Universidad de Cantabria

Facultad de Ciencias

SOBRE LA PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS

About the fixed point property in topological spaces

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Irati Uribe Miguel

Directora: Nuria Corral Perez

Junio de 2025

Resumen

En este trabajo, se estudia la propiedad del punto fijo en espacios topológicos. Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo si toda aplicación continua $f : X \to X$ deja al menos un punto invariante. Esta es una propiedad topológica, ya que se conserva por homeomorfismos.

A lo largo de la memoria se presentan, por un lado, ejemplos de espacios que sí cumplen esta propiedad y, por otro, ejemplos que no la satisfacen. También construimos espacios que verifican la propiedad del punto fijo a partir de otros que ya la tienen.

En el caso de espacios métricos, probamos el Teorema del punto fijo de Banach y una generalización del mismo.

En el último capítulo se introducen diferentes propiedades topológicas como la conexión local, la separabilidad, la compacidad local y se estudia la relación de estas propiedades con la propiedad del punto fijo. En particular, se prueba que un espacio topológico con la propiedad del punto fijo es conexo. También se demuestra que, si un espacio métrico localmente conexo y localmente compacto verifica la propiedad del punto fijo, entonces el espacio es compacto.

Palabras clave: Punto fijo, conexión, compacidad, invariante topológico, continuo de Peano.

Abstract

The present work is a study of the fixed point property in topological spaces. A topological space X is said to have the fixed point property if every continuous map $f : X \to X$ leaves at least an invariant point. This is a topological property, as it is preserved under homeomorphisms.

Throughout the work, examples of spaces that do satisfy the fixed point property and examples of topological spaces that do not satisfy it are presented. We will also construct new spaces that verify the fixed point theorem from other spaces that already have it.

In the case of metric spaces, we will prove the Banach fixed-point theorem and a generalization of it.

In the last chapter, different topological properties are introduced such as local connectedness, separability, local compactness and the relation between these topological properties and the fixed point property is studied. In particular, it is proved that a topological space with the fixed point property is connected. Also, it is proved that if a locally connected, locally compact metric spaces has the fixed point property, then it is compact.

Key words: Fixed point, connectedness, compactness, topological invariant, Peano continuum.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo si toda aplicación continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo, es decir, un elemento $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

La propiedad del punto fijo no es relevante solo desde un punto de vista teórico, también tiene aplicaciones en otras áreas de las mátematicas como en el análisis. De hecho, los teoremas de punto fijo son una herramienta para garantizar la existencia de soluciones de ecuaciones sin la necesidad de conocer explicitamente la solución. Por ejemplo, dado un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ g_n(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

con $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, entonces garantizar que el sistema tenga solución es lo mismo que considerar $h_i(x) = g_i(x) + x_i$ con $i = 1, 2, ..., n$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y encontrar un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ que posea la propiedad del punto fijo con h definida en X y $h(X) \subseteq X$.

El objetivo de este trabajo es analizar qué propiedades topológicas debe verificar un espacio para que tenga, o no, la propiedad del punto fijo. Para ello, veremos distintos resultados y ejemplos a lo largo de la memoria, la cual se estructura de la siguiente manera:

Comenzaremos con un capítulo de preliminares. En este, definimos nociones básicas sobre espacios topológicos y espacios métricos y daremos algunas propiedades que se utilizaran a lo largo del trabajo. Además, fijaremos la notación que vamos a utilizar.

En el Capítulo 3, introduciremos la noción de punto fijo. Veremos que es un invariante topológico y que se conserva en los retractos. También presentaremos ejemplos clásicos como que el intervalo unidad $[0, 1]$ posee está propiedad o el Teorema del punto fijo de Brower el cual asegura que el disco $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ posee la propiedad del punto fijo. También se presentaran ejemplos de espacios que no poseen la propiedad, lo que nos hace preguntarnos que propiedades debe verificar un espacio para que tenga la propiedad del punto fijo. Al final del capítulo, se demostrará un resultado sobre retractos, que se utilizará para el desarrollo del capítulo 5.

En el Capítulo 4, se estudiaran construcciones de espacios topológicos que poseen la propiedad del punto fijo a partir de otros que también la poseen. Se verán teoremas sobre la existencia y unicidad del punto fijo en espacios métricos como el Teorema de Banach o una generalización del mismo.

Los ejemplos vistos en el Capítulo 3 del disco y del intervalo unidad, son ambos ejemplos de espacios conexos y compactos por lo que nos preguntamos si son dos propiedades topologicas necesarías para que un espacio topologico verifique la propiedad del punto fijo. El objetivo del Capítulo 5 era probar los resultados que relacionan la conexión y la compacidad y la propiedad del punto fijo dados en el artículo [4]. Para ello hemos tenido que introducir diferentes propiedades topológicas como la regularidad, la compacidad local, compactificaciones, separabilidad y hemos visto la relación de algunas de ellas con la propiedad del punto fijo. En la última sección del trabajo se detallan los ejemplos que aparecen en dicho artículo.

Capítulo 2

Preliminares

En este primer capítulo se introducirán los conceptos fundamentales de la topología general y la teoría de espacios métricos. Se presentarán definiciones y resultados necesarios para entender el comportamiendo de los espacios en los que trabajaremos a lo largo de estamemoria. Además, fijaremos la notación que vamos a usar a lo largo del trabajo.

La mayoría de los resultados presentados en este capítulo se han visto a lo largo del grado, por ese motivo, no incluiremos sus demostraciones que se pueden encontrar en [9] o [13].

Comenzamos introduciendo la noción de espacio métrico.

Definición 2.0.1. Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación que satisface las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) \geq 0 \quad$ para todos $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x) \quad$ para todos $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad$ para todos $x, y, z \in X$

La aplicación d se denomina **métrica** o **distancia** en X.

Si tenemos un subconjunto $A \subseteq X$, este subconjunto hereda la métrica de X de forma que $d|_{A\times A}$ es una métrica para el conjunto A.

Definición 2.0.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ está acotado si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) < M$ para cuales quiera $x, y \in A$.

Además si A es no vacío y está acotado, se puede definir el diámetro de A de la siguiente forma:

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Si tenemos un espacio métrico (X, d) tomando la siguiente métrica podemos hacer que el diámetro del espacio sea menor o igual que 1.

Definición 2.0.3. Dado un espacio métrico (X, d), llamamos **métrica acotada** asociada a d a la métrica dada por

$$d^*(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} \qquad x, y \in X$$

Veremos que si estamos interesados en la topología inducida por la métrica, las dos métricas d y d^* definen la misma topología en X.

Definición 2.0.4. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios métricos y $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una aplicación. La aplicación f es **continua** en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad d_1(x_0, y) < \delta \quad \text{entonces} \quad d_2(f(x_0), f(y)) < \epsilon.$$

Definición 2.0.5. Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$, $X \in \tau$;
2. La unión de elementos de τ pertenece a τ;
3. La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

Un **espacio topológico** es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X.

A los elementos de una topología τ se le denominan **abiertos** y un subconjunto A de X se dice que es **cerrado** si y solo si su complementario $X \backslash A$ es abierto.

Veamos diferentes ejemplos de topologías las cuales utilizaremos más adelante.

Dada una distancia d en un espacio X y dado $\epsilon > 0$, se define la **bola abierta** de radio ϵ y centro x como el siguiente conjunto:

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Y definimos la **bola cerrada** de radio ϵ y centro x como el siguiente conjunto:

$$\overline{B}(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \epsilon\}.$$

Mediante estas bolas, podemos dotar a un espacio métrico de estructura de espacio topológico con la siguiente topología, denominada **topología inducida por la métrica** d:

$$\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : \text{para cada } \ x \in U \ \text{ existe } \ \epsilon > 0 \ \text{ tal que } \ B(x, \epsilon) \subseteq U\}$$

Dados dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$ y $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, , ..., y_n)$, tomamos la siguiente distancia llamada **distancia euclídea**:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Esta distancia induce una topología en $\mathbb{R}^n$ llamada **topología usual**. La denotaremos por τ_u.

Definición 2.0.6. Si (X, τ) es un espacio topológico, se dice que X es un **espacio metrizable** si existe una distancia d de forma que $\tau = \tau_d$.

Dado un espacio métrico (X, d), la métrica acotada d^*, y d son topológicamente equivalentes, es decir, general la misma topología.

Además de la topología usual en $\mathbb{R}$, introducimos las siguientes topologías definidas en cualquier conjunto X las cuales utilizaremos en ejemplos posteriores:

La **topología cofinita** se define de la siguiente forma:

$$\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \backslash U \text{ es finito}\}$$

Recordamos que un conjunto A se dice que es numerable si existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$.

La **topología conumerable** es la siguiente:

$$\tau_{conum} = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \backslash U \text{ es finito o numerable}\}$$

La **topología discreta** sobre un conjunto X es la topología formada por $\mathcal{P}(X)$, es decir, todos los subconjuntos de X son conjuntos abiertos.

En algunos casos, podremos comparar dos topologías sobre un mismo conjunto.

Definición 2.0.7. Sean τ y τ' dos topologías para un conjunto X. Decimos que τ es **más fina** que τ' si $\tau' \subseteq \tau$.

Definición 2.0.8. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación. Entonces f es una **aplicación continua** si y solo si para cada conjunto abierto U en Y, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición 2.0.9. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación biyectiva. Si f y su inversa $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ son continuas, entonces se dice que f es un **homeomorfismo** y se dice que (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son **homeomorfos**.

Ejemplo 2.0.10. Tomando el siguiente homeomorfismo

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

tenemos que los espacios $[0, 1)$ y $[0, \infty)$ con la topología inducida por $(\mathbb{R}, \tau_u)$ son homeomorfos.

Al igual que en un espacio métrico, un subespacio puede heredar una métrica, en un espacio topológico, se puede inducir una topología sobre un subespacio.

Definición 2.0.11. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto. La colección

$$\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$$

es una topología para A denominada **topología de subespacio**.

Una base para una topología nos permite describir la topología a partir de una subcolección más pequeña de abiertos.

Definición 2.0.12. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una **base para la topología** τ es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ de forma que todo abierto de τ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Por ejemplo dado un espacio métrico (X, d), la familia $\mathcal{B} = \{B(x, \epsilon) : x \in X, \, \varepsilon > 0\}$ es una base para (X, τ_d).

Las bases para una topología se pueden caracterizar de la siguiente forma:

Lema 2.0.13. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$. La colección $\mathcal{B}$ es una base de la topología τ para X si y solo si para todo abierto $U \in \tau$ y cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subseteq U$.*

El siguiente resultado nos da una forma de ver si una colección de subconjuntos de un conjunto X, genera una topología sobre X.

Teorema 2.0.14. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$. Se tiene que $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X si y solo si,*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
2. *Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Definición 2.0.15. Una **subbase** $\mathcal{S}$ para una topología sobre X, es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X.

La topología que genera $\mathcal{S}$ es la colección τ de todas las uniones e intersecciones de elementos de $\mathcal{S}$

Definición 2.0.16. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un **entorno** de x es un conjunto $U \subseteq X$ tal que existe un abierto V con $x \in V \subseteq U$.

La familia de todos los entornos de $x \in X$ se denomina **sistema de entornos** de x y la denotamos por $\mathcal{E}_x$.

La definición de entorno proporciona una manera alternativa de describir cuáles son los conjuntos abiertos en una topología.

Lema 2.0.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $U \subseteq X$ es abierto si y solo si U es entorno de todos sus puntos, es decir si para todo $x \in U$, existe un abierto V con $x \in V \subseteq U$.*

De la misma manera que una topología puede definirse a partir de una base de conjuntos abiertos, tampoco es necesario especificar todos los entornos de un elementos $x \in X$ para definir un sistema de entornos, basta con proporcionar una base de entornos.

Definición 2.0.18. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Una **base de entornos** en x es una subcolección $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{E}_x$ de forma que cada $U \in \mathcal{E}_x$ contiene a un $V \in \mathcal{B}_x$.

De esta forma el sistema de entornos $\mathcal{E}_x$ queda determinado de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_x = \{U \subseteq X : V \subset U \text{ para algún } V \in \mathcal{B}_x\}$$

Los elementos de una base de entornos se denominan **entornos básicos**.

Dados dos espacios topológicos, existe una forma de definir una topología sobre su producto cartesiano de la siguiente forma:

Definición 2.0.19. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Una base para la **topología producto** sobre $X \times Y$ está dada por

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \tau_X \text{ y } V \in \tau_Y\}.$$

Hemos definido la topología producto para el producto de dos espacios topológicos, veamos que pasa si tenemos el producto de cualquier familia de espacios topológicos.

Definición 2.0.20. Consideramos una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$. El **producto cartesiano** de estos conjuntos se define de la siguiente forma:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : x(i) \in X_i \text{ para cada } i \in I\}$$

Como cada $x \in \prod_{i\in I} X_i$ es una aplicación definida sobre el conjunto de índices, a $x(i)$ se le denota por x_i. En el espacio $\prod_{i\in I} X_i$ podemos tomar la proyección sobre la j-esima coordenada $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ dada por $\pi_j(x) = x_j$. Además, dado un conjunto Y, si tenemos una familia de aplicaciones $f_i : Y \to X_i$, entonces existe una aplicación $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ con $\pi_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$.

En este espacio, consideramos la **topología de Tychonoff** o **topología producto**. Esta es la topología que toma como subbase la colección

$$\bigcup_{i\in I}\{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es abierto en } X_i\}$$

Luego los abiertos de una base para la topología producto en $\prod_{i\in I} X_i$ se pueden escribir como

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

Las aplicaciones continuas en la topología producto se pueden caracterizar de la siguiente forma:

Teorema 2.0.21. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos y consideramos su producto $\prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto. Entonces, una aplicación $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ es continua si y solo si, $f_i = \pi_i \circ f : Z \to X_i$ es continua para todo $i \in I$.*

Ejemplo 2.0.22. Si consideramos $X_n = \mathbb{R}$ con la topología usual con $n \in \mathbb{N}$. Denotamos $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto.

Partiendo de un subconjunto A de un espacio topológico X, podemos definir diversos subconjuntos a partir del mismo.

Definición 2.0.23. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto.

1. Llamamos **interior** de A a la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A. Lo denotamos por $\mathring{A}$.

2. Llamamos **adherencia** o **clausura** de A a la intersección de los cerrados que contienen a A.

A la clausura de un subconjunto A de un espacio topológico la denotaremos de distintas formas según el contexto en el que estemos trabajando.

- Si no hay lugar a confusión, generalmente la denotaremos por $\overline{A}$.
- Si deseamos especificar la topología, la denotaremos por $Cl_\tau(A)$, siendo τ la topología con la que estemos trabajando.
- Si deseamos especificar el espacio topológico en el que consideramos la adherencia, la denotaremos por $Cl_X(A)$ con X el espacio topológico en el que estemos trabajando.

Dado un conjunto A con $\mathring{A} = A$, entonces A es abierto mientras que si $\overline{A} = A$, el conjunto A es cerrado. El siguiente resultado describe algunas propiedades relacionadas con la adherencia.

Lema 2.0.24. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Entonces se tiene que:*

1. *$x \in \overline{A}$ si y solo si todo abierto U que contiene a x interseca a A.*
2. *Si $A \subseteq Y \subseteq X$ y en Y consideramos la topología de subespacio, tenemos que*

$$Cl_Y(A) = Y \cap Cl_X(A).$$

Definición 2.0.25. Sea (X,τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X, entonces se tiene que:

1. El conjunto A es **denso** en X si y solo si $\overline{A} = X$.
2. Llamamos **frontera** de A al conjunto

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$$

3. Un punto x es un **punto de acumulación** o **punto límite** de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto distinto de x. Es decir, x es un punto de acumulación de A si pertenece a $\overline{A \backslash \{x\}}$.

   Al conjunto de puntos de acumulación de un conjunto A lo denotamos por A'.

Una forma diferente de definir la clausura de un conjunto de la dada en la Definición 2.0.23 es tomando $\overline{A} = A \cup A'$.

Observamos que un subespacio es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Definición 2.0.26. Sea X un espacio topológico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X **converge** a $x \in X$ si para cada entorno U de x, existe un entero N de forma que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. A x lo llamamos **punto límite** de la sucesión.

Observamos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si x es un punto de acumulación del conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

El punto límite de una sucesión no tiene por que ser único, lo que nos lleva a introducir la siguiente propiedad:

Definición 2.0.27. Un espacio topológico X es **Hausdorff** si y solo si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ con $x \in U$ e $y \in V$.

Lema 2.0.28. *Si X es un espacio Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.*

Este resultado no se tiene porque cumplir si el espacio topológico X no es Hausdorff.

Tomamos en $X = \mathbb{R}$ la topología cofinita $\tau_{cof} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R}\backslash U \text{ es finito}\}$. Veamos primero que este espacio no es Hausdorff. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, si existiesen dos abiertos disjuntos U y V con $x \in U$ e $y \in V$, tendríamos que $V \subseteq \mathbb{R}\backslash U$, por lo que o V tendría que ser finito o U tendría que ser finito, lo que es una contradicción.

Sea ahora la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\}}$ dada por $x_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomamos $x \in \mathbb{R}$, y U un entorno de x. Como $U \in \tau_{cof}$, tenemos que $\mathbb{R}\backslash U$ es finito, luego a lo sumo puede contener un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que siempre podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de forma que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a todo x en $\mathbb{R}$.

