

**Facultad
de
Ciencias**

**Números de caras de politopos:
Teorema g y teorema de Hinman**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

**Autor: Bruno Araguás Calvo
Director: Francisco Santos Leal
Junio - 2025**

Resumen

Un politopo es el análogo en dimensión arbitraria de los poliedros en dimensión tres. Igual que para estos tenemos la famosa ecuación de Euler $c - a + v = 2$, para politopos de dimensión arbitraria hay restricciones a los posibles números de caras de diferentes dimensiones. Para politopos en general no se conoce el conjunto completo de restricciones, pero para politopos simpliciales sí; las da el llamado Teorema g .

En este trabajo introducimos los conceptos principales sobre números de caras de politopos, describimos los principales resultados que se conocen, y demostramos algunos de ellos, como son las Ecuaciones de Dehn-Sommerville y el Teorema de la Cota Superior. También demostraremos una cota inferior reciente debida a Hinman (2023), y que generaliza una conjetura de Bárány (1998).

Palabras clave: Politopos, caras, teorema g , h -vector

Abstract

A polytope is the analog in arbitrary dimension of polyhedra in three dimensions. Just as for those we have the famous Euler equation $c - a + v = 2$, for polytopes of arbitrary dimension there are restrictions on the possible numbers of faces in different dimensions. For general polytopes the complete set of restrictions is not known, but for simplicial polytopes it is; these are given by the so-called g -Theorem.

In this work we introduce the main concepts concerning face numbers of polytopes, describe the principal known results, and prove some of them, such as the Dehn–Sommerville Equations and the Upper Bound Theorem. We also prove a recent lower bound due to Hinman (2023), which generalizes a conjecture by Bárány (1998).

Keywords: Polytopes, faces, g theorem, h -vector

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento al profesor Francisco Santos, director de este Trabajo de Fin de Grado, por su paciencia, orientación y dedicación durante cada fase del trabajo.

Pero no hubiera llegado hasta aquí de no ser por la gente que me ha acompañado. Quisiera agradecer a mi familia todo el apoyo constante, por ser una gran inspiración y por todo el cariño que me han brindado durante estos años.

Y como no a “Póker”, por su apoyo incondicional durante estos 5 años, por hacer de estos años en Santander una etapa bonita y por tener siempre la excusa perfecta para dejar de estudiar e ir a la cafetería.

Índice general

Introducción	1
1. Teoría básica de politopos	3
1.1. Politopos, caras y f -vectores	3
1.2. Complejos simpliciales. Descascaramientos	7
1.3. Politopos cíclicos	12
2. f-vectores de politopos simpliciales	19
2.1. Las Ecuaciones de Dehn-Sommerville para f -vectores.	19
2.2. El h -vector	23
2.3. Las Ecuaciones de Dehn-Sommerville vía h -vectores	26
2.4. Demostración del Teorema de la Cota Superior	30
2.5. El Teorema g	36
3. La Conjetura de Bárány y el Teorema de Hinman	39
3.1. El Teorema de la cota inferior y el Teorema de Hinman	39
3.2. Resultados previos para el Teorema de Hinman	40
3.3. Demostración del Teorema de Hinman	43
Bibliografía	49

Introducción

En este documento exploraremos un concepto que, a primera vista, podría parecer complicado, pero que en el fondo es una extensión muy natural de las formas geométricas que conocemos: el politopo. Pensamos en los polígonos (como triángulos, cuadrados y pentágonos) y en los poliedros (como cubos, pirámides o dodecaedros). Un politopo es simplemente la misma idea de “figura con caras planas” pero en cualquier número de dimensiones. El objetivo de esta introducción es familiarizarte con la noción de politopo sin entrar en detalles excesivamente técnicos, mostrando ejemplos que ayuden a entender de dónde vienen las restricciones sobre cuántas caras pueden tener y cómo se relacionan entre sí.

Para comenzar, recordemos algo muy sencillo: en dos dimensiones tenemos los polígonos. Un cuadrado, por ejemplo, tiene 4 vértices (puntos) y 4 lados (segmentos). En tres dimensiones, un cubo tiene 8 vértices, 12 aristas (segmentos que unen vértices) y 6 caras (cuadrados). La célebre fórmula de Euler para poliedros, que dice que

$$V - A + C = 2,$$

donde V es el número de vértices, A el de aristas y C el de caras planas, nos muestra que esos tres números no pueden cambiar de forma independiente: si conocemos dos de ellos, el tercero queda fijado. Esa relación es válida para todos los poliedros convexos en tres dimensiones, ya sean regulares (como los sólidos platónicos) o más irregulares (como un prisma con base pentagonal).

Ahora bien, ¿qué sucede si subimos al mundo de las cuatro dimensiones? Ya no podemos imaginarlo con la misma facilidad, pero la idea es parecida. Pensemos en el cubo como “el envoltorio más pequeño” que contiene ocho vértices en el espacio tridimensional. Si en vez de ocho vértices colocamos puntos en el espacio de cuatro dimensiones y luego tomamos su *envoltura convexa*, obtendremos un politopo en cuatro dimensiones. En este caso, ese politopo tendrá vértices (caras de dimensión 0), aristas (caras de dimensión 1), “caras bidimensionales” (caras de dimensión 2 que son polígonos) y “celdas tridimensionales” (caras de dimensión 3, que son, a su vez, poliedros). Podemos pensar en él como un “sólido 4D” que, aunque no lo veamos directamente, se describe perfectamente al enumerar todas esas piezas de diferentes dimensiones.

En general, a un politopo de dimensión d le asociamos un “vector de caras” (llamado f -vector) que recoge cuántas caras de cada dimensión tiene: cuántos vértices (caras de dimensión 0), cuántas aristas (caras de dimensión 1), cuántas caras de dimensión 2, y así sucesivamente hasta las caras de dimensión $d-1$, que serían las “facetitas” del propio politopo. Para completar el recuento, a veces se añade la cara vacía (de dimensión -1) y el politopo entero (de dimensión d), pero esos casos se incluyen por convenio y no cambian la esencia de lo que estamos contando.

Al igual que la fórmula de Euler en $3D$, en dimensiones superiores existen relaciones entre los números del f -vector que hacen que no cualquier vector de números sea válido. Por ejemplo, en cuatro dimensiones aparece una versión extendida de la ecuación de Euler, y además surgen otros vínculos adicionales que complican un poco más la situación. Estas restricciones se conocen, de forma general, como las ecuaciones de Dehn–Sommerville. Sin entrar de momento en fórmulas, lo importante es entender que no basta con elegir a dedo cuántos vértices y cuántas aristas, etc. queremos; hay reglas que gobiernan cómo pueden alinearse esos números.

Un caso donde las condiciones se conocen de forma completa es el de los politopos simpliciales. Diremos que un politopo es simplicial cuando todas sus caras (de cualquier dimensión) son simples, es decir, los análogos de los triángulos y los tetraedros en cada dimensión. En dos dimensiones,

un triángulo es el único polígono en que cada par de vértices está conectado por una arista, y en tres dimensiones un tetraedro cumple lo mismo. En cuatro dimensiones, un símplice 4D sería un “hipertetraedro” con cinco vértices donde cada subconjunto de cuatro de ellos forma un tetraedro en la “cara” correspondiente. En un politopo simplicial, todo se puede descomponer en estas piezas triangulares elementales; por eso resulta más fácil describir las posibles combinaciones de caras que pueden aparecer.

Para los politopos simpliciales existe un teorema completo —conocido como el Teorema g que dice exactamente qué vectores de caras pueden venir de algún politopo simplicial y cuáles no. El enunciado de este resultado, aunque en su versión formal implica cierta terminología algebraica, puede entenderse como un equilibrio en la cantidad de de caras, de modo que cualquier recuento válido debe ajustarse a unas reglas muy concretas. Gracias a este teorema, quien desee construir un politopo simplicial con ciertas características puede saber de antemano si eso es posible o no, simplemente comprobando si el vector de caras respeta las restricciones indicadas.

Otro resultado clave en esta materia es el Teorema de la Cota Superior. Imaginemos que fijamos la cantidad de vértices y la dimensión en la que queremos trabajar (por ejemplo, 10 vértices en dimensión 4). Entre todos los politopos simpliciales que tengan exactamente 10 vértices, ¿cuál tendrá el mayor número posible de caras en cada dimensión? El Teorema de la Cota Superior nos asegura que la respuesta son los llamados politopos vecinales, que incluyen a los politopos cíclicos. Sin entrar en detalles, un politopo cíclico se construye tomando puntos bien escogidos sobre una curva especial (la curva de los momentos) y tomando su envoltura convexa. Esa elección hace que las piezas se “maximicen”: cada subconjunto de vértices forma una cara, siempre que su tamaño no exceda un límite que depende de la dimensión (la mitad de la dimensión redondeada por abajo). De esta forma, el politopo cíclico se convierte en el ejemplo que “gana” en el recuento, y nos sirve como medida para comparar los demás.

Este trabajo comienza presentando los conceptos esenciales para entender cómo se cuentan las caras de un politopo: qué significa una cara de dimensión k , cómo se define el f -vector y qué caracteriza a un politopo simplicial. A través de ejemplos en dimensiones 2, 3 y 4, se muestra de manera intuitiva cómo surgen las ecuaciones de Dehn–Sommerville a partir de la manera en que las caras comparten vértices y aristas, y por qué no basta con contar arbitrariamente.

A continuación, se explica sin entrar en detalles algebraicos la Cota Superior para politopos simpliciales, destacando el papel de los politopos cíclicos: al disponer los vértices sobre una curva especial, se maximiza el número de subconjuntos de vértices que forman caras, lo que convierte al politopo cíclico en el óptimo.

Por último, se mencionan brevemente algunas generalizaciones más allá de los politopos simpliciales: aunque aún no existe una descripción completa de todas las restricciones para politopos arbitrarios, hay resultados parciales (por ejemplo, cotas inferiores) que dan pistas sobre el recuento de caras en casos más generales. En conjunto, el lector obtendrá una visión clara de por qué el estudio de politopos combina simetría, convexidad y relaciones profundas entre número, forma y dimensión.

Capítulo 1

Teoría básica de politopos

En este primer capítulo, proporcionaremos el contexto necesario para comprender los conceptos fundamentales que sustentan el estudio del número de caras de un politopo en una dimensión d . Comenzaremos con la introducción de definiciones clave como las de politopo, cara de este, f -vector, etc. Las cuales son esenciales para abordar las propiedades geométricas y combinatorias que se exploran a lo largo del trabajo. Además, se presentarán algunos resultados teóricos importantes relacionadas con estas definiciones, que servirán de base para el desarrollo de los temas posteriores. Estos elementos preliminares son importantes para entender la estructura y la complejidad de los politopos, y establecerán las bases para los resultados más avanzados que se presentarán a continuación.

La referencia básica para este capítulo son los libros de Grünbaum y Ziegler [8, 22].

1.1. Politopos, caras y f -vectores

Comenzamos recordando las nociones de combinaciones lineales y afines.

Definición 1.1. *Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, diremos que x es combinación lineal de x_1, \dots, x_n si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.*

*Además, si se cumple $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, diremos que x es **combinación afín**.*

*Si también se cumple que $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$, diremos que x es **combinación convexa**.*

Definición 1.2. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que X es un **conjunto convexo** si $\forall a, b \in X, \forall \lambda \in (0, 1)$, se tiene que el segmento que une a a y b está contenido en X , esto es:*

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in X.$$

Proposición 1.3. *La intersección finita de conjuntos convexos es convexa.*

Demostración. Sea X_1, \dots, X_n una familia de conjuntos convexos, debemos probar que $\bigcap_{i=1}^n X_i$ es convexo. Para ello:

Tomo $x, y \in X_1 \cap \dots \cap X_n$ y $\alpha \in (0, 1)$. Quiero ver que $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X_1 \cap \dots \cap X_n$.

Por un lado como X_1 es convexo, se tiene: $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X_1$.

Por otro, como X_2 es convexo: $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X_2$, y así sucesivamente hasta llegar a X_n , que también es convexo, es decir: $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X_n$. Luego $\alpha x + (1 - \alpha) y$ pertenece a X_1 , como también pertenece a X_2 , así repetidamente hasta llegar a X_n al que también pertenece. Dado que pertenece a todos los X_i , pertenece a la intersección, es decir, $\alpha x + (1 - \alpha) y \in X_1 \cap \dots \cap X_n$. O lo que es lo mismo, hemos probado que $\bigcap_{i=1}^n X_i$ es convexo. \square

Observación 1.4. *La proposición 1.3 se puede extender a la intersección infinita de conjuntos convexos.*

Esta última proposición implica que para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ existe un mínimo subconjunto convexo que contiene a X llamado envoltura o envolvente convexa.

Definición 1.5. La **envolvente convexa** de un conjunto de puntos $\{v_1, \dots, v_n\}$ está descrita por:

$$\text{conv}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

La **envolvente convexa** de un conjunto de puntos $\{v_1, \dots, v_n\}$ que pertenecen a un conjunto X , es decir, $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq X$ viene descrita por:

$$\text{conv}(X) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : v_1, \dots, v_n \in X, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Un resultado relacionado con esta última definición es el presentado a continuación:

Proposición 1.6. Dado un $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que:

1. $\text{conv}(X)$ es convexo.
2. $X \subseteq \text{conv}(X)$.
3. Si Y es convexo y contiene a X entonces $\text{conv}(X) \subseteq Y$.

Demostración. Veamos cada uno de los tres apartados:

- 1): Sean $x, y \in \text{conv}(X)$ y sea $\lambda \in (0, 1)$. Queremos ver que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{conv}(X)$:

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n_1} x_{n_1} : x_1, \dots, x_{n_1} \in X, \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = 1.$$

$$y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_{n_2} y_{n_2} : y_1, \dots, y_{n_2} \in X, \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j = 1.$$

$\forall t \in [0, 1]$ sea $p = tx + (1 - t)y$, veamos que $p \in \text{conv}(X)$. Para ello:

$$\begin{aligned} p &= t(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n_1} x_{n_1}) + (1 - t)(\mu_1 y_1 + \dots + \mu_{n_2} y_{n_2}) = \\ &= t \left(\sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i x_i \right) + (1 - t) \left(\sum_{j=1}^{n_2} \mu_j y_j \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n_1} t \lambda_i x_i \right) + \left(\sum_{j=1}^{n_2} (1 - t) \mu_j y_j \right). \end{aligned}$$

Es decir, tenemos p escrito como combinación lineal de los x_i y y_j . Falta ver las condiciones de convexidad, es decir, que los coeficientes de la combinación son ≥ 0 y su suma es 1.

Por un lado, dado que $t, \lambda_i, \mu_j \in [0, 1]$, son ≥ 0 luego $t \lambda_i \geq 0$ y $(1 - t) \mu_j \geq 0$.

Ahora veo el sumatorio:

$$\sum_{i=1}^{n_1} t \lambda_i + \sum_{j=1}^{n_2} (1 - t) \mu_j = t \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i + (1 - t) \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j = t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 1 = 1.$$

Por lo tanto, p es combinación convexa de puntos de X , luego $p \in \text{conv}(X)$.

- 2) Sea $a \in X$. Para ver que $a \in \text{conv}(X)$, tomo todos los $\lambda_i = 0$ salvo el λ_a . Así tengo $\sum = 1 = \lambda_a$ y además $\lambda_i \geq 0$ Luego $a \in \text{conv}(X)$ y así queda demostrado que se da el contenido.

■ 3):

Si Y es convexo y contiene a X entonces $\text{conv}(X) \subseteq Y$.

Por hipótesis, dado que Y es convexo, tenemos:

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha \in (0, 1), \text{ entonces: } \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \subseteq Y.$$

También sabemos por hipótesis que todo elemento de X está en Y . Sea $a \in \text{conv}(X)$, es decir,

$$a = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

para un cierto n . Queremos ver que $a \in Y$ y que además se cumplen las condiciones de convexidad ($\sum \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$).

Lo probamos por inducción sobre n :

1. Para $n = 1$ (caso básico) $a = x_1 \in X \subseteq Y$.
2. Para $n = 2$, sea $a \in \text{conv}(X)$, $a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, entonces despejando λ_2 de las condiciones de a : ($\lambda_2 = 1 - \lambda_1$) obtenemos: $a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2$. Por ser Y convexo con $X \subseteq Y$, tenemos $a \in Y$.
3. Caso general, supongo cierto para n , y lo pruebo para $n+1$. Sea $a = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ con $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Veo $a \in Y$.
Llamo $\gamma = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Tenemos $\gamma \in [0, 1]$ y suponiendo $\gamma \neq 0$:

$$a = \gamma \left(\frac{\lambda_1}{\gamma} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\gamma} x_n \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Por definición de a , tenemos que $x_{n+1} \in Y$, también $(\frac{\lambda_1}{\gamma} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\gamma} x_n) \in Y$, así por hipótesis de inducción los λ_i/γ son ≥ 0 y su suma es 1.

Luego por el caso $n = 2$ tenemos que $a \in Y$. □

Este trabajo está dedicado a los politopos convexos en dimensión mayor o igual que 3, así es conveniente introducir la definición de politopo convexo.

Definición 1.7. Para d no negativo, $P \subseteq \mathbb{R}^d$ será un d -**politopo** si es la envolvente convexa de dimensión d para un número finito de puntos en algún espacio vectorial real.

Observación 1.8. En el trascurso de este trabajo, se usará el concepto de **politopo de dimensión d** y d -**politopo** de manera equivalente.

Ejemplo 1.9. Los politopos de tres dimensiones también son conocidos como poliedros. Ejemplo de estos últimos son el cubo y el octedro.

Observación 1.10. La definición anterior y la presentada ahora son equivalentes:

Formalmente, un **politopo convexo** P se define como la intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados en un espacio euclidiano de dimensión finita. Esto es

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

Donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector de m componentes, cada desigualdad $Ax \leq b$ representa un semiespacio cerrado, y P es la intersección de estos semiespacios.

Esta equivalencia es una consecuencia del **teorema de representación de Minkowski** (una demostración de este teorema es posible encontrarla en [17]), que establece que todo politopo convexo puede representarse tanto por sus vértices (V -representación) como por sus hiperplanos que lo delimitan (H -representación).

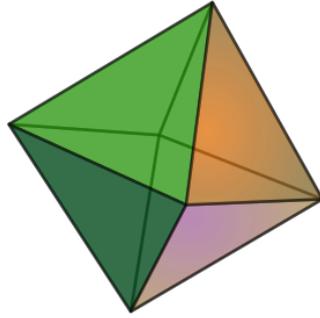


Figura 1.1: Octaedro.

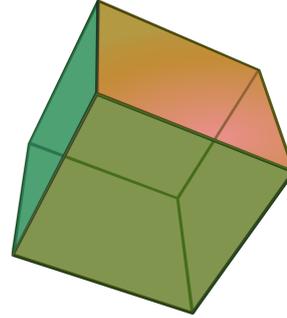


Figura 1.2: Cubo.

