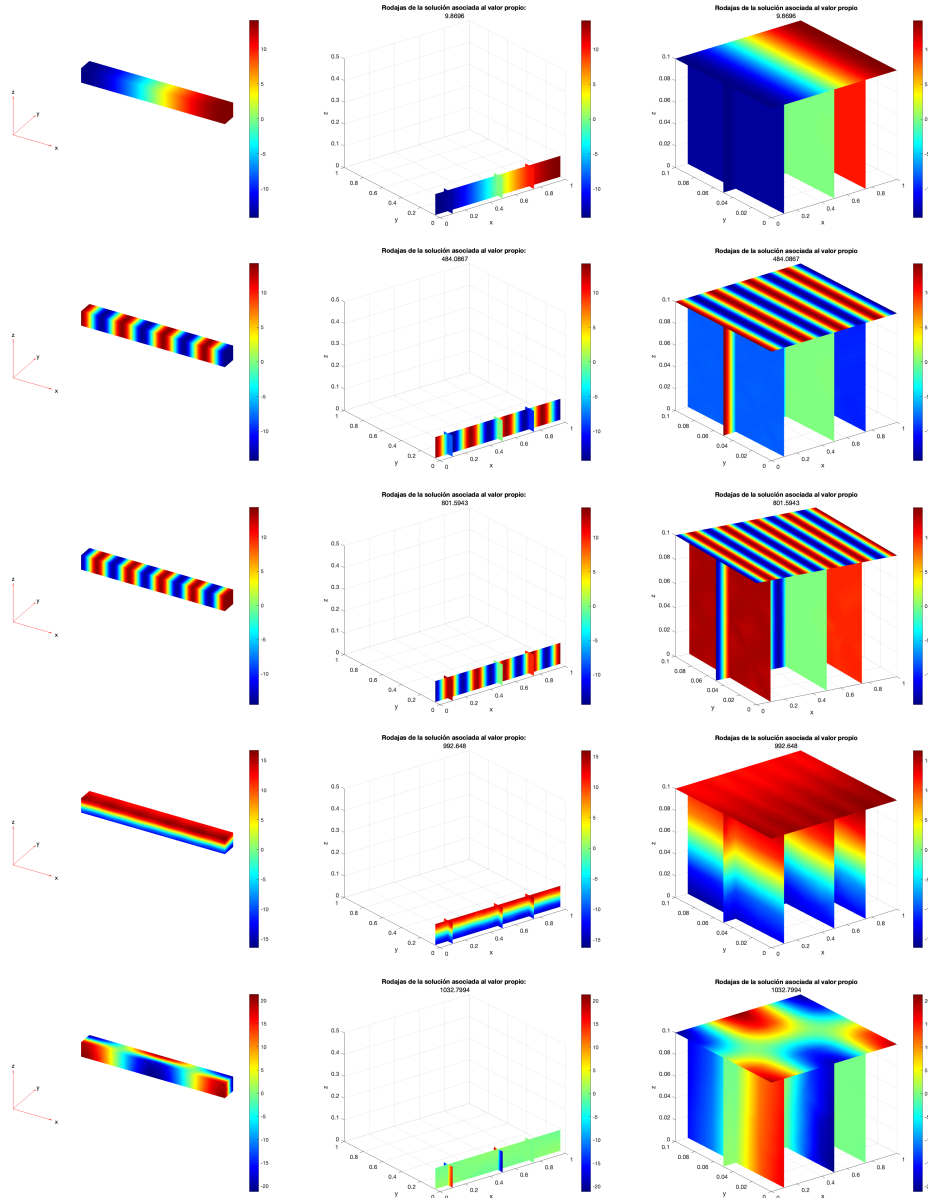


Figura 12: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon = \pi^2 \approx 9,8696$, $\lambda_7^\epsilon = 49\pi^2 \approx 484,0867$, $\lambda_{10}^\epsilon = 81\pi^2 \approx 801,5943$, $\lambda_{11}^\epsilon = 100\pi^2 \approx 992,648$ y $\lambda_{17}^\epsilon = 104\pi^2 \approx 1032,7994$ para el problema (75) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$.