Un espacio métrico es Hausdorff ya que dados $x, y \in X$ tomando $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$, tenemos que los conjuntos $B(x, \epsilon)$ y $B(y, \epsilon)$ son abiertos disjuntos que contienen a x y a y respectivamente.

El siguiente resultado muestra como se comportan las sucesiones cuando consideramos su imagen por una aplicación continua.

Teorema 2.0.29. *Sean (X, τ_1), (Y, τ_2) espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una aplicación continua. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a $x \in X$, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ en Y.*

El recíproco de este Teorema no se cumple en general. Solo se cumple si los espacios X e Y cumplen el Primer Axioma de Numerabilidad.

Definición 2.0.30. Un espacio topológico (X, τ) cumple el **Primer Axioma de Numerabilidad** si tiene una base de entornos numerable en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 2.0.31. Todo espacio métrico (X, d) verifica el primer axioma de numerabilidad porque para cada $x \in X$, la familia $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de entornos en X.

Al considerar una aplicación sobreyectiva entre espacios topológicos, se puede inducir una estructura topológica en el conjunto de llegada mediante la preimagen de los abiertos.

Definición 2.0.32. Sean (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La colección

$$\tau_p = \{U \subseteq Y : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología en Y denominada **topología cociente** inducida en Y por p.

Decimos que Y es un **espacio cociente** de X y p es una **aplicación cociente**.

Recordemos la noción de conexión que será una propiedad importante en los espacios que verifican la propiedad del punto fijo.

Definición 2.0.33. Un espacio topológico X se dice que es **conexo** si no existen dos abiertos disjuntos no vacíos A y B tales que $X = A \cup B$.

Observemos que un espacio topológico X es conexo si los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son X y $\emptyset$.

Proposición 2.0.34. *Sea X un espacio topológico. Si tenemos un conjunto $U \subseteq X$ que es conexo y $U \subseteq V \subseteq \overline{U}$, entonces V es conexo. En particular tenemos que si U es conexo, entonces $\overline{U}$ es conexo.*

Proposición 2.0.35. *La imagen de un conjunto conexo por una aplicación continua es un conjunto conexo.*

Sobre la unión de espacios topológicos conexos se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.0.36. *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

1. *Si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ con cada X_i conexo y $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, entonces X es conexo.*
2. *Si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con cada X_n conexo y $X_{n-1} \cap X_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 2$, entonces X es conexo.*

Como ejemplo que se usará en resultados posteriores, se tiene que el intervalo $[0, 1]$, con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es conexo.

Recordamos ahora la noción de compacidad, que al igual que la conexión, será una propiedad fundamental en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.0.37. Un **recubrimiento** de un espacio X es una colección $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Si los conjuntos $\{U_i\}_{i \in I}$ son abiertos en X, entonces se dice que es un **recubrimiento abierto** de X.

Un **subrecubrimiento** de un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ es una subcolección $\{U_i\}_{j \in J}$ con $J \subseteq I$ que a su vez es un recubrimiento.

Definición 2.0.38. Un espacio topológico (X, τ) es **compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Un conjunto $A \subseteq X$ se dice que es compacto si el espacio (A, τ_A) es compacto.

Podemos caracterizar si un subespacio de un espacio topológico es compacto de la siguiente forma:

Lema 2.0.39. *Un subespacio topológico (A, τ_A) de un espacio topológico (X, τ) es compacto si y solo si dada una colección de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$, con $U_i \in \tau$ y $A \subseteq \cup_{i \in I} U_i$, entonces existe un número finito de abiertos $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ de forma que $A \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}$.*

Las siguientes son algunas propiedades sobre la compacidad.

Teorema 2.0.40. *Dado (X, τ) un espacio topológico, entonces se tiene que:*

1. *Los subespacios cerrados de un espacio topológico compacto son compactos.*

2. *Los subespacios compactos de un espacio topológico Hausdorff son cerrados.*

3. *La unión finita de subespacios compactos es compacta.*

4. *La intersección de conjuntos compactos en un espacio Hausdorff son compactos.*

Veamos que la condición de ser Hausdorff para que la intersección de conjuntos compactos sea compacta es necesaria. Este ejemplo se ha obtenido de [12].

Ejemplo 2.0.41. Sea $\mathbb{R}$ con la topología τ generada por la base $\mathcal{B} = \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$. El espacio $(\mathbb{R},\tau)$ no es Hausdorff.

Consideramos el conjunto $A = \{-1\} \cup (0,1)$ que es compacto en este espacio, ya que dado un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$, para algún $i_0 \in I$ se tiene que $-1 \in U_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, luego existe $[a_{i_0},\infty) \subseteq U_{i_0}$. Por lo tanto, $A \subseteq U_{i_0}$ y obtenemos que A es compacto.

Consideramos ahora el conjunto $B = \{-2\} \cup (1,0)$. Utilizando el mismo argumento que antes, el conjunto B es compacto.

El conjunto $A \cap B = (0,1)$ no es compacto ya que el recubrimiento $\{[\frac{1}{n},\infty) : n \in \mathbb{N}\}$ no admite un subrecubrimiento finito. La unión de cualquier subrecubrimiento finito será un conjunto de la forma $[\frac{1}{m},\infty)$ que no contiene al conjunto $(0,1)$.

Proposición 2.0.42. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es compacto, entonces A es cerrado y acotado.*

Definición 2.0.43. Un espacio topológico X es **separable** si y solo si X tiene un subconjunto numerable que es denso en X.

Por ejemplo, tomando $(\mathbb{R},\tau_u)$, el conjunto $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}$, por lo que $(\mathbb{R},\tau_u)$ es un espacio separable.

Lema 2.0.44. *Si X es un espacio topólogico separable, y $A \subseteq X$ un abierto en X, entonces A es separable.*

Introducidas las nociones de conexión y compacidad, podemos introducir la noción de continuo que describe espacios métricos donde ambas propiedades se combinan y que será fundamental en los resultados que se tratarán posteriormente.

Definición 2.0.45. Un **continuo** es un espacio métrico compacto y conexo con más de un punto. Un subconjunto de un continuo X que sea conexo y cerrado es un subcontinuo de X.

Por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R},\tau_u)$ verifica las condiciones de espacio continuo.

2.1. Grupo fundamental

Este apartado aborda el estudio del grupo fundamental, una herramienta que permite clasificar espacios topológicos en términos de sus lazos y caminos. Se definen formalmente los caminos, lazos, la homotopía de caminos y la operación de concatenación, lo que conduce a la construcción del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$. Asimismo, se introduce la noción de espacio simplemente conexo y los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas.

A lo largo de la memoria denotaremos $I = [0, 1]$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Definición 2.1.1. Un **camino** en un espacio topológico es una aplicación continua $\gamma : I \to X$ donde $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ son el origen y el extremo del camino respectivamente. Si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, el camino es un **lazo** con base en $x_0 \in X$.

Definición 2.1.2. Un espacio topológico X es **conexo por caminos** si dados $x, y \in X$, existe un camino en X que une x e y.

Lema 2.1.3. *Un espacio conexo por caminos es conexo.*

Dados dos caminos γ, $\delta : I \to X$ en X . Si tenemos que $\gamma(1) = \delta(0)$, podemos obtener un nuevo camino producto o **concatenación de los caminos** γ y δ, recorriendo primero γ y depués δ, que se define como:

$$\gamma * \delta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Observemos que la aplicación $\gamma * \delta : I \to X$ es continua.

A continuación introducimos la noción de caminos homótopos que va a permitir definir el grupo fundamental de un espacio topológico.

Definición 2.1.4. Sean γ, $\delta : I \to X$ dos caminos en un espacio topológico X. Decimos que γ y δ son dos **caminos homótopos relativamente a** $\{0, 1\}$, lo denotamos $\gamma \sim_{\{0,1\}} \delta$, si existe una aplicación continua $H : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{aligned} &H(s,0) = \gamma(s), && H(s,1) = \delta(s), && \forall s \in I, \\ &H(0,t) = \gamma(0) = \delta(0), && H(1,t) = \gamma(1) = \delta(1), && \forall t \in I. \end{aligned}$$

A H se le denomina **homotopía de caminos** entre γ y δ. La relación $\sim$ define una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de X.

Definición 2.1.5. Dados un espacio topológico X y $x_0 \in X$, denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de clases de equivalencia $[\gamma]$ definidas por la relación de homotopía de lazos γ con base en x_0 de X.

Dados $[\gamma]$, $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$, el producto definido por $[\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma * \delta]$ dota a $\pi_1(X, x_0)$ de estructura de grupo donde el elemento neutro $[e_{x_0}]$, es el lazo constante con base en x_0, y el elemento inverso $[\gamma]^{-1}$ de un lazo $[\gamma]$ es $[\gamma^{-1}]$ donde $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. El grupo $\pi_1(X, x_0)$ es el **grupo fundamental** de X en x_0

Si X es un espacio conexo por caminos, entonces los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos para cualquier par de puntos $x_0, x_1 \in X$, por lo que $\pi(X, x_0)$ no depende de x_0. En algunos casos, si el grupo fundamental de un espacio no depende del punto escogido, lo denotaremos por $\pi_1(X)$.

Definición 2.1.6. Sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ con X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua tal que $f(x_0) = y_0$. Entonces f induce un **homomorfismo** f_* **entre los grupos fundamentales** de forma que

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\sigma] &\longmapsto [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Definición 2.1.7. Sean X e Y dos espacios topológicos, y dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$. Decimos que f y g son **homótopas** si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que:

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

A H le llamamos **homotopía** entre f y g. Si g y f son homótopas lo denotamos como $f \sim g$.

Una vez definido el grupo fundamental, es posible caracterizar espacios cuya estructura de lazos es trivial desde el punto de vista homotópico.

Definición 2.1.8. Un espacio topológico es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y su grupo fundamental es el trivial.

Como ejemplo de un espacio simplemente conexo, podemos tomar $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, el disco en $\mathbb{R}^2$. Este espacio es conexo por caminos, ya que para cualquier par de puntos en $\mathbb{D}^2$ existe un camino contenido en el disco que los une. Además, cualquier lazo con base en un punto de $\mathbb{D}^2$ es homótopo al lazo constante. Por tanto, su grupo fundamental es trivial y se concluye que $\mathbb{D}^2$ es simplemente conexo.

A continuación introduciremos la noción de grado para aplicaciones continuas $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, que describe el "número de vueltas" que realiza un lazo de $\mathbb{S}^1$ alrededor del origen.

Definición 2.1.9. Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, el **grado** de f se define como

$$deg\, f = f_*(1)$$

donde f_* es el homomorfismo inducido por f definido en la Definición 2.1.6.

Se tiene que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, por lo que el homomorfismo $f_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ queda determinado por $f_*(1) = deg\, f$.

Consideramos el lazo $\alpha : I \to \mathbb{S}^1$ dado por $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$. Este lazo genera $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ por lo que determinar el grado de una aplicación f se reduce a estudiar la imagen de la clase $[\alpha]$ por la aplicación f_*, es decir $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$.

Ejemplo 2.1.10. Veamos los grados de algunas aplicaciones continuas sobre $\mathbb{S}^1$:

1. El grado de la aplicación identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$ es 1.
2. Una aplicación constante en $\mathbb{S}^1$, es decir, una aplicación $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$, tiene grado 0.
3. Al igual que la identidad, la aplicación antipodal $a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $a(x) = -x$ tiene grado 1.

Tenemos la siguiente propiedad sobre el grado de una aplicación.

Lema 2.1.11. *Dos aplicaciónes son homótopas sí y solo sí tienen el mismo grado.*

Recordemos también el siguiente resultado que caracteriza las aplicaciones de $\mathbb{S}^1$ es un espacio topológico X que son homotópicamente nulas.

Proposición 2.1.12. *Sea $h : \mathbb{S}^1 \to X$ una aplicación continua. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *La aplicación h es homotópicamente nula, es decir, es homótopa a una aplicación constante.*
2. *La aplicación h se extiende a una aplicación continua $k : \mathbb{D}^2 \to X$.*
3. *La aplicación $h_* : \pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi(X, x_0)$ es el homomorfismo trivial.*

Como consecuencia de esta Proposición, se puede ver que la aplicación $Id_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ no es homotópicamente nula.

Capítulo 3

Propiedad del punto fijo

En este capítulo, introduciremos la noción de la propiedad del punto fijo. Además veremos dos ejemplos vistos en el grado de espacios que verifican esta propiedad.

Definición 3.0.1. Se dice que un espacio topológico X tiene **la propiedad del punto fijo**, si dada cualquier aplicación continua $f : X \to X$, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

A p se le llama **punto fijo** de f. A la propiedad del punto fijo en ocasiones la denotaremos por p.p.f..

Comenzamos viendo algunas propiedades.

Lema 3.0.2. *La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X e Y dos espaciós topológicos homeomorfos tal que X tiene la p.p.f. Queremos ver que toda aplicación continua $f : Y \to Y$ tiene al menos un punto fijo.

Como X e Y son homeomorfos, existe $h : X \to Y$ un homeomorfismo y podemos considerar la aplicación continua $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$.

Como X tiene la p.p.f., existe $x \in X$ tal que $h^{-1} \circ f \circ h(x) = x$, luego tenemos que $f \circ h(x) = h(x)$ por lo que $h(x)$ es un punto fijo para f como queríamos ver. □

Definición 3.0.3. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Un aplicación continua $r : X \to A$ es una **retracción** si $r \circ i = Id_A$ donde $i : A \to X$ es la inclusión e $Id_A : A \to A$ es la aplicación identidad. Si existe una retracción de X en A decimos que A es un **retracto** de X.

Lema 3.0.4. *Si X tiene la p.p.f. e Y es un retracto de X, entonces Y tiene la p.p.f. .*

Demostración. Veamos que si $f : Y \to Y$ es una aplicación continua, entonces f tiene al menos un punto fijo.

Sean $r : X \to Y$ la retracción de X en Y y consideramos la aplicación de inclusión $i : Y \to X$. Entonces la aplicación $i \circ f \circ r : X \to X$ tiene un punto fijo por lo que existe $x \in X$ tal que $i \circ f \circ r(x) = x$.

Como i es la aplicación inclusión, tenemos que $f(r(x)) \in Y$, luego $x \in Y$ y como $r\big|_Y = Id_Y$, entonces $r(x) = x$. Obtenemos que $f(x) = x$ y por tanto, concluimos que x es un punto fijo de la aplicación f. □

3.1. Ejemplos de espacios con la propiedad del punto fijo

La propiedad del punto fijo no se cumple en todos los espacios, lo que plantea la pregunta de qué características son esenciales para su existencia.

Uno de los espacios más sencillos que posee la propiedad del punto fijo es el intervalo cerrado y acotado $[0,1]$.

Lema 3.1.1. *Toda aplicación continua $f : I \to I$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que existe una aplicación continua $f : I \to I$ que no tiene ningún punto fijo y definimos la aplicación continua $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Si f no tuviese ningún punto fijo, entonces $0 \notin Im\, g$. Se tendría que $I = g^{-1}((-\infty, 0)) \cup g^{-1}((0, \infty))$. Tenemos que $0 \in g^{-1}((0, \infty))$ porque $f(0) > 0$, y $1 \in g^{-1}((-\infty, 0))$ porque $f(1) < 0$, Luego $I = g^{-1}((-\infty, 0)) \cup g^{-1}((0, \infty))$ es la unión de dos abiertos disjuntos y no vacíos, por lo que I no sería conexo. En consecuencia, la aplicación f tiene que tener al menos un punto fijo. $\square$

Otro resultado bien conocido es el teorema del punto fijo de Brower, el cual asegura que el disco $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ tiene la p.p.f. Para demostrar este resultado, veamos primero que no puede existir una retracción de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$. Para ello probamos primero el siguiente resultado sobre los homomorfismos inducidos entre los grupos fundamentales.

Lema 3.1.2. *Si existe una retracción $r : X \to A$, entonces el homomorfismo $r_* : \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0)$ es sobreyectivo e $i_* : \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ es inyectivo con $a_0 \in A$.*

Demostración. Como r es una retracción, $r \circ i = Id_A$, con $i : A \to X$ la inclusión. Luego, $(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = (Id_A)_* = Id_{\pi_1(A,a_0)}$. De aquí obtenemos que i_* es inyectiva y r_* es sobreyectiva. $\square$

Como consecuencia del lema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.3. *No existe una retracción de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Si existiese una retracción $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$, dado $b_0 \in \mathbb{S}^1$, el homomorfismo $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \to \pi_1(\mathbb{D}^2, b_0)$ sería inyectivo. Esto no es posible porque el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es $\mathbb{Z}$ mientras que como $\mathbb{D}^2$ es el simplemente conexo, su grupo fundamental es el trivial. $\square$

Teorema 3.1.4. *Toda aplicación continua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ continua. Queremos ver que existe $x \in \mathbb{D}^2$ con $f(x) = x$.

Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}^2$, entonces, podemos definir la aplicación r dada por la intersección de la semirrecta $l_{f(x)\,x}$ que empieza en $f(x)$ y pasa por x con la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

$$
\begin{aligned}
r : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\
x &\longmapsto l_{f(x)\,x} \cap \mathbb{S}^1
\end{aligned}
$$

Esta aplicación es continua y tenemos que $r \circ i = Id_{\mathbb{S}^1}$, luego tenemos una retracción de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$. Esto no puede ser por el Corolario 3.1.3, por lo que f tiene que tener un punto fijo. $\square$

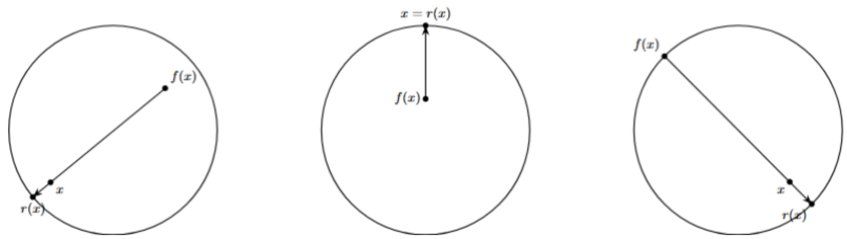

Figura 3.1: Ejemplos de imágenes de elementos de $\mathbb{D}^2$ por la aplicación r.

Vamos a dar otra demostración de este resultado utilizando la noción del grado de una aplicación de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ introducida en la Definición 2.1.9.

Demostración. Supongamos que existe una aplicación continua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ sin ningún punto fijo. En este caso podemos definir la siguiente aplicación continua:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|} \end{aligned}$$

Veamos que entonces las aplicaciones antipodal a y $\varphi|_{\mathbb{S}^1}$ son homótopas. Definimos la homotopía $H : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$H(x,t) = \frac{\varphi(x) \cdot t - x \cdot (1-t)}{\|\varphi(x) \cdot t - x \cdot (1-t)\|}$$

En el caso de que el denominador no se anule, la aplicación H es continua y verifica $H(x,0) = -x$ y $H(x,1) = \varphi|_{\mathbb{S}^1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Luego sería la homotopía que buscamos.

El denominador se anula en el caso que $t = 1/2$. Si $t = 1/2$, el denominador solo se anularía si:

$$\frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|} - x = 0$$

De aquí obtenemos que

$$f(x) = x(1 + \|f(x) - x\|)$$

Lo cual no puede ocurrir porque $\|f(x)\| \leq 1$, $\|x\| = 1$ y como $x \neq f(x)$, entonces $1 + \|f(x) - x\| > 1$.

Luego hemos obtenido una homotopía entre la aplicación antipodal a y $\varphi|_{\mathbb{S}^1}$. La aplicación $\varphi|_{\mathbb{S}^1}$ se extiende al disco por lo que es homotópicamente nula por la proposicón 2.1.12 y por tanto su grado es 0, mientras que el grado de a es 1. Luego por el Lema 2.1.11 las aplicaciones a y $\varphi|_{\mathbb{S}^1}$ no pueden ser homótopas y por tanto, la aplicación f tiene que tener al menos un punto fijo. □

Ambos ejemplos, son ejemplos de espacios continuos que verifican la p.p.f, ya que espacios métricos conexos y compactos.

En el siguiente ejemplo, se ve como el espacio $[0, \infty)$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no posee la p.p.f. En este caso, el espacio $[0, \infty)$ es conexo pero no compacto.

Ejemplo 3.1.5. Tomamos la aplicación continua

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

Esta aplicación, no tiene ningún punto fijo, por lo que el espacio $[0, \infty)$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ no tiene la p.p.f.

El ejemplo que acabamos de dar será la base para la construcción de otros espacios sin la p.p.f. que vamos a hacer en la siguiente sección.

3.2. Construcción de espacios sin la propiedad del punto fijo.

En este apartado, veremos que si tenemos un subconjunto cerrado B de un espacio métrizable X que es homeomorfo la semirecta $[0, \infty)$ de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, entonces B es un retracto de X y por tanto, X no tiene la p.p.f.

Como consecuencia, veremos que dado un arco L y un elemento p en L, entonces $L \backslash \{p\}$ no posee la p.p.f. Este resultado lo utilizaremos posteriormente en el capítulo 5. Para esta demostración, seguiremos la referencía [3].

En la sección 2.1 hemos introducido la noción de camino. Un caso particular de caminos son los arcos que vamos a definir a continuación. Además, vamos a introducir la noción de extensión de una aplicación relativa a un conjunto.

Definición 3.2.1. Un camino $\gamma : I \to X$ se dice que es un **arco** si $\gamma : I \to \gamma(I)$ es un homeomorfismo. Si $\gamma(0) = x_1$ y $\gamma(1) = x_2$, decimos que γ es un arco que une x_1 con x_2 y que x_1 y x_2 son los extremos del arco.

Definición 3.2.2. Un espacio topológico X es **conexo por arcos** si dados $x, y \in X$, existe un arco que une x con y.

En algunas ocasiones para simplificar la notación, identificaremos un arco $h : I \to X$ con su imagen $h(I)$.

Definición 3.2.3. Sean X e Y dos espacios topológicos y $P \subseteq X$. Dados una aplicación continua $\varphi : P \to Y$ y subconjuntos $P_1 \subseteq X$ con $P \subseteq P_1$ y $A \subseteq Y$ con $\varphi(P) \subseteq A$, decimos que la aplicación continua $\psi : P_1 \to Y$ es una **extensión de φ al conjunto P_1 relativa a A** si se verifica:

1. $\psi(P_1) \subseteq A$.

2. $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in P$.

El siguiente resultado nos muestra que si existe una extensión de una aplicación relativa a un conjunto, entonces también existirá una extensión de esa aplicación relativa a un retracto de ese conjunto.

Lema 3.2.4. *Sea $\varphi : P \to Y$ una aplicación continua. Si existe una extensión continua $\psi : P_1 \to Y$ de φ relativa a un subconjunto A, entonces para cualquier retracto $B \subseteq A$ con $\varphi(P) \subseteq B$, también existe una extensión continua $\psi_B : P_1 \to Y$ de φ relativa a B.*

Demostración. Como B es un retracto de A, existe una retracción $r : A \to B$. La aplicación $r \circ \psi : P_1 \to B$ está bien definida, porque $\psi(P_1) \subseteq A$ y es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Tenemos que $\psi(P_1) \subseteq A$, entonces $(r \circ \psi)(P_1) \subseteq r(A)$ y como $r(A) = B$, se tiene que $(r \circ \psi)(P_1) \subseteq B$.

Por último, dado $x \in P$, como $r|_B = Id_B$ y por hipótesis $\varphi(P) \subseteq B$, por lo que $r(\psi(x)) = r(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

Luego la aplicación $\psi_B = r \circ \psi$ es una extensión continua de φ relativa a B. □

La noción de extensión continua relativa a un conjunto nos permite caracterizar los retractos de un conjunto dado.

Proposición 3.2.5. *Un conjunto $B \subseteq A$ es un retracto de A, si y solo si toda aplicación continua $\varphi : B \to Y$ admite una extensión continua a A relativa a $\varphi(B)$.*

Demostración. Si B es un retracto de A, entonces existe una retracción $r : A \to B$. Sea ahora la aplicación continua $\varphi : B \to Y$ y consideramos la composición $\varphi \circ r : A \to Y$, la cual está bien definida y es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Como $r(A) = B$, se tiene que $(\varphi \circ r)(A) = \varphi(B)$. Por último, dado $x \in B$, como $r|_B = Id_B$, se tiene que $(\varphi \circ r)(x) = \varphi(x)$. Luego $\varphi \circ r$ es una exstensión continua de φ a A relativa a $\varphi(B)$.

Supongamos ahora que toda aplicación continua $\varphi : B \to Y$ admite una extensión continua $\psi : A \to Y$ relativa a $\varphi(B)$. Tomando en particular $\varphi = Id_B$, la aplicación Id_B admite una extensión continua $\psi : A \to Y$ relativa a B. Tenemos que $\psi|_B = Id_B$ y $\psi(A) \subseteq \varphi(B) = B$. Luego la aplicación

$$\begin{aligned} r : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto \psi(x) \end{aligned}$$

es una retracción de A en B. □

Definición 3.2.6. Se dice que espacio topológico X es **normal** si dados A y B conjuntos cerrados y disjuntos de X, entonces existen U y V abiertos disjuntos con $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Lema 3.2.7. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico. Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos en X. Como $X \backslash B$ es abierto, y $A \subseteq X \backslash B$, para cada $a \in A$ podemos elegir $\varepsilon_a > 0$ de forma que $B(a, \varepsilon_a) \cap B = \emptyset$. Para cada b en B, elegimos $\varepsilon_b > 0$ tal que $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$. Entonces, tomamos

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2}) \qquad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$$

que son abiertos disjuntos que contienen a A y a B respectivamente. Los abiertos U y V son disjuntos, ya que si existiese $z \in U \cap V$, entonces

$$z \in B(a, \tfrac{\varepsilon_a}{2}) \cap B(b, \tfrac{\varepsilon_b}{2})$$

para algún $a \in A$ y $b \in B$. Luego tenemos que $d(a, z) < \frac{\varepsilon_a}{2}$ y $d(b, z) < \frac{\varepsilon_b}{2}$ y por tanto,

$$d(a, b) \leq d(a, z) + d(b, z) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2}$$

Suponiendo que $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$, se tiene que $d(a,b) < \varepsilon_b$, y por tanto, $a \in B(b,\varepsilon_b)$, lo que es una contradicción, porque $B(b,\varepsilon_b) \cap A = \emptyset$ para todo $b \in B$. □

El siguiente resultado, conocido como el Terema de Tietze lo enunciamos con el fin de demostrar el Lema 3.2.9. Se puede encontrar su demostración en [13, p. 103].

Teorema 3.2.8. *(Teorema de Tietze) Sea X un espacio topológico. El espacio X es normal si y solo si dado un subespacio cerrado A de X, y $f : A \to \mathbb{R}$ una aplicación continua, entonces existe una extensión de f a X.*

Recordemos que $\mathbb{R}^\omega$ denota el producto numerable de copias de $\mathbb{R}$ (ver ejemplo 2.0.22).

Lema 3.2.9. *Sea B un subconjunto cerrado de un espacio metrizable X. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $f_i : B \to \mathbb{R}$ una aplicación continua y consideremos la aplicación $f : B \to \mathbb{R}^\omega$ dada por $\pi_i \circ f(x) = f_i(x)$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i > n$, la aplicación $f_i \equiv 0$, entonces existe una extensión $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ de f a X relativa a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por el Teorema de Tietze, cada aplicación f_i admite una extensión continua $\tilde{f}_i : X \to \mathbb{R}$. Como $\{0\}$ es un retracto de $\mathbb{R}$, por el Lema 3.2.4, existe una extensión continua ψ_i de f_i a X relativa a $\{0\}$, es decir, $\psi_i \equiv 0$ para $i > n$.

Entonces podemos considerar la aplicación continua $F : X \to \mathbb{R}^\omega$ definida por $F(x) = \{F_i(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$F_i(x) = \begin{cases} \tilde{f}_i(x), & \text{si } i \leq n \\ \psi_i(x) = 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

que cumple lo que queremos.

Por lo tanto, podemos considerar la extensión F de f como una aplicación $F : X \to \mathbb{R}^n$. □

Teorema 3.2.10. *Sea B un conjunto cerrado de un espacio metrizable X. Si B es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}^n$, entonces B es un retracto de X.*

Demostración. Por hipótesis existe un homeomorfismo $h : B \to B_1$ con B_1 un retracto de $\mathbb{R}^n$. Podemos aplicar el Lema 3.2.9, a la familia de aplicaciones $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $h_i = \pi_i \circ h$ si $i \leq n$ y $h_i \equiv 0$ si $i > n$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las proyecciones sobre la coordenada i-esima. Luego, tenemos una aplicación continua $H : X \to \mathbb{R}^n$ que es una extensión de h.

Como $h(B) = B_1$, por el Lema 3.2.4, existe una extensión $\tilde{H} : X \to B_1$ de h. Consideremos la aplicación continua $r : X \to B$ definida por $r(x) = h^{-1}(\tilde{H}(x))$. Si $x \in B$, tenemos que $r(x) = h^{-1}(h(x)) = x$. Luego, r es una retracción de X en B. □

Corolario 3.2.11. *Sea L un arco contenido en un espacio topológico X, un elemento $p \in L$ y $M \subseteq X$ un espacio metrizable tal que $L\backslash M = \{p\}$. Entonces M no admite un punto fijo.*

Demostración. Sea L un arco, es decir, L es un espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Como $p \in L$, existe un arco A contenido en L que tiene p como uno de los extremos. Tenemos que A es un conjunto cerrado en L (por ser homeomorfo a $[0,1]$) y como L es cerrado en X, se tiene que A es cerrado en X. Luego, $A \cap M$ es un conjunto cerrado de M. Como $L\backslash M = L \cap (X\backslash M) = \{p\}$, por hipótesis $\{p\} \in A \subseteq L$ por lo que $A \cap (X\backslash M) = \{p\}$, y tenemos que $A \cap M = A\backslash\{p\}$.

Por otra parte, $A\backslash\{p\}$ es homeomorfo a $[0,1)$, y por lo tanto, $A\backslash\{p\}$ es homeomorfo a la semirecta $[0,\infty)$ (ver ejemplo 2.0.10). Hemos visto en el ejemplo 3.1.5 que la semirrecta $[0,\infty)$

no posee la p.p.f., y como por el Lema 3.0.2, la p.p.f. es un invariante topológico, concluimos que $A\backslash\{p\}$ no posee la p.p.f.

La semirrecta $[0,\infty)$ es un retracto de $\mathbb{R}$, para verlo basta considerar la aplicación

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,\infty) \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $A\backslash\{p\}$ es un conjunto cerrado del espacio metrizable M y $A\backslash\{p\}$ es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}$. Luego por el Teorema 3.2.10 obtenemos que $A\backslash\{p\}$ es un retracto de M.

Como $A\backslash\{p\}$ no tiene la p.p.f., entonces por el Lema 3.0.4, el espacio M tampoco tiene la p.p.f. $\square$

Capítulo 4

Resultados sobre la propiedad del punto fijo

En este capítulo, construiremos espacios topológicos que verifican la p.p.f. a partir de otros que también la verifican.

Definición 4.0.1. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de espacios topológicos. La **unión disjunta** de estos espacios se define de la siguiente forma:

$$\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha = \{(x,\alpha) : \alpha \in A \text{ y } x \in X_\alpha\}$$

Si el conjunto A es finito, la unión disjunta la denotamos como $X_1 \sqcup ... \sqcup X_n$.

Para cada $X_\beta \in \{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, se puede considerar la inclusión de X_β en la unión disjunta dada por:

$$\begin{aligned} i_\beta : & X_\beta \longrightarrow \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha \\ & x \longmapsto (x,\beta) \end{aligned}$$

De está forma, identificamos los elementos de X_β con $i_\beta(X_\beta)$. Se puede definir la topología en $\bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ de forma que $U \subseteq \bigsqcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ es abierto si y solo si $i_\beta^{-1}(U) = X_\beta \cap U$ es abierto en X_β para todo $\beta \in A$. Esta topología se denomina **topología final** asociada a las aplicaciones i_α.

A partir de este espacio topológico, podemos definir uno nuevo de la siguiente forma:

Definición 4.0.2. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ espacios topológicos y $x_i \in X_i$. Definimos la **unión por un punto** de estos espacios como el espacio cociente obtenido por $X_1 \sqcup X_2 \sqcup ... \sqcup X_n$ identificando $x_1 \sim x_2 \sim ... \sim x_n$ con $x_i \in X_i$ y lo denotamos por $X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n$.

En este espacio tomamos la topológia cociente definida en la Definición 2.0.32.

Teorema 4.0.3 ([2])**.** *Si X e Y tienen la p.p.f., entonces $X \vee Y$ también.*

Demostración. Para simplificar la notación, supondremos que los espacios X e Y son disjuntos. De esta forma, las aplicaciones inclusión de los espacios X e Y en su unión disjunta son las siguientes:

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow X \sqcup Y \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} i_Y : Y &\longrightarrow X \sqcup Y, \\ y &\longmapsto y. \end{aligned}$$

Tomamos la siguiente topología en el espacio $X \sqcup Y$: Un conjunto $U \subseteq X \sqcup Y$ es abierto en $X \sqcup Y$ si y solo si $X \cap U$ y $Y \cap U$ son abiertos en los espacios X e Y respectivamente.

La unión por un punto de los espacios X e Y la obtenemos mediante la aplicación cociente $\pi : X \sqcup Y \to X \vee Y$ que identifica los puntos $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ de forma que $\pi(x_0) = \pi(y_0) = p$. Si $x \in X$ con $x \neq x_0$, entonces $\pi(x) = x$ y si $y \in Y$ con $y \neq y_0$, entonces $\pi(y) = y$.

Sea $f : X \vee Y \to X \vee Y$ una aplicación continua. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[ddr, dashed] & X \arrow[d, "i_X"] \\
X \amalg Y \arrow[d, "\pi"'] & X \amalg Y \arrow[d, "\pi"] \\
X \vee Y \arrow[r, "f"'] & X \vee Y
\end{tikzcd}$$

Veamos que f tiene al menos un punto fijo.

Si $f(p) = p$, entonces el punto p es un punto fijo para f.