Definición 1.11. Un *hiperplano de soporte* para un politopo P es un hiperplano H tal que:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\},$$

de forma que $P \cap H \neq \emptyset$ y además $P \subset H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Definición 1.12. Una *cara* de P es un politopo obtenido como la intersección de P con un hiperplano de soporte.

Por convenio, el conjunto vacío y el propio P se consideran también caras de P .

Observación 1.13. La anterior definición de cara podría explicarse como todos los puntos del politopo P que maximizan una función lineal. Cada cara es en sí misma un politopo (de menor dimensión). También consideramos la cara vacía (dimensión -1). Las caras propias de dimensión máxima se llaman *facetas* o *caras maximales*.

Ejemplo 1.14. Ejemplo de esta última observación puede ser los **vértices**, que son caras de dimensión 0 , o una **arista** que es cara de dimensión 1 . A las caras de dimensión $n-1$ se les llama **facetas**.

Definición 1.15. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un politopo convexo que contiene al origen en su interior, el politopo *dual* P^* se define como:

$$P^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in P\}.$$

El politopo dual P^* tiene el f -vector opuesto de P . Es decir

$$f_i(P^*) = f_{n-1-i}(P), \quad \forall i. \quad (1.1)$$

Es decir, los vértices de P se corresponden con las facetas de P^* , etc.

Algunos politopos, como el tetraedro o el hipercubo en ciertas dimensiones son autoduales, lo que significa que $P = P^*$

Definición 1.16. Sea $v = (v_{-1}, v_0, \dots, v_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ un vector de dimensión $d+1$, diremos que v es el **f -vector** de un d -politopo P si el i -ésimo elemento del vector representa el número de caras de dimensión i en P .

Es decir, f_0 se corresponde con el número de vértices, f_1 con el número de aristas, así hasta f_{d-1} , que es el número de caras de dimensión $d-1$. Por convenio siempre escribimos f_{-1} como el elemento correspondiente a la cara vacía y f_d como la cara total. Se cumple $f_{-1} = f_d = 1$, aunque por continuar la notación de diversos autores, la cara total (f_d) no la escribiremos dentro del f -vector.

A continuación, algunos ejemplos de f -vectores de politopos tridimensionales conocidos:

1. Tetraedro: f -vector: (1, 4, 6, 4)
2. Cubo: f -vector: (1, 8, 12, 6)

3. Dodecaedro: f -vector $(1, 12, 20, 30)$

Definición 1.17. Definimos **símplice** como la envolvente convexa de $n + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n

El símplice es el politopo convexo de menor f -vector posible para una dimensión n . Coloquialmente podemos definirlo como un tipo de politopo que representa la versión más simple de una forma geométrica en cualquier dimensión.

Por ejemplo, un 2-símplice es un triángulo, un 3-símplice es un tetraedro, para 4 dimensiones tendríamos el pentacorón o 4-símplice.

Observación 1.18. El f -vector de un d -símplice viene dado por:

$$f_i = \binom{d+1}{i+1}, \quad \text{para } i = -1, \dots, d-1,$$

porque cada subconjunto de vértices de tamaño $i + 1$ define una cara de dimensión i , y viceversa.

En cambio el f -vector de un d -símplice con n vértices viene dado por la siguiente expresión:

$$f_i = \binom{n}{i+1}, \quad \text{para } i = -1, \dots, d-1.$$

Definición 1.19. Un politopo de dimensión n , con $n \in \mathbb{N}$, se dice **simplicial** si todas sus caras propias son símplices.

Definición 1.20. Sea P un politopo convexo de dimensión d . Se dice que P es **simple** si cada vértice de P es adyacente exactamente a d aristas, o equivalentemente, pertenece exactamente a d facetas.

Definición 1.21. Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un politopo convexo de dimensión d . La **frontera** de P , denotada ∂P , es el conjunto de todos los puntos de P que no son puntos interiores, es decir,

$$\partial P = \overline{P} \setminus \text{int}(P),$$

donde

- \overline{P} es el cierre topológico de P (que coincide con P porque es cerrado),
- $\text{int}(P)$ es el interior relativo de P , es decir, el interior en el subespacio afín generado por P .

1.2. Complejos simpliciales. Descascaramientos

Definición 1.22. Un **Complejo simplicial geométrico** $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^d$ es una colección finita de símplices en \mathbb{R}^d que verifica las siguientes propiedades:

1. Dado $\alpha \in \mathcal{K}$ todas las caras de α están en \mathcal{K} .
2. Dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, entonces $\alpha_1 \cap \alpha_2$ es una cara común a los dos símplices

Un complejo simplicial será **puro** si todos los símplices maximales tienen la misma dimensión.

Definición 1.23. Un **complejo politopal** C es una colección de politopos en \mathbb{R}^n tal que:

1. Si $P \in C$ y F es una cara de P entonces $F \in C$.
2. Si $P, Q \in C$ entonces $P \cap Q$ es una cara de P y de Q simultáneamente.

Si $P \in C$, P es una **cara** de C , esta cara será **maximal** si no está contenida en ninguna otra cara propia. La **dimensión** de C es la máxima dimensión de alguna cara. Y C será **puro** si todas sus caras maximales tienen la misma dimensión.

Definición 1.24. Sea P un d -politopo. Una **subdivisión politopal** de P es un complejo politopal \mathcal{C} cuyo espacio subyacente es P . Un d -politopo perteneciente a \mathcal{C} se denomina **celda** de la subdivisión.

Ejemplo 1.25. Un ejemplo para esta definición podría ser en 2 dimensiones con un cuadrado D . Si trazo una diagonal que pase por dos vértices opuestos, obtengo dos triángulos, que son una subdivisión politopal de D .

Definición 1.26. Para enteros no negativos d , un **d -diagrama** es una subdivisión politopal \mathcal{C} de algún d -politopo P tal que para toda celda $G \in \mathcal{C}$, la intersección $G \cap \partial P$ (la parte de G que toca la frontera de P) es una cara de P . Un **vértice interior** de \mathcal{C} es un vértice $x \in \mathcal{C}$ que no es vértice de P .

Ejemplo 1.27. Si dividimos un cuadrado en 4 triángulos iguales trazando dos diagonales (subdivisión politopal \mathcal{C}), tenemos que la intersección de cada celda $G \in \mathcal{C}$ (cada triángulo) interseca al cuadrado en las aristas de este último. Por último aparece un vértice interior, que sería el punto donde se intersecan las dos diagonales.

Si llamamos P_1, P_2, P_3, P_4 a cada triángulo, se tiene que la unión de todos los P_i es el cuadrado original, no se solapan y además si un politopo está en un triángulo, todas sus caras están en el triángulo.

Lema 1.28. Cualquier diagrama de dimensión d con $d \geq 1$ contiene un vértice interior.

Demostración. Sea \mathcal{C} un diagrama de dimensión $d \geq 1$, y sea P el d -politopo del cual \mathcal{C} es una subdivisión. Sea G una celda de \mathcal{C} . Entonces $G \cap \partial P$ es una cara de P . Obsérvese que

$$G \neq P,$$

pues de otro modo tendríamos $P \cap \partial P = \partial P$, pero ∂P no es una cara de P .

Además, como $\dim G = \dim P = d$, G no puede ser una cara de P , lo que implica

$$G \cap \partial P \neq G.$$

Por tanto existe algún vértice $x \in G$ que no pertenece a $G \cap \partial P$. Por definición, dicho vértice x es un vértice interior de \mathcal{C} . \square

Definición 1.29. Sea \mathcal{C} un complejo simplicial puro de dimensión $d - 1$. Un **descascaramiento** de \mathcal{C} es un ordenamiento F_1, F_2, \dots, F_k de las caras maximales de \mathcal{C} tal que satisface:

- Para cada $2 \leq i \leq k$, el complejo $\bigcup_{j=1}^{i-1} F_j$ tiene intersección no vacía con F_i , y dicha intersección es un subcomplejo puro de dimensión $d - 2$.

Definición 1.30. Diremos que el politopo \mathcal{C} es **descascarable** si existe algún descascaramiento para \mathcal{C} .

Observación 1.31. Sea \mathcal{C} un complejo politopal de dimensión $d - 1$, sea F_1, F_2, \dots, F_k una ordenación de las facetas y a su vez un descascaramiento. Y sea $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces:

$$\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} F_j \right) \cap F_i.$$

Es la unión de un cierto número de facetas de F_i .

Definición 1.32. Sea F_1, F_2, \dots, F_k un descascaramiento de \mathcal{C} , con \mathcal{C} de dimensión $d - 1$. Definimos el **índice** de cada cara maximal F_i como el número de facetas de F_i (es decir, caras de dimensión $d - 2$ de \mathcal{C}) por las que F_i esta pegado a $F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_{i-1}$.

Ejemplo 1.33. *Mostramos a continuación un ejemplo de un complejo politopal que es descascarable. Esta figura en 3 dimensiones está formada por tres tapas o facetas a las que llamaremos F_1, F_2, F_3 respectivamente.*

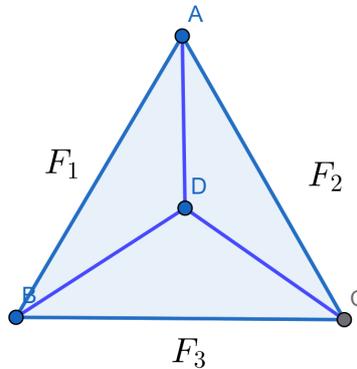


Figura 1.3: Complejo politopal descascarable.

Comprobamos la definición de descascarable: tomamos F_2 , hacemos $F_2 \cap F_1$, y esta intersección nos da el segmento \overline{AD} , el cual es de dimensión 2. Por otro lado, tomo $F_1 \cup F_2$. Así, haciendo la intersección $(F_1 \cup F_2) \cap F_3$, obtengo la unión del segmento \overline{AD} y de \overline{CD} , lo cual es de dimensión 2. Por lo que es descascarable.

Ejemplo 1.34. *Ahora mostramos otro ejemplo de complejo politopal que no es descascarable.*

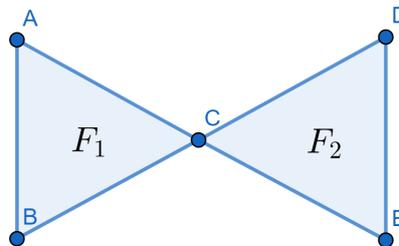


Figura 1.4: Complejo politopal no descascarable.

Si llamamos al triángulo de la izquierda F_1 y al de la derecha F_2 , tenemos que la intersección $F_1 \cap F_2$ nos da el punto C , que es de dimensión 0, por lo que no cumple la definición de descascaramiento. Por tanto, esta ordenación no es un descascaramiento y, por simetría, la otra ordenación posible (primero F_2 y luego F_1) tampoco. Así que el complejo no es descascarable.

Ejemplo 1.35. *Por último mostramos un complejo politopal para el cual existe una ordenación de las caras la cual sí es descascaramiento y existe otra que no es descascaramiento.*

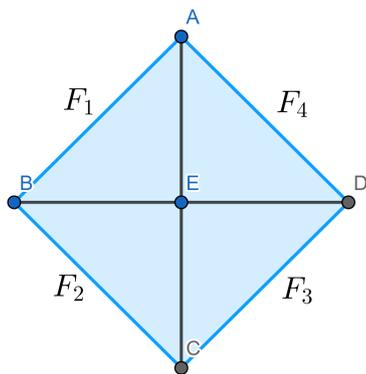


Figura 1.5: Descascaramiento.

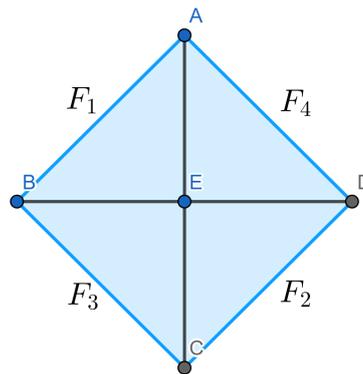


Figura 1.6: No descascaramiento.

La figura 1.5 es un descascaramiento dado que $F_2 \cap F_1 = \overline{BE}$ de dimensión 2, $F_3 \cap (F_1 \cup F_2) = \overline{CE}$ y por último $F_4 \cap (F_1 \cup F_2 \cup F_3) = \overline{AE} \cup \overline{DE}$, también de dimensión dos. Por lo que cumple la definición.

En cambio, la figura 1.6 no es descascaramiento porque $F_1 \cap F_2 = E$, el cual es de dimensión cero, y no cumple la definición.

Observación 1.36. El índice de F_j coincide con el tamaño de la cara más pequeña de F_j que no estaba en el descascaramiento antes de incluir F_j .

Ejemplo 1.37. Veamos que se satisface la observación 1.36 en el caso del pentágono con un vértice en el centro y su descascaramiento según la siguiente imagen:

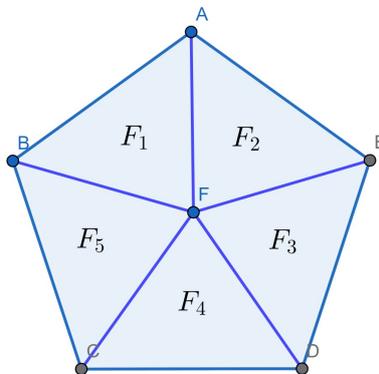


Figura 1.7: Descascaramiento de este complejo.

Mostremos algún caso:

- Cuando añadimos F_2 como ya teníamos F_1 en el descascaramiento, lo que añadimos es el vértice E junto con las dos aristas que lo contienen, y el propio triángulo F_2 . La cara más pequeña que no estaba es el vértice E , por lo que el índice es 1.
- Al añadir F_5 completamos el descascaramiento. Lo que todavía no estaba es la arista \overline{BC} y el propio triángulo. Según la observación, el índice es dos porque la cara más pequeña que añadimos es la arista \overline{BC} que contiene dos vértices.

Teorema 1.38. Todo politopo simplicial es descascaramiento.

Demostración. Suponemos que P es un politopo simplicial de dimensión d , esta demostración consiste en “atravesar” P con una recta que llamaremos r de forma que esta corta a P en dos puntos: A y B .

Por otro lado, cada faceta F de P genera un hiperplano H_F (en la figura 1.8 las rectas discontinuas) y consideramos la intersección de cada H_F con r . La recta r se escoge de modo que esos puntos de intersección estén bien definidos (o sea r no es paralela a ningún H_F) y distintos (si dos de ellos coinciden, movemos r un poco para que dejen de coincidir).

Ahora nos situamos en B y recorremos la recta r en sentido opuesto al politopo hasta llegar al infinito, y volviendo del infinito por el otro lado hasta llegar a A (véase figura 1.8).

El descascaramiento consiste en ordenar o numerar las facetas a medida que atravesamos sus hiperplanos al recorrer la recta r ; es decir, la primera faceta (F_1) será la que contiene a B , la faceta cuyo primer hiperplano nos crucemos después de F_1 será F_2 , la siguiente F_3 . Así con todas las facetas que podamos ver mientras nos alejamos, pero queda un grupo de facetas que no podremos ver (aquellas cuyo hiperplano interseca la recta por el lado opuesto del politopo).

Así una vez hemos numerado todas las facetas que el hiperplano interseca por este lado a la recta, pasamos al resto de facetas.

La recta r se ha ido hasta el “infinito” y ahora vuelve por el otro lado del politopo pero hacia el politopo en vez de hacia afuera. Seguimos con los hiperplanos de las facetas restantes y según vamos recorriendo r , seguimos numerando las facetas del descascaramiento de forma que la última faceta a añadir al descascaramiento es aquella donde r interseca con P en B .

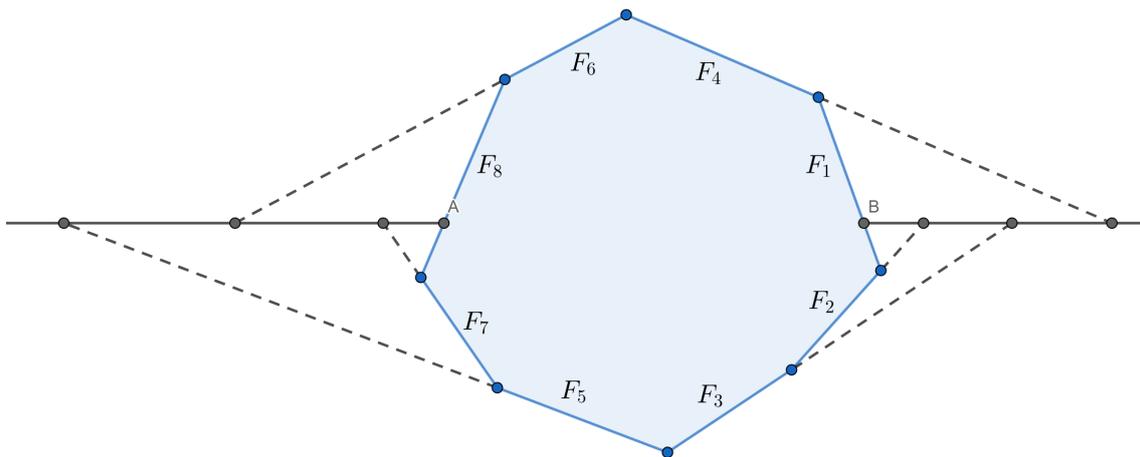


Figura 1.8: Descascaramiento del politopo P en dos dimensiones.

□

Lema 1.39. Si F_1, F_2, \dots, F_s es un descascaramiento del politopo P , entonces también lo será en el orden inverso F_s, F_{s-1}, \dots, F_1 .

Demostración. Tenemos que comprobar que en el orden inverso, para cada F_i se sigue cumpliendo la fórmula de la definición.

Sea F_i una cara maximal. Sabemos que

$$B^- := \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} F_j \right) \cap F_i$$

es puro de dimensión $d - 2$ y, por la Observación 1.31, es una unión de facetas de F_i . Esa unión de facetas es necesariamente una bola topológica de dimensión $d - 2$, que es por lo que la llamamos B^+ .

Entonces

$$B^+ := \left(\bigcup_{j=i+1}^k F_j \right) \cap F_i$$

es la clausura de $\partial F_i - B^-$, que también es una bola de dimensión $d - 2$ por el Teorema de Schönflies¹. En particular, es puro de dimensión $d - 2$.

Una demostración del teorema de Schönflies es posible encontrarla en el libro [6].

□

1.3. Politopos cíclicos

En esta sección presentamos los politopos cíclicos, Estos son un tipo especial de politopos que presentan propiedades muy interesantes tanto en la geometría convexa como en la combinatoria.

Se llaman “cíclicos” porque se construyen utilizando puntos en una curva o trayectoria cíclica en el espacio, como una curva paramétrica que recorre una forma cerrada o cíclica, como un círculo. Estos politopos son notables por su estructura combinatoria simple y por sus aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, como la teoría de politopos, la optimización y la geometría proyectiva.