A diferencia del problema con condicones mixtas (ver Figuras 6-8), la posibilidad de que los parámetros k, m, n tomen valor nulo en (76) da lugar a oscilaciones en una sola dirección distinta del eje X_1 (ver Figura 12 para λ_{11}^ϵ).

La Figura 13 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 9,3458$, $\lambda_4^\epsilon \approx 158,1078$, $\lambda_5^\epsilon \approx 160,8509$, $\lambda_{15}^\epsilon \approx 363,2807$ y $\lambda_{20}^\epsilon \approx 643,5763$ para el problema con condiciones de Neumann en el dominio G_ϵ compuesto por la unión de los conjuntos dados en (73) y $\epsilon = 0,125$.

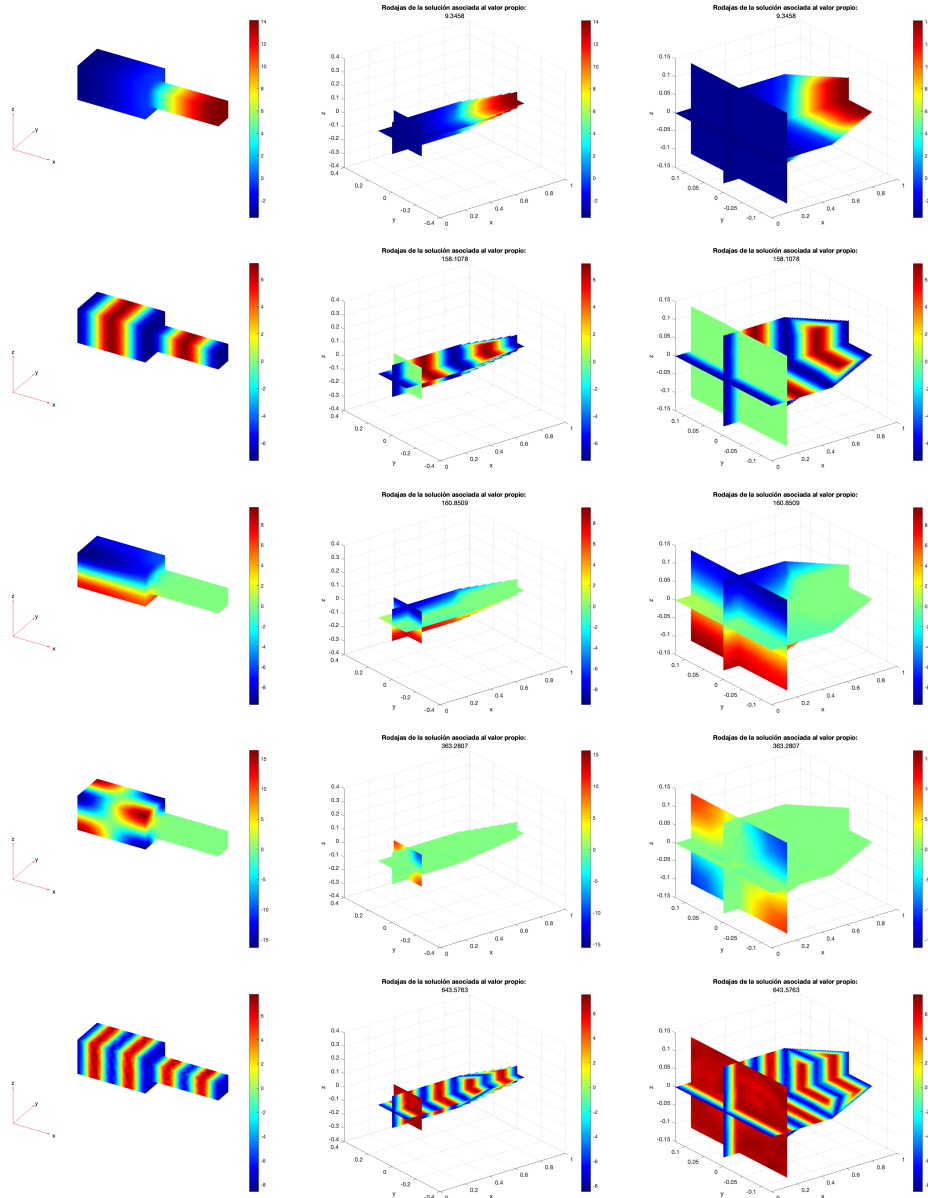


Figura 13: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 9,3458$, $\lambda_4^\epsilon \approx 158,1078$, $\lambda_5^\epsilon \approx 160,8509$, $\lambda_{15}^\epsilon \approx 363,2807$ y $\lambda_{20}^\epsilon \approx 643,5763$ para el problema con condiciones de Neumann en el dominio G_ϵ la unión de los conjuntos dados por (73) y $\epsilon = 0,125$.

En la Figura 13 se observa que las oscilaciones de algunas funciones propias se localizan en una parte del dominio (ver también Figuras 9 y 10).

La Figura 14 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 11,6241$, $\lambda_5^\epsilon \approx 249,4917$ y $\lambda_6^\epsilon \approx 217,6736$ para el problema con condiciones de Neumann con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

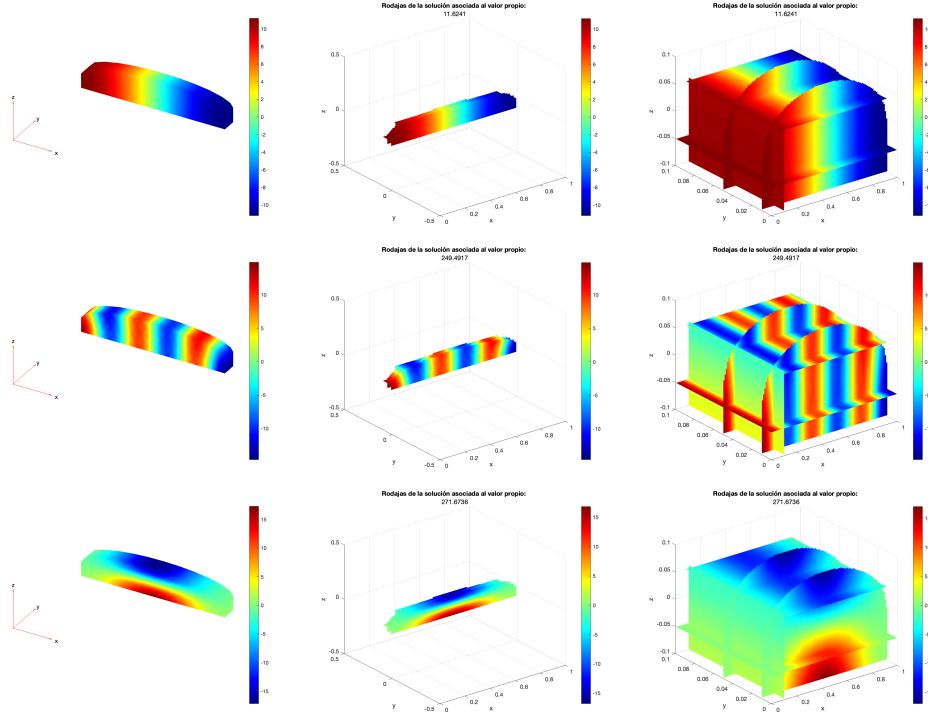


Figura 14: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 11,6241$, $\lambda_5^\epsilon \approx 249,4917$ y $\lambda_6^\epsilon \approx 217,6736$ para el problema con condiciones de Neumann con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

