Facultad
de
Ciencias

Topologías en los espacios de aplicaciones

(Topologies on function spaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Mikel Solaguren Anaut

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2025

Agradecimientos

Quiero comenzar dando las gracias a mi directora, Nuria Corral, por su apoyo y orientación durante todo el proceso de elaboración de este trabajo. Su paciencia y dedicación han sido fundamentales para que pudiera llevar a cabo este proyecto. Además de como directora, también quiero agradecer a Nuria como profesora, ya que a lo largo de la carrera ha demostrado ser una docente excepcional, siempre dispuesta a ayudar y a motivar a sus alumnos.

Agradezco también a mis amigos, tanto de antes como durante la carrera de Matemáticas, que han sido una fuente constante de motivación y apoyo. Gracias por estar siempre ahí, por las risas y por todos los momentos compartidos.

Por último, quiero agradecer a mi familia, que siempre ha estado a mi lado, apoyándome en cada paso de este camino. Gracias a mis padres, Espe y Txokobo, y a mi hermano Asier por su amor incondicional y por creer en mí. Sin su apoyo, este trabajo no habría sido posible.

Resumen

En el presente trabajo se estudian distintas topologías que pueden definirse sobre el espacio de aplicaciones entre dos espacios topológicos, con el objetivo de analizar propiedades como la convergencia de aplicaciones y la continuidad de operaciones como la evaluación, la composición o la inversión. A lo largo de esta memoria se presentan topologías como la punto-abierta, la compacto-abierta, la uniforme y la topología de la convergencia compacta. En el caso particular en que el espacio de llegada es un espacio métrico, se demuestran resultados clásicos como el Teorema de Ascoli. Finalmente, se analiza el espacio de homeomorfismos de un espacio topológico en sí mismo, donde se introduce la g-topología y se estudian las condiciones bajo las cuales este espacio forma un grupo topológico.

Palabras clave: Espacios de aplicaciones, topología punto-abierta, topología compacto-abierta, topología uniforme, topología de la convergencia compacta, g-topología, Teorema de Ascoli, espacio de homeomorfismos.

Abstract

In this work, various topologies on the space of functions are studied with the aim of analyzing properties such as convergence of functions and continuity of operations like evaluation, composition, and inversion. Throughout this work, topologies such as the pointwise topology, the compact-open topology, the uniform topology, and the topology of compact convergence are introduced. In the particular case where the target space is a metric space, classical results such as Ascoli's Theorem are proven. Finally, the space of homeomorphisms of a topological space into itself is examined, where the g-topology is introduced and the conditions under which this space becomes a topological group are investigated.

Key words: Function spaces, pointwise topology, compact-open topology, uniform topology, topology of compact convergence, g-topology, Ascoli's theorem, space of homeomorphisms.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las aplicaciones entre conjuntos desempeñan un papel fundamental en múltiples ramas de las matemáticas, como son la topología, el análisis, el análisis funcional o la topología algebraica. Este trabajo se centra en dotar de estructura de espacio topológico al conjunto de aplicaciones teniendo dos objetivos principales: el estudio de la convergencia de sucesiones de aplicaciones y el análisis de la continuidad de operaciones fundamentales como la evaluación, la composición y la inversión.

El estudio topológico de espacios de aplicaciones tiene su origen en los trabajos de Arzelà y Ascoli a finales del siglo XIX, y ha evolucionado hasta convertirse en una herramienta esencial en múltiples contextos, desde la teoría de homotopía hasta el análisis funcional. La posibilidad de definir topologías sobre espacios de aplicaciones ha permitido formalizar conceptos intuitivos como la convergencia uniforme, y ha dado lugar a resultados como el Teorema de Ascoli, que caracteriza la compacidad en espacios de aplicaciones continuas.

En este trabajo se explica cómo el espacio de aplicaciones entre dos espacios topológicos X e Y puede entenderse como un caso particular del producto cartesiano de espacios topológicos. Esta perspectiva facilita una mejor comprensión de la estructura del espacio de aplicaciones. Asimismo, se introducen subespacios de especial interés, como el conjunto de las aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$ y el subconjunto de los homeomorfismos de X en sí mismo.

El objetivo principal del trabajo es definir diversas topologías sobre el espacio de aplicaciones Y^X y estudiar cómo la estructura de X e Y influye en la estructura topológica de este espacio. En particular, se estudian topologías como la *punto-abierta*, la *uniforme* y la *topología de la convergencia compacta*, definidas para que la convergencia en Y^X refleje las nociones de convergencia puntual o uniforme entre funciones.