Definición 1.40. *La curva de momentos en \mathbb{R}^d esta definida por:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\rightarrow (t, t^2, \dots, t^d). \end{aligned}$$

Definición 1.41. *Curva de orden d Sea la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, diremos que es de orden d si cualquier hiperplano la toca en a lo sumo d puntos.*

Veamos que una curva de momentos en \mathbb{R}^d tiene orden d

Lema 1.42. *La curva de momentos tiene orden d .*

Demostración. Debemos comprobar que cualquier Hiperplano H toca en a lo sumo d puntos en la curva de momentos.

Sea H un hiperplano con ecuación:

$$a_1x_1 + \dots + a_dx_d = b,$$

Veo qué puntos de $(t, t^2, t^3, \dots, t^d)$ están en H , al sustituir el punto en la ecuación se obtiene un polinomio p de grado d ,

$$p(t) := a_1t + \dots + a_dt^d = b,$$

al resolver esta ecuación, como es un polinomio de grado d , obtenemos que como mucho hay d soluciones, luego cualquier hiperplano toca en a lo sumo d puntos. □

Se puede hacer una segunda demostración de este Lema usando el determinante de Vandermonde:

¹El Teorema de Schönflies es una generalización del Teorema de la Curva de Jordan; Jordan dice que cualquier curva cerrada divide el plano en dos regiones; una acotada y otra no acotada. Schönflies dice que, además, estas dos regiones son homeomorfas al interior y al exterior de un círculo.

Definición 1.43. Dada una secuencia de $n + 1$ números x_0, \dots, x_n , definimos la **matriz de Vandermonde** como la matriz cuadrada de orden $(n + 1) \times (n + 1)$ cuya forma es:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Es sabido que el **Determinante de la matriz de Vandermonde** [10] es:

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Observamos que este determinante coincide con el determinante de $d + 1$ puntos en la curva de momentos. Es decir:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & x(t_0) \\ 1 & x(t_1) \\ 1 & x(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x(t_d) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^d \\ 1 & t_3 & t_3^2 & \dots & t_3^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \dots & t_d^d \end{pmatrix} = \\ &= \det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j). \end{aligned}$$

Podemos ver que el determinante será cero si, y solo si, $t_i = t_j$ para algún $i \neq j$. Por tanto, si tomamos $d + 1$ puntos en la curva de momentos tenemos que el determinante es distinto de cero y eso significa que los puntos no están en ningún hiperplano.

Una demostración más extensa es posible encontrarla en el libro referenciado [10].

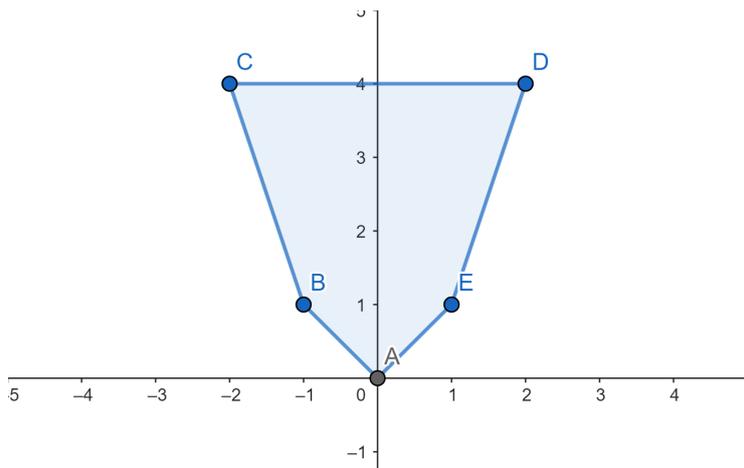
Definición 1.44. Sea $n \geq d \geq 2$. El **d -politopo cíclico** en n vértices está dado por la envolvente convexa de n puntos en la curva de momentos. Esto es:

$$C_d(n) = \text{conv}(x(t_1), \dots, x(t_n)). \text{ Con } t_1 < \dots < t_n \text{ en la curva de momentos.}$$

Ejemplo 1.45. Un ejemplo de politopo cíclico en \mathbb{R}^2 puede ser el generado a partir de una parábola, es decir, con la parametrización; $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$, para distintos valores de t , obtenemos un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 que forman el politopo cíclico, esto es:

$$\text{conv}(x(t_1), \dots, x(t_n)) = \text{conv}((t_1, t_1^2), \dots, (t_n, t_n^2)).$$

Dando valores a t_i un ejemplo concreto sería: para $t = -2, -1, 0, 1, 2$ obtenemos los puntos: $(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$. La envolvente convexa de estos puntos da lugar al politopo cíclico generado por esos puntos mediante \mathbf{x} .

Figura 1.9: Politopo cíclico $C_2(5)$.

Proposición 1.46. *Todo politopo cíclico es simplicial.*

Demostración. Por reducción al absurdo suponemos que no es simplicial, es decir, hay una cara F ($\dim < d$) que no es simple, luego hay un hiperplano que contiene más de d vértices de F , y aquí llegamos a la contradicción ya que, por el Lema 1.42, los vértices están en una curva de orden d . \square

Observación 1.47. *Muy relacionado con los politopos cíclicos tenemos los siguientes resultados:*

- *La condición de paridad de Gale, que proporciona una condición necesaria y suficiente para determinar una faceta en un politopo cíclico.*
- *La k -vecinidad de los politopos cíclicos.*
- *Teorema de la cota superior, que establece que los politopos cíclicos maximizan el f -vector de un politopo para una dimensión arbitraria.*

Veamos uno por uno:

Teorema 1.48. Condición de paridad de Gale Sea $n > d \geq 2$. Sea $[n] = \{1, \dots, d\}$ y sean $t_1 < \dots < t_d$ parámetros reales.

Un d -subconjunto $S \subseteq [n]$ forma una faceta de $C_d(n)$ si, y solo si la siguiente “condición de paridad” se satisface:

Si $i < j$ no están en S , entonces el número de $k \in S$ entre i y j es par, esto es:

$$2 \mid \#\{k : k \in S, i < k < j\}, \text{ para } i, j \notin S.$$

Demostración del Teorema 1.48. Probamos por un lado la implicación de izquierda a derecha:

Dados $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in \mathbb{R}$ y dado un $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ de tamaño d .

Supongamos que S es faceta. Es decir, $S \subseteq P$ con P un hiperplano de soporte. Esto es equivalente a $\exists A = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ y $\exists b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{x}(t_i) &= b \text{ si } i \in S \\ A \cdot \mathbf{x}(t_i) &\leq b \quad \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

Dicho de otro modo,

$$\exists a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{R} \text{ tal que } a_1 \cdot t_i + a_2 \cdot t_i^2 + \dots + a_d \cdot t_i^d - b \leq 0, \quad \forall t_i$$

$$a_1 \cdot t_i + a_2 \cdot t_i^2 + \cdots + a_d \cdot t_i^d - b = 0 \text{ si } t_i \in S.$$

Así hemos probado que existe un polinomio $p(t)$ de grado d con variable en t tal que:

$$p(t_i) = a_1 \cdot t_i + a_2 \cdot t_i^2 + \cdots + a_d \cdot t_i^d - b$$

$$p(t_i) \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$p(t_i) = 0 \text{ si } i \in S.$$

Como t_{i_1}, \dots, t_{i_d} son n raíces distintas del polinomio, que es de grado d , cada raíz debe tener multiplicidad 1. Así el polinomio p cambia de signo en cada raíz. Se debe cumplir entonces que entre cualesquiera dos puntos t_j y t_l que no sean ninguno de nuestros d vértices debe haber un número par de raíces t_{i_1}, \dots, t_{i_d} . Esta es precisamente la condición de paridad de Gale.

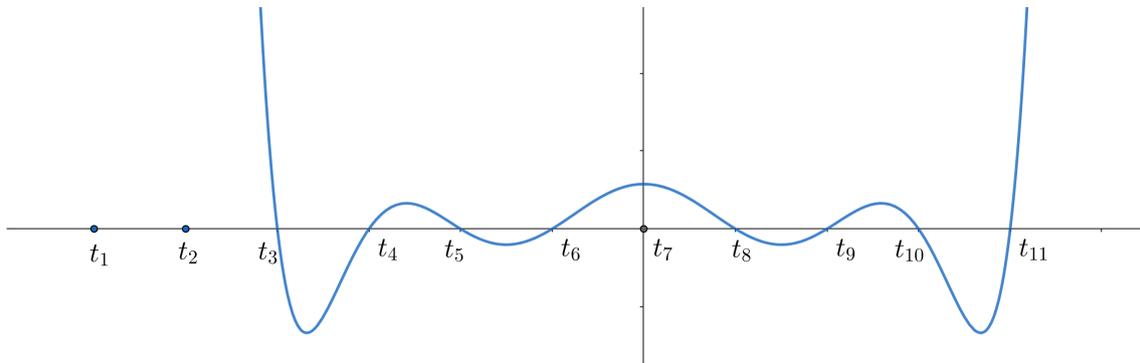


Figura 1.10: Ejemplo de polinomio $p(t)$.

Para el recíproco, es decir la implicación de derecha a izquierda, supongamos que tenemos un d -subconjunto $S \subset [n]$ que cumple la condición de Gale. Este subconjunto S tiene d valores t_i . Si construimos el polinomio de grado d que tiene como raíces esos d valores t_i y utilizando que se cumple el criterio de Gale, que nos dice que ese polinomio tiene el mismo signo en todos los demás valores de t . Este polinomio representa un hiperplano (con los mismos valores de a_i) y ese hiperplano es un hiperplano de soporte. \square

Observación 1.49. Más informalmente, este teorema quiere decir que dado un d -subconjunto tal que $T_d \subset T$, este formará una faceta del politopo cíclico $C_d(n)$ si y solo si dos elementos cualesquiera en $T \setminus T_d$ están separados por un número par de elementos de T_d .

Otro resultado importante es el presentado a continuación:

Definición 1.50. Un politopo convexo con n vértices se denomina k -**vecinal** si cada conjunto de k vértices del politopo define una cara de dimensión $k - 1$.

Los politopos cíclicos son buen ejemplo de politopos vecinales en el sentido de que cada conjunto de como máximo $d/2$ vértices forma una cara. Esto es:

Corolario 1.51. El politopo cíclico $C_d(n)$ es $\lfloor d/2 \rfloor$ -**vecinal**, es decir, cualquier subconjunto $S \subseteq [n]$ tal que $|S| \leq \lfloor d/2 \rfloor$ forma una cara.

Demostración. Sea $C_d(n)$ con $t_1 < \dots < t_n$ y sea $T = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [n]$ con cardinal $k \leq \frac{d}{2}$.

Elegimos algún $\epsilon > 0$ tal que $t_i < t_i + \epsilon < t_{i+1}$ para todo $i < n$ y algún $M > t_n + \epsilon$ y definimos la función lineal $F_T(\mathbf{x})$ como:

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{x}(t_{i_1}), \mathbf{x}(t_{i_1} + \epsilon), \dots, \mathbf{x}(t_{i_k}), \mathbf{x}(t_{i_k} + \epsilon), \mathbf{x}(M + 1), \dots, \mathbf{x}(M + d - 2k)).$$

Esto es una función lineal en \mathbf{x} que se hace cero en los puntos $\mathbf{x}(t_i)$ tales que $i \in T$.

Si consideramos $F_T(\mathbf{x}(t))$, la función se convierte en un polinomio de grado d en la variable t , que tiene d ceros 'obvios' que son:

$$t_{i_1}, t_{i_1} + \epsilon, + \dots + t_{i_k}, t_{i_k} + \epsilon, M + 1 + \dots + M + d - 2k.$$

Hay un número par de ceros entre t_i y t_j para $i, j \in [n] \setminus T$ dado que un cero en $t = t_l$ siempre viene acompañado de otro cero en $t = t_l + \epsilon$. Y así $F_T(\mathbf{x})$ tiene el mismo signo en todos los puntos $\mathbf{x}(t_i) : i \in [n] \setminus T$. Por lo tanto, la función lineal $F_T(\mathbf{x})$ define un hiperplano soporte del politopo cíclico que contiene exactamente a los k vértices elegidos.

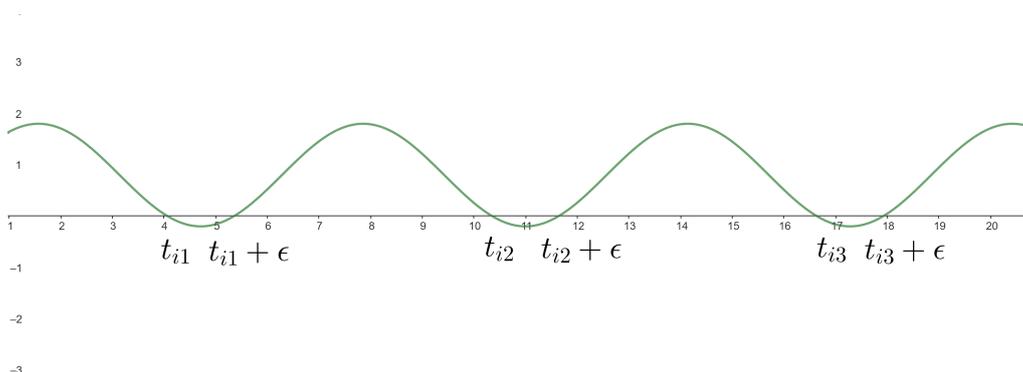


Figura 1.11: Gráfica del polinomio.

□

Como consecuencia de que los politopos cíclicos son vecinales, tenemos el siguiente resultado:

Observación 1.52 (Número de caras). *Por ser $\lfloor d/2 \rfloor$ -vecinal, el número de caras i -dimensionales del politopo cíclico $C_d(n)$ en d dimensiones viene dado por la fórmula*

$$f_{i-1}(C_d(n)) = \binom{n}{i} \quad \text{para } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor.$$

El resto del f -vector se puede determinar a partir de las ecuaciones de Dehn-Sommerville (hablaremos de ellas en el teorema 2.2).

Ejemplo 1.53. *A continuación mostramos un ejemplo para comprobar visualmente que se cumple la observación 1.52 y de paso mostramos cómo sería un politopo cíclico en $3d$, para ello usamos el politopo cíclico $C_3(5)$, a la parametrización t le damos los valores $t = -1, 1, 1/2, -1/2, 0$. Y obtenemos:*

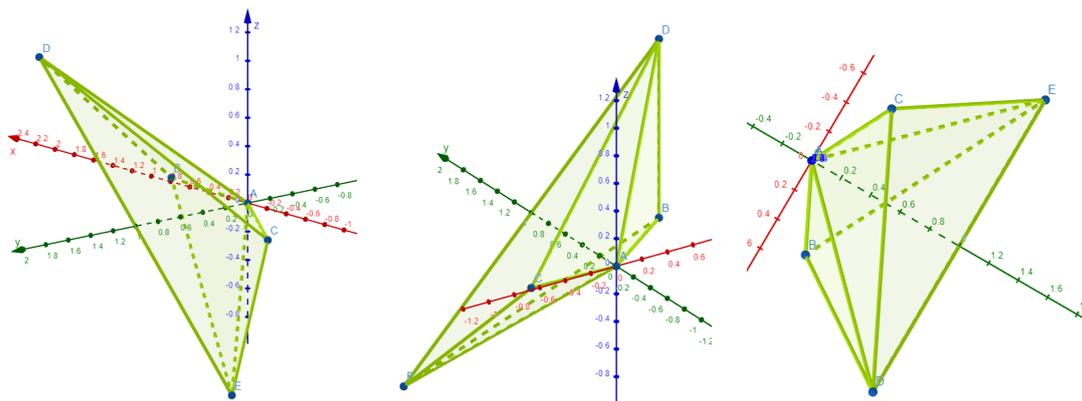


Figura 1.12: Tres vistas del politopo cíclico $C_3(5)$.

En resumen, el f -vector de un politopo cíclico en dimensión d con n vértices sigue el patrón de las combinaciones de los vértices.

El siguiente teorema nos dice que los politopos cíclicos alcanzan el número máximo de caras posibles para un politopo simplicial.

Teorema 1.54 (Teorema de la cota superior). *Los politopos cíclicos tienen el número máximo posible de caras para una dimensión y un número de vértices dados: Esto es:*

Para todo politopo P de dimensión d con n vértices se tiene, para $-1 \leq i \leq d - 1$:

$$f_i(P) \leq f_i(C_d(n)).$$

La demostración de este Teorema usa herramientas que veremos en el Capítulo 2.2, y por tanto la posponemos hasta ese capítulo.

Capítulo 2

f -vectores de politopos simpliciales

A lo largo de este capítulo nos adentraremos en el estudio de los f -vectores de politopos simpliciales, herramientas fundamentales para describir la estructura combinatoria de estas figuras. Comenzaremos revisando las Ecuaciones de Dehn–Sommerville en su formulación clásica sobre los f -vectores, que revelan simetrías profundas entre las caras de distintas dimensiones. A continuación, introduciremos el h -vector, una transformación de los f -vectores que facilita tanto los cálculos como la interpretación geométrica de estas relaciones.

Una vez definido el h -vector, volveremos a las ecuaciones de Dehn–Sommerville pero ahora expresadas en términos de éste, lo que no solo simplifica la forma de las ecuaciones sino que pone de manifiesto conexiones con la teoría algebraica de los politopos. Con la base de los h -vectores definida, podremos presentar una demostración del teorema de la cota superior para politopos (Teorema 1.54).

Finalmente terminaremos el capítulo explicando el famoso teorema g , que establece condiciones de validez para vectores que provengan de politopos simpliciales reales.

El contenido de este capítulo se puede encontrar en diferentes fuentes, por ejemplo [16]. Nosotros nos hemos basado sobre todo en el Capítulo 8 de [22], aunque también hemos usado en algunas partes las notas [14, 11].

2.1. Las Ecuaciones de Dehn-Sommerville para f -vectores.

A continuación se plantean una serie de conceptos relacionados con el f -vector de un politopo.

Uno de los grandes resultados sobre el número de caras de los politopos es el **Teorema de Euler-Poincaré**. Este resultado es una generalización de la famosa **fórmula de Euler** para politopos en 3 dimensiones, la cual establece que para cualquier politopo convexo P tridimensional cuyo número de vértices sea V , número de aristas A y número de caras C , se cumple:

$$V - A + C = 2.$$

Aunque esta fórmula adaptada a la notación de f -vector para politopos de tres dimensiones que usamos en este documento y siendo f el f -vector de P , sería:

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = 1.$$

Este teorema extiende esta relación a politopos convexos de dimensión d y se aplica a los números de caras de un politopo, de forma que se obtiene:

Teorema 2.1 (Ziegler [22, Cor. 8.17 (p. 246)]). Sea P un politopo convexo de dimensión d , y sea $f = (f_{-1}, \dots, f_{d-1})$ su f -vector, se cumple:

$$\sum_{k=-1}^{d-1} (-1)^k \cdot f_k = (-1)^{d-1},$$

o lo que es equivalente:

$$\sum_{k=-1}^{d-1} (-1)^k \cdot f_k + (-1)^d = 0.$$

Por otro lado tenemos las **Ecuaciones de Dehn-Sommerville**. Que son un conjunto de relaciones lineales entre los números de caras de diferente dimensión de un politopo simplicial P .