6.2. Condiciones de Dirichlet

Consideramos el problema siguiente para un prisma con condiciones de Dirichlet:

$$\begin{cases} -u_{xx}^\epsilon(x, y, z) - u_{yy}^\epsilon(x, y, z) - u_{zz}^\epsilon(x, y, z) = \lambda^\epsilon u^\epsilon(x, y, z) & \text{en } G_\epsilon = (0, l_1) \times (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u^\epsilon(0, y, z) = u^\epsilon(l_1, y, z) = 0, & (y, z) \in (0, \epsilon) \times (0, \epsilon) \\ u^\epsilon(x, 0, z) = u^\epsilon(x, \epsilon, z) = 0, & (x, z) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \\ u^\epsilon(x, y, 0) = u^\epsilon(x, y, \epsilon) = 0, & (x, y) \in (0, l_1) \times (0, \epsilon) \end{cases} \quad (78)$$

Resolviendo el problema por el método de separación de variables llegamos a los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} F''(x) + \gamma F(x) &= 0 & x \in (0, l_1); & \quad F(0) = F(l_1) = 0 \\ G'''(y) + \mu_\epsilon G(y) &= 0 & y \in (0, \epsilon); & \quad G(0) = G(\epsilon) = 0 \\ H''(z) + \tilde{\mu}_\epsilon H(z) &= 0 & z \in (0, \epsilon); & \quad H(0) = H(\epsilon) = 0 \end{aligned}$$

donde $\lambda^\epsilon = \gamma + \mu_\epsilon + \tilde{\mu}_\epsilon$. Resolviendo los problemas anteriores, se obtienen las siguientes expresiones de los valores propios y funciones propias asociadas:

$$\lambda_{knm}^\epsilon = \left(\frac{k\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\epsilon}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\epsilon}\right)^2 \quad k, n, m \in \mathbb{N} \quad (79)$$

$$u_{knm}^\epsilon = F_k(x)G_n(y)H_m(z) = A_{knm} \sin\left(\frac{k\pi}{l_1}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\epsilon}y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{\epsilon}z\right) \quad A_{knm} \in \mathbb{R}, k, n, m \in \mathbb{N} \quad (80)$$

De (79) se deduce que los primeros valores propios ya son muy grandes, de orden $O(\epsilon^{-2})$. Por ejemplo, $\lambda_1^\epsilon := \lambda_{1,1,1}^\epsilon = \epsilon^{-2}\pi^2 [2 + \epsilon^2 l_1^{-1}]$. Esto parece originar un cambio importante en el comportamiento asintótico de los valores propios y de las funciones propias. Por analogía con el resultado de convergencia que hemos demostrado en la Sección 4.4, ahora se tiene que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon^2 \lambda_k^\epsilon := \epsilon^2 \lambda_{k,1,1}^\epsilon \rightarrow 2\pi^2$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Ahora $2\pi^2$ es el primer valor propio del problema de Dirichlet en el cuadrado de lado unidad.