Si $f(p) \neq p$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $f(p) \in \pi(X \backslash \{x_0\})$. Definimos la aplicación $g : X \to X$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x_0 & \text{si } f(\pi(x)) \in \pi(Y) \\ (\pi \circ i_X)^{-1}(f(\pi(x))) & \text{si } f(\pi(x)) \in \pi(X) \end{cases}$$

La aplicación g está bien definida ya que si $f(\pi(x)) = p \in \pi(X) \cap \pi(Y)$, entonces

$$(\pi \circ i_X)^{-1}(f(\pi(x))) = (\pi \circ i_X)^{-1}(p) = i_X^{-1}(\{x_0\} \cup \{y_0\}) = x_0$$

Veamos que g es una aplicación continua. Tomamos un abierto U de X.

Si $x_0 \notin U$, entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) &= \{x \in X : (\pi \circ i_X)^{-1}(f(\pi(x))) \in U\} \\ &= \{x \in X : f(\pi(x)) \in \pi \circ i_x(U)\} \\ &= (f \circ \pi)^{-1}(\pi \circ i_X(U)). \end{aligned}$$

Si $f(\pi(x)) = p$, entonces $(i_X \circ \pi)^{-1}(f(\pi(x))) = x_0$ pero como $x_0 \notin U$, se tiene que $\pi(i_X(U) = U$ y por lo tanto $g^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\} = \pi^{-1} \circ f^{-1}(U)$.

Veamos primero que si U es abierto en X y $x_0 \notin U$, entonces U es abierto en $X \vee Y$. Como en $X \vee Y$ tenemos la topología cociente inducida por π, si $\pi^{-1}(U) = U$ es abierto en $X \sqcup Y$, el conjunto U es abierto en $X \vee Y$. Como en $X \sqcup Y$ tenemos la topología final asociada a las aplicaciones i_X e i_Y, el conjunto U es abierto en $X \sqcup Y$ si $i_X^{-1}(U) = U \cap X = U$ es abierto en X e $i_Y^{-1}(U) = U \cap Y = \emptyset$ es abierto en Y. Esto ultimo se cumple, por lo que si U es abierto en X con $x_0 \notin U$, entonces U es abierto en $X \vee Y$.

Como $\pi \circ i_X(U) = U$ es abierto en $X \vee Y$ y f es continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X \vee Y$, luego $g^{-1}(U) = (f \circ \pi)^{-1}(\pi \circ i_X(U))$ es abierto en X.

Si se tiene que $x_0 \in U$, con U un abierto de X, entonces

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) &= \{x \in X : f(\pi(x)) \in \pi(Y)\} \cup \{x \in X : (\pi \circ i_X)^{-1}(f(\pi(x))) \in U\} \\ &= (f \circ \pi \circ i_X)^{-1}(\pi(Y) \cup (\pi \circ i_X)(U)) \end{aligned}$$

El conjunto $\pi(Y) \cup (\pi \circ i_X)(U)$ es abierto en $X \vee Y$ si $\pi^{-1}(\pi(Y) \cup (\pi \circ i_X)(U))$ es abierto en $X \sqcup Y$.

Como $x_0, y_0 \in U \cup Y$, se tiene que $\pi^{-1}(\pi(U \cup Y)) = U \cup Y$. Por tanto, como $U \cup Y$ es abierto en $X \sqcup Y$ si $i_X^{-1}(U \cup Y) = U$ y $i_Y^{-1}(U \cup Y) = Y$ son abiertos en X e Y respectivamente, lo cual se verifica, el conjunto $\pi(Y) \cup (\pi \circ i_X)(U)$ es abierto en $X \vee Y$.

Como $f \circ \pi \circ i_X$ es continua, el conjunto $(f \circ \pi \circ i_X)^{-1}(\pi(U \cup Y))$ es abierto en X.

Hemos visto que la aplicación g es continua, por hipótesis el espacio X tiene la p.p.f. y por tanto, g tiene al menos un punto fijo en X.

Si $g(x_0) = x_0$, como $f(p) \in \pi(X)$, tenemos que $g(x_0) = (\pi \circ i_X)^{-1}(f(p)) = x_0$, lo cual solo ocurre si $f(p) = p$, luego p sería un punto fijo para la aplicación f.

Si $g(x) = x$ con $x \neq x_0$, entonces $g(x) = (\pi \circ i_X)^{-1}(f(x)) = f(x) = x$ y concluimos que la aplicación f tiene al menos un punto fijo $x \in X \vee Y$.

□

A partir de este teorema, podemos ver como por ejemplo $I \vee I$ tiene la p.p.f.

Ejemplo 4.0.4. Tomamos I con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y tomamos

$$X_0 = I \times \{0\} \qquad X_1 = I \times \{1\}$$

La unión disjunta de I con él mismo es el espacio

$$I \sqcup I = X_0 \cup X_1$$

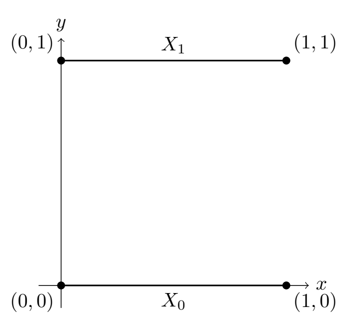

Figura 4.1: $I \sqcup I$

En este espacio, identificamos los puntos $(0,0) \sim (0,1)$ y obtenemos $I \vee I$.

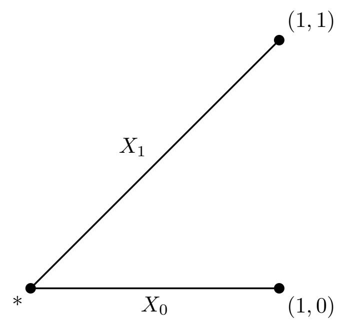

Figura 4.2: $I \vee I$

Por el Teorema 4.0.3, como I con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ tiene la p.p.f., se tiene que $I \vee I$ también tiene la p.p.f.

4.1. La propiedad del punto fijo en espacios métricos

En este apartado exploraremos cómo la estructura métrica de un espacio puede influir en la existencia y unicidad de puntos fijos. Introduciremos conceptos como la completitud y las aplicaciones contractivas, y mostraremos resultados como el Teorema del Punto Fijo de Banach, que garantizan condiciones bajo las cuales un espacio métrico tiene la p.p.f.

Definición 4.1.1. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) dos espacios métricos y $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación contractiva o una contracción**, si existe $r \in (0, 1)$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq r d_1(x, y) \quad \text{para todos} \;\; x, y \in X.$$

Al valor r se le denomina constante de contracción.

Observamos que si f es una contracción, entonces es una aplicación continua. Dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ si $d(x_0, y) < \delta$ entonces $d_2(f(x_0), f(y)) \leq r d(x_0, y) < r\delta$ tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$ se cumple la Definición 2.0.4.

Recordamos la definición de sucesión de Cauchy en un espacio métrico.

Definición 4.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X se dice que es una **sucesión de Cauchy** en (X, d) si se cumple que dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \text{para todo } n, m \geq N.$$

Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy de X es convergente en X.

Un resultado clásico de teoremas de punto dijo es el Teorema de Banach que vamos a demostrar a continuación.

Teorema 4.1.3 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces f es continua y tiene un único punto fijo en X.*

Demostración. Ya hemos visto que f es continua, veamos ahora que tiene un único punto fijo.

Sea r la constante de contracción de f y $x_0 \in X$. Veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = f^n(x_0)$ es de Cauchy, siendo f^n la aplicación que obtenemos componiendo n veces la aplicación f. Tenemos que:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq rd(x_{n-1}, x_n) \leq r^n d(x_0, x_1).$$

Para cuales quiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m = n + i$ para $i > 0$, por la desigualdad anterior se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=0}^{i-1} d(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \leq \sum_{j=0}^{i-1} r^{n+j} d(x_0, x_1) = r^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{i-1} r^j < \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1)$$

Como $r < 1$, la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Como el espacio métrico X es completo, la sucesión $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Veamos que x es un punto fijo de f. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y f es continua, la sucesión $f^n(x_0) = f(x_{n-1})$ converge a $f(x)$. Tenemos que $f(x_n) = f^{n+1}(x_0) = x_{n+1}$, luego $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por la unicidad del límite en un espacio métrico, concluimos que $f(x) = x$. Luego x es un punto fijo de f.

Veamos que el punto fijo es único.

Supongamos que existe otro punto $y \in X$ con $f(y) = y$, entonces tenemos que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$$

Lo cual implica que

$$(1 - r)d(x, y) \leq 0$$

luego $d(x, y) = 0$ y por las propiedades de los espacios métricos (Ver Definición 2.0.1) obtenemos que $x = y$. $\square$

Recordemos la definición de subsucesión:

Definición 4.1.4. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de un espacio métrico (X, d) y $n_1 < n_2 < ... < n_i < ...$ una sucesión creciente de enteros positivos. Entonces la sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $y_i = x_{n_i}$ es una **subsucesión** de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lema 4.1.5. *Dados un espacio métrico (X, d) y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si la sucesión contiene una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \text{para todos} \quad n, m \geq N$$

Como la subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente a un punto $x \in X$, para todo $\epsilon > 0$, existe un entero M tal que

$$d(x, x_{n_i}) < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n_i \geq M \;\text{ con }\; i \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \geq \text{máx}(N, M)$, entonces tomando $n_i > \text{máx}\{N, M\}$, tenemos

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_n) < 2\epsilon$$

Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. $\square$

Proposición 4.1.6 ([6]). *Sean X un espacio métrico y S un subconjunto cerrado y no vacío de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es completo.*

2. *Si $f : S \to S$ es una contracción, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. En primer lugar supongamos que X es completo, y veamos que toda contracción $f : S \to S$ tiene que tener un punto fijo.

Como S es un subconjunto de X toda sucesión de Cauchy de S es también una sucesión de Cauchy en X y por tanto, como X es completo, la sucesión converge en X. Como S es cerrado, el límite de la sucesión está en S, por lo que toda sucesión de Cauchy en S converge en S.

Luego S es completo y por el Teorema 4.1.3, f tiene un punto fijo.

Para ver que la segunda afirmación implica la primera, supongamos que X no es completo, luego existe una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que no es convergente en X. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y no es convergente, no puede contener ninguna subsucesión convergente. Luego la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene infinitos elementos y son todos distintos.

Fijamos $r \in (0,1)$ y definimos la aplicación $l : X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$l(x) = \inf\{d(x, x_n) : x \neq x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

para cada $x \in X$.

Definimos otra aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $\sigma(0) = 0$ y sucesivamente, tomamos $\sigma(n)$ de forma que $d(x_i, x_j) < rl(x_{\sigma(n-1)})$ para todos $i, j \geq \sigma(n)$ y $\sigma(n-1) < \sigma(n)$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, siempre podemos encontrar $\sigma(n)$ que cumpla esas propiedades.

Veamos que $S = \{x_{\sigma(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto cerrado. Si existe $x \in \overline{S}$ y $x \notin S$, entonces x es un punto de acumulación de S, es decir x es límite de la subsucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pero la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser convergente porque sino lo sería la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por el Lema 4.1.5, luego $S = \overline{S}$ y por tanto es cerrado.

La aplicación $f : S \to S$ tal que $f(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n+1)}$ es una aplicación contractiva. Hemos fijado $r \in (0,1)$, y tomando $m > n$, tenemos que

$$d(f(x_{\sigma(n)}), f(x_{\sigma(m)})) = d(x_{\sigma(n+1)}, x_{\sigma(m+1)}) < r \cdot l(x_{\sigma(n)}) \leq r \cdot d(x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(m)})$$

La aplicación f no tiene puntos fijos ya que $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ y los términos de S son distintos.

Por tanto, hemos construido un subconjunto $S \subseteq X$ que es cerrado y no vacío, junto con una aplicación contractiva $f : S \to S$ que no tiene punto fijo. Esto contradice la hipótesis de que toda contracción en un subconjunto cerrado y no vacío de X tiene un punto fijo.

□

Capítulo 5

Propiedades topológicas y la propiedad del punto fijo.

En este apartado se estudiará la relación existente entre la propiedad del punto fijo y diferentes propiedades topológicas. Concretamente, se analizarán las condiciones bajo las cuales un espacio topológico que posee la p.p.f. es compacto.

Se seguiran principalmente las referencias [4],[9], [13] y [7].

5.1. Espacios regulares y propiedad del punto fijo.

En esta sección vamos a construir un ejemplo de un espacio Hausdorff y no compacto que verifica la p.p.f. Para ello veremos cómo a partir de un espacio topológico regular con la propiedad del punto fijo, podemos construir otros espacios topológicos que verifican la p.p.f.

Definición 5.1.1. Un espacio topológico X es **regular** si y solo si dados A un conjunto cerrado y $x \notin A$, existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$ con $x \in V$ y $A \subseteq U$

Proposición 5.1.2. *Si (X, τ) es un espacio topológico Hausdorff y compacto, entonces es regular.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y un conjunto cerrado $A \subseteq X$ con $x_0 \notin A$. Como X es Hausdorff, para cada $a \in A$ podemos encontrar abiertos disjuntos U_a y V_a que contienen a a y a x respectivamente. Como X es compacto y A es un conjunto cerrado de X, entonces A es compacto, y como $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$, existe un número finito de conjuntos $U_{a_1}, ..., U_{a_n}$ de forma que $A \subseteq U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_n}$. Luego tenemos que $U = U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cap ... \cap V_{a_n}$ son abiertos disjuntos, ya que cada U_{a_i} y V_{a_i} son disjuntos y además contienen a A y a x_0 respectivamente, luego X es regular. □

Proposición 5.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es regular.*
2. *Si U es abierto en X con $x \in U$ entonces existe un abierto V con $x \in V$ tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

3. *Cada $x \in X$ tiene una base de entornos de conjuntos cerrados.*

Demostración. Veamos en primer lugar que la primera afirmación implica la segunda. Supongamos que X es un espacio regular, y sea U un abierto en X con $x \in U$. Entonces $X \setminus U$ es un conjunto cerrado en X con $x \notin X \setminus U$. Como X es regular, podemos encontrar dos abiertos V y W disjuntos con $x \in V$ y $X \setminus U \subseteq W$. Como W es abierto, el conjunto $X \setminus W$ es cerrado y $X \setminus W \subseteq U$. Los conjuntos V y W son disjuntos, por lo que $V \subseteq X \setminus W \subseteq U$, y como $X \setminus W$ es cerrado, se tiene que $\overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$.

Veamos ahora que la segunda afirmación implica la tercera. Si se cumple la segunda afirmación, cada conjunto abierto U que contiene a x contiene a un entorno cerrado de x y por la Definición 2.0.18, tenemos una base de entornos cerrados de x.

Para ver que la última afirmación implica la primera, supongamos que cada $x \in X$ tiene una base de entornos formada por conjuntos cerrados. Sea A un conjunto cerrado de X que no contiene a x. El conjunto $X \setminus A$ es abierto en X y contiene a x por lo que es un entorno de x. Como existe una base de entornos de conjuntos cerrados, existe un entorno cerrado B de x con $x \in B \subseteq X \setminus A$. Como B es entorno de x, existe un abierto V con $x \in V \subseteq B$ por lo que $x \in \mathring{B}$. Los conjuntos $\mathring{B}$ y $X \setminus B$ son abiertos disjuntos que contienen a x y a A respectivamente. Luego X es un espacio regular. □

El siguiente resultado nos muestra que si partimos de un espacio regular con la p.p.f. y refinamos su topología sin cambiar las clausuras de los abiertos, la p.p.f. se conserva en la nueva topología.

Teorema 5.1.4. *([4]) Sea X un conjunto y τ, μ dos topologías definidas sobre X. Supongamos que el espacio topológico (X, τ) es un espacio regular con la p.p.f.*

Si la topología μ es más fina que τ y para cada abierto $U \in \tau$ se verifica que $Cl_\tau(U) = Cl_\mu(U)$ entonces (X, μ) también tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. Sea $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$ una aplicación continua. Veamos que f también es continua si la consideramos como $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ y por tanto, f tiene un punto fijo.

Sean $p \in X$ y U abierto en (X, τ) con $f(p) \in U$. Dado que (X, τ) es un espacio regular, por el Teorema 5.1.3, existe V abierto en (X, τ) con $f(p) \in V \subseteq Cl_\tau(V) \subseteq U$. Como V es abierto en (X, τ), se tiene que $Cl_\tau(V) = Cl_\mu(V) = \overline{V}$.

Sea $D = f^{-1}(V)$, como V es abierto en (X, τ), el conjunto V también es abierto en (X, μ) y f es continua en (X, μ), luego el conjunto D es abierto en (X, μ) y además $p \in D$. Como D es abierto en (X, μ), se tiene que $Cl_\tau(D) = Cl_\mu(D) = \overline{D}$. Esto implica que el conjunto $X \setminus \overline{D}$ es abierto en ambas topologías. Como $X \setminus \overline{D}$ es abierto en (X, μ), entonces $Cl_\tau(X \setminus \overline{D}) = Cl_\mu(X \setminus \overline{D}) = \overline{X \setminus \overline{D}}$ y por tanto, el conjunto $X \setminus \overline{X \setminus \overline{D}}$ es un conjunto abierto en ambas topologías.

Como $\overline{V} \subseteq U$, tenemos que $f^{-1}(\overline{V}) \subseteq f^{-1}(U)$. La aplicación $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$ es continua, por lo que $f^{-1}(\overline{V})$ es un conjunto cerrado en (X, μ). Luego como $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(\overline{V})$ y $f^{-1}(\overline{V})$ es cerrado, obtenemos que $\overline{D} = \overline{(f^{-1}(V))} \subseteq f^{-1}(\overline{V}) \subseteq f^{-1}(U)$.