Teorema 2.2 (Grünbaum [8, Tma 2(p. 262)]). **Ecuaciones de Dehn-Sommerville**. En el f -vector de todo d -politopo simplicial se tiene:

$$f_{-1} = f_d = 1,$$

y para cualquier $k = -1, 0, \dots, d-1$ se tiene:

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^{d-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_j = f_k.$$

Estas ecuaciones se pueden reescribir de manera más sencilla mediante el concepto de h -vector que veremos en los capítulos siguientes. (Véase, en particular, el Teorema 2.16). Como veremos allí, además, algunas de las ecuaciones son redundantes.

Ejemplo 2.3. Mostramos un ejemplo del cálculo de las ecuaciones de Dehn-Sommerville para un 3-politopo simplicial. Así tenemos que $d = 3$. Para cada $k = -1, 0, 1$ (para $k = 2$ también funciona pero es redundante):

$$\sum_{j=k}^2 (-1)^{2-j} \binom{j+1}{k+1} f_j = f_k.$$

- Para $k = -1$: $\sum_{j=-1}^2 (-1)^{2-j} \binom{j+1}{0} f_j = f_{-1}$,

desarrollo el sumatorio:

$$(-1)^3 \binom{0}{0} f_{-1} + (-1)^2 \binom{1}{0} f_0 + (-1)^1 \binom{2}{0} f_1 + (-1)^0 \binom{3}{0} f_2.$$

Es decir:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2f_{-1} = 2,$$

que es la fórmula de Euler.

- Para $k = 0$: $\sum_{j=0}^2 (-1)^{2-j} \binom{j+1}{1} f_j = f_0$,

desarrollo el sumatorio:

$$(-1)^2 \binom{1}{1} f_0 + (-1)^1 \binom{2}{1} f_1 + (-1)^0 \binom{3}{1} f_2 = f_0 - 2f_1 + 3f_2 = f_0.$$

Es decir $3f_2 = 2f_1$.

- Para $k = 1$: $\sum_{j=1}^2 (-1)^{2-j} \binom{j+1}{2} f_j = f_1$,
desarrollo el sumatorio:

$$(-1)^1 \binom{2}{2} f_1 + (-1)^0 \binom{3}{2} f_2 = -f_1 + 3f_2 = f_1,$$

que nos da otra vez $3f_2 = 2f_1$.

- Para $k = 2$: $\sum_{j=2}^2 (-1)^{2-j} \binom{j+1}{3} f_j = (-1)^0 \binom{3}{3} f_2 = f_2$.
Este ultimo caso es repetitivo porque llegamos a que el sumatorio sol tiene un sumando y se obtiene $f_2 = f_2$, es decir, una tautología.

Se observa que aunque en principio hay cuatro ecuaciones de Dehn-Sommerville, dos de ellas son redundantes. Eso ocurre en cualquier dimensión. Las ecuaciones con $2k + 1 > d$ se deducen de las anteriores que tienen $2k + 1 \leq d$. (Teorema 2.16).

Podemos comprobar que estas ecuaciones se cumplen dando un ejemplo concreto: el tetraedro cuyo f -vector es $(1, 4, 6, 4)$:

- $k = -1$:

$$\begin{aligned} -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 &= f_{-1} \\ -1 + 4 - 6 + 4 &= 1. \end{aligned}$$

- $k = 0$:

$$\begin{aligned} f_0 - 2f_1 + 3f_2 &= f_0 \\ 4 - 12 + 12 &= 4. \end{aligned}$$

- $k = 1$:

$$\begin{aligned} -f_1 + 3f_2 &= f_1 \\ -6 + 12 &= 6. \end{aligned}$$

Observación 2.4. Las ecuaciones de Dehn-Sommerville nos dicen que la información que contiene un f -vector de un politopo simplicial P es redundante, es decir, sea f un f -vector $f = (f_{-1}, \dots, f_{d-1})$ de dimensión $d + 1$ para un politopo P , tan solo siendo conocedores de $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ términos es posible calcular el resto de los términos.

Ahora bien, como veremos más adelante no vale cualquier subconjunto de $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ términos porque puede haber dependencias entre ellos. Los que sí podemos asegurar que valen son los primeros $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Pero no es siempre cierto que conociendo las $d/2$ últimas coordenadas se puede deducir las demás.

Esta observación se refiere a que, teniendo en cuenta que la primera coordenada de cualquier f -vector de un politopo P vale -1 , y sabiendo la primera mitad de los términos del f -vector, se pueden conocer el resto mediante las ecuaciones de Dehn-Sommerville.

Ejemplo 2.5. Un ejemplo para la observación 2.4, podría ser para politopos simpliciales en 3 dimensiones.

Por un lado sabemos, mediante la fórmula de Euler, se cumple: $-1 + f_0 - f_1 + f_2 = 1$.

Por otro, por ser la variedad simplicial en 3 dimensiones, tenemos: $3f_2 = 2f_1$, esta igualdad se obtiene contando el número de incidencias arista-cara en un 3-politopo simplicial; por un lado, nos fijamos en que cada cara tiene tres aristas, es decir, el número de incidencias arista-cara desde el punto de vista de las caras es $3f_2$; por otro lado, nos fijamos en las aristas, cada una de ellas está en dos caras, lo que quiere decir que el número de incidencias arista-cara es $2f_1$. Como el número de incidencias arista-cara no puede ser distinto por un lado que por otro, ya que cada arista incide en dos caras y cada cara tiene tres aristas, obtenemos la igualdad.

Con tan solo conocer el valor de un f_i con $i = 0, 1, 2$ se puede obtener el resto de los valores.

- Si conozco f_0 , queda un sistema de dos ecuaciones con dos variables, f_1, f_2 :

$$\begin{cases} -f_1 + f_2 = 2 - f_0 \\ 3f_2 = 2f_1 \end{cases}$$

- Si conozco o bien f_1 o bien f_2 solo habría que calcular el f_2 o f_1 (correspondiente en ese orden) y de ahí despejar f_0 de la fórmula de Euler.

Ejemplo 2.6. Para politopos simpliciales en 4 dimensiones, tenemos por la fórmula de Euler: $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$.

Por la variedad simplicial en 4 dimensiones tenemos $2f_3 = f_2$, es decir, cada tetraedro tiene 4 caras, y cada cara forma parte de dos tetraedros.

Luego podemos obtener el sistema:

$$\begin{cases} f_0 + f_2 = f_1 + f_3 \\ 4f_3 = 2f_2 \end{cases}$$

Donde f_3 y f_2 quedan en función de f_0 y f_1 .

Lo cual coincide con la observación 2.4.

Siguiendo el ejemplo anterior, si escribimos las ecuaciones de Dehn-Sommerville para $4d$, igual que hemos hecho para tres dimensiones, obtenemos:

- $k = -1$:

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = -f_{-1} = -1.$$

Teniendo en cuenta que $f_4 = 1 = f_{-1}$, llegamos directamente a la ecuación de Euler en 4 dimensiones:

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = -f_{-1}, \quad -f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_{-1} = 0$$

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + f_4 = 0$$

- $k = 0$:

$$f_0 - 2f_1 + 3f_2 - 4f_3 = -f_0$$

$$2f_0 - 2f_1 + 3f_2 - 4f_3 = 0 = 2(f_0 - f_1 + f_2 - f_3) + f_2 - 2f_3.$$

Por un lado sabemos que $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$ por el caso $k = -1$ y por otro $f_2 - 2f_3 = 0$ por hipótesis así llegamos a:

$$2(f_0 - f_1 + f_2 - f_3) + f_2 - 2f_3 = 0.$$

- $k = 1$:

$$-f_1 + 3f_2 - 6f_3 = -f_1, \text{ pasando todo a la izquierda:}$$

$$3f_2 - 6f_3 = 0, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$f_2 = 2f_3, \text{ que sabemos que es cierto por hipótesis.}$$

- $k = 2$:

$$f_2 - 4f_3 = -f_2, \quad 2f_2 = 4f_3 \text{ Lo que es cierto por hipótesis.}$$

2.2. El h -vector

En esta sección introducimos el concepto del h -vector, este es un vector que se puede entender como un cambio de coordenadas del f -vector, pero presenta propiedades adicionales que hacen de su estudio algo muy interesante. Por ejemplo, veremos que las ecuaciones de Dehn-Sommerville cuando se reescriben en términos del h -vector se vuelven muy sencillas.

Definición 2.7. Dado un f -vector de un politopo simplicial, $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$, definimos su correspondiente h -vector como el vector (h_0, \dots, h_d) con cada entrada tal que:

$$h_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} f_{k-1}.$$

En particular, tenemos $h_0 = f_{-1} = 1, h_1 = f_0 - d$ y

$$h_d = f_{d-1} - f_{d-2} + f_{d-3} + \dots (-1)^{d-1} f_0 + (-1)^d.$$

Ejemplo 2.8. Mostramos un ejemplo para el cálculo del h -vector del tetraedro:

Partiendo del f -vector del tetraedro, que es $(1, 4, 6, 4)$. Tenemos que cada componente del h -vector se obtiene como:

$$h_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} f_{k-1}, \text{ para } i = 0, \dots, 3.$$

- $i = 0: h_0 = (-1)^0 \binom{3}{3} f_{-1} = 1.$
- $i = 1: h_1 = (-1)^1 \binom{3}{2} f_{-1} + (-1)^0 \binom{2}{2} f_0 = -3 + 4 = 1.$
- $i = 2: h_2 = (-1)^2 \binom{3-0}{3-2} f_{-1} + (-1)^1 \binom{3-1}{3-2} f_0 + (-1)^0 \binom{3-2}{3-2} f_1 = 3 - 8 + 6 = 1.$
- $i = 3: h_3 = (-1)^3 \binom{3}{0} f_{-1} + (-1)^2 f_0 + (-1)^1 f_1 + 1 f_2 = 1.$

Finalmente el h -vector del tetraedro queda: $(1, 1, 1, 1)$.

Teorema 2.9. A partir del h -vector de un politopo simplicial P , es posible recuperar el f -vector del mismo, con la siguiente fórmula:

$$f_{i-1} = \binom{d}{i} h_0 + \binom{d-1}{i-1} h_1 + \binom{d-2}{i-2} h_2 + \dots + \binom{d-i}{0} h_i = \sum_{k=0}^i \binom{d-k}{d-i} h_k.$$

En particular:

- $f_{-1} = h_0.$
- $f_0 = d h_0 + h_1.$
- $f_1 = \binom{d}{2} h_0 + (d-1) h_1 + h_2.$
- $f_{d-1} = h_0 + h_1 + \dots + h_d.$

Para las demostraciones, consideramos tanto el f -vector como el h -vector como vectores en \mathbb{R}^{d+1} . Vamos a ver que entendidos de esta manera, las fórmulas que definen el h -vector a partir del f -vector son una aplicación lineal $\mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ y la demostración del Teorema consiste en comprobar que las fórmulas del enunciado son la aplicación inversa.

Antes de hacerlo en detalle, veamos como ejemplo el caso de dimensión tres.

La definición del h -vector a partir del f -vector es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

La matriz del Teorema 2.9 sería:

$$\begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que estas dos matrices son inversas la una de la otra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos ahora a hacer la demostración en dimensión general:

Demostración. Llamamos $\alpha : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ a la aplicación lineal tal que $h = \alpha(f)$, que transforma el f -vector. Su matriz A es triangular inferior con unos en la diagonal principal. Por debajo de la diagonal tenemos que, si llamamos $a_{i,k} := A(i,k) : 0 \leq i, k \leq n$, se tiene:

$$a_{i,k} = (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i}, \text{ para } i \geq k.$$

Por otro lado, podemos definir la aplicación $\beta : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ que se corresponde con las fórmulas del enunciado. Esto es:

$$f_{i-1} = \sum_{k=0}^i \binom{d-k}{d-i} h_k.$$

Por tanto, si llamamos B a la matriz de esta aplicación, también es triangular inferior con unos en la diagonal principal y por debajo de la diagonal tenemos que llamando $b_{i,k} := B(i,k) : 0 \leq i, k \leq n$:

$$b_{i,k} = \binom{d-k}{d-i}, \text{ para } i \geq k.$$

Ahora solo faltaría probar que el producto de estas dos matrices A y B es la matriz identidad.

Esta demostración se puede dividir en tres partes, la primera sería probar que la diagonal principal de C es todo unos, la segunda parte sería probar que la parte triangular superior de C es todo ceros y la tercera que la parte triangular inferior también es todo ceros.

Los elementos de C se pueden expresar como $c_{i,j} = \sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,j}$ siendo $d+1$ entero que representa la longitud del vector h .

1. Primero comenzamos probando que la parte triangular superior de la matriz C esta formada por todo ceros, es decir $c_{i,j} = \sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,j} = 0$, si $i < j$. Sabiendo que la matriz A cumple $a_{i,k} = 0$, si $i < k$, además también ocurre esto para B , $b_{k,j} = 0$ si $k < j$.

Para que $a_{i,k} b_{k,j} \neq 0$ necesito $i \geq k$ y $k \geq j$. Combinando estas dos desigualdades tenemos $i \geq k \geq j$. Pero como previamente hemos asumido $i < j$ (estamos mirando la parte triangular superior de C , luego tenemos $i < j$), no existe ningún k tal que $i \geq k \geq j$ y a la vez $i < j$. Por lo que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,j} = 0$ si $i < j$.

Obsérvese que lo que hemos demostrado es que el producto de dos matrices triangulares inferiores es también triangular inferior.

2. Ahora vemos que los elementos de la diagonal principal $c_{i,i}$ son todo unos, es decir: $c_{i,i} = \sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,i} = 1$.

Sabemos que $a_{i,k} = 0$, si $i < k$ y $a_{i,k} = 1$ si $i = k$.

También sabemos que $b_{k,i} = 0$, si $k < i$ y $b_{k,i} = 1$ si $k = i$.

Así podemos comprobar que el producto $a_{i,k} b_{k,i} = 0 \forall i, k : i \neq k$ Solo se salva el caso $i = k$, donde ahí $a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} = 1$.

Y así queda probado que $c_{i,i} = \sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,i} = a_{i,i} b_{i,i} = 1$.

3. Por último, comprobamos que la parte triangular inferior de C también está formada por todo ceros. Es decir, hay que probar que:

$$\sum_{k=0}^d a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=0}^d (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-j}{d-k} = 0.$$

para todo i, j con $i > j$.

En la suma solo son distintos de cero los sumandos con $j \leq k \leq i$, o sea, queremos ver que:

$$\sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-j}{d-k} = 0.$$

Desarrollando un sumando del sumatorio:

$$a_{i,k} b_{k,j} = (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} \binom{d-j}{d-k} = \frac{(-1)^{i-k} (d-k)!}{(d-i)!(i-k)!} \cdot \frac{(d-j)!}{(d-k)!(k-j)!}.$$

Se puede cancelar $(d-k)!$ en el numerador y en el denominador, luego queda:

$$\frac{(-1)^{i-k}}{(d-i)!(i-k)!} \cdot \frac{(d-j)!}{(k-j)!}.$$

Ahora multiplico abajo y arriba por $(i-j)!$, para después reordenar. Y obtengo:

$$\frac{(-1)^{i-k} (d-j)!}{(i-j)!(d-i)!} \cdot \frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!} = \frac{(d-j)!}{(i-j)!(d-i)!} \cdot (-1)^{i-k} \binom{i-j}{i-k}.$$

El factor $\frac{(d-j)!}{(i-j)!(d-i)!}$ es constante en todos los sumandos ya que no depende de k , lo llamamos λ y al ser constante lo podemos sacar como factor común. Así el sumatorio queda:

$$\sum_{k=j}^i a_{i,k} b_{k,j} = \lambda \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i-j}{i-k}.$$

Solo falta ver que este último sumatorio es cero. Para ello; utilizando las propiedades de los números combinatorios (en este caso la simetría) podemos ver:

$$\sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i-j}{i-k} = \sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i-j}{k-j}.$$

Ahora haciendo un cambio $m = k - j$ obtenemos:

$$\sum_{m=0}^{i-j} (-1)^{(i-j)-m} \binom{i-j}{m}, \text{ si llamo } i-j = l \text{ obtengo: } \sum_{m=0}^l (-1)^{B-m} \binom{l}{m}.$$

Por otro lado conocemos la expresión del binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i} \binom{n}{i}, \text{ si sustituimos } a = 1, \text{ obtenemos:}$$

$$(1 + b)^n = \sum_{i=0}^n 1^i b^{n-i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n b^{n-i} \binom{n}{i}.$$

Utilizando el sumatorio al que hemos llegado antes,

$$\sum_{m=0}^l (-1)^{l-m} \binom{l}{m},$$

podemos operar

$$(1 + b)^l = \sum_{i=0}^l b^{l-i} \binom{l}{i},$$

si sustituimos $b = -1$

$$0 = (1 - 1)^l = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l}{i} = 0.$$

Y así queda demostrado que

$$\sum_{k=j}^i (-1)^{i-k} \binom{i-j}{i-k} = 0.$$

Luego así hemos probado que el producto de las matrices A y B nos da como resultado la matriz identidad, sea cual sea la dimensión. \square

2.3. Las Ecuaciones de Dehn-Sommerville en términos de h -vectores

Teniendo en cuenta la definición de descascaramiento de un politopo presentada en la sección 1.29, presentamos otra definición equivalente de h -vector:

Definición 2.10. Sea P un d -politopo y sea F_1, F_2, \dots, F_k un descascaramiento de P , definimos el **h -vector** del descascaramiento como el vector de dimensión $d + 1$ tal que h_i representa el número de caras de índice i .

Ejemplo 2.11. Ejemplo del cálculo del h -vector a partir del descascaramiento de un complejo politopal en 2 dimensiones.

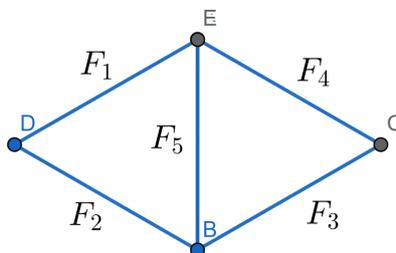


Figura 2.1: Ejemplo.

- F_1 : no comparte nada con los anteriores F_i , así que su índice es 0.
- F_2 : tiene un vértice en común con F_0 , por lo que su índice es 1.
- F_3 : Su índice 1, ya que tiene un vértice en común con $F_1 \cup F_2$.
- F_4 : comparte dos vértices con $F_1 \cup F_2 \cup F_3$, por lo que su índice es 2.
- F_5 : El índice es 2 ya que comparte dos vértices con $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$.