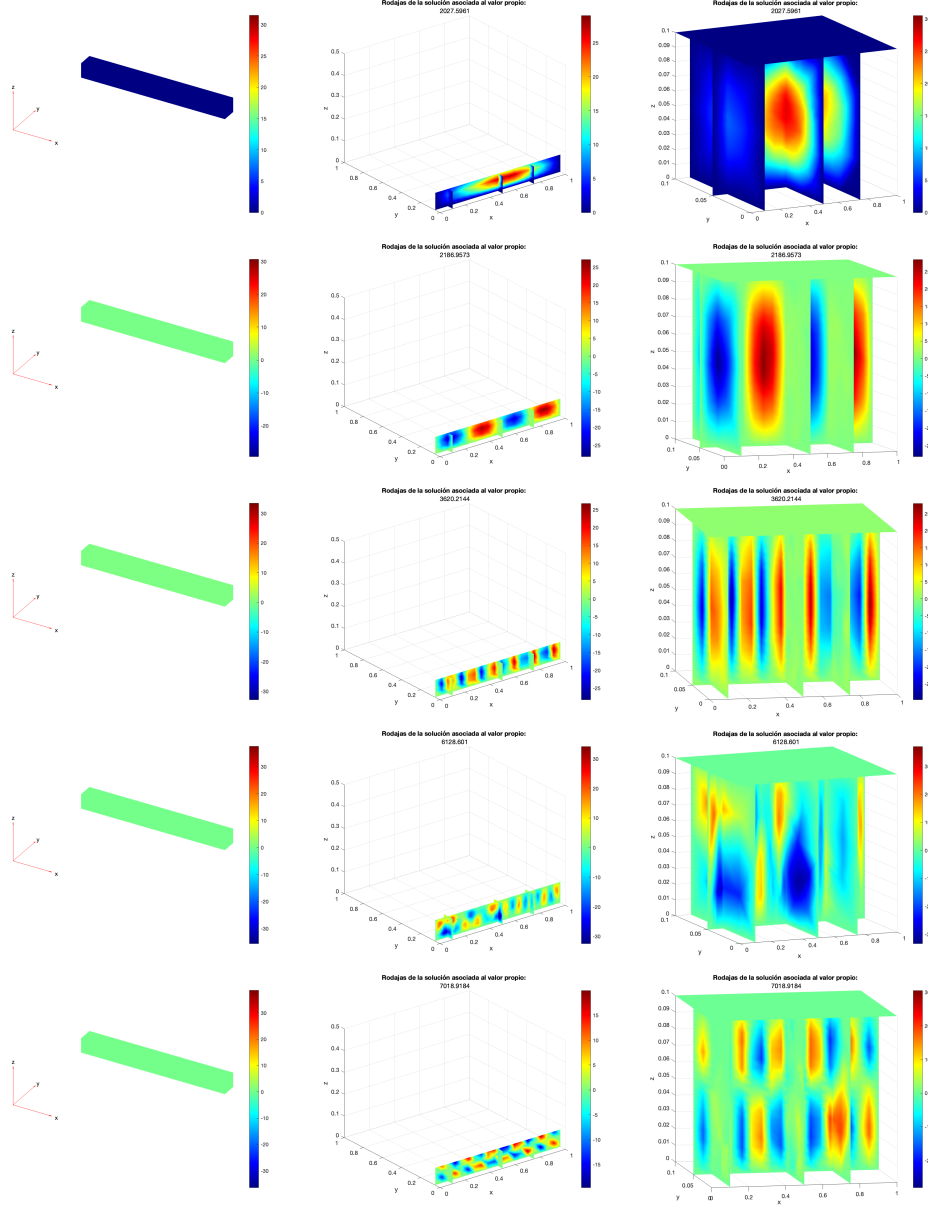


Figura 15: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon = 201\pi^2 \approx 2027,5961$, $\lambda_4^\epsilon = 216\pi^2 \approx 2186,9573$, $\lambda_{12}^\epsilon = 344\pi^2 \approx 3620,2144$, $\lambda_{30}^\epsilon \approx 6128,601$ y $\lambda_{40}^\epsilon \approx 7018,9184$ para el problema (78) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$.

Al contrario que en los problemas con condiciones de contorno mixtas o de Neumann, en el caso de condiciones de Dirichlet, a partir de (79) y (80), las oscilaciones de las funciones propias correspondientes a bajas frecuencias no son de carácter longitudinal; están asociadas a k, n, m no nulos.

La Figura 15 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 2027,5961$, $\lambda_4^\epsilon \approx 2186,9573$, $\lambda_{12}^\epsilon \approx 3620,2144$, $\lambda_{30}^\epsilon \approx 6128,601$ y $\lambda_{40}^\epsilon \approx 7018,9184$ para el problema (78) con $l_1 = 1$ y $\epsilon = 0,1$. Esta figura, corrobora los cálculos explícitos (79) y (80). Para el resto de dominios tenemos las siguientes figuras.