Por otro lado, , si existe $x \in X \setminus \overline{(X \setminus \overline{D})}$ y $x \notin \overline{D}$, entonces $x \in X \setminus \overline{D}$, y tenemos que $x \in \overline{X \setminus \overline{D}}$ lo que contradice que $x \in X \setminus \overline{(X \setminus \overline{D})}$, luego tenemos que $X \setminus \overline{(X \setminus \overline{D})} \subseteq \overline{D}$.

Además, veamos que $p \in X \setminus \overline{(X \setminus \overline{D})}$. Como $p \in D \subseteq \overline{D}$, se tiene que $X \setminus D \supseteq X \setminus \overline{D}$. El conjunto $X \setminus D$ es cerrado en (X, μ) y $X \setminus \overline{D}$ es abierto en (X, μ) y (X, τ) por lo que $X \setminus D \supseteq \overline{X \setminus \overline{D}}$, luego $D \subseteq X \setminus (\overline{X \setminus \overline{D}})$.

De esta forma obtenemos que

$$p \in X \backslash \overline{X \backslash \overline{D}} \subseteq \overline{D} = \overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(\overline{V}) \subseteq f^{-1}(U)$$

Luego $f^{-1}(U)$ es abierto en (X, τ), por tanto f es continua en (X, τ) y tiene un punto fijo.

□

El teorema anterior nos permite dar un ejemplo de un espacio Hausdorff no compacto que tiene la propiedad del punto fijo.

Ejemplo 5.1.5. Tomamos como espacio topológico el intervalo unidad I, con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Como hemos visto en la Sección 3.1, el intervalo unidad tiene la propiedad del punto fijo en la topología usual y es un espacio compacto y Hausdorff, por lo que es un espacio regular.

Veamos que la siguiente base genera una topología τ sobre I:

$$\mathcal{B} = \{S \subseteq I : S = U \backslash B \text{ con } U \in \tau_u \text{ y } B \text{ es numerable o finito}\}$$

Considerando τ_u la topología usual en I inducida por $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Como $I \in \tau_u$, y $\emptyset$ es finito, se da la primera condición del Teorema 2.0.14. Veamos que se cumple la segunda. Dados $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in S_1 \cap S_2$, entonces existen $U_1, U_2 \in \tau_u$ y B_1, B_2 finitos o numerables tal que $x \in U_i \backslash B_1 = S_1$. Tomando $S_3 = (U_1 \cap U_2) \backslash (B_1 \cup B_2)$, se tiene que $x \in S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$ por lo que $\mathcal{B}$ genera una topología sobre I.

De la definición se tiene que τ es más fina que τ_u.

Sea $S \subseteq I$ un abierto en τ, y queremos ver que $Cl_\tau(S) = Cl_{\tau_u}(S)$. Como $\tau_u \subseteq \tau$, tenemos que si un conjunto es cerrado en τ_u, su complementario es abierto en τ_u, por tanto será abierto en τ y su complementario cerrado en τ. Luego los cerrados en τ_u son cerrados en τ. Como la clausura de S es la intersección de los cerrados que lo contienen, $Cl_\tau(S) \subseteq Cl_{\tau_u}(S)$.

Veamos la otra contención. Sea p un punto de acumulación de S en τ_u. Sea $S_1 = U \backslash B$ un abierto de la base en τ, con $p \in S_1$ y con $U \in \tau_u$ y B un subconjunto numerable o finito de I y veamos que S_1 interseca a S.

Como $p \in S_1$, tenemos que $p \in U$ y como U es un abierto de la topología usual, tenemos que $U \cap S$ es no vacío. Como $U \cap S$ es una intersección no vacía de dos abiertos de la topología usual, la intersección es un abierto de la topología usual, por lo que se intersecan en un conjunto no numerable de puntos.

Luego $(U \backslash B) \cap S \neq \emptyset$, luego el punto p también es punto de acumulación de S en τ y por tanto, tenemos que $Cl_\tau(S) = Cl_{\tau_u}(S)$.

Por el Teorema 5.1.4, el intervalo unidad con la topología τ tiene la p.p.f. pero con esta topología, el intervalo unidad no es un conjunto compacto, ya que tomando los siguientes abiertos

$$U_n = \left([0,1] \backslash \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}\right) \cup \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

el recubrimiento $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ no admite un subrecubrimiento finito.

5.2. Conexión y conexión local

En esta sección probaremos un lema sobre las componentes conexas de un conjunto que será necesario más adelante. Para la prueba de este resultado necesitamos introducir algunas nociones como la conexión local y la compacidad por punto límite.

Definición 5.2.1. Sea X un espacio topológico. El espacio X es localmente conexo en $x \in X$ si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo V de x contenido en U.

Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, entonces X es **localmente conexo**.

Definición 5.2.2. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se llama **componente conexa** de x al mayor subconjunto conexo de X que contiene a x. La denotamos por C_x.

Si $x, y \in X$ con $x \neq y$, tenemos que o bien $C_x = C_y$ o bien $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Notemos que las componentes conexas de un espacio topológico X son conjuntos cerrados, ya que si $U \subseteq X$ es conexo, entonces $\overline{U}$ también.

El siguiente resultado caracteriza la conexión local de un espacio topológico a través de las componenetes conexas de los conjuntos abiertos.

Proposición 5.2.3. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente conexo si y solo si las componentes conexas de los conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que X es localmente conexo. Sea U un abierto de X. Dado $x \in U$ y $C_X(U)$ la componente conexa de U que contiene a x. Como X es localmente conexo, y U es entorno de x, entonces existe un entorno conexo V con $x \in V \subseteq U$ y como V es conexo, necesariamente $V \subseteq C_x(U) =$, luego $C_x(U)$ es abierto.

Ahora supongamos que cada componente conexa de cada abierto de X es un conjunto abierto. Luego si U es un entorno abierto de $x \in X$, entonces la componente conexa $C_x(U)$ de U que contiene a x es un entorno abierto de x contenido en U, luego X es localmente conexo.

□

Definición 5.2.4. Un espacio topológico X se dice que es **compacto por punto límite** si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

Proposición 5.2.5. *Si un espacio topólogico es compacto, entonces es compacto por punto límite.*

Demostración. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto infinito. Veamos que si A no tiene ningún punto límite entonces tendría que ser finito.

Si A no tiene puntos de acumulación, entonces $A' = \emptyset$ y tenemos que $A = \overline{A}$ por lo que A es cerrado. Como A es cerrado, para cada $a \in A$ podemos elegir un entorno U_a de a de forma que solo interseca a A en a, ya que si este entorno no existiese, a sería un punto de acumulación de A. El espacio X lo podemos escribir como la unión de los siguientes conjuntos abiertos

$$X = \left(\bigcup_{a \in A} U_a \right) \cup (X \backslash A)$$

Al ser X compacto, todo recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito y como $(X \backslash A) \cap A = \emptyset$ y cada U_a contiene a un único elemento de A, el conjunto A tiene que ser finito.

□

El recíproco de este resultado no se cumple si el espacio no es métrico. Veamos un contraejemplo.

Ejemplo 5.2.6. Sea $Y = \{x_0, x_1\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, Y\}$, llamada la topología trivial. Tomamos en $\mathbb{N}$ la topología discreta y en $X = \mathbb{N} \times Y$ la topología producto.

Veamos que X es compacto por punto límite. Sea $A \subseteq X$ infinito y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\{n_0\} \times Y) \cap A \neq \emptyset$. Sin perdida de generalidad supongamos que $(n_0, x_0) \in A$. Todo entorno V de (n_0, x_0) en la topología producto contiene a $U = \{(n_0, x_0), (n_0, x_1)\}$. Entonces (n_0, x_1) es punto de acumulación de A, ya que $(U \backslash \{(n_0, x_1)\}) \cap A \neq \emptyset$, por lo que X es compacto por punto límite.

El espacio X no es compacto, ya que tomando el recubrimiento formado por los abiertos $U_n = \{n\} \times Y$, no admite un subrecubrimiento finito.

Para poder demostrar el Lema 5.7.1, necesitamos demostrar el siguiente Lema.

Lema 5.2.7. *([4]) Sea X un espacio métrico conexo y localmente conexo. Consideremos M un subconjunto compacto de X y D un conjunto abierto con $M \subseteq D$ y tal que $\overline{D}$ es compacto. Entonces solo un número finito de componentes conexas de $X \backslash M$ interseca a $X \backslash \overline{D}$.*

Demostración. Supongamos que $\{E_i\}_{i \in I}$ es una colección infinita de componentes conexas de $X \backslash M$ de forma que cada una de ellas interseca a $X \backslash \overline{D}$.

Como X es localmente conexo y $X \backslash M$ es abierto, por la Proposición 5.2.3, cada E_i es un conjunto conexo y abierto en X.

Como E_i es componente conexa en $X \backslash M$, el conjunto E_i es cerrado en $X \backslash M$ y $Cl_{X \backslash M}(E_i) = E_i$. Por el Lema 2.0.24 tenemos que

$$Cl_{X \backslash M}(E_i) = Cl_X(E_i) \cap (X \backslash M) .$$

Si tuviesemos que $Cl_X(E_i) \cap M = \emptyset$, tendríamos que $Cl_X(E_i) \subseteq X \backslash M$ y por tanto $Cl_{X \backslash M}(E_i) = Cl_X(E_i) = E_i$, en consecuencia, E_i sería cerrado en X. Como X es un conjunto conexo, los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados en X son el mismo y $\emptyset$, por lo que necesariamente se tiene que $Cl_X(E_i) \cap M \neq \emptyset$.

Como $E_i \subseteq X \backslash M$ y $Cl_X(E_i) \cap M \neq \emptyset$, el conjunto E_i tiene que tener al menos un punto de acumulación en M, al cual llamaremos x_i.

Como $x_i \in M \subseteq D$, y D es abierto, D es entorno de x_i y como x_i es un punto de acumulación de E_i, por la Definición 2.0.25 tenemos que $(D \backslash \{x_i\}) \cap E_i \neq \emptyset$.

Como cada E_i es conexo, tenemos que $E_i \cap (\overline{D} \backslash D) \neq \emptyset$ ya que en caso contrario tendríamos que $E_i \subseteq (X \backslash \overline{D}) \cup D$ y podríamos escribir E_i como $E_i = \big((X \backslash \overline{D}) \cap E_i\big) \cup (D \cap E_i)$ que es una unión de abiertos disjuntos y no vacíos en E_i, lo cual no puede ser por ser E_i conexo. Luego E_i interseca a la frontera de D.

Para cada $i \in I$, elegimos un p_i en $E_i \cap (\overline{D} \backslash D)$. Observamos que $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ con $i, j \in I$. Además, como $\overline{D} \backslash D$ es un conjunto cerrado contenido en el compacto $\overline{D}$, entonces $\overline{D} \backslash D$ es compacto. Tenemos que el conjunto $P = \bigcup_{i \in I} \{p_i\}$ es un conjunto infinito contenido en el compacto $\overline{D} \backslash D$ y por tanto, por la Proposición 5.2.5, P tiene un punto de acumulación p en $\overline{D} \backslash D$. Como $X \backslash D \subseteq X \backslash M$, entonces $\overline{D} \backslash D \subseteq X \backslash M$ y el punto p está contenido en alguna componente conexa E de $X \backslash M$.

Si tuviesemos que $p = p_i$ para algún $i \in I$, tomamos $E = E_i$ y E es un entorno de p que no interseca a P en ningún punto distinto de p.

Si $p \in E_i$ para algún $i \in I$ y $p \neq p_i$, como X es Hausdorff, podemos encontrar un abierto U que contenga a p y no contenga a p_i, luego el conjunto $E \cap U$ es un entorno de p que no interseca a P en ningún punto, luego p no sería punto de acumulación de P.

En el caso que $E \neq E_i$ para todo $i \in I$, basta tomar E como entorno de p y como tendríamos que E y P son disjuntos, el punto p tampoco sería punto de acumulación de P. En cualquier caso, P no tiene punto de acumulación, lo cual es una contradicción. $\square$

5.3. Compacidad local y compactificación por un punto

A continuación, introducimos la noción de espacio topológico localmente compacto y veremos algunas de las propiedades de estos espacios.

Definición 5.3.1. Un espacio topológico X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$ y entorno abierto U de x, existe W entorno de x con $\overline{W}$ compacto y $x \in \overline{W} \subseteq U$.

Esta definición es equivalente a decir que X tiene una base de entornos formada por conjuntos compactos para cada $x \in X$.

En un espacio Hausdorff, no es necesario dar una base de entornos formada por conjuntos compactos para cada elemento para saber si el espacio es locamente compacto, en ese caso basta con dar un entorno compacto para cada $x \in X$.

Proposición 5.3.2. *Un espacio topológico Hausdorff X es localmente compacto si y solo si cada elemento $x \in X$ tiene un entorno compacto.*

Demostración. Supongamos que cada $x \in X$ tiene un entorno compacto K y veamos que X es localmente compacto. Sea U un entorno abierto de x en X y $V = (K \cap U)^\circ$.

Observemos que el conjunto V es no vacío. Como K es entorno de x, existe W abierto con $x \in W \subseteq K$ por lo que $W \cap U$ es un conjunto abierto no vacío contenido en $V = K \cap U$ y por lo tanto $x \in W \cap U \subseteq V$.

Luego el conjunto V es un entorno abierto de x. Tenemos que $Cl_X(V) \subseteq K$, por lo que $Cl_X(V)$ es compacto y Hausdorff, luego es regular por la Proposición 5.1.2. Además, por la Proposición 5.1.3, dado $x \in Cl_X(V)$, como V es entorno de x en $Cl_X(V)$, existe W abierto en $Cl_X(V)$ con $Cl_{Cl_X(V)}(W) \subseteq V$. Como $Cl_{Cl_X(V)}(W) \subseteq Cl_X(V)$ y $Cl_X(V)$ es compacto, el conjunto $Cl_{Cl_X(V)}(W)$ es compacto y $Cl_{Cl_X(V)}(W) \subseteq U$. Luego X es localmente compacto.

La otra implicación es trivial. $\square$

Como consecuencia de este resultado, podemos observar que si tenemos un espacio Hausdorff compacto, entonces es localmente compacto. Asimismo, en un espacio Hausdorff localmente compacto, todo subespacio abierto o cerrado resulta ser también localmente compacto.

Corolario 5.3.3. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y A un subespacio de X. Si A es abierto o cerrado en X, entonces el subespacio A es localmente compacto.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado en X y $x \in A$. Sea V un entorno de x en A. Entonces $V = A \cap U$ con U un entorno de x en X. Como U es un entorno de x en X, y el espacio X es localmente compacto, existe un entorno compacto C de x con $x \in C \subseteq U$. Entonces $A \cap C$ es un conjunto cerrado contenido en C y por tanto como C es compacto, el conjunto $A \cap C$ es compacto. Además, $A \cap C$ es entorno de x en A, luego $x \in A \cap C \subseteq A \cap U$ por lo que A es localmente compacto.

Supongamos ahora que $A \subseteq X$ es un subespacio abierto de X, y sea $x \in A$. Como X es localmente compacto, existe V entorno de x con $\overline{V}$ compacto y $x \in \overline{V} \subseteq A$. Luego $\overline{V}$ es un entorno de x en A. Como A es Hausdorff por ser subespacio de un espacio Hausdorff, por la Proposición 5.3.2, el subespacio A es localmente compacto. □

Una vez vistas las propiedades de un espacio localmente compacto, pasamos a introducir la noción de compactificación de un espacio topológico.

Partiendo de un espacio topológico X no compacto, veamos como definir un espacio compacto que lo contenga como subespacio denso.

Definición 5.3.4. Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se dice que f es un **embebimiento** si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

Definición 5.3.5. Una **compactificación** de un espacio topológico X es un par ordenado (K, h), donde K es un espacio Hausdorff compacto y h es un embebimiento de X en K de forma que $h(X)$ sea denso en K, es decir $\overline{h(X)} = K$.

En este trabajo, nos centraremos en la compactificación por un punto, también llamada compactificación de Alexandroff que se define por ejemplo en [7].

Definición 5.3.6. Sea (X, τ) un espacio topológico no compacto. La **compactificación por un punto** de X es el conjunto $X^* = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$, considerando en X^* la siguiente topología:

$$\tau^* = \tau \cup \{U \subseteq X^* : p \in U \ \text{ y existe}\, k \subseteq X \text{ compacto y cerrado con } X^* \backslash U = k\}$$

Comenzamos probando que τ^* es una topología.

Como $\emptyset \in \tau$, tenemos que $\emptyset \in \tau^*$ y como $\emptyset$ es compacto, se tiene que $X^* \backslash \emptyset \in \tau^*$.

Veamos que la unión arbitraria de conjuntos en τ^* está en τ^*. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con $U_\alpha \in \tau^*$ de forma que son abiertos en X y $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ conjuntos de la forma $X^* \backslash U_\beta = k_\beta$ con k_β compacto y cerrado en X.

Tenemos que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = U \in \tau$ luego $U \in \tau^*$ y $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = \bigcup_{\beta \in B} (X^* \backslash k_\beta) = X^* \backslash \left(\bigcap_{\beta \in B} k_\beta \right) = X^* \backslash K$. El conjunto K es compacto por ser intersección de cerrados en un compacto, por lo que $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta$ es abierto en X^*. Ahora veamos que la unión de estos dos abiertos también es abierta. Tenemos que $U \cup (X^* \backslash K) = X^* \backslash (K \backslash U)$. El conjunto $K \backslash U$ es un subespacio cerrado del compacto K por lo que es compacto. Luego la unión arbitraria de conjuntos abiertos de X^* es abierto.