Por tanto, hay una faceta de índice 0, dos de índice 1 y dos de índice 2. Así el h -vector es $h = (h_0, h_1, h_2) = (1, 2, 2)$.

El siguiente teorema prueba la equivalencia entre las dos definiciones del h -vector.

Teorema 2.12. *Sea C un complejo simplicial. Si C es descascarable, entonces la entrada h_i de cualquier descascaramiento coincide con la entrada h_i de C como complejo. Por tanto, es independiente del descascaramiento particular elegido.*

Para escribir esta demostración es necesario establecer previamente la definición de complejo simplicial abstracto, ya que podríamos confundirlo con los complejos simpliciales geométricos. En la práctica son lo mismo (se puede pasar de uno a otro) pero por cuestiones conceptuales y de notación conviene diferenciarlos.

Definición 2.13. *Sea V un conjunto finito. Una familia K de subconjuntos de V es un **complejo simplicial abstracto** si es cerrada por contenido. Es decir:*

$$S \in K, T \subseteq S \Rightarrow T \in K.$$

A los elementos de V les llamamos **vértices** y a los de K les llamamos **caras**. La **dimensión** de una cara es su número de elementos menos uno.

Igual que en los complejos geométricos, se llama **facetas** a las caras maximales y un complejo es **puro** si todas las facetas tienen la misma dimensión.

Dos complejos simpliciales K y L , con conjuntos de vértices V y W son isomorfos si hay una biyección $f : V \rightarrow W$ tal que

$$\text{para todo } S \subset V, \quad S \in K \Leftrightarrow f(S) \in L.$$

Normalmente, en un complejo abstracto con n vértices se toma como V el conjunto: $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

Por otro lado tenemos la Definición 1.22, de complejo simplicial geométrico. Vamos a comprobar que ambas definiciones son equivalentes.

Proposición 2.14. *A todo complejo simplicial abstracto le podemos asociar uno geométrico, y viceversa, de modo que si partiendo de un complejo abstracto K construimos su geométrico \mathcal{K} y luego el abstracto de \mathcal{K} , el resultado es isomorfo a K .*

Demostración. Primero veamos que a todo complejo simplicial geométrico \mathcal{K} le podemos asociar un complejo abstracto K . Tomando V la unión de todos los vértices de $\alpha \in \mathcal{K}$, y como familia K los subconjuntos de V que son conjunto de vértices de algún $\alpha \in \mathcal{K}$.

Veamos cómo probar la otra dirección de la equivalencia, es decir: cómo a todo complejo abstracto K le podemos asociar uno geométrico \mathcal{K} . Sea n el número de vértices de K y supongamos que $V = \{1, 2, \dots, n\}$. A cada vértice v_i le asociamos un punto en \mathbb{R}^n utilizando los vectores de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Ahora a cada cara S del complejo abstracto K le asociamos la envolvente convexa de los puntos e_i correspondientes. Es decir asociamos

$$S \mapsto \alpha_S = \text{conv}\{e_i : i \in S\}.$$

Todos estos conjuntos son símplices porque $\{e_1, \dots, e_n\}$ es afinmente independiente.

La colección de todos esos símplices forma un complejo geométrico ya que para cada símplice geométrico, sus caras se corresponden con los subconjuntos de su conjunto de vértices (ver Observación 1.18). Esto demuestra la propiedad (1) de la Definición 1.22. La propiedad (2) es consecuencia de que todos los α_S que tenemos son caras del símplice estándar de dimensión $n - 1$, es decir, del símplice

$$\text{conv}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\},$$

cuyas caras forman un complejo simplicial geométrico. □

Demostración del Teorema 2.12.

Gracias a la proposición anterior podemos trabajar con complejos simpliciales abstractos en vez de geométricos. En la práctica eso viene a decir solamente que cuando hablemos de una cara del complejo nos estamos refiriendo al conjunto de vértices de esa cara geométrica.

Sea F_1, F_2, \dots, F_k un descascaramiento para C . Se puede construir C utilizando el descascaramiento, de forma que en el paso j -ésimo añadimos a la construcción el conjunto de caras de F_j que no están en la unión de las anteriores. Lo que queremos es relacionar ese número de caras con el índice que tiene F_j en el descascaramiento.

Para cada F_j definimos el conjunto R_j formado por todos los vértices $v \in F_j$ tal que $F_j \setminus v$ ¹ está contenido en alguna cara maximal F_i con $i < j$. Esto es:

$$R_j = \{v \in F_j : F_j \setminus v \subseteq F_i \text{ para algún } 1 \leq i < j\}. \quad (2.1)$$

Esto significa que R_j es el conjunto de vértices de F_j opuestos a las caras de codimensión 1 que han aparecido en facetas anteriores del descascaramiento. La observación importante es que por tanto el cardinal $|R_j|$ es simplemente el índice de F_j en el descascaramiento, porque cuenta cuántas caras de codimensión uno de F_j estaban ya en el complejo antes del paso j . En particular

$$h_i = |\{j : |R_j| = i, 1 \leq j \leq k\}|.$$

Por otro lado, vamos a ver que las caras que se añaden al complejo C en el paso j del descascaramiento son exactamente las caras de F_j que contienen a todo R_j . Es decir:

Una cara de F_j ya está en el complejo \Leftrightarrow esta cara no contiene a R_j .

Para ver esta doble implicación vemos primero de derecha a izquierda: Supongamos que una cara G de F_j ya está en el complejo antes del paso j . Esto significa que G está contenido en algún F_i con $i < j$. Por definición del descascaramiento, la intersección de F_j (como símplice geométrico) con el complejo del paso anterior tiene codimensión uno. Por tanto, G está contenido en alguna cara G' de codimensión 1 de F_j con G' contenida en algún F_i , $i < j$. Esa cara será de la forma $F_j \setminus v$ para algún v de F_j y entonces tenemos que v está en R , por definición de R_j . Pero entonces

$$G \subseteq G' = F_j \setminus \{v\}, \quad v \in R_j \quad \Rightarrow \quad R_j \not\subseteq G.$$

Ahora vemos de derecha a izquierda: Si una cara G de F_j no contiene a R_j , entonces hay al menos un vértice v de R_j que no está en G , es decir, $G \subseteq F_j \setminus v$ con $v \in R_j$. Por la definición de R_j , esto significa que $F_j \setminus v$ (y por tanto también G) debe haber aparecido en una etapa anterior del descascaramiento.

Una vez demostrado el “si y solo si” terminamos la demostración del Teorema como sigue. Sea

$$(h'_0, \dots, h'_d)$$

el h -vector del descascaramiento de acuerdo a la Definición 2.10. Es decir,

$$h'_i = |\{l : F_l \text{ tiene índice } i \text{ en el descascaramiento}\}| = |\{l : |R_l| = i\}|.$$

¹Aquí y en el resto de la memoria cuando tenemos un elemento x de un conjunto X escribiremos $X \setminus x$ refiriéndonos a $X \setminus \{x\}$. Aunque es un pequeño abuso de notación, es una costumbre extendida cuando se trabaja con complejos simpliciales.

Lo que queremos ver es que $h'_i = h_i$ para todo i :

Para ello llamamos G_j al conjunto de caras que aparecen en el paso j . Por el “si y solo si” sabemos que:

$$G_j = \{F \text{ cara de } F_j : R_j \subseteq F \subseteq F_j\}.$$

Obsérvese que los G_j no son subcomplejos. Aún así, usaremos la notación $f_l(G_j)$ para denotar cuántas caras de dimensión l hay en el conjunto G_j .

Tenemos por tanto que para todo $l \in \{0, \dots, d-1\}$,

$$f_{l-1}(C) = \sum_{j=1}^k f_{l-1}(G_j).$$

Por otro lado, cada cara de dimensión $l-1$ de un G_j está definida por los vértices de R_j más otros $l - |R_j|$ elegidos de entre los $d - |R_j|$ vértices restantes de F_j . Es decir,

$$f_{l-1}(G_j) = \binom{d - |R_j|}{l - |R_j|}, \quad \text{si } l \geq |R_j|, \quad f_{l-1}(G_j) = 0 \quad \text{si } l < |R_j|.$$

Juntando ambas cosas:

$$f_{l-1}(C) = \sum_{j=1}^k f_{l-1}(G_j) = \sum_{j=1}^k \binom{d - |R_j|}{l - |R_j|} = \sum_{i=0}^l h'_i \binom{d-i}{l-i}.$$

Además, el Teorema 2.9 nos dice que las mismas fórmulas relacionan el f -vector con el h -vector inicial, es decir,

$$f_{l-1}(C) = \sum_{i=0}^l h_i \binom{d-i}{l-i} = \binom{d}{l} h_0 + \binom{d-1}{l-1} h_1 + \dots + (d-l+1)h_{l-1} + h_l.$$

Que las fórmulas sean las mismas no implicaría en principio que $h_i = h'_i$ para cada i , pero en nuestro caso sí lo implica por los argumentos de la demostración del Teorema 2.9. En ese teorema vimos que el paso del f -vector al h -vector se puede entender como una matriz invertible. Como la matriz es la misma para el h' -vector, su inversa también. □

Corolario 2.15. *El h -vector de un complejo puro descascarable tiene todas sus coordenadas mayores o igual a cero.*

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que las coordenadas del h -vector se pueden obtener como conteo del número de caras con índice i . □

Las ecuaciones de **Dehn-Sommerville** del Teorema 2.2 se pueden expresar de manera mucho más sencilla en términos del h -vector de un d -politopo P . Y esto es:

Teorema 2.16 (Ziegler [22, Tma. 8.21 (p. 252)]). **Ecuaciones de Dehn-Sommerville.** *El h -vector de un d -politopo convexo simplicial satisface:*

$$h_k = h_{d-k} \text{ para } 0 \leq k \leq d,$$

lo cual implica que el h -vector es un vector simétrico y positivo.

Observación 2.17. *El caso $k = 0$ de estas ecuaciones es la Ecuación de Euler- Poincaré. En efecto, usando que $h_0 = 1$ y que*

$$h_d = f_{d-1} - f_{d-2} + \dots + (-1)^{d-1} f_0 + (-1)^d f_{-1}$$

tenemos que la ecuación $h_0 = h_k$ se convierte en

$$f_{d-1} - f_{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1} f_0 = 1 - (-1)^d f_{-1}.$$

Aunque no lo probaremos, estas ecuaciones son equivalentes a las que también llamábamos ecuaciones de Dehn-Sommerville en el Capítulo 1 (ver Teorema 2.2).

Por otro lado, la ecuación del Teorema 2.2 para $k = -1$ es también la fórmula de Euler-Poincaré (de la que hemos hablado al comienzo del capítulo 2.1).

En efecto, en el Teorema 2.2 la ecuación que tenemos para $k = -1$ es:

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j \binom{j+1}{k+1} f_j = (-1)^{d-1} f_k.$$

Demostración del Teorema 2.16. Utilizando el lema 1.39 sabemos que si F_1, F_2, \dots, F_s es descascaramiento, su inversa F_s, F_{s-1}, \dots, F_1 también lo es. Es más, si F_i viene antes en el que F_j ($i < j$) en el primer descascaramiento, entonces F_i vendrá después de F_j en el descascaramiento inverso. De esto vemos que el conjunto de restricciones para F_j (que llamaremos R'_j) en el descascaramiento inverso es justamente $F_j \setminus R_j$. Es decir, el complementario del conjunto de restricciones del descascaramiento original. Esto es: si F_j contribuye '1' a h_k en el descascaramiento original (donde $k = |R_j|$), entonces contribuye '1' a h_{d-k} en el descascaramiento inverso (donde $d-k = |F_j \setminus R_j|$).

Así el valor de h_k computado en el descascaramiento original es el mismo valor de h_{d-k} computado en el descascaramiento inverso.

Sin embargo, por el teorema 2.12 el h -vector es independiente del descascaramiento utilizado para contarlos, por lo que $h_k = h_{d-k}$ \square

2.4. Demostración del Teorema de la Cota Superior

En esta sección vamos a ver cómo utilizar los h -vectores para demostrar el Teorema de la Cota Superior (Teorema 1.54), que nos dice que los politopos cíclicos dan una Cota Superior para los f -vectores de politopos arbitrarios. Para ello necesitamos demostrar primero el siguiente Teorema auxiliar:

Teorema 2.18. *Sea P un d -politopo simplicial con n vértices, entonces para $0 \leq k \leq d$ se tiene:*

$$h_k(P) \leq \binom{n-d-1+k}{k}.$$

A su vez, para demostrar este Teorema necesitamos unos lemas que usan el concepto de *estrella* o *star* de un vértice en un complejo simplicial.

Para un complejo poliédrico C , definimos la **estrella** y la denotaremos como $\text{star}(v, C)$ del vértice v como el subcomplejo poliédrico formado por todas las caras que contienen a v , junto con sus subcaras. Definimos el **enlace** como el subcomplejo $\text{link}(v, C)$ formado por todas las caras $G \in \text{star}(v, C)$ de la star que no contienen a v como vértice.

Una última definición que podemos ofrecer es la definición de **antiestrella**, simplificada como $\text{ast}(v, C)$ que consiste en todas las caras del complejo C que no contienen a v .

En relación con estas tres últimas definiciones, podremos obtener el enlace de un vértice como $\text{link}(v, C) = \text{ast}(v, C) \cap \text{star}(v, C)$

En el siguiente ejemplo se puede ver cómo sería la estrella y el enlace en este complejo para el vértice v . Es importante resaltar que usaremos C/v como abreviación de $\text{link}(v, C)$.

Una observación importante es que

$$h_k(\text{star}(v, C)) = h_k(C/v),$$

porque cualquier descascaramiento del enlace nos da un descascaramiento de la estrella y viceversa, con el mismo h -vector en los dos. Es decir:

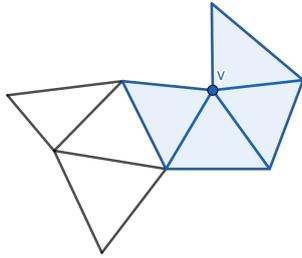


Figura 2.2: Estrella del complejo.

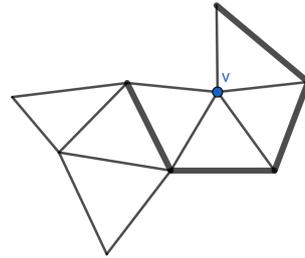


Figura 2.3: Enlace del complejo.

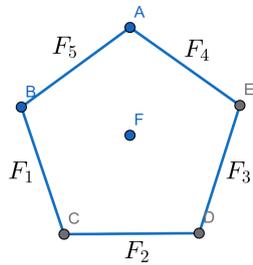


Figura 2.4: El enlace del vértice F en una pirámide pentagonal.

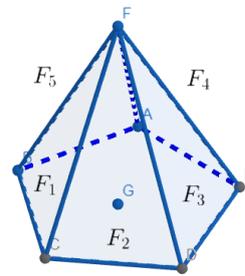


Figura 2.5: La estrella del vértice F en una pirámide pentagonal.

Es fácil comprobar que en ambas figuras el h -vector es el mismo.

La demostración del Teorema 2.18 se seguirá fácilmente de los siguientes dos lemas:

Lema 2.19. *Sea P un d -politopo simplicial con n vértices, entonces para todo vértice v y para todo $0 \leq k \leq d$ se tiene:*

$$h_k(C/v) \leq h_k(C).$$

Por lo tanto:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(C/v) \leq n h_k(C).$$

Además, si C es k -vecinal, se tiene la igualdad.

Demostración. La segunda desigualdad es trivial a partir de la primera, porque tenemos n vértices.

Para ver la primera desigualdad consideramos un descascaramiento de C que primero use todas las facetas de $star(v, C)$, y luego las de $astar(v, C)$. La existencia de un descascaramiento que haga eso se deduce de la demostración del Teorema 1.38, porque nos vale el descascaramiento que se hace en esa demostración tomando como recta r una que pase muy cerca del vértice v .

Como el h -vector lo podemos ir calculando por el descascaramiento (Teorema 2.12), lo que añadimos en la primera parte de ese descascaramiento contribuye igual a $h_k(star(v, C))$ y a $h_k(C)$, pero lo que añadimos en la segunda parte solo contribuye a $h_k(C)$, así que

$$h_k(star(v, C)) \leq h_k(C).$$

Para que se cumpla $h_k(C/v) = h_k(C)$, es necesario que en un shelling que comience con la estrella de v , no haya ninguna cara “nueva” de tamaño a lo sumo k fuera de la estrella de v . De

este modo, obtenemos que, para $l \geq 1$, la igualdad $h_k(C/v) = h_k(C)$ se cumple para todo $k \leq l$ **si y solo si** en un shelling que empieza por la estrella de v , no aparece ninguna nueva cara mínima de tamaño $\leq l$ fuera de la estrella de v .

Equivalente a esto es decir que toda cara G con $|G| \leq l$ está contenida en la estrella de v , de modo que $G \cup \{v\}$ también es una cara. La igualdad en 2.19 se cumple **solo si** se cumple para todos los vértices v . A partir de esto, deducimos que la igualdad en 2.19, y por tanto en 2.18, se cumple para todo $k \leq l$ **si y solo si** C es un politopo $(l + 1)$ -vecinal. \square

Lema 2.20. *Sea P un d -politopo simplicial con n vértices, entonces para $0 \leq k \leq d$ se tiene:*

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(\text{star}(v, C)) = (k + 1)h_{k+1}(C) + (d - k)h_k(C). \quad (2.2)$$

Demostración. Sea C el complejo de caras de P , que es un complejo simplicial. Sea F_1, \dots, F_m un descascaramiento de C . Denotando C_i al complejo que tenemos en el paso i vamos a demostrar por inducción sobre i que la fórmula se cumple para todo C_i y, por tanto, se cumplirá también para $C = C_m$. Empezamos con el complejo vacío C_0 donde claramente todos los términos de la fórmula son cero y no hay nada que demostrar.

Ahora supongamos que añadimos una nueva cara F_j y observamos cómo cambia

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(\text{star}(v, C)).$$

Como es lógico, solo se verán afectados aquellos vértices v tales que $v \in F_j$, porque son los que tienen a F_j en $\text{star}(v, C)$. Hay dos casos según si pertenecen a R_j o no, donde el R_j es el mismo que usamos en la demostración del Teorema 2.12 (ver ecuación (2.1)). Recordemos que $|R_j|$ coincide con el índice de F_j en el descascaramiento de C .

1. Si $v \notin R_j$, es decir, para

$$\{v : \text{el conjunto } F_j \setminus v \text{ no estaba en ninguna faceta anterior } F_i, i < j\},$$

en la estrella $\text{star}(v, C_j)$ aparece una nueva cara de tamaño $|R_j|$ porque solo los vértices de R_j están en la intersección de F_j con el complejo anterior. Por tanto, F_j contribuirá a $h_k(\text{star}(v, C))$ si y solo si $|R_j| = k$, es decir, si F_j contribuye al $h_k(C)$.