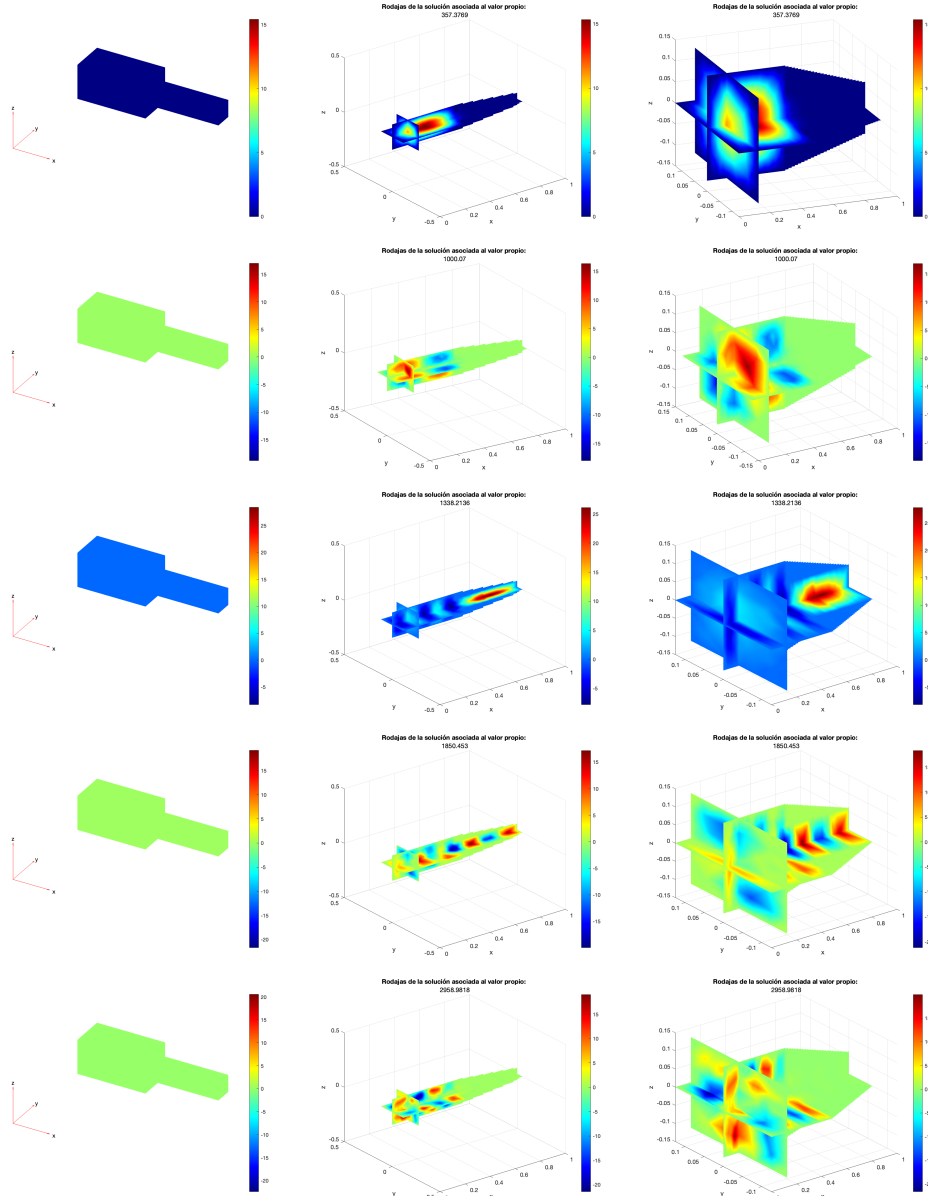


Figura 16: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 357,3769$, $\lambda_7^\epsilon \approx 1000,07$, $\lambda_{12}^\epsilon \approx 1338,2136$, $\lambda_{20}^\epsilon \approx 1850,453$ y $\lambda_{40}^\epsilon \approx 2958,9818$ para el problema con condiciones de Dirichlet en el dominio G_ϵ formado por la unión de (73) y $\epsilon = 0,125$.