Veamos ahora que la intersección finita de conjuntos de τ^* también está en τ^*. Sean $U_1, ..., U_r$, $U_{r+1}, ..., U_n$ elementos de τ^*. Si $U_1, ..., U_r$ son abiertos en X, entonces $\bigcap_{i=1}^r U_i$ es abierto en X y en consecuencia también en X^*. Si $U_{r+1}, ..., U_n$ son conjuntos en X^* tales que $X^* \backslash U_j = k_j$ es compacto, entonces $\bigcap_{i=r+1}^n U_i = \bigcap_{i=r+1}^n (X^* \backslash k_i) = X^* \backslash \left(\bigcup_{i=r+1}^n k_i \right)$. Como la unión finita de compactos es compacta, entonces $\bigcap_{i=r+1}^n U_i$ es un elemento de τ^*. La intersección $\bigcap_{i=1}^n U_i$ está dada por

$$\bigcap_{i \in I}^n U_i = \left(\bigcap_{i=1}^r U_i \right) \cap \left(\bigcap_{j=r+1}^n U_j \right) = \left(\bigcap_{i=1}^r U_i \right) \cap \left(X^* \backslash \left(\bigcup_{j=r+1}^n k_j \right) \right) = \left(\bigcap_{i=1}^r U_i \right) \cap \left(X \backslash \left(\bigcup_{j=r+1}^n k_j \right) \right)$$

El conjunto $X\backslash\left(\bigcup_{j=r+1}^{n} k_j\right)$ es abierto en X. Luego la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es abierta en X y por tanto, también en X^*. Luego $\tau*$ es una topología para X^*.

Teorema 5.3.7. *La compactificación por un punto X^* de un espacio topológico X es compacta y contiene a X como subespacio denso. Además, X^* es Hausdorff si y solo si X es localmente compacto y Hausdorff.*

Demostración. Veamos que el espacio $X^* = X \cup \{p\}$ es compacto. Dado $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X^*, existe $j \in I$ con $p \in U_j$. Como $U_j \in \tau^*$, existe un compacto K en X con $X^*\backslash U_j = K$. Como el conjunto $X^*\backslash U_j$ es compacto en X y $X^*\backslash U_j \subseteq \bigcup_{i\in I}(U_i \cap X)$, existe un subrecubrimiento finito $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ para $X^*\backslash U_j$. Por tanto, $U_{i_1}, ..., U_{i_n}, U_j$ es un subrecubrimiento finito para X^* y por tanto, el espacio X^* es compacto.

Veamos que X es denso en X^*. Dado un entorno V de p, existe un abierto W en τ^* con $p \in W \subseteq V$. Como $W \in \tau^*$, existe un compacto $K \subseteq X$ con $W = \{p\} \cup (X\backslash K)$. Tenemos que $K \neq X$, ya que sino, X sería compacto. Entonces, $(X\backslash K) \cap W \neq \emptyset$ y por tanto, $X \cap W \subseteq X \cap V \neq \emptyset$. Luego, $p \in \overline{X}$, y $\overline{X} = X^*$ como queríamos ver.

Si X^* es Hausdorff, como $X \subseteq X^*$, el espacio X es Hausdorff. Veamos que X es localmente compacto. Como X^* es Hausdorff y compacto, es localmente compacto y como X es un subespacio abierto de X^*, por el Corolario 5.3.3, tenemos que X es localmente compacto.

Falta ver que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces X^* es Hausdorff. Si X es Hausdorff, basta ver que dado $x \in X$, existen abiertos disjuntos U y V que contienen a x y a p respectivamente.

Como X es localmente compacto, existe K compacto entorno de x por lo que $U = \mathring{K}$ y $V = X^*\backslash K$ son los abiertos que buscabamos. □

Observación 5.3.8. Observamos que si X es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, entonces X^* es compacto y Hausdorff, y por tanto regular.

5.4. Espacios separables y localmente separables

Para demostrar el Lema 5.7.1, veamos que si tenemos un espacio métrico localmente conexo, conexo y localmente compacto que no es compacto, entonces es separable. Para ver esto, seguiremos las referencias [1], [10] y [9].

Comenzaremos viendo que un espacio métrico conexo y localmente compacto es localmente separable.

A continuación, introducimos la noción de localmente separable. Recordemos que introdujimos la noción de espacio separable en la Definición 2.0.43.

Definición 5.4.1. Un espacio métrico (X, d) es **localmente separable** si cada $x \in X$ tiene un entorno separable.

Definición 5.4.2. Un espacio métrico (X, d) esta **totalmente acotado** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $X = B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon)$

Lema 5.4.3. *Un espacio métrico (X, d) compacto está totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Consideramos el recubrimiento de X dado por $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in X}$. Como X es compacto, existe un número finito de $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ por lo que X está totalmente acotado. $\square$

Veamos ahora que un espacio totalmente acotado es separable.

Proposición 5.4.4. *Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado. Entonces (X, d) es separable.*

Demostración. Supongamos que (X, d) es un espacio métrico totalmente acotado. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto finito $F_n \subseteq X$ de forma que

$$X \subseteq \bigcup_{x \in F_n} B(x, \tfrac{1}{n})$$

Sea ahora el conjunto $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ que es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Veamos que A es un conjunto denso en X.

Sea $U \subseteq X$ un abierto cualquiera. Como U es abierto en un espacio métrico, dado $y \in U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Podemos encontrar un $k \in \mathbb{N}$ de forma que $1/k < \varepsilon$. Como $X \subseteq \bigcup_{x \in F_k} B(x, 1/k)$, existe $x_i \in F_k \subseteq A$ tal que $y \in B(x_i, 1/k)$. Por lo tanto, $d(x_i, y) < 1/k$ y en consecuencia $x_i \in B(y, 1/k) \subseteq B(y, \varepsilon) \subseteq U$.

Tenemos que $A \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, A es un conjunto denso numerable en X y concluimos que X es separable. $\square$

Como consecuencia, tenemos que un espacio métrico compacto es separable. Por tanto, si un espacio métrico es localmente compacto, para cada entorno abierto U de x en X existe un entorno W de x con $\overline{W}$ compacto y $x \in \overline{W} \subseteq U$. Como $\overline{W}$ es compacto, considerando la métrica heredada de X en $\overline{W}$, el conjunto $\overline{W}$ es separable, luego espacio X es localmente separable.

Veamos ahora que un espacio métrico conexo y localmente separable es separable.

Proposición 5.4.5. *Sea (X, d) espacio métrico conexo. Si X es localmente separable, entonces es separable.*

Demostración. Supongamos sin perdida de generalidad que el diámetro de X es 1, es decir, normalizamos las distancias tomando la métrica acotada (ver Definición 2.0.3).

Como X es localmente separable, dado $x \in X$, existe un entorno separable U de x. Luego existe $\delta \in (0, 1]$ con $B(x, \delta) \subseteq U$, por lo que $B(x, \delta)$ también es separable por ser un conjunto abierto en un espacio separable (Lema 2.0.44). Para cada $x \in X$ definimos

$$\delta(x) = \sup\{\delta > 0 : B(x, \delta) \text{ es separable}\}$$

Tomamos un $x \in X$ y la bola $B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$ que es separable. Luego, existe un subconjunto numerable denso $A(x) \subseteq B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$ tal que $\overline{A(x)} = B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$.

Tomamos $E_1 = A(x)$ y definimos E_n de forma recursiva:

$$E_n = \bigcup_{z \in E_{n-1}} A(z)$$

Como E_{n-1} es numerable, el conjunto E_n es unión numerable de conjuntos numerables, por lo que E_n es numerable.

Tomamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ que también es numerable. Veamos que $\overline{A}$ es abierto en X.

Sea $y \in \overline{A}$, se tiene que $B(y, \frac{1}{5}\delta(y)) \cap A \neq \emptyset$, luego existe $a \in A$ tal que $d(a,y) < \frac{1}{5}\delta(y)$. Como $a \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in E_n$.

Como $d(a,y) < \frac{1}{5}\delta(y)$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < \frac{1}{5}\delta(y) - d(a,y)$ y entonces $d(a,y) < \frac{1}{5}\delta(y) - \varepsilon$. Luego $B(a, \frac{4}{5}\delta(y)) \subseteq B(y, \delta(y) - \varepsilon)$. Como $B(y, \delta(y) - \varepsilon)$ es separable y $B(a, \frac{4}{5}\delta(y))$ es abierto en $B(y, \delta(y) - \varepsilon)$, el conjunto $B(a, \frac{4}{5}\delta(y))$ también es separable y por tanto, se tiene que $\frac{4}{5}\delta(y) \leq \delta(a)$.

En particular, $\frac{2}{5}\delta(y) \leq \frac{1}{2}\delta(a)$ y como $d(y,a) < \frac{1}{5}\delta(y)$,

$$a \in B(y, \tfrac{1}{5}\delta(y)) \subseteq \overline{B(a, \tfrac{2}{5}\delta(y))} \subseteq \overline{B(a, \tfrac{1}{2}\delta(a))} \subseteq \overline{E_{n+1}} \subseteq \overline{A}$$

Luego $\overline{A}$ es un conjunto abierto y cerrado en un espacio conexo X por lo que $\overline{A} = X$ y por tanto, X es separable. □

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.4.6. *Un espacio métrico conexo y localmente compacto es separable.*

5.5. Propiedades de separación y numerabilidad

En este apartado se introducen distintas propiedades de separación y axiomas de numerabilidad. Relacionaremos que un espacio tenga una base numerable con que sea separable y que sea Lindelöf, noción que introducimos a continuacion.

Definición 5.5.1. Sea X un espacio topológico. Se dice que el espacio X es de **Lindelöf** si todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento numerable.

Definición 5.5.2. Se dice que un espacio topológico cumple el **Segundo Axioma de Numerabilidad** si la topología tiene una base numerable.

Observemos que todo espacio que cumple el Segundo Axioma de Numerabilidad cumple el Primer Axioma de Numerabilidad.

El siguiente resultado muestra cuando es equivalente que un espacio sea de Lindelöf o separable. Para su demostración, se seguirá [13].

Teorema 5.5.3. *Si X cumple el segundo axioma de numerabilidad, entonces:*

1. *El espacio X es de Lindelöf.*
2. *El espacio X es separable.*

Demostración. Supongamos que X cumple el segundo axioma de numerabilidad y sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X.

1. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $i \in I$ y $x \in U_i$, existe $B_{x,U_i} \in \mathcal{B}$ con $x \in B_{x,U_i} \subseteq U_i$. El conjunto $\mathcal{B}' = \{B_{x,U_i} : x \in U_i, i \in I\} = \{B_{x_1,U_{i_1}}, B_{x_2,U_{i_2}}, ...\}$ es numerable porque $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Entonces, $U_{i_1}, U_{i_2}, ...$ es un subrecubrimiento numerable de X.

2. Como $\mathcal{B}$ es numerable, podemos escribir $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para cada $B_n \in \mathcal{B}$ podemos elegir un $x_n \in B_n$. Tomamos $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. De esta forma, el conjunto D es un subconjunto denso numerable de X, ya que dados $x \in X$, y un entorno V de x, existe un B_i con $x \in B_i \subseteq V$. Luego como $x_i \in B_i$, se tiene que $V \cap D \neq \emptyset$, y por tanto $x \in \overline{D}$.

□

En el caso de que el espacio X sea un espacio métrico, se da la siguiente equivalencia.

Teorema 5.5.4. *Si X es un espacio métrico, son equivalentes:*

1. *X cumple el segundo axioma de numerabilidad.*
2. *X es de Lindelöf.*
3. *X es separable.*

Demostración. Por el Teorema 5.5.3, basta ver que si X es un espacio métrico, la segunda afirmación implica la primera y que la tercera implica la primera.

Supongamos que X es un espacio métrico de Lindelöf. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\mathcal{U}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X y como X es de Lindelöf, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subrecubrimiento numerable $\mathcal{U}_n^*$ de $\mathcal{U}_n$. Tomamos $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_2^* \cup ...$ que es una unión numerable de abiertos de X. Veamos que $\mathcal{U}$ es base de la topología de X.

Sea $x \in W$ con W abierto en X. Como X es un espacio métrico, existe $m \in \mathbb{N}$ con $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$. Como $\mathcal{U}_{2m}^*$ es un recubrimiento para X, existe $y \in X$ con $x \in B(y, \frac{1}{2m})$. Como $d(x, y) < \frac{1}{2m}$,

$$x \in B(y, \tfrac{1}{2m}) \subseteq B(x, \tfrac{1}{m}) \subseteq W$$

por lo que $\mathcal{U}$ es una base numerable para X.

Supongamos ahora que X es un espacio métrico separable. Entonces, existe un subconjunto $D = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso y numerable en X. Tomamos $B_{n,m} = B(d_n, \frac{1}{m})$ para $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $\{B_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una colección numerable de abiertos en X.

Dado $x \in X$ y W un entorno de x en X, como X es un espacio métrico, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq W$. Como D es denso en X, existe un $d_n \in D$ con $d_n \in B(x, \frac{1}{2m})$ y por tanto, como $d(x, d_n) < \frac{1}{2m}$, tenemos que $B(d_n, \frac{1}{2m}) \subseteq B(x, \frac{1}{m})$. Finalmente,

$$x \in B_{n,2m} = B(d_n, \frac{1}{2m}) \subseteq W$$

por lo que $\mathcal{B} = \{B_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable para X. □

Para demostrar el Lema 5.7.1, es necesario ver que todo espacio topológico regular que cumple el Segundo Axioma de Numerabilidad es metrizable. Este resultado es conocido como Teorema de metrización de Urysohn. El resultado se puede encontrar junto con su prueba en [9, p.245].

Teorema 5.5.5 (Teorema de metrización de Urysohn)**.** *Todo espacio regular X que verifica el segundo axioma de numerabilidad es metrizable.*

5.6. Propiedades de los Continuos de Peano

En esta sección, introduciremos la noción de continuo de Peano, y demostraremos que estos espacios, son conexos por arcos.

Definición 5.6.1. Un **continuo de Peano** es un espacio métrico compacto, conexo y localmente conexo.

Observemos que si X es un continuo de Peano, entonces X es regular por la proposición 5.1.2.

Recordemos que en la definición 3.2.2, se define arco y espacio conexo por arcos. Los siguientes resultados se pueden encontrar en [13] o en [5].

Observemos que un arco es, en particular, un camino por lo que un espacio conexo por arcos es conexo por caminos y por tanto, conexo.

Definición 5.6.2. Un conjunto numerable de arcos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **cadena** si el extremo de A_n coincide con el origen de A_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 5.6.3. Sean X un espacio topológico conexo y $x \in X$. Se dice que X es un **punto de corte** del espacio X si $X\backslash\{x\}$ no es conexo.

Para demostrar que un continuo de Peano es conexo por arcos enunciamos un resultado que dice que un espacio métrico que contiene exactamente dos puntos que no son de corte es homeomorfo a un arco. La prueba del resultado se puede encontrar en [11, p. 43] o en [13, p. 206].

Teorema 5.6.4. *Si X es un espacio métrico compacto y conexo con exactamente dos puntos que no son de corte, entonces X es homeomorfo a I.*

Definición 5.6.5. Sean X un espacio métrico y $x, y \in X$. Una **cadena simple** conectando los elementos x e y es una sucesión $U_1, ..., U_n$ de abiertos en X tal que $x \in U_1$, $y \in U_n$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$.

Lema 5.6.6. *Sean X un espacio métrico conexo y $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X. Dados dos elemenos $a, b \in X$ existe una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$ que conecta a a y a b.*

Demostración. Sea Z el conjunto de los elementos de X conectados a a por una cadena simple de elementos de $\mathcal{U}$. El conjunto Z es abierto ya que si $x \in Z$, entonces existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ con $x \in U$ y como todos los elementos de U se conectan con x por una cadena simple, entonces $U \subseteq Z$.

Veamos que Z es cerrado. Sea $z \in \overline{Z}$. Como $z \in X$, existe $U_j \in \mathcal{U}$ con $z \in U_j$ y como U_j es abierto, se tiene que $U_j \cap Z \neq \emptyset$. Sea $y \in U_j \cap Z$. Como $y \in Z$, los elementos a e y están conectados por una cadena simple $U_1, .., U_n$ formada por elementos de $\mathcal{U}$. Si $z \in U_k$ para algún $k \in \{1, ...n\}$, entonces tomando $k_0 = \text{mín}\{i \in \{1, 2, ...k\} : z \in U_i\}$, se tiene que $U_1, ..., U_{k0}$ es una cadena simple que conecta a y z.

Si $z \notin U_k$ para ningún $k \in \{1, ..., n\}$, entonces como $y \in U_j \cap Z$, existe U_l con $l \in \{1, ..., n\}$ tal que $U_l \cap U_j \neq \emptyset$. Tomando l el menor valor que cumple que $U_l \cap U_j \neq \emptyset$, tenemos que $U_1, ..., U_l, U_j$ es una cadena simple que conecta a con z, por lo que $z \in Z$.