En este caso, hay $d - k$ vértices en F_j con esta propiedad, dado que solo cumplen esto los vértices de $F_j \setminus R_j$ y $|F_j| = d, |R_j| = k$.

Por cada vértice $v \notin R_j$ se añade una contribución de "1" a $h_k(\text{star}(v, C))$. Entonces en total en el lado izquierdo de la ecuación 2.2 (la suma de los $h_k(\text{star}(v, C))$), se suman $d - k$ unidades.

En el lado derecho, el número de h_k aumenta en "1" (se añade una nueva cara), y como aparece multiplicado por $(d - k)$, este término aumenta también en $d - k$ unidades.

Así ambos términos aumentan la misma cantidad.

2. Si $v \in R_j$, significa que $F_j \setminus v \subseteq F_i$ para algún $i < j$. Esto significa que al añadir F_j estamos "cerrando" una nueva cara en en la estrella $\text{star}(v, C)$. Es decir, esa cara ya estaba formada parcialmente por otras caras previamente añadidas, y la nueva faceta la completa.

Esta nueva cara añadida al enlace $\text{star}(v, C)$ será de tamaño $|R_j| - 1$ dado que tenemos que $F_j \setminus v$ ya estaba en el complejo antes de añadir F_j , pero este último F_j aún no estaba completo. Ahora bien, al añadir F_j ya se crea la cara completa, y en la estrella $\text{star}(v, C)$ se añade $F_j \setminus v$. Tendremos contribución a $h_k(\text{star}(v, C))$ si y solo si $|R_j| = k + 1$. Además la contribución será de "1" a $k + 1$ términos de $\sum h_k(\text{star}(v, C))$. A la vez, tenemos que h_{k+1} se incrementa en 1, por lo que el lado derecho aumenta en $k + 1$. \square

En el fondo lo que ocurre es que si v es un vértice de una cara F_j entonces:

- si $v \notin R_j$, el índice de F_j es el mismo en el descascaramiento de C y en el descascaramiento de $star(v, C)$.

- si $v \in R_j$, el índice de F_j en el descascaramiento de C es uno más que en el descascaramiento de $star(v, C)$.

Ejemplo 2.21. Para hacer esta demostración más entendible, mostraremos a continuación un ejemplo de descascaramiento para un octaedro en el que veremos cómo aumenta $\sum h_k(C/v)$ con respecto a cada h_k y a cada h_{k+1} .

En la siguiente imagen podemos ver una proyección del descascarmiento del octaedro, con cada cara numerada. El vértice número 1 es el situado en el centro, el número 2 es el situado abajo a la izquierda, y el resto los siguientes en sentido horario, hasta llegar al vértice número 6, que se encuentra situado en el "infinito".

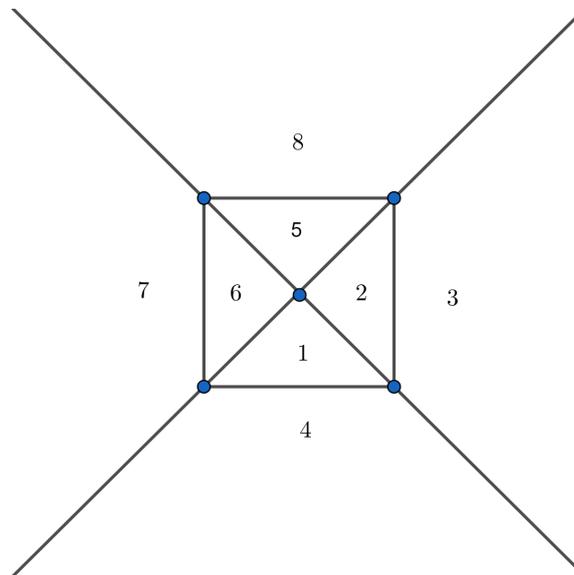


Figura 2.6: Proyección del octaedro.

En la siguiente tabla podemos ver cómo afectan las diferentes caras del descascaramiento al conteo del h -vector general y a los h -vectores de C/v (equivalentemente, de $star(v, C)$ para cada vértice).

La segunda columna representa el h -vector por conteo del octaedro. Las sucesivas columnas hacia la derecha representan el h -vector de $star(C, v_i)$ para cada vértice v_i (para abreviar, en la tabla a estos últimos los denotamos $h(v_i)$). Este h -vector es al final siempre $(1, 2, 1)$, da igual el vértice, dado que todos son similares. Para calcular este h -vector, podemos pensar en cada enlace C/v como un ciclo de cuatro vértices y 4 aristas de forma que la primera arista que añadimos representa el h_0 (no interseca con ninguna arista anterior), las dos siguientes forman el h_1 , dado que ambas intersecan en un vértice con las caras añadidas previamente, y por último la arista final añadida que interseca con dos aristas que ya estaban, de forma que comparte dos vértices y esta

se corresponde con h_2 .

Triángulo	$h_i(\text{oct})$	$h_i(v_1)$	$h_i(v_2)$	$h_i(v_3)$	$h_i(v_4)$	$h_i(v_5)$	$h_i(v_6)$
1	h_0	h_0	h_0	h_0			
2	h_1	h_1		h_1	h_0		
3	h_1			h_1	h_1		h_0
4	h_2		h_1	h_2			h_1
5	h_1	h_1			h_1	h_0	
6	h_2	h_2	h_1			h_1	
7	h_2		h_2			h_1	h_1
8	h_3				h_2	h_2	h_2
h -vector	(1, 3, 3, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)

Por otra parte la siguiente tabla muestra en el mismo ejemplo varía el h -vector de cada cara en cada paso según se van añadiendo caras al descascaramiento.

Triángulo	$h(\text{oct})$	$h(v_1)$	$h(v_2)$	$h(v_3)$	$h(v_4)$	$h(v_5)$	$h(v_6)$
1	(1, 0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 0)			
2	(1, 1, 0, 0)	(1, 1, 0)		(1, 1, 0)	(1, 0, 0)		
3	(1, 2, 0, 0)			(1, 2, 0)	(1, 1, 0)		(1, 0, 0)
4	(1, 2, 1, 0)		(1, 1, 0)	(1, 2, 1)			(1, 1, 0)
5	(1, 3, 1, 0)	(1, 2, 0)			(1, 2, 0)	(1, 0, 0)	
6	(1, 3, 2, 0)	(1, 2, 1)	(1, 2, 0)			(1, 1, 0)	
7	(1, 3, 3, 0)		(1, 2, 1)			(1, 2, 0)	(1, 2, 0)
8	(1, 3, 3, 1)				(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)
h -vector final	(1, 3, 3, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)	(1, 2, 1)

Para mantener la notación en este ejemplo las caras del descascaramiento las enumeraremos del 1 al 8 y no las llamaremos F_1, \dots, F_8 como hemos hecho con cualquier descascaramiento.

Veamos como esta tabla se relaciona con el lema 2.20:

Por un lado, veamos cómo cambia la ecuación del lema 2.20 según vamos añadiendo caras al descascaramiento, por ejemplo, tomando $k = 1$. Para ello mostramos varias iteraciones del descascaramiento.

- Paso 1: Añadimos el primer triángulo (1^a cara al octaedro, que se corresponde con la segunda fila de las tablas anteriores), y tenemos:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_1(C/v) = 0 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = (2)h_2(C) + (2)h_1(C).$$

- Paso 3: Añadimos la tercera cara, es decir, en nuestro complejo están las tres primeras caras.

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_1(C/v) = 4 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = (2)h_2(C) + (2)h_2(C).$$

- Paso 7: Ahora tenemos colocadas ya las siete primeras caras en el octaedro, por lo que tenemos:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_1(C/v) = 12 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 12 = (2)h_2(C) + (2)h_2(C).$$

Por último, veamos como el lema 2.20 se satisface para cada $k \in \{0, 1, 2\}$ con todo el descascaramiento completo.

- $k = 0$

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_0(C/v) = 6 = (1)h_1(C) + (3)h_0(C) = 3 + 3 = 6.$$

- $k = 1$

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_1(C/v) = 12 = (2)h_2(C) + (2)h_1(C) = 6 + 6 = 12.$$

- $k = 2$

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_2(C/v) = 6 = (3)h_3(C) + (1)h_2(C) = 3 + 3 = 6.$$

Con esto podemos ya demostrar el Teorema 2.18:

Demostración del Teorema 2.18. Para probar esta desigualdad procedemos con inducción sobre k , para $k = 0$ se cumple claramente dado que hemos definido que $h_0 = 1$.

Es suficiente con probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{h_{k+1}}{h_k} \leq \frac{\binom{n-d+k}{k+1}}{\binom{n-d-1+k}{k}} = \frac{(n-d+k)!k!}{(n-d-1+k)!(k+1)!} = \frac{(n-d+k)}{(k+1)}.$$

o lo que es equivalente:

$$(k+1)h_{k+1} \leq (n-d+k)h_k, \text{ para } k \geq 0.$$

Procederemos separando esta fórmula en dos partes:

- Por un lado tenemos que el sumatorio de los $h_k(C/v)$ es, por el lema 2.20, igual a:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(C/v) = (k+1)h_{k+1}(C) + (d-k)h_k(C).$$

- Por otro lado, el sumatorio de los $h_k(C/v)$ es menor o igual que $n \cdot h_k$, por el lema 2.19:

$$\sum_{v \in \text{vert}(C)} h_k(C/v) \leq nh_k(C).$$

Juntando las dos cosas tenemos que

$$(k+1)h_{k+1}(C) + (d-k)h_k(C) \leq nh_k(C),$$

o, lo que es lo mismo:

$$(k+1)h_{k+1}(C) \leq (n-d+k)h_k(C),$$

□

Ahora vamos a comprobar que la cota del Teorema 2.18 coincide con el h -vector del politopo cíclico:

Teorema 2.22. *Sea $C_d(n)$ un politopo cíclico de dimensión d con n vértices. Entonces para $k \leq d/2$, se tiene que*

$$h_k(C_d(n)) = \binom{n-d-1+k}{k}.$$

Demostración. Para que se cumpla $h_k(C/v) = h_k(C)$, es necesario que en un shelling que comience con la estrella de v , no haya ninguna cara “nueva” de tamaño a lo sumo k fuera de la estrella de v . De este modo, obtenemos que, para $l \geq 1$, la igualdad $h_k(C/v) = h_k(C)$ se cumple para todo $k \leq l$ **si y solo si** en un shelling que empieza por la estrella de v , no aparece ninguna nueva cara mínima de tamaño $\leq l$ fuera de la estrella de v .

Equivalente a esto es decir que toda cara G con $|G| \leq l$ está contenida en la estrella de v , de modo que $G \cup \{v\}$ también es una cara. La igualdad en 2.19 se cumple **solo si** se cumple para todos los vértices v . A partir de esto, deducimos que la igualdad en 2.19, y por tanto en 2.18, se cumple para todo $k \leq l$ **si y solo si** C es un politopo $(l+1)$ -vecinal.

Por el camino, también hemos calculado el f -vector de los politopos vecinales: basta con aplicar el caso de igualdad del teorema 2.18.

□

Podemos ya hacer la demostración del Teorema 1.54:

Demostración del Teorema 1.54. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el politopo P es simplicial; si P no fuera simplicial se puede modificar ligeramente, de forma que perturbando los vértices logramos un politopo simplicial con más caras que el original (esto es el Lema 8.24 de [22]).

Una vez que tenemos un politopo simplicial, los Teoremas 2.18 y 2.22 implican que para $k \leq d/2$ se tiene que

$$h_k(P) \leq h_k(C_d(n)).$$

Las ecuaciones de Dehn-Sommerville implican que esa misma desigualdad se da para $k \geq d/2$, porque

$$h_k(P) = h_{d-k}(P) \leq h_{d-k}(C_d(n)) = h_k(C_d(n)).$$

Como el h -vector del politopo cíclico es lo mas grande posible, y el f -vector se obtiene como combinación positiva del h -vector, el f -vector también es lo mas grande posible. \square

En la siguiente sección presentamos un famoso teorema que prueba una condición necesaria y suficiente que debe cumplir un vector f para que sea el f -vector de algún politopo simplicial de cualquier dimensión.

2.5. El Teorema g : la caracterización completa de f -vectores de politopos simpliciales

Es sabido que sí se conoce una caracterización para que un vector $f = (f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ sea el f -vector de algún politopo en tres dimensiones ($d=3$). Es necesario y suficiente que se cumpla:

$$-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = 1.$$

$$f_2 \leq 2f_0 - 4,$$

$$f_0 \leq 2f_2 - 4.$$

La primera ecuación es la fórmula de Euler (1758) y que dicha fórmula junto con las otras dos desigualdades caracterizan los f -vectores de dimensión 3 lo demostró Steinitz en 1906 (ver [15] o [22, Ejercicio 8.28]). Obsérvese que las desigualdades de Steinitz admiten la siguiente forma, más simétrica:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f_0 - 4}{f_2 - 4} \leq 2.$$

Ejemplo 2.23. *Mostramos un ejemplo para ver que sí se cumple Steinitz.*

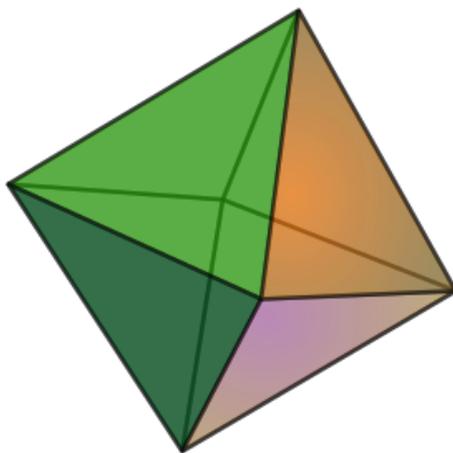


Figura 2.7: Octaedro.

Podemos comprobar en este octaedro que se cumple la desigualdad.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f_0 - 4}{f_2 - 4} \leq 2,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{6 - 4}{8 - 4} \leq 2, \text{ es decir, } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 2.$$

La demostración de esta es sencilla y se puede encontrar, por ejemplo, en [15, 16]: Primero partimos de la igualdad del ejemplo 2.5, que generalizado para politopos no simpliciales es la desigualdad $3f_2 \leq 2f_1$. Dado que cada arista está en dos caras, pero en cada cara hay por lo menos tres aristas, por lo que $3f_2 \leq 2f_1$.

Ahora utilizando Euler, $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, y sustituyendo en la desigualdad obtenemos:

$$3f_2 \leq -4 + 2f_0 + 2f_2, \quad f_2 \leq -4 - 2f_0, \quad f_2 - 4 \leq -8 + 2f_0,$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f_0 - 4}{f_2 - 4}.$$

Así ya tenemos un lado de la desigualdad.

Para la otra desigualdad, partimos de que cada vértice está en como poco 3 aristas y cada arista contiene dos vértices. Luego se cumple la desigualdad $3f_0 \leq 2f_1$, a partir de aquí repetimos el procedimiento del apartado anterior, usamos la fórmula de Euler:

$$3f_0 \leq -4 + 2f_0 + 2f_2, \quad f_0 \leq -4 - 2f_2, \quad f_0 - 4 \leq -8 + 2f_2,$$

$$\frac{f_0 - 4}{f_2 - 4} \leq 2.$$

Pero para politopos de mayor dimensión no conocemos una respuesta completa. Aunque si nos centramos únicamente en el caso de politopos simpliciales, sí que se conoce una respuesta total para que un vector d sea el f -vector de un politopo. Esto se conoce como el **Teorema G**.

Previamente, introducimos la definición de m -vector, necesaria para presentar este teorema.

Definición 2.24. Diremos que un vector f es un **m -vector** si cumple alguna de las siguientes propiedades:

- Es el **vector de caras de un multicomplejo**. Un multicomplejo es una familia de multiconjuntos que es cerrada por contenido: si un multiconjunto está, todos sus multiconjuntos también. El vector de caras de un multicomplejo cuenta cuántos multiconjuntos hay de cada tamaño. Por ejemplo, m_0 siempre es 1, porque el conjunto vacío ha de estar en cualquier multicomplejo.

Un ejemplo concreto de vector de caras de un multicomplejo sería para el multicomplejo $M = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, a\}, \{a, b\}\}$.

Vamos a contar cuántos multiconjuntos hay de cada tamaño (cantidad total de elementos, contando repeticiones):

- Tamaño 0: Solo está el conjunto vacío \emptyset , luego hay 1.
- Tamaño 1: Tenemos a $\{a\}$ y $\{b\}$ luego el tamaño es 2.
- Tamaño 2: Tenemos $\{a, a\}$ y $\{a, b\}$ por lo que el tamaño es 2.

Y así el vector de caras de este multicomplejo queda $(1, 2, 2)$.

- Es la **sucesión de Hilbert** del conjunto de monomios estándar de un ideal monomial en $\mathbf{K}[x]$, donde \mathbf{K} es un cuerpo arbitrario. En el contexto de un ideal monomial I en el anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_d]$, la sucesión de Hilbert describe la cantidad de monomios que no están en I en cada grado n . En otras palabras, mide cuántos monomios "sobreviven" en el espacio cociente S/I . Un ideal monomial \mathbf{I} es un ideal generado por monomios, y podemos

pensar en él como un conjunto cerrado hacia arriba de puntos en \mathbb{N}^n . Si un punto está, todos los que son mayores o iguales que él coordenada a coordenada también. Los monomios estándar son los que no están en el ideal y , por tanto, son un conjunto cerrado hacia abajo.

Un ejemplo de sucesión de Hilbert del conjunto de monomios estándar en un ideal monomial puede ser el siguiente:

Tomamos el anillo $\mathbf{K}[x, y]$, y el ideal monomial $I = (x^2, y^2)$, por lo que en I están los múltiplos de x^2 y de y^2 , entonces los monomios estándar que no están en I son:

$$1, \quad x, \quad y, \quad xy.$$

Luego de grado cero solo tenemos el monomio 1, de grado uno tenemos x, y y de grado dos tenemos solo a xy por lo que la sucesión de Hilbert quedaría:

$$H(n) = \{1, 2, 1, 0, 0, \dots\},$$

- Es la **sucesión de Hilbert** de un álgebra graduada estándar $K[x]/I$ obtenida como cociente por algún ideal homogéneo. La sucesión de Hilbert cuenta cuántas clases distintas de polinomios de grado d hay en el cociente $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$, es decir, es la sucesión:

$$H_A(d) = \dim_K A_d,$$

que nos dice, para cada grado d , cuántos elementos lineales e independientes hay en el cociente en ese grado.