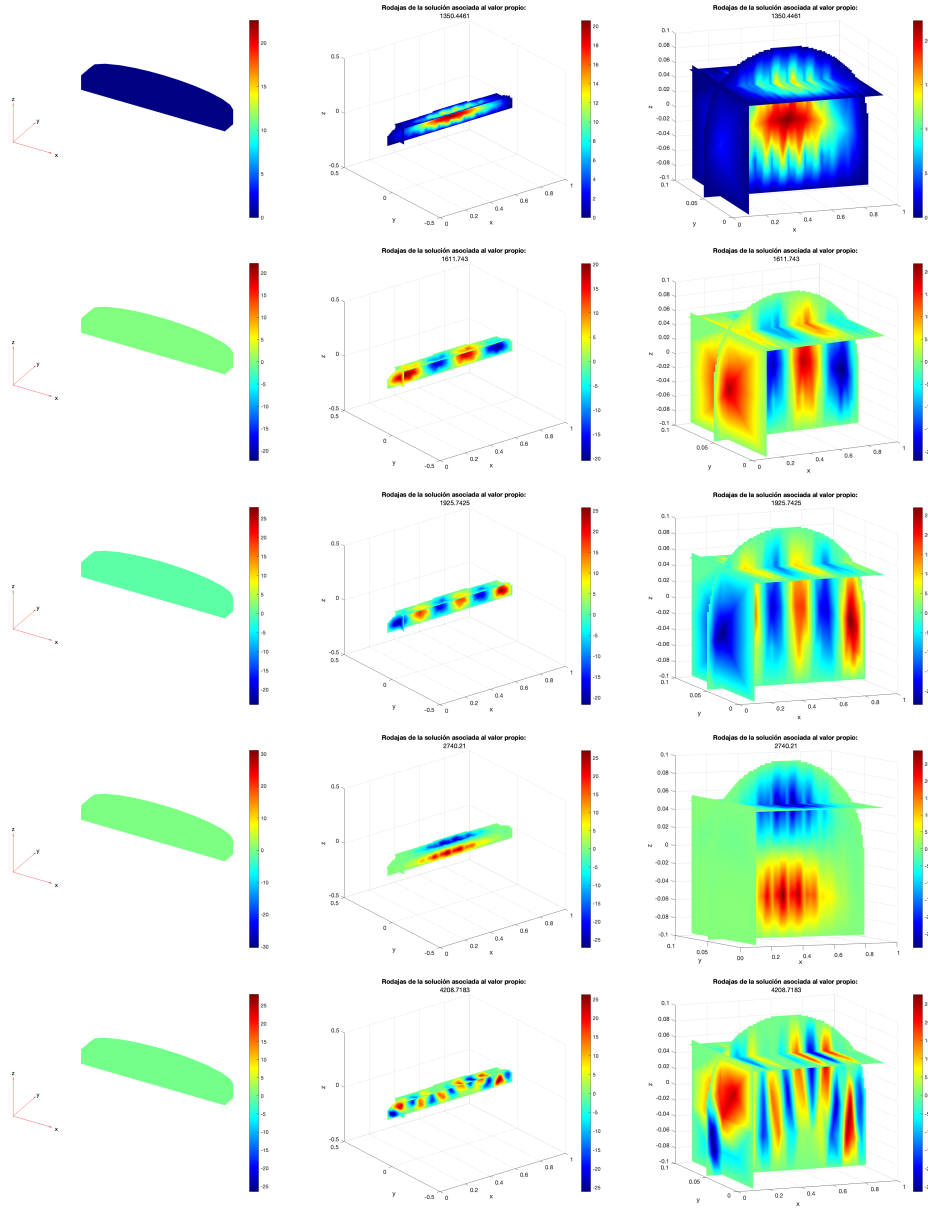


Figura 17: De arriba a abajo, aproximaciones numéricas de las funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 1350,4461$, $\lambda_4^\epsilon \approx 1611,743$, $\lambda_6^\epsilon \approx 1925,7425$, $\lambda_{10}^\epsilon \approx 2740,21$ y $\lambda_{20}^\epsilon \approx 4208,7183$ para el problema con condiciones de Dirichlet con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