Luego Z es un conjunto abierto y cerrado y no vacío en un conexo X, entonces $Z = X$. $\square$

Teorema 5.6.7. *Sea X un continuo de Peano. Entonces X es conexo por arcos.*

Demostración. Sean $a, b \in X$. Como X es un espacio métrico, podemos considerar el recubrimiento de X dado por $\{B(x, \frac{1}{2}) : x \in X\}$. Podría suceder que alguna de las bolas $B(x, \frac{1}{2})$ no fuese conexa, entonces consideramos la componente conexa V_x de x en $B(x, \frac{1}{2})$ para cada x que por el Teorema 5.2.3 es abierta por ser X es localmente conexo. Por el Lema 5.6.6 aplicado al recubrimiento $\{V_x\}_{x\in X}$, sabemos que existe una cadena simple uniendo a y b. Denotemos por $U_{11}, U_{12}, ..., U_{1n}$ a los elementos del recubrimiento que forman la cadena simple. Observemos que por la Proposición 2.0.36, el abierto $U_1 = U_{11} \cup U_{12} \cup ... \cup U_{1n}$ es conexo.

Como por la Proposición 5.1.2, X es un espacio regular, para cada $p \in U_{1i}$, existe un abierto V_p^1 con $p \in V_p^1 \subseteq \overline{V_p^1} \subseteq U_{1i}$ por la Proposición 5.1.3. Además, podemos suponer que V_p^1 es conexo por ser X un espacio localmente conexo. También se puede pedir que V_p^1 tenga diámetro menor que $\frac{1}{2}$ porque en caso contrario, tendríamos que $p \in B(p, \frac{1}{4}) \subseteq V_p^1$ y podemos sustituir V_p^1 por esta bola ya que cumpliría todas las propiedades.

Si tenemos un punto $p \in U_{1i} \cap U_{1i+1}$, el abierto V_p^1 anterior se puede elegir de forma que $p \in V_p^1 \subseteq \overline{V_p^1} \subseteq U_{1i} \cap U_{1i+1}$. Haciendo esto para cada $i \in \{1, ..., n\}$, obtenemos un recubrimiento $\{V_p^1\}_{p\in U_1}$ de U_1 y de nuevo podemos aplicar el Lema 5.6.6 para cada par de puntos de U_1. Tomemos $x_i \in U_{1i} \cap U_{1i+1}$ con $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, y denotemos $x_0 = a$ y $x_n = b$. Entonces podemos obtener una cadena simple formada por conjuntos V_p^1 uniendo x_i y x_{i+1} para cada $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Para obtener una cadena simple que una a con b hay que asegurarse de que se cumpla la condición sobre las intersecciones de términos consecutivos (ver Definición 5.6.2). Por ello, se deben tomar todos los elementos de la cadena uniendo a con x_1 hasta el primer abierto U que interseque algún elemento de la cadena uniendo x_1 con x_2, omitiendo el resto de elementos de la primera cadena. Esto se debe repetir con cada una de las cadenas. Esto resulta en una cadena $U_{21}, ..., U_{2n_2}$ de abiertos conexos de diámetro menor que $\frac{1}{2}$, cumpliendo que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe un $j \in \{1, ..., n_1\}$, tal que $\overline{U_{2j}} \subseteq U_{1i}$.

Repitiendo este proceso n veces, se obtiene una cadena simple $U_{n,1}, ..., U_{n,n_n}$ formada por abiertos de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$ cuyas clausuras están contenidas en los abiertos de la cadena simple anterior.

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $C_n = \bigcup_{m=1}^{n_n} \overline{U}_{nn_n}$ Cada C_n es unión finita de conjuntos compactos por lo que es compacto. Entonces, por 2.0.40, el conjunto $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es compacto.

Como $U_{ni-1} \cap U_{ni} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{2, ...n_n\}$, por la Proposición 2.0.36, cada C_n es conexo. Si C no fuese conexo, existirian A y B cerrados disjuntos tal que $C = A \cup B$. Como X es un espacio métrico, por el Lema 3.2.7 X es normal. Luego existen U y V abiertos disjuntos que contienen a A y a B respectivamente. Luego $C \subseteq U \cup V$. Como $C_n \subseteq C_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $C_m \subseteq U \cup V$ para todo $n > m$. Luego $C_m = (C_m \cap U) \cup (C_m \cap V)$ contradiciendo que C_m es conexo.

Luego el conjunto $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ es un espacio métrico compacto y conexo que contiene a a y a b. Veamos que $C\backslash\{a, b\}$ es conexo. Sea $x \in C\backslash\{a, b\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existen como mucho dos abiertos de la cadena $U_{n1}, ..., U_{nn_n}$ que contienen a x. Si $x \in U_{nj} \cap U_{nj+1}$, entonces tomamos los siguientes conjuntos:

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{j-1} U_{nm} \qquad B_n = \bigcup_{m=j+2}^{n_n} U_{nm}$$

Si x está contenido en un único U_{nj}, tomamos los conjuntos

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{j-1} U_{nm} \qquad B_n = \bigcup_{m=j+1}^{n_n} U_{nm}$$

En cualquiera de los dos casos,

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap C) \qquad B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap C)$$

son abiertos disjuntos y no vacíos en al topológía de subespacio de C y además $C\backslash\{x\} = A \cup B$ por lo que x es un punto de corte de C y por tanto por el Teorema 5.6.4, el conjunto C es homeomorfo a un arco, y concluimos que X es conexo por arcos. □

5.7. Conexión, compacidad y la propiedad del punto fijo.

En está sección, relacionaremos las propiedades topológicas vistas a lo largo de este capítulo, con la p.p.f. y veremos algúnos ejemplos.

A continuación, introducimos el Lema 5.7.1 el cual nos da una propiedad fundamental para la demostración de los resultados posteriores. Para la demostración seguiremos la referencia [4].

Lema 5.7.1. *Si X es un espacio métrico conexo, localmente compacto y localmente conexo que no es compacto, entonces su compactificación por un punto es un continuo de Peano.*

Demostración. Como X es un espacio Hausdorff y localmente compacto que no es compacto, por el Teorema 5.3.7, admite una compactificación por un punto $X^* = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$.

Como X es conexo y $\overline{X} = X^*$, por la Proposición 2.0.34 el espacio X^* también es conexo y por el Teorema 5.3.7, X^* es compacto.

Como X es un espacio métrico conexo y localmente compacto, entonces por el Corolario 5.4.6, el espacio X es separable y por el Teorema 5.5.4, es de Lindelöf.

Como X es Hausdorff y localmente compacto, dado $x \in X$ existe un entorno U_x de x con $\overline{U_x}$ compacto. Luego $\{U_x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento abierto de X y como X es de Lindelöf, podemos tomar un subrecubrimiento numerable de $\{U_x\}_{x\in X}$ que denotaremos por $\{O_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con cada $\overline{O_i}$ compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $M_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{O_i}$ que es un conjunto compacto por ser una unión finita de conjuntos compactos. Entonces $(X\backslash M_n) \cup \{p\}$ es abierto en X^*. Como $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$, dado un entorno V de p, existe un abierto W con $p \in W \subseteq V$. El conjunto $X\backslash W$ es compacto en X con $X\backslash W \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ con $(X\backslash M_m) \cup \{p\} \subseteq U \subseteq V$. Entonces, tenemos que $\{(X\backslash M_n) \cup \{p\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable de entornos abiertos de p. Como X es separable, por el teorema 5.5.4 también cumple el segundo axioma de numerabilidad y por tanto tiene una base numerable $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \cup \{(X\backslash M_n) \cup \{p\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable para X^* y como X^* es regular, X^* es un espacio metrizable como consecuencia del Teorema de metrización de Uryshon (Teorema 5.5.5).

Queda ver que X^* es localmente conexo en p. Sea U un abierto en X^* con $p \in U$. El conjunto $M = X^*\backslash U$ es compacto en X. Como X es localmente compacto, para cada $x \in M$ existe un abierto V_x con $\overline{V_x}$ compacto, luego $\{V_x\}_{x\in M}$ es un recubrimiento abierto de M. Como M es compacto, podemos tomar un subrecubrimiento finito de forma que $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Tomando $D = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$, como es una unión finita, se da $\overline{D} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{x_i}}$, por lo que $\overline{D}$ es compacto y $M \subseteq \overline{D}$.

Aplicando el Lema 5.2.7, solo un número finito de componentes conexas de $X \backslash M$ interseca a $X \backslash \overline{D}$, las denotamos por $\{E_i\}_{i \in I}$. Sea $\{E_j\}_{j \in J} \subseteq \{E_i\}_{i \in I}$ tal que $Cl_X(E_j)$ no es compacto y tomamos $R = \bigcup_{j \in J} E_j$. El conjunto R es no vacío ya que sino, como $X \backslash \overline{D} \subseteq X \backslash M$, tendríamos que $X = \overline{D} \cup \left(\bigcup_{i \in I \backslash J} Cl_X(E_i) \right)$ sería compacto por ser unión finita de conjuntos compactos.

Veamos que $Cl_{X^*}(R)$ es conexo. Para $j \in J$ el conjunto $Cl_{X^*}(E_j)$ es compacto en X^* por ser un conjunto cerrado contenido en un compacto, pero $Cl_X(E_j)$ no es compacto en X y por tanto tampoco lo es en X^*. Como $Cl_X(E_j) = X \cap Cl_{X^*}(E_j)$, se tiene que $Cl_{X^*}(E_j) = Cl_X(E_j) \cup \{p\}$. Luego $Cl_{X^*}(R) = Cl_{X^*} \left(\bigcup_{j \in J} E_j \right)$. Al ser una unión finita, se tiene que $Cl_{X^*}(R) = \bigcup_{j \in J} Cl_{X^*}(E_j)$, la cual es una unión de conjuntos conexos con $p \in Cl_{X^*}(E_j)$ para todo $j \in J$, por lo que por la proposición 2.0.36(1), se tiene que $Cl_{X^*}(R)$ es conexo.

Veamos que $Cl_{X^*}(R)$ es entorno de p en X^*. El conjunto $K = \overline{D} \cup \left(\bigcup_{i \in I \backslash J} Cl_X(E_i) \right)$ es un conjunto compacto en X por ser unión finita de conjuntos compactos. Luego, $\{p\} \cup (X \backslash K)$ es un conjunto abierto en X^*. Como $(X \backslash K) \subseteq \bigcup_{j \in J} Cl_{X^*}(E_j)$, entonces $p \in \{p\} \cup (X \backslash K) \subseteq \bigcup_{j \in J} Cl_{X^*}(E_j) = Cl_{X^*}(R)$ por lo que $Cl_{X^*}(R)$ es un entorno conexo de p con $p \in Cl_{X^*}(R) \subseteq U$, y concluimos que X^* es localmente conexo en p y por tanto, localmente conexo. $\square$

Ahora, para poder enunciar el Teorema 5.7.3, introducimos la noción de localmente finito.

Definición 5.7.2. Una colección $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X es **localmente finito** si y solo si cada $x \in X$ tiene un entorno que interseca a un número finito de conjuntos $U_i \in \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

El siguiente teorema, demuestra que si un espacio métrico verifica la p.p.f., entonces este espacio verifica una propiedad que verifican los espacios topológicos compactos.

Teorema 5.7.3. *Sea X un espacio métrico con la p.p.f. Entonces toda cadena de arcos localmente finita en X es finita.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un cadena de arcos infinita y localmente finita en X y sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Dado que $A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 2$ y cada A_n es conexo, por la Proposición 2.0.36, se tiene que A es conexo.

Como X es Hausdorff, se tiene que $A \subseteq X$ es Hausdorff con la topología de subespacio, por lo que para ver si es localmente compacto, basta ver que cada elemento x en A tiene un entorno compacto en A. Sean $x \in A$ y U un entorno de x en X que solo interseca a un número finito de arcos de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Luego existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$U \cap A = U \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i)$$

Como cada arco es compacto y $Cl_{A_i}(U \cap A_i)$ es cerrado en A_i para todo $i \in I$, los conjuntos $Cl_{A_i}(U \cap A_i)$ son compactos y por tanto $\bigcup_{i \in I} Cl_{A_i}(U \cap A_i)$ es un entorno compacto de x en A por ser unión finita de compactos.

Veamos que A es localmente conexo. Sean $x \in A$ y U un entorno de x en A. Luego existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ con $B(x, \tilde{\varepsilon}) \cap A \subseteq U$. Si $x \in A_k$ para un único $k \in \mathbb{N}$, como A es una cadena localmente finita, podemos elegir un $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0)$ solo interseca a A_k. Tomando $\varepsilon = \min\{\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_0\}$, el conjunto $A_k \cap B(x, \varepsilon)$ es un entorno conexo de x en A con $x \in A_k \cap B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Si tenemos que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ para un conjunto finito de $I \subseteq \mathbb{N}$, dado un entorno U de X en A, existe $\hat{\varepsilon} > 0$ tal que $B(x, \hat{\varepsilon}) \cap A \subseteq U$. Como A es una cadena localmente finita, existe un entorno abierto $B(x, \varepsilon_1)$ de x en X que interseca solo a A_i para todo $i \in I$. Tomando $\varepsilon = \min\{\hat{\varepsilon}, \varepsilon_1\}$, tenemos que

$$B(x, \varepsilon) \cap A = B(x, \varepsilon) \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} ((B(x, \varepsilon) \cap A_i)$$

Como cada $B(x, \varepsilon) \cap A_i$ es conexo y $x \in B(x, \varepsilon) \cap A_i$ para todo $i \in I$, por la proposición 2.0.36 (1), se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A$ es conexo con $x \in B(x, \varepsilon) \cap A \subseteq U$, luego A es localmente conexo.

Como X es un espacio métrico, si $A \subseteq X$ fuese compacto, sería cerrado y acotado, luego existiría $r > 0$ tal que $A \subseteq B(x, r)$ con $x \in X$. Luego existiría un entorno para un elemento de X que interseca a inifinitos elementos de A y por tanto, A no sería localmente finita, por lo que A no es compacto.

Por el Lema 5.7.1, la compactificación por un punto $A^* = A \cup \{p\}$ es un continuo de Peano, entonces, por 5.6.7, tenemos que A^* es conexo por arcos. Existe un arco L con extremo p contenido en A^*. Por el Corolario 3.2.11, como $L \backslash X = \{p\}$, el espacio X no puede tener la p.p.f. □

Observemos como dados un espacio topológico X compacto y una cadena de arcos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ infinita y localmente finita, si $x \in X$ existe un entorno abierto U_x de x que solo interseca a un número finito de arcos. Tomando un recubrimiento abierto $\{U_x\}_{x \in X}$ de X, como X es compacto, existe un número finito $x_1, ..., x_n \in X$ de forma que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Como cada U_{x_i} interseca a un número finito de arcos, y el subrecubrimiento es finito, la cadena de arcos tiene que ser finita.

El siguiente resultado, nos muestra como un espacio topológico con la p.p.f., es conexo.

Lema 5.7.4. *([8]) Si un espacio topológico X tiene la p.p.f, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo, entonces existen dos abiertos disjuntos no vacíos A y B en X con $X = A \cup B$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ y consideramos la aplicación $f : X \to X$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in B \\ b & \text{si } x \in A \end{cases}$$

La aplicación f es continua, ya que dado un abierto $U \subseteq X$, si $a \in U$ y $b \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = B$. Analogamente, si $b \in U$ y $a \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = A$. Si $a, b \in U$, entonces $f^{-1}(U) = X$ y si $a, b \notin U$, se tiene que $f^{-1}(U) = \emptyset$. En cualquier caso, la preimagen es un abierto en X por lo que f es una aplicación continua sin punto fijo, lo que contradice que X tenga la p.p.f. □

Una vez visto que un espacio con la p.p.f. tiene que ser conexo, veamos bajo que condiciones un espacio con la p.p.f. es compacto.

Teorema 5.7.5. *Si X es un espacio métrico localmente conexo y localmente compacto que tiene la p.p.f, entonces X es compacto.*

Demostración. Supongamos que X no es compacto. Por el Lema anterior, como X tiene la p.p.f, es conexo y por tanto por el Lema 5.7.1, la compactificación X^* es un continuo de Peano. Por el Teorema 5.6.7, X^* es conexo por arcos. Podemos considerar un arco L en X^* con extremo p. Tenemos que X es un espacio métrico que verifica que $L \backslash X = \{p\}$ y entonces, por el Corolario 3.2.11, el espacio X no admite un punto fijo. □

Observemos que si X no tiene la p.p.f. ser localmente conexo y localmente compacto no implica que X sea compacto. Por ejemplo, tomando el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ que es localmente conexo y localmente compacto, no es compacto.

El siguiente es un ejemplo que nos muestra un espacio métrico X que tiene la p.p.f. pero su producto cartesiano, el espacio $X \times X$, no la tiene.

Ejemplo 5.7.6. ([4]) Consideramos la siguiente aplicación $f : [0,1] \to [0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{1-x}\right), & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y consideramos el siguiente espacio con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$:

$$X = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}$$

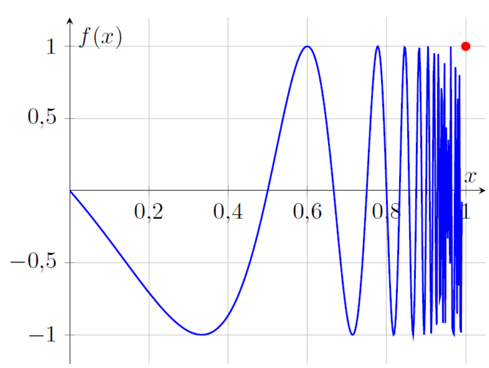

Figura 5.1: Conjunto X

Veamos que el espacio X tiene la p.p.f..