Un ejemplo para esta sección podría ser el cociente $A = \mathbf{K}[x, y]/(x^2, xy)$, cuya sucesión de Hilbert es:

- Grado 0: solo la constante 1, por lo que $\dim A_0 = 1$.
- Grado 1: los posibles monomios serían x, y , pero ninguno pertenece al ideal, luego ambos sobreviven y así $\dim A_1 = 2$.
- Grado 2: los posibles monomios son x^2, y^2, xy , el único que no pertenece al ideal es y^2 , así $\dim A_2 = 1$.
- Para grado $d \geq 3$ solo sobrevive y^d (no pertenece), por lo que $\dim A_d = 1$ para $d \geq 2$.

Así la sucesión de Hilbert quedaría:

$$H_A(d) = \{1, 2, 1, 1, 1, \dots\}.$$

- Es el **h -vector** de un complejo simplicial puro y descargable.

Teorema 2.25 (Santos [16, Tma. 5 (p. 172)]). **Teorema g.** Un vector $(f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ es el vector de caras de algún d -politopo simplicial si y solo si su h -vector satisface:

1. Es simétrico, es decir $h_i = h_{d-i}$ para todo i .
2. Su primera mitad es creciente (y por tanto su otra mitad decreciente):

$$h_0 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

3. Su vector de diferencias,

$$g = (g_0, \dots, g_{\lfloor d/2 \rfloor}) := (h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \dots, h_{\lfloor d/2 \rfloor} - h_{\lfloor d/2 \rfloor - 1}),$$

es un m -vector.

La demostración del teorema g es compleja, y requeriría mucho espacio y tiempo, además de conceptos avanzados de topología y geometría algebraica, por lo que no la daremos en este trabajo. Además de los artículos originales, una demostración completa y bibliografía al respecto se puede encontrar en [7].

Capítulo 3

La Conjetura de Bárány y el Teorema de Hinman

En los dos capítulos previos hemos explorado diversos resultados relacionados con el número de caras de un politopo P , tanto en el caso de politopos simples como de politopos simpliciales.

A pesar de que la caracterización de las caras de politopos simples y simpliciales está completamente desarrollada, el estudio del número de caras de un politopo generalizado de dimensión d sigue siendo en gran parte una cuestión abierta. En particular, las condiciones bajo las cuales un vector puede ser el f -vector de un politopo no simplicial no están completamente comprendidas, y constituyen uno de los grandes interrogantes en la Teoría de Politopos.

En este capítulo nos centraremos en un resultado reciente demostrado por Hinman [9] en 2023, que resuelve afirmativamente una conjetura planteada por Bárány en 1998 [3]. Este resultado proporciona una cota inferior para los f -vectores de politopos simpliciales, dentro del marco de las cotas combinatorias.

Para motivar adecuadamente el enunciado y la demostración del teorema, presentaremos primero el llamado Teorema de la Cota Inferior, que establece una cota mínima para el número de caras de cada dimensión en politopos simpliciales. A continuación, abordaremos algunos resultados técnicos sobre sumas de ángulos y proyecciones de politopos, que dan contexto a la prueba del Teorema de Hinman. Finalmente, presentaremos y demostraremos dicho teorema.

3.1. El Teorema de la cota inferior y el Teorema de Hinman

El siguiente teorema da una cota inferior para la entrada k -ésima del f -vector del politopo C en función de la dimensión de C (d), de k y de f_0 . Aunque este teorema se sigue del teorema g (ver Observación 3.2), había sido demostrado por Barnette antes de que se conociera el Teorema g . De hecho, este teorema y otros similares que se conocían fueron la motivación para que McMullen conjeturara el enunciado del Teorema g en [11].

Teorema 3.1 (Lower bound theorem, Barnette 1971, [5]). *Sea C un d -politopo simplicial y sea f su f -vector de caras, entonces se satisface:*

$$(1) \quad f_k \geq \binom{d}{k} f_0 - \binom{d+1}{k+1} k \quad \text{for all } 1 \leq k \leq d-2. \quad (3.1)$$

$$(2) \quad f_{d-1} \geq (d-1)f_0 - (d+1)(d-2). \quad (3.2)$$

Omitimos la demostración, que se puede encontrar en la publicación de David Barnette [4].

Observación 3.2. *El "lower bound theorem" es equivalente a que $g_i \geq 0$ para todo i o, equivalentemente, que*

$$h_{i+1} \geq h_i, \quad \forall i < d/2.$$

Por ejemplo, sabiendo que $h_1 = n - d$ se tiene que

$$h_2 \geq h_1 = n - d,$$

y por tanto

$$f_1 = \binom{d}{2}h_0 + \binom{d-1}{1}h_1 + \binom{d-2}{0}h_2 \geq \binom{d}{2} + (d-1)(n-d) + (n-d) = \binom{d}{2} + d(n-d).$$

El siguiente corolario es una consecuencia del apartado número 2 del teorema anterior, dado que el enunciado es el mismo que el del teorema cambiando únicamente el politopo C por su dual, de ahí que se intercambien f_0 y f_{d-1} .

Corolario 3.3. *Si P es un d -politopo simple, entonces*

$$f_0 \geq (d-1)f_{d-1} - (d+1)(d-2).$$

A día de hoy no existe ningún resultado general que garantice una cota inferior para los politopos de dimensión d con un número cualquiera de vértices; de hecho, ni siquiera existe una conjetura razonable al respecto.

Aunque sí es cierto que se conoce algún resultado sobre cotas inferiores para casos particulares. Un resultado bastante conocido hasta la fecha es el reciente teorema de Xue [21], que fue originalmente conjeturado por Grünbaum en 1967. Este dice que si P es un d -politopo con $f_0 = d + s \leq 2d$, entonces:

$$f_k \geq \binom{d+1}{k+1} + \binom{d}{k+1} - \binom{d+1-s}{k+1}.$$

A partir de esta desigualdad surge la siguiente pregunta: ¿qué sucede cuando no sabemos que $f_0 \leq 2d$?. El matemático Imre Bárány se planteó en 1997 si para cualquier politopo P y para cualquier $0 \leq k \leq d-1$ se cumplía:

$$f_k \geq \min\{f_0, f_{d-1}\}.$$

Esta conjetura ha sido demostrada recientemente por Hinman [9] que, de hecho, ha demostrado un resultado más fuerte.

Para enunciar el Teorema de Hinman, utilizamos la siguiente definición:

$$\text{Para cualquier } 0 \leq k \leq d, \text{ definimos: } \rho(d, k) = \frac{1}{2} \left[\binom{\lceil \frac{d}{2} \rceil}{k} + \binom{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{k} \right].$$

Teorema 3.4 (Hinman, [9]). *Para cualquier d -politopo P y para todo $0 \leq k \leq d-1$:*

$$\frac{f_k(P)}{f_0(P)} \geq \rho(d, k),$$

$$\frac{f_k(P)}{f_{d-1}(P)} \geq \rho(d, d-k-1).$$

En las próxima sección demostraremos este Teorema.

3.2. Resultados previos para la demostración del Teorema de Hinman

Para poder trabajar esta demostración con soltura, es necesario establecer una serie de definiciones y resultados previos.

Definición 3.5. Sea P un d -politopo y sea V su conjunto de vértices. Sea $v \in \mathbb{R}^d$ un vector. Decimos que v está en **posición general** con respecto a P si para todo subconjunto $U \subset V$ tal que $\dim(\text{aff}(U)) < d$, el vector v no es paralelo a $\text{aff}(U)$.

En otras palabras, que un vector v esté en posición general con respecto al politopo P de dimensión d quiere decir que ninguna cara propia (aristas, caras de dimensión menor a d , etc) sean paralelas a v .

Definición 3.6. Sea P un d -politopo y G una cara de P de dimensión k . El **politopo cociente** P/G se define como $H \cap P$, donde H es un subespacio afín de dimensión $(d - k - 1)$ que interseca exactamente aquellas caras de P que contienen propiamente a G .

Ejemplo 3.7. En el siguiente ejemplo mostramos el politopo cociente P/G , donde P es un cubo en tres dimensiones y G es un vértice cualquiera de este.

Aquí surge el hiperplano H de dimensión dos. Podemos observar que P/G es el triángulo formado por la intersección del H con las tres caras que intersecan al vértice.

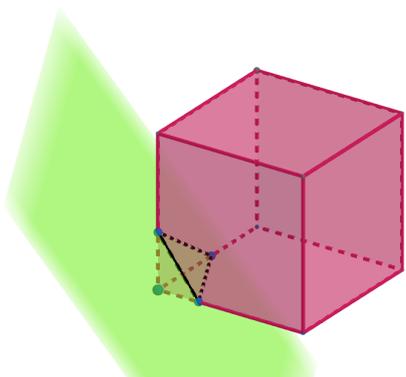


Figura 3.1: Intersección de P con H .

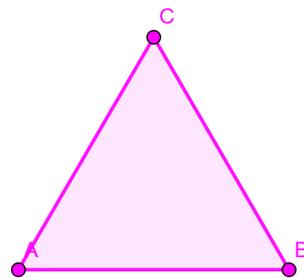


Figura 3.2: Politopo cociente.

Definición 3.8. Sea P un d -politopo y G una cara no vacía de P . Definimos el **ángulo sólido de P en G** , denotado por $\varphi(P, G)$, de la siguiente manera. Sea B una bola abierta centrada en G , suficientemente pequeña para intersecar únicamente aquellas caras de P que contienen a G . Entonces:

$$\varphi(P, G) = \frac{m(B \cap P)}{m(B)},$$

donde m es la función volumen. El cociente es un número entre 0 y 1 que representa la fracción del espacio alrededor de G que ocupa P . En general, en \mathbb{R}^m , m es el volumen d -dimensional, a veces llamado la medida de Lebesgue en dimensión d .

Para $0 \leq k \leq d$, denotamos por $\varphi_k(P)$ la suma de los ángulos sólidos de P en todas sus caras de dimensión k . Es decir, si \mathcal{G}_k es el conjunto de todas las caras de dimensión k de P , entonces:

$$\varphi_k(P) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k} \varphi(P, G).$$

Ejemplo 3.9. Para visualizar mejor este concepto, presentamos un ejemplo sobre cómo calcular el ángulo sólido en un cubo de tres dimensiones.

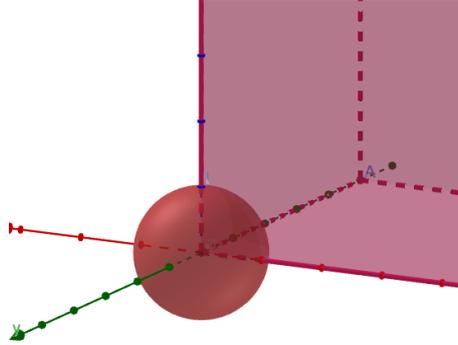
Sea P el cubo unidad en $3d$, que ocupa sus vértices de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

Consideramos el vértice del origen $(0, 0, 0)$, queremos calcular cuánta parte del espacio tridimensional está ocupada por el cubo alrededor de ese vértice. Más formalmente:

$$\varphi(P, G) = \frac{m(B \cap P)}{m(B)},$$

donde:

- P es el cubo.
- $G = \{0, 0, 0\}$.
- B es una bola suficientemente pequeña centrada en el origen.



Podemos observar que alrededor del origen hay 8 octantes pero en este caso, la esfera centrada en el origen solo ocupa 1 de estos 8 octantes (entorno al origen, el cubo se extiende en las direcciones positivas del eje z, y y en la negativa de x).

La superficie total de la esfera en \mathbb{R}^3 es $4\pi r^2$. Como el vértice ocupa $1/8$ del área, entonces el ángulo sólido en ese vértice es

$$\varphi(P, G) = \frac{m(B \cap P)}{m(B)} = \frac{4\pi r^2/8}{4\pi r^2} = \frac{1}{8}.$$

Como todos los vértices del cubo son iguales por simetría y hay 8 vértices, tenemos que la suma de los ángulos sólidos es:

$$\varphi_k(P) = \sum_{G \in \mathcal{G}_k} \varphi(P, G) = 8 \frac{1}{8} = 1.$$

Observación 3.10. Dependiendo del autor es posible encontrarse con que la unidad del ángulo sólido en \mathbb{R}^3 de la esfera mida 4π , y con esta definición cada ángulo del cubo mide $\pi/2$. Así $\varphi_0(\text{cubo}) = 4\pi$.

Lema 3.11. Para todo a, b, c no negativos se tiene:

$$\binom{a}{c} + \binom{b}{c} \geq \binom{\lceil \frac{a+b}{2} \rceil}{c} + \binom{\lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor}{c}.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos $a \geq b$. Si $a - b > 1$,

$$\left[\binom{a}{b} + \binom{b}{c} \right] - \left[\binom{a-1}{c} + \binom{b+1}{c} \right] = \binom{a-1}{c-1} - \binom{b}{c-1} \geq 0.$$

Así,

$$\binom{a}{b} + \binom{b}{c} \geq \binom{a-1}{c} + \binom{b+1}{c} \geq \binom{a-2}{c} + \binom{b+2}{c} \geq \dots \geq \binom{\lceil \frac{a+b}{2} \rceil}{c} + \binom{\lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor}{c}.$$

□

Hinman utiliza los siguientes lemas técnicos que habían sido demostrado por Shephard en la década de los 60.

Teorema 3.12 (Perles and Shephard [13]). *Sea P un politopo d -dimensional y $0 \leq k \leq d - 1$. Para cada vector $v \in \mathbb{R}^d$ en posición general con respecto a P , sea $H_v \subset \mathbb{R}^d$ un hiperplano de codimensión 1 ortogonal a v , y sea $\pi_v : \mathbb{R}^d \rightarrow H_v$ la proyección ortogonal. Entonces,*

$$\varphi_k(P) \geq \frac{1}{2} \left[f_k(P) - \max_v f_k(\pi_v(P)) \right],$$

donde $f_k(P)$ es el valor del k -ésimo f -vector del politopo P , y $f_k(\pi_v(P))$ es el valor del k -ésimo f -vector de la proyección ortogonal de P sobre el hiperplano H_v .

En términos más sencillos, el teorema establece una cota inferior para el valor del k -ésimo f -vector de P en función de las proyecciones de P sobre varios hiperplanos ortogonales a diferentes vectores.

Esto se puede comprobar en el libro de Ziegler [22].

Teorema 3.13 (Shephard [18]). *Sea P un politopo d -dimensional y G una cara k -dimensional de P , donde $0 \leq k \leq d - 2$. Sea \mathcal{F}_G el conjunto de facetas de P que contienen G . Entonces,*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_G} \varphi(F, G) \leq 1,$$

con igualdad si y solo si $k = d - 2$.

Este teorema establece una desigualdad sobre la suma de los valores $\varphi(F, G)$ para todas las facetas F de un politopo P que contienen una cara G de dimensión k . La desigualdad indica que la suma de estos valores es siempre menor o igual a 1. La igualdad se cumple únicamente cuando la dimensión de la cara G es igual a $d - 2$, es decir, cuando la cara G es una cara de codimensión 2 dentro del politopo P .

3.3. Demostración del Teorema de Hinman

Proposición 3.14. *Para todos los politopos $(d - 1)$ -dimensionales Q y para todo $0 \leq k \leq d - 2$,*

$$\varphi_k(Q) \geq \rho(d, d - k - 1).$$

Demostración. Teniendo en cuenta la anterior definición:

$$\rho(d, k) = \frac{1}{2} \left[\binom{\lceil \frac{d}{2} \rceil}{k} + \binom{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{k} \right].$$

Sea Q un politopo de dimensión $d - 1$ y supongamos $0 \leq k \leq d - 2$.

Estudiamos primero el caso $d = 2$. Entonces Q es un politopo de dimensión 1, (un segmento) y la única posibilidad es $k = 0$. Sea r el segmento, con extremos v_1 y v_2 . Si colocamos una bola B_ϵ centrada en v_1 , esta bola es el intervalo $(v_1 - \epsilon, v_1 + \epsilon)$. Por lo que

$$\frac{m(B \cap P)}{m(B)} = \frac{\epsilon}{2\epsilon} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte sabemos que:

$$\rho(d, d - k - 1) = \rho(2, 0) = \frac{1}{2} \left[\binom{\lceil \frac{2}{2} \rceil}{0} + \binom{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}{0} \right] = 1.$$

Juntando ambas expresiones

$$\varphi_k(Q) = \varphi_0(Q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \rho(2, 0) = \rho(d, d - k - 1) = 1,$$

así que se cumple el enunciado.

Para el resto de esta demostración, asumiremos que $d \geq 3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^{d-1}$ en posición general respecto a Q (esto garantiza que ninguna proyección se solape). Definimos el hiperplano

$$H_v = \{x \in \mathbb{R}^{d-1}; x \cdot v = 0\},$$

que pasa por el origen y es ortogonal a v , además su dimensión es $d - 2$.

Ahora sea π_v la proyección ortogonal tal que

$$\pi_v : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow H_v,$$

es decir, mandamos los elementos de Q a su proyección mediante el vector v . Pasamos de Q de dimensión $d - 1$ a $\pi_v(Q) \subseteq H_v$ de dimensión $d - 2$.

El siguiente paso es separar el politopo en dos partes, según donde "miren" sus facetas con respecto a v .

Sea \mathcal{F} el conjunto de facetas, a cada $F \in \mathcal{F}$ le asociamos el vector normal unitario exterior u_F como se puede observar en la siguiente imagen.

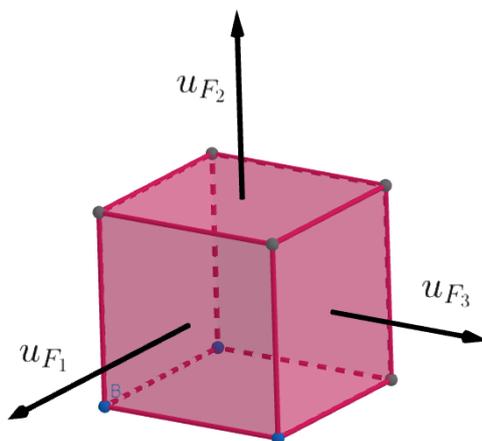


Figura 3.3: Vectores normales unitarios exteriores a tres facetas.

Ahora consideramos el producto escalar $v \cdot u_F$. La posición general hace que este producto escalar nunca sea cero, así que tenemos dos casos:

- Si $v \cdot u_F > 0$ el ángulo entre v y u_F es "agudo" y F mira hacia V .
- Si $v \cdot u_F < 0$ el ángulo es "obtuso" y F mira en sentido contrario a V .

Con este producto escalar establecemos las siguientes definiciones:

- $Q_v^+ = \{F \in \mathcal{F} : v \cdot u_F > 0\}$
- $Q_v^- = \{F \in \mathcal{F} : v \cdot u_F < 0\}$

Estos dos conjuntos se pueden entender como el conjunto de caras que al iluminarlas con una fuente de luz en la dirección de v se iluminan (Q_v^+) y quedan en la sombra (Q_v^-).