Además de la convergencia, es fundamental entender cuándo operaciones naturales como la evaluación, la composición o la inversión son continuas. Para ello, se introducen dos topologías especialmente relevantes: la *topología compacto-abierta*, más gruesa que cualquier topología admisible, y la *g-topología*, caracterizada por ser la topología admisible más gruesa que hace continuas tanto la composición como la inversión en el espacio de los homeomorfismos.

También estudiamos el caso particular de que el espacio de llegada Y sea un espacio métrico. En este contexto, se estudian propiedades relacionadas con la métrica y se demuestra el teorema de Ascoli, que proporciona una caracterización de los subconjuntos relativamente compactos de $\mathcal{C}(X,Y)$.

Finalmente, estudiamos el espacio de homeomorfismos de un espacio topológico en sí mismo. En este caso, se presentan y demuestran resultados de R.Arens y J.J.Dijkstra (véanse [2] y [3]) sobre la estructura de grupo topológico que puede adoptar este espacio bajo ciertas condiciones topológicas.

El trabajo se organiza del siguiente modo:

- **Capítulo 2**: Se presentan los conceptos preliminares necesarios. Se introducen nociones básicas de topología como la compacidad, conexión, metrizabilidad y los axiomas de separación.
- **Capítulo 3**: Se introduce el concepto de espacio producto y su relación con el espacio de aplicaciones. Se presenta la topología punto-abierta y algunas de sus propiedades.
- **Capítulo 4**: Se estudian el espacio de aplicaciones y algunos subespacios destacados, como el de las aplicaciones continuas. Se introducen la topología compacto-abierta y las topologías admisibles.
- **Capítulo 5**: Se analiza el caso en que Y es un espacio métrico. Se introducen las topologías uniforme y de convergencia compacta, y se demuestra el teorema de Ascoli.
- **Capítulo 6**: Se estudia el espacio de homeomorfismos de un espacio en sí mismo. Se introduce la g-topología y se analizan las condiciones bajo las cuales este espacio forma un grupo topológico.

De esta manera, a través del estudio de ejemplos concretos, resultados generales y contraejemplos, se pretende ofrecer una visión del comportamiento topológico de los espacios de aplicaciones y del valor de dotarlos de estructuras adecuadas para su análisis.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos básicos necesarios para el estudio de la topología de espacios de aplicaciones. Este capítulo se divide en dos secciones, una dedicada a los espacios topológicos y otra a los espacios métricos. La mayoría de los resultados que aparecen en este capítulo se han visto en la asignatura de Topología y no se incluyen sus demostraciones. Se han incluido en el Apéndice A las demostraciones de algunos resultados que serán de utilidad más adelante en la memoria.

2.1. Espacios topológicos

En esta sección se enuncian ciertas propiedades básicas sobre los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre estos. Este apartado se ha escrito tomando referencias de [6], [7] y [8].

Definición 2.1.1. Un *espacio topológico* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ es una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades:

1. $\emptyset, X \in \tau$.

2. La unión de cualquier colección de elementos de τ está en τ.

3. La intersección finita de elementos de τ está en τ.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* de la topología. Y los complementarios de los abiertos se llaman *cerrados*. Dado un punto $x \in X$ se llama *entorno* de x a cualquier subconjunto U de X que contiene a x y a un abierto que contiene a x.

Un mismo conjunto X puede dotarse de topologías diferentes. Dadas dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre X se dice que τ_1 es *más fina* que τ_2 (o que τ_2 es *más gruesa* que τ_1) si $\tau_2 \subset \tau_1$, es decir, si los abiertos de la topología más gruesa pertenecen también a la topología más fina.

En topología se introduce el concepto de base con la motivación de tener una familia de subconjuntos que permita describir los abiertos de una topología de manera más sencilla.

Definición 2.1.2. Dado un espacio topológico (X, τ) y una familia de subconjuntos $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es *base de la topología* τ o *base de* X si todo abierto de τ puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman *abiertos básicos* o *abiertos de la base*.

Las bases de una topología permiten demostrar propiedades generales de los abiertos utilizando únicamente abiertos básicos. Además, en el siguiente resultado se ve que dada una familia de subconjuntos de un espacio topológico, existen ciertas condiciones que aseguran que dicha familia sea base de alguna topología, es decir, partiendo de elementos básicos se puede generar una topología.