La Figura 16 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 357,3769$, $\lambda_7^\epsilon \approx 1000,07$, $\lambda_{12}^\epsilon \approx 1338,2136$, $\lambda_{20}^\epsilon \approx 1850,453$ y $\lambda_{40}^\epsilon \approx 2958,9818$ para el problema con condiciones de Dirichlet en el dominio G_ϵ dado por (73) y $\epsilon = 0,125$.

La Figura 17 muestra aproximaciones numéricas de algunas funciones propias asociadas a los valores $\lambda_1^\epsilon \approx 1350,4461$, $\lambda_4^\epsilon \approx 1611,743$, $\lambda_6^\epsilon \approx 1925,7425$, $\lambda_{10}^\epsilon \approx 2740,21$ y $\lambda_{20}^\epsilon \approx 4208,7183$ para el problema con condiciones de Dirichlet con G_ϵ dado por (74) y $\epsilon = 0,1$.

Referencias

- [1] Amosov, A, Gómez, D., Pérez-Martínez, M.-E., Panasenکو, G., *Approximation of eigenvalues and eigenfunctions of the diffusion operator in a domain containing thin tubes by asymptotic domain decomposition method*. Appl. Anal., 104, 419-441 (2025). Disponible en <https://doi.org/10.1080/00036811.2024.2368699>.
- [2] Benavent-Ocejo, P., Gómez, D., Pérez-Martínez, M.-E., *Longitudinal oscillations for eigenfunctions in rod like structures*, in: Integral Methods in Science and Engineering (IMSE), Springer, 2025 (en prensa). Preprint disponible en: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.10084>
- [3] Borisov, D., Cardone, G., *Complete asymptotic expansions for eigenvalues of Dirichlet Laplacian in thin three-dimensional rods*. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 17, 887–908 (2011). Disponible en <https://doi.org/10.1051/cocv/2010028>.
- [4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [5] Conway, J.B, *A Course in Functional Analysis (2nd Edition)*. Springer, 1990.
- [6] Oleinik, O.A., Shmaev, A.S., Yosifian, G.A., *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Studies in mathematics and its applications, Volume 26. Elsevier, 1992.
- [7] Panasenکو, G.P., Pérez, M.E., *Asymptotic partial decomposition of domain for spectral problems in rod structures*. J. Math. Pures Appl. 87, 1–36 (2007). Disponible en <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2006.10.003>
- [8] Raviart, P.A., Thomas, J.M., *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, 2e tirage*. Masson, 1988.
- [9] Royden, H.L., Fitzpatrick, P.M., *Real Analysis (4th Edition)*. China Machine Press, 2010.
- [10] Sanchez Hubert, J., Sanchez Palencia, E., *Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- [11] Vishik, M.I., Liusternik, L.A., *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*. Usp. Mat. Nauk 12 (1957) 3–122, Translated in: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 20 (1962) 239–364.
- [12] Blender Foundation. (2025). *Blender (versión 4.2.3)* [Software]. Disponible en: <https://www.blender.org>
- [13] Python Software Foundation. (2025). *Python (versión 3.11)* [Lenguaje de programación]. Disponible en: <https://www.python.org>
- [14] The MathWorks, Inc. (2025). *MATLAB (versión R2024b)* [Software]. Disponible en: <https://es.mathworks.com>
- [15] The MathWorks, Inc. (2025). *Partial Differential Equation Toolbox, User's Guide 2024b*. Disponible en: https://es.mathworks.com/help/pdf_doc/pde/pde.pdf