Una vez definidos Q_v^+ y Q_v^- , tenemos que $Q = Q_v^+ \cup Q_v^-$, es decir, la unión es el politopo completo. Además, $Q_v^+ \cap Q_v^- = \partial Q_v^+ = \partial Q_v^-$.

Por otro lado, utilizando estos conjuntos definidos previamente, tenemos que tanto π_v restringida a Q_v^+ como a Q_v^- es homeomorfismo sobre $\pi_v(Q)$. Es decir:

$$\pi_v|_{Q_v^+} : Q_v^+ \longrightarrow \pi_v(Q) \quad \pi_v|_{Q_v^-} : Q_v^- \longrightarrow \pi_v(Q),$$

ambas son homeomorfismos.

También tenemos que π_v restringida a la intersección de Q_v^+ y de Q_v^- es un homeomorfismo sobre $\partial\pi_v(Q)$.

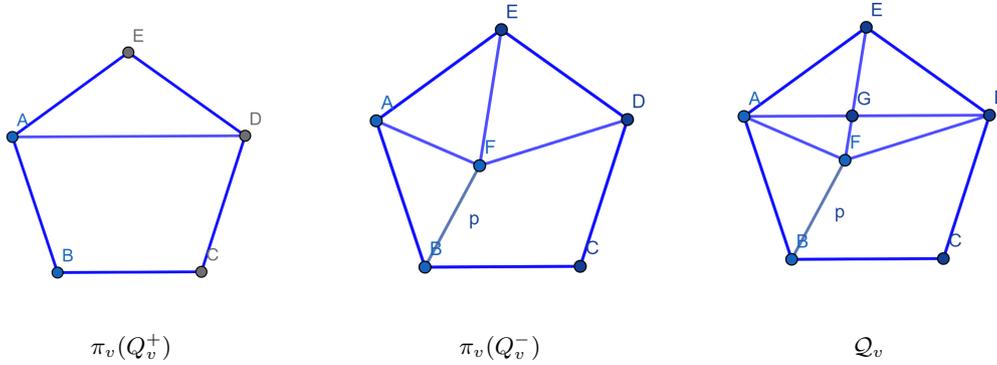
$$\pi_v|_{Q_v^+ \cap Q_v^-} : Q_v^+ \cap Q_v^- \longrightarrow \partial(\pi_v(Q)).$$

Ahora, tanto $\{\pi_v(G) \mid G \in Q_v^+\}$ como $\{\pi_v(G) \mid G \in Q_v^-\}$ son subdivisiones politopales de $\pi_v(Q)$.

Tomamos

$$\mathcal{Q}_v = \{\pi_v^+(G) \cap \pi_v^-(G) : G^+ \in Q_v^+, G^- \in Q_v^-\},$$

que es el refinamiento común mas pequeño de esas dos subdivisiones. Un ejemplo de refinamiento común más pequeño puede ser el siguiente: tenemos por un lado la proyección de Q_v^+ , por otro la proyección de Q_v^- , y finalmente el refinamiento \mathcal{Q}_v .



El siguiente paso para llevar a cabo la demostración es ver que \mathcal{Q}_v es un $(d - 2)$ -diagrama (definición 1.26). Debemos ver dos cosas: primero que \mathcal{Q}_v es una subdivisión politopal, y segundo verificar que la intersección de cada celda con la frontera de $\pi_v(Q)$ es una cara de $\pi_v(Q)$. (Esto último nos da también la dimensión, igual a la de $\partial\pi_v(Q)$, que es $d - 2$).

Vamos a ello:

- Primero veo que \mathcal{Q}_v es subdivisión politopal de $\pi_v(Q)$. Es claro que tanto $\pi_v(Q^+)$ como $\pi_v(Q^-)$ son proyecciones que forman politopos convexos, luego su intersección también es un politopo convexo.

1. $\emptyset = \pi_v(\emptyset) \in \mathcal{Q}_v$.
2. $\pi_v(Q^+) \cup \pi_v(Q^-) = \pi_v(Q)$, es decir, la unión de todas las celdas de \mathcal{Q}_v es $\pi_v(Q)$.
3. Sea $G = \pi_v(G^+) \cap \pi_v(G^-) \in \mathcal{Q}_v$, con $G^+ \in Q^+$ y con $G^- \in Q^-$. Si I es una cara de G , entonces $I = \pi_v(I^+) \cap \pi_v(I^-)$ para alguna cara I^+ de G^+ y I^- de G^- . Así $I \in \mathcal{Q}_v$.

Ahora veo que la intersección es cerrada.

Sea

$$G_1 = \pi_v(G_1^+) \cap \pi_v(G_1^-) \in \mathcal{Q}_v.$$

$$G_2 = \pi_v(G_2^+) \cap \pi_v(G_2^-) \in \mathcal{Q}_v,$$

con $G_1^+, G_2^+ \in Q^+$ y $G_1^-, G_2^- \in Q^-$.

Como π_v relaciona homeomorficamente tanto Q_v^+ como Q_v^- con $\pi_v(Q)$, sabemos que $\pi_v(G_1^+ \cap G_2^+) = \pi_v(G_1^+) \cap \pi_v(G_2^+)$.

Por otro lado $\pi_v(G_1^- \cap G_2^-) = \pi_v(G_1^-) \cap \pi_v(G_2^-)$. Y así:

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= (\pi_v(G_1^+) \cap \pi_v(G_1^-)) \cap (\pi_v(G_2^+) \cap \pi_v(G_2^-)) = \\ &= (\pi_v(G_1^+ \cap G_2^+) \cap \pi_v(G_1^- \cap G_2^-)) \in \mathcal{Q}_v. \end{aligned}$$

Y así \mathcal{Q}_v es cerrada por intersección.

El siguiente paso es ver que la intersección de caras sigue siendo cara:

- Si $G_1^+ \cap G_2^+$ es cara de G_1^+ entonces $\pi_v(G_1^+ \cap G_2^+)$ es cara de $\pi_v(G_1^+)$.
- Si $G_1^- \cap G_2^-$ es cara de G_1^- entonces $\pi_v(G_1^- \cap G_2^-)$ es cara de $\pi_v(G_1^-)$.

(Lo mismo aplicable a si la intersección es cara de G_2^+).

Por lo tanto

$$G_1 \cap G_2 = \pi_v(G_1^+ \cap G_2^+) \cap \pi_v(G_1^- \cap G_2^-)$$

es cara tanto de G_1 como de G_2 .

Así hemos probado que \mathcal{Q}_v es subdivisión politopal de $\pi_v(Q)$.

- Ahora estudio cómo se comporta la frontera:

Sea $G^+ \in Q_v^+$ y $G^- \in Q_v^-$. Supongo $G = \pi_v(G^+) \cap \pi_v(G^-)$, ahora vemos cómo actúa π_v (que es homeomorfismo según hemos explicado antes), se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\pi_v(Q_v^+ \cap Q_v^-) = \pi_v(G^+ \cap Q_v^-) \cap \pi_v(G^- \cap Q_v^-)$.
2. $\pi_v(G^+ \cap Q_v^-) = \pi_v(G^+) \cap \partial\pi_v(Q)$.
3. $\pi_v(G^- \cap Q_v^+) = \pi_v(G^-) \cap \partial\pi_v(Q)$.

Estas igualdades se pueden entender como la manera en que se ve la proyección de la intersección de una cara situada en la parte "iluminada" del politopo con otra cara situada en la cara "a la sombra".

Para concluir que \mathcal{Q}_v es un $(d-2)$ -diagrama veo cómo actúa la proyección sobre la frontera.

$$\begin{aligned} G \cap \partial\pi_v(Q) &= \pi_v(G^+) \cap \pi_v(G^-) \cap \partial\pi_v(Q) = \pi_v(G^+ \cap Q_v^-) \cap \pi_v(G^- \cap Q_v^+) = \\ &= \pi_v(G^+ \cap G^-). \end{aligned}$$

En estas líneas se verifica la condición de diagrama para \mathcal{Q}_v , es decir, que cada celda $G \in \mathcal{Q}_v$ toca la frontera de $\pi_v(Q)$ en una cara de $\pi_v(Q)$. Esto garantiza que \mathcal{Q}_v esta perfectamente ajustada a la frontera del politopo proyectado y no crea caras nuevas.

Por lo que queda probado que \mathcal{Q}_v es un $(d-2)$ -diagrama.

Por el lema del vértice interior (lema 1.28), sabemos que \mathcal{Q}_v contiene al menos un vértice interior. Sea x un vértice interior y sean X^+ y X^- una cara superior y una inferior cuyas proyecciones dan x como intersección. Es decir, $x = \pi_v(X^+) \cap \pi_v(X^-)$ con $X^+ \in Q_v^+$, $X^- \in Q_v^-$.

Se tiene $x \notin \partial\pi_v(Q)$, por lo que $X^+, X^- \notin Q_v^+ \cap Q_v^-$. De esto se sigue que para toda cara G de Q , si $X^+ \subseteq G$, entonces G es una cara de Q_v^+ pero no de Q_v^- y similar para toda cara G de Q con $X^- \subseteq G$.

Dado que la proyección es en posición general, tenemos que $\dim(\pi_v(X^+)) = \dim(X^+)$ y $\dim(\pi_v(X^-)) = \dim(X^-)$. Denotamos dichas dimensiones por $\ell^+ = \dim(X^+)$ y $\ell^- = \dim(X^-)$. También implica que

$$\text{aff}(\pi_v(X^+)) \cap \text{aff}(\pi_v(X^-)) = \pi_v(X^+) \cap \pi_v(X^-) = \{x\}.$$

Como x es el único punto de intersección de $\pi_v(X^+)$ y $\pi_v(X^-)$, tenemos que $\ell^+ + \ell^- \leq d-2$; si la suma de ℓ^+ y de ℓ^- fuera $> d-2$, la intersección sería de dimensión mayor a 0.

Del mismo modo, que la proyección sea general hace que

$$\pi_v(X^+) \cap \pi_v(X^-) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{aff}(\pi_v(X^+)) \cup \text{aff}(\pi_v(X^-)) = \mathbb{R}^{d-2},$$

de modo que $\ell^+ + \ell^- \geq d - 2$. Es decir,

$$\ell^+ + \ell^- = d - 2.$$

El siguiente paso es estudiar la dimensión de Q/X^+ :

Q/X^+ es el politopo cociente resultante de intersectar X^+ con H , donde H es un hiperplano de dimensión $d - \ell^+ - 1$ que interseca aquellas caras de Q que contienen propiamente a X^+ . Por lo que la dimensión de la intersección "reduce" en 1 unidad la dimensión del hiperplano H . Así la dimensión de Q/X^+ resultante es $d - \ell^+ - 2$.

Por otro lado sabemos $\ell^+ + \ell^- = d - 2$, así que:

$$\dim(Q/X^+) = d - \ell^+ - 2 = \ell^-.$$

Siguiendo el mismo desarrollo para la dimensión de Q/X^- , se tiene que:

$$\dim(Q/X^-) = d - \ell^- - 2 = \ell^+.$$

Una vez establecidas las dimensiones para Q/X^+ y para Q/X^- , veamos qué ocurre con el f -vector de ambos politopos cocientes:

Es importante resaltar que a partir de ahora en esta demostración usaremos que el f -vector del politopo comienza en f_0 , es decir, si P es un politopo de dimensión n , su f -vector vendrá representado por $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$. Dado que de esta manera las fórmulas quedan más simples

Dado que sabemos que el f -vector mínimo de un politopo simplicial P de dimensión ℓ^- con $n = \ell^+ + 1$ vértices es precisamente el del simplex de esos vértices. Y su f -vector viene dado por la siguiente ecuación:

$$f_j = \binom{n}{j+1} = \binom{\ell^- + 1}{j+1} \quad \text{con } 0 \leq j \leq d - 1,$$

utilizamos esta expresión como cota inferior para el f -vector del politopo cociente:

$$f_{k-\ell^- - 1}(Q/X^+) \geq \binom{\ell^- + 1}{k - \ell^+} = \binom{\ell^- + 1}{d - k - 1},$$

$$f_{k-\ell^+ - 1}(Q/X^-) \geq \binom{\ell^+ + 1}{k - \ell^-} = \binom{\ell^+ + 1}{d - k - 1}.$$

De esta cota inferior para el f -vector de cada politopo cociente se deduce que Q tiene al menos

$$\binom{\ell^- + 1}{d - k - 1}$$

caras de dimensión k que contienen a X^+ y al menos

$$\binom{\ell^+ + 1}{d - k - 1}$$

caras de dimensión k que contienen a X^- .

Como previamente hemos establecido que los conjuntos de caras que contienen a X^+ y a X^- son disjuntos, no hay caras de dimensión k que contengan simultáneamente a X^+ y a X^- . Así tenemos que Q tiene al menos la suma de esas cantidades de caras de dimensión k que no están en $Q^+ \cap Q^-$. De esta manera:

$$f_k(Q) - f_k(\pi_v(Q)) \geq f_{k-\ell^- - 1}(Q/X^+) + f_{k-\ell^+ - 1}(Q/X^-) \geq \binom{\ell^- + 1}{d - k - 1} + \binom{\ell^+ + 1}{d - k - 1}.$$

Esto se puede entender como que al proyectar y subdividir Q para obtener $\pi_v(Q)$, algunas caras k -dimensionales de Q “se subdividen” y desaparecen como tales caras en la proyección, incrementando el número total de caras en la subdivisión.

Utilizando el lema 3.11, se tienen que para todo vector $v \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$f_k(Q) - f_k(\pi_v(Q)) \geq \binom{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d-k-1} + \binom{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d-k-1} = 2\rho(d, d-k-1).$$

Y así:

$$\Rightarrow f_k(Q) - \max_v f_k(\pi_v(Q)) \geq 2\rho(d, d-k-1).$$

Ahora podemos usar el teorema 3.12 para concluir

$$\varphi_k(Q) \geq \frac{1}{2} \left[f_k(P) - \max_v f_k(\pi_v(P)) \right] \geq \rho(d, d-k-1).$$

□

Teorema 3.15. *Sea P un politopo convexo de dimensión d y supongamos $0 \leq k \leq d-1$. Entonces:*

$$\frac{f_k(P)}{f_0(P)} \geq \rho(d, k), \quad \frac{f_k(P)}{f_{d-1}(P)} \geq \rho(d, d-k-1).$$

Demostración. Sea P un politopo de dimensión d y sea $0 \leq k \leq d-1$. Por otro lado llamamos \mathcal{F} al conjunto de facetas de P y \mathcal{G} al conjunto de caras de dimensión K de P .

Para cualquier elemento $F \in \mathcal{F}$ y para todo $G \in \mathcal{G}$, es trivial que si $d \not\subseteq F$ se cumple $\varphi(F, G) = 0$.

Utilizando el Teorema 3.13 para todo $G \in \mathcal{G}$

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \varphi(F, G) \leq 1.$$

Por lo que:

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ G \in \mathcal{G}}} \varphi(F, G) \leq |\mathcal{G}| = f_k(P),$$

Por la Proposición 3.14, para todo $F \in \mathcal{F}$ tenemos:

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} \varphi(F, G) \geq \rho(d, d-k-1).$$

Por lo tanto

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ G \in \mathcal{G}}} \varphi(F, G) \geq \rho(d, d-k-1)|\mathcal{F}| = \rho(d, d-k-1)f_{d-1}(P).$$

Y así:

$$\frac{f_k(P)}{f_{d-1}(P)} \geq \rho(d, d-k-1).$$

Hemos demostrado la segunda desigualdad. La primera se deduce de la segunda por dualidad. Sea P^* el politopo dual de P . Entonces tenemos lo siguiente, donde la primera igualdad es la Ecuación (1.1):

$$\frac{f_k(P)}{f_0(P)} = \frac{f_{d-1-k}(P^*)}{f_{d-1}(P^*)} \geq \rho(d, d - (d-k-1) - 1) = \rho(d, k)$$

□

Tenemos en particular este resultado, que es la conjetura de Bárány:

Corolario 3.16. *Para todo politopo P y para todo $0 \leq k \leq d-1$:*

$$f_k \geq \min\{f_0, f_{d-1}\}.$$

Bibliografía

- [1] Noga Alon y Gil Kalai: A simple proof of the upper bound theorem, *European J. Math.* 6, 211-214. (277), 1985.
- [2] Michel Balinski. On the graph structure of convex polyhedra in n -space. *Pacific J. Math.* 431-434, 1961.
- [3] Imre Bárány, David. G. Larman, The convex hull of the integer points in a large ball. *Math. Ann.* 312(1), 167–181, 1998
- [4] David W. Barnette. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. *Pacific J. Math.* 46 (2) 349 - 354, 1973.
- [5] David W. Barnette. The minimum number of vertices of a simple polytope, *Israel Journal of Mathematics*, 10, pages 121–125, 1971.
- [6] Morton Brown. A proof of the generalized Schoenflies theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66, 74–76, 1960.
- [7] Antonio Fernández González, El Teorema g para politopos. Trabajo Fin de Máster dirigido por Francisco Santos, Máster Universitario en Matemáticas y Computación, Universidad de Cantabria, 2020.
- [8] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [9] Josuha Hinman. A Positive Answer to Bárány’s Question on Face Numbers of Polytopes. *Combinatorica*, 43, 953–962, 2023.
- [10] Roger A. Horn; Johnson, Charles R. *Topics in matrix analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [11] Peter McMullen. The numbers of faces of simplicial polytopes. *Israel J. Math.*, 9, 559–570, 1971.
- [12] Peter McMullen. On Simple Polytopes, *Invent. Math.* 113, 419-444, 1993.
- [13] Micha A. Perles and Geoffrey C. Shephard. Angle sums of convex polytopes. *Math. Scand.*, 21(2), 199-218, 1967.
- [14] Felipe Rincón y Simón Soto, Introducción a la teoría de politopos, En “Días de Combinatoria 2017”. *Lecturas Matemáticas*, Volumen 40 (2) páginas 177-215, 2019.
- [15] Francisco Santos, Apuntes de la asignatura “Geometría Arte y Naturaleza”, Grado de Matemáticas, Universidad de Cantabria, 2021.
- [16] Francisco Santos, ¿Cuántas caras puede tener un poliedro (simplicial)? *La Gaceta de la RSME* 27(1), 167–193, 2024.
- [17] Rolf Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [18] Geoffrey C. Shephard. Angle deficiencies of convex polytopes. *J. London Math. Soc.*, 43(1), 325–336, 1968.
- [19] Duncan. M. Y. Sommerville, The relations connecting the angle sums and volume of a polytope in space of n dimensions, *Proc. Royal Society Series A.* 115, 103–119, 1927).
- [20] Richard P. Stanley. The number of faces of a simplicial convex polytope. *Adv. in Math.*, 35(3), 236–238, 1980.
- [21] Lei Xue. A proof of Grünbaum’s lower bound conjecture for general polytopes. *Israel J. Math.*, 245, 991–1000, 2021.
- [22] Günter M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer-Verlag, 1995.