Supongamos que $g : X \to X$ es una aplicación continua sin punto fijo y consideramos $\pi_1 : X \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada. Los conjuntos

$$S_1 = \{x \in I : \pi_1(g(x, f(x))) < x\} = \{x \in X : \pi_1(g(x, f(x)) - x < 0\} = \psi^{-1}((-\infty, 0))$$
$$S_2 = \{x \in I : \pi_1(g(x, f(x))) > x\} = \{x \in X : \pi_1(g(x, f(x)) - x > 0\} = \psi^{-1}((0, \infty))$$

Con $\psi(x) = \pi_1(g(x, f(x)) - x$. Los conjuntos S_1 y S_2 son abiertos disjuntos no vacíos. Como g no tiene puntos fijos en X, entonces $\pi_1(g(x, f(x)) \neq x$ para todo $x \in I$. Por tanto, podríamos escribir $I = S_1 \cup S_2$, lo cual no puede ser porque I es conexo, luego X tiene la p.p.f..

Veamos ahora que el conjunto $X \times X$ no tiene la p.p.f..

Tenemos que $X \times X \subseteq \mathbb{R}^4$, pero $X \times X$ es homeomorfo al siguiente conjunto C en $\mathbb{R}^3$:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1,\, y = f(x) + f(z)\}$$

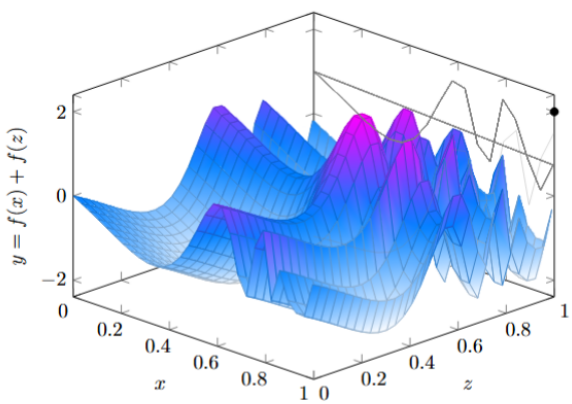

Figura 5.2: Conjunto C

Veamos que la aplicación $h : X \times X \to C$ tal que $h(a, f(a), b, f(b)) = (a, f(a) + f(b), b)$ es un homeomorfismo.

En primer lugar, veamos que h es biyectiva. Si $h(a_1, f(a_1), b_1, f(b_1)) = h(a_2, f(b_2), b_2, f(a_2))$, entonces $(a_1, f(a_1) + f(b_1), b_1) = (a_2, f(a_2) + f(b_2), b_2)$. Luego $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$ y por tanto, h es inyectiva. Además, dado $(x, y, z) \in C$, como $x, z \in [0, 1]$ e $y = f(x) + f(z)$, se tiene que $h(x, f(x), z, f(z)) = (x, y, z)$ por lo que es sobreyectiva, y por tanto, biyectiva.

La aplicación h es continua ya que dada una sucesión $(a_n, f(a_n), b_n, f(b_n))$ que converge a $(a, f(a), b, f(b))$, tenemos que converge coordenada a coordenada, por lo que $h((a_n, f(a_n), b_n, f(b_n),)) = (a_n, f(a_n) + f(b_n), b_n)$ converge a $(a, f(a) + f(b), b)$, luego h es continua por el Teorema 2.0.29.

La inversa de h es la aplicación definida por $h^{-1} : C \to X \times X$ tal que $h^{-1}((x, y, z)) = (x, f(x), z, f(z))$. Dado $(x, y, z) \in C$

$$h \circ h^{-1}((x, y, z)) = h((x, f(x), z, f(z)) = (x, f(x) + f(z), z) = (x, y, z)$$

Y si $(x, f(x), z, f(z)) \in X \times X$

$$h^{-1} \circ h((x, f(x), z, f(z))) = h^{-1}((x, f(x) + f(z), z)) = (x, f(x), z, f(z))$$

Vemos que h^{-1} es continua. Dada una sucesión $(a_n, f(a_n) + f(b_n), b_n)$ que converge a $(a, f(a) + f(b), b)$, entonces converge coordenada a coordenada. Tenemos que $f(a_n) + f(b_n)$ converge a $f(a) + f(b)$. Si f es continua en a y en b, entonces $f(a_n)$ y $f(b_n)$ convergen a $f(a)$ y a $f(b)$ respectivamente. Si f no es continua en a, es decir, si $a = 1$ pero si que es continua en b, entonces $f(b_n)$ converge a b, por lo que $f(a_n)$ tiene que converger a $f(a)$ y lo mismo pasa en el caso contrario.

En el caso en el que $a = b = 1$, tenemos que $f(a) + f(b) = 2$, y como $f(a_n), f(b_n) \leq 1$, necesariamente se tiene que $f(a_n)$ y $f(b_n)$ convergen a $1 = f(a) = f(b)$. Luego h^{-1} es continua y en consecuencia los espacios $X \times X$ y C son homeomorfos.

Contruyamos una cadena de arcos infinita y localmente finita en C.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n es impar consideramos el arco

$$S_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{n-1}{n+1} \leq x \leq \frac{n+1}{n+3},\ y = \sin\frac{\pi}{1-x},\ z = \frac{n-1}{n+1}\right\}$$

que une $\left(\frac{n-1}{n+1}, 0, \frac{n-1}{n+1}\right)$ con $\left(\frac{n+1}{n+3}, 0, \frac{n-1}{n+1}\right)$.

Si n es par consideramos el arco

$$S_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{n}{n+2},\ y = \sin\frac{\pi}{1-z},\ \frac{n-2}{n} \leq x \leq \frac{n}{n+2}\right\}$$

que une $\left(\frac{n}{n+1}, 0, \frac{n-2}{n}\right)$, con $\left(\frac{n}{n+2}, 0, \frac{n}{n+2}\right)$.

De esta forma, el primer arco empieza en el origen y es el primer semiperiodo del seno en el plano xy. El segundo arco empieza ahí y sigue también la curva del seno pero en este caso, paralela el plano xz. El tercero, dibuja parte del seno también, paralela al plano xy. Así, los arcos se aproximan a la vertical $\{(x, y, z) : x = 1, -1 \leq y \leq 1, z = 1\}$ que no pertenece a C.

Veamos que la cadena $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita.

Observemos primero que si tomamos $0 < \varepsilon < 1$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $S_n \subseteq W_\varepsilon = \{(x, y, z) \in x > 1 - \varepsilon, z > 1 - \varepsilon\}$ para todo $n > N_\varepsilon$. Tomemos $(x_0, y_0, z_0) \in C$

- Si $x_0 \neq 1$ ó $z_0 \neq 1$, existe $\varepsilon < 1$ tal que $(x_0, y_0, z_0) \notin \overline{W}_\varepsilon$. Entonces $C\backslash\overline{W}_\varepsilon$ es un entorno de (x_0, y_0, z_0) que interseca a N_ε arcos de la cadena $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $x_0 = z_0 = 1$, entonces se tiene que $y_0 = 2$. Si tomamos el abierto $U = \{(x, y, z) \in C : y > 1\}$ tenemos que $C \cap S_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el Teorema 5.7.3, concluimos que $X \times X$ no tiene la p.p.f.

El siguiente ejemplo, es un espacio métrico separable y localmente compacto que no es localmente conexo ni compacto.

Ejemplo 5.7.7. ([4]) Consideramos el subespacio del plano $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ con $I_0 = [0, 1] \times \{0\}$ el intervalo unidad en el eje x e $I_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ para $n \geq 1$. Supongamos que existe una aplicación continua $f : X \to X$ que no tiene punto fijo. Sean $f_0 = f|_{I_0} : I_0 \to X$ y $\pi_1 : X \to I_0$ la proyección sobre la primera coordenada. Identificando I_0 con I podemos ver que $h = \pi_1 \circ f_0 : I \to I$ es una aplicación continua en I.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "h"] & I_0 \arrow[r, "f_0"] & X \arrow[r, "\pi_1"] & I \\
t \arrow[r, mapsto] & (t,0) \arrow[r, mapsto] & f(t,0) \arrow[r, mapsto] & \pi_1(f(t,0))
\end{tikzcd}$$

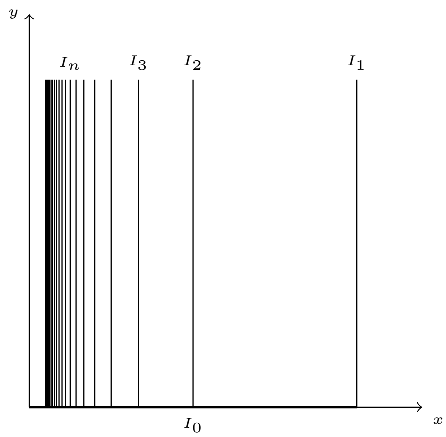

Figura 5.3: Espacio X

Por lo que h tiene que tener al menos un punto fijo $(p, 0)$. Luego tenemos que $h(p) = \pi_1(f(p, 0)) = p$. Como f no tiene puntos fijos, existe $k \in \mathbb{N}$ con $p = 1/k$ y $f(1/k, 0) = (1/k, y)$ con $y \in (0, 1]$. Sean el conjunto $S = \{y \in I : f(1/k, y) = (1/k, z), z > y\}$. Queremos ver que $(\frac{1}{k}, t)$ con $t = \sup S$ es un punto fijo de f.

Como $t \in \overline{S}$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en S tal que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a t. Luego, la sucesión $\{(\frac{1}{k}, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(\frac{1}{k}, t)$. Como f es continua, la sucesión $\{f(\frac{1}{k}, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\frac{1}{k}, t)$. Teniendo en cuenta que $f(\frac{1}{k}, y_n) = (\frac{1}{k}, z_n)$ con $z_n > y_n$, obtenemos que $f(\frac{1}{k}, t) = (\frac{1}{k}, z)$. Queremos ver que $z = t$.

Si $z < t$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z < y_n < t$ para todo $n \geq n_0$ y como $y_n < z_n$, esto contradice que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja a z. Luego $z \geq t$.

Si $z > t$, entonces $t \in S$. Además, podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $t < z - \varepsilon < z$ y $B\left((\frac{1}{k}, z), \varepsilon\right) \cap X = B\left((\frac{1}{k}, z), \varepsilon\right) \cap I_k$ (Observemos que $t \geq 0$, luego es posible hacer esto). Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B\left((\frac{1}{k}, t), \delta\right)\right) \subseteq B\left((\frac{1}{k}, z), \varepsilon\right)$. Podemos tomar δ de forma que $t + \delta < z - \varepsilon$. Si tomamos $(\frac{1}{k}, t_1)$ con $t < t_1 < t + \delta$, entonces $f(\frac{1}{k}, t_1) = (\frac{1}{k}, \tilde{z})$ con $\tilde{z} > z - \varepsilon > t + \delta$. Esto implica que $t_1 \in S$ en contradicción con $t = \sup S$.

Luego se tiene que $t = z$ y por tanto, $(\frac{1}{k}, t)$ es un punto fijo de f.

En el siguiente ejemplo, vemos como la p.p.f. no se tiene porque conservar por clausuras. Veremos un espacio métrico que no tiene la p.p.f. pero que si contiene un subespacio denso que la posee.

Ejemplo 5.7.8. Consideramos un subconjunto X de $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$. Sean $A = \partial([0, 4] \times [-2, 2])$ y $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\, y = \sin \frac{1}{x}\right\}$. Tomamos $X = A \cup B$.

Vamos a construir una aplicación $f : X \to X$ que no tenga ningún punto fijo. Consideramos primero la aplicación que proyecta B sobre el segmento $\{0\} \times [-2, 2]$ y deja fijos los puntos de A. Esta aplicación está dada por

$$g(x, y) = \begin{cases} (0, y), & \text{si } (x, y) \in B \\ (x, y), & \text{si } (x, y) \in A \end{cases}$$

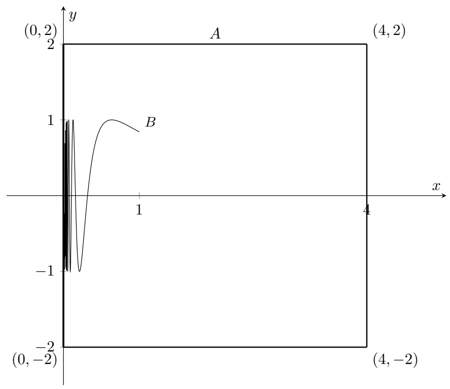

Figura 5.4: Espacio X

Sea $h : A \to A$ la rotación de 90º del conjunto A que podemos escribir como

$$h(x,y)\begin{cases}(y+2,2), & \text{si } (x,y)\in A,\ x=0\\ (4,2-x), & \text{si } (x,y)\in A,\ y=2\\ (x+2,-2), & \text{si } (x,y)\in A,\ x=4\\ (0,-x), & \text{si } (x,y)\in A,\ y=-2.\end{cases}$$

Consideramos la aplicación continua $f = h \circ g : X \to X$ que no tiene puntos fijos.

Sea $A' = A\backslash(\{0\} \times (-1, 1))$ y tomamos el conjunto $Y = A' \cup B$. Observemos que $\overline{Y} = X$. Veamos que Y tiene la propiedad del punto fijo aunque X no la tiene, y por lo tanto, la p.p.f. no se conserva al tomar adherencias.

Supongamos que existe una aplicación continua $\varphi : Y \to Y$ que no tiene un punto fijo. Entonces $\varphi(A') \cap B \neq \emptyset$ porque en caso constrario, podemos considerar $\varphi|_{A'} : A' \to A'$ y como A' es homeomorofo al intervalo I, entonces $\varphi|_{A'}$ tendría un punto fijo y por lo tanto φ también tendría un punto fijo.

Como A' es compacto y conexo, la condición $\varphi(A') \cap B \neq \emptyset$ implica que $\varphi(A') \subseteq B$.

Tomamos $x = (0, 1) \in A'$. Para todo $\delta > 0$, se tiene que $B(x, \delta) \cap B \neq \emptyset$. Como $\varphi(x) \in B$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $B(\varphi(x), \varepsilon) \cap Y \subseteq B$. Como φ es continua, se tiene que dar que existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(B(x, \delta)) \cap Y \subseteq B(\varphi(x), \varepsilon) \cap Y \subseteq B$, lo que implica que existe un elemento $p \in B$ con $\varphi(p) \in B$, entonces $\varphi(B) \subseteq B$ por ser B conexo. Entonces tendríamos que $\varphi(B \cup \{(0, 1)\} \subseteq B$ y podremos considerar la aplicación $\varphi|_{B\cup\{(0,1)\}} : B \cup \{(0, 1)\} \to B \cup \{(0, 1)\}$. El espacio $B \cup \{(0, 1)\}$ es homeomorfo al espacio del ejemplo 5.7.6 y por tanto, debe de tener algún punto fijo.

Bibliografía

[1] S. A. Antonyan. *Curso de Topología*. https://academicos.fciencias.unam.mx/wp-content/uploads/sites/94/2016/08/Notas-Topologia.pdf. Apuntes de la Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. 2016.

[2] R. H. Bing. «The Elusive Fixed Point Property». En: *The American Mathematical Monthly* 76.2 (1969), págs. 119-132. URL: https://www.jstor.org/stable/2317258.

[3] K. Borsuk. «Sur les rétractes». En: *Fundamenta Mathematicae* 17.1 (1931), págs. 152-170. DOI: 10.4064/fm-17-1-152-170.

[4] E. H. Connell. «Properties of fixed point spaces». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 10.6 (1959), págs. 974-979. DOI: 10.1090/S0002-9939-1959-0110093-3. URL: https://www.ams.org/journals/proc/1959-010-06/S0002-9939-1959-0110093-3/S0002-9939-1959-0110093-3.pdf.

[5] J.G. Hocking y G.S. Young. *Topology*. Addison-Wesley, 1961, págs. 110-139.

[6] T. K. Hu. «On a Fixed-Point Theorem for Metric Spaces». En: *The American Mathematical Monthly* 74.4 (1967), págs. 436-437. URL: https://www.jstor.org/stable/2314587.

[7] J. L. Kelley. *General Topology*. New York, Toronto, y London: D. Van Nostrand Company, Inc., 1955. ISBN: 0442043023.

[8] V. L. Klee. «Some Topological Properties of Convex Sets». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 78.1 (1955), págs. 30-45. DOI: 10.1090/S0002-9947-1955-0069388-5. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1955-0069388-5.

[9] J. R. Munkres. *Topology*. 2nd. Prentice Hall, 2000.

[10] M. H. A. Newman. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Fielden Professor of Mathematics in the University of Manchester. Cambridge: Cambridge University Press, 1964.

[11] A. M. Pastor. *Espacios de Peano*. Repositorio Universidad de Cantabria. Último acceso: 2025-05-12. 2025. URL: https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/36170.

[12] Topología I. *Intersección de conjuntos compactos*. enero de 2012. URL: https://topologia-i.blogspot.com/2012/01/interseccion-de-conjuntos-compactos.html.

[13] S. Willard. *General Topology*. Mineola, NY: Dover Publications, 1970. ISBN: 978-0486434797.