Teorema 2.1.3. Dados un conjunto X y una familia de subconjuntos $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, se tiene que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre X si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La unión de los elementos de $\mathcal{B}$ es igual a X.
2. Para cada par de elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y cada punto $x \in B_1 \cap B_2$ existe un elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Ejemplo 2.1.4. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios topológicos:

- Una topología que se puede definir sobre cualquier conjunto X es la *topología discreta* $\tau = \mathcal{P}(X)$. Esta topología tiene la propiedad de ser la topología más fina que puede tener un conjunto.
- Como se ha mencionado, hay topologías que es más conveniente definir en función de una base. Por ejemplo, sobre $\mathbb{R}$ se define la *topología usual* como la topología generada por la base

$$\mathcal{B}_u = \{B(x, \varepsilon) : x \in X \text{ y } \varepsilon > 0 \text{ y } B(x, \varepsilon) \text{ las bolas de centro } x \text{ y radio } \varepsilon\}$$

  que se puede ver en el capítulo 13 de [7] que cumple las condiciones del Teorema 2.1.3. La definición formal de las bolas abiertas se da en la Definición 2.2.1. La topología usual se puede extender a $\mathbb{R}^n$ tomando las bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ como abiertos básicos.
- Otro ejemplo de topología sobre $\mathbb{R}$ es la topología conumerable dada por

$$\tau_{conum} = \{U \subset \mathbb{R} : R \setminus U \text{ es numerable o finito }\}$$

- Sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos X e Y se puede definir la *topología por cajas* que es la topología que tiene como base la familia

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \text{ es abierto en } X \text{ y } V \text{ es abierto en } Y\}$$

A menudo se tiene una familia de subconjuntos que no cumplen las condiciones del Teorema 2.1.3 pero que se busca que sean abiertos de una topología. Se introduce por tanto el concepto de subbase que permite generar una topología que contenga ciertos subconjuntos que no cumplen las condiciones para ser base.

Definición 2.1.5. Dados un espacio topológico (X, τ) y una familia de subconjuntos $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Si la familia $\mathcal{S}$ cumple que la unión de sus elementos es igual al espacio X se le llama *subbase* de X. La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ es la topología generada por las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Observación 2.1.6. Se ve que la base generada por las intersecciones finitas de elementos de una subbase cumplen las condiciones del teorema 2.1.3. Por un lado, la unión de sus elementos es claramente igual a X. Por otro lado, dado que los elementos de esta base son intersecciones finitas de elementos de la subbase, la intersección de dos elementos cualesquiera de la base sigue siendo intersección finita de elementos de la subbase y por tanto pertenece a la base.

Observación 2.1.7. Se puede ver que la topología generada por la subbase es la topología más gruesa que contiene a la subbase. Sea $\mathcal{S}$ una subbase que genera una topología τ y supongamos que existe una topología τ' que cumple que $\mathcal{S} \subset \tau' \subset \tau$. Entonces las uniones de intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ pertenecen también a τ' y como esto es lo que define a τ, se tiene que $\tau \subset \tau'$ y por tanto $\tau = \tau'$.

En ocasiones es útil describir un espacio topológico en función de los entornos de sus puntos. Para ello se introducen los conceptos de sistema de entornos y base de entornos.

Definición 2.1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$ un punto. Se sobre X:

- Un *sistema de entornos* de x es una familia $\mathcal{N}_x$ de subconjuntos de X definida como $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : N \text{ es entorno de } x\}$

- Una *base de entornos* de x es una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ de subconjuntos de X que cumple que para todo entorno $N \in \mathcal{N}_x$ existe un *entorno básico* $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset N$.

Definición 2.1.9. Dado (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto de X, se definen los siguientes conceptos:

- El *interior* de A es el conjunto $A^\circ = \{x \in A : \text{existe algún entorno abierto de } x \text{ contenido en } A\}$.
- La *clausura* de A es el conjunto $\overline{A} = \{x \in X : \text{todo entorno abierto de } x \text{ interseca con } A\}$.
- La *frontera* de A es el conjunto $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.
- La *topología de subespacio* en A es la topología $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$.
- Se dice que A es *denso en* X si $\overline{A} = X$.

Las definiciones de interior y clausura se pueden dar en términos de abiertos o abiertos básicos en lugar de entornos.

En muchos libros se introduce el interior A como la unión de todos los abiertos contenidos en A y la clausura de A como la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Estas definiciones son equivalentes a las dadas en la definición anterior. Algunas caracterizaciones y propiedades de la clausura y el interior de subconjuntos se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.10. Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$ dos subconjuntos de X. Entonces se cumple que:

1. A° es el abierto más grande contenido en A.
2. $A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ donde $\mathcal{U} = \{V \subset X : V \text{ es abierto y } V \subset A\}$.
3. Si A es abierto entonces $A = A^\circ$.
4. $\overline{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.
5. $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ donde $\mathcal{F} = \{C \subset X : C \text{ es cerrado y } A \subset C\}$.
6. Si A es cerrado entonces $A = \overline{A}$.
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y esto es cierto en general para la unión finita de conjuntos.
8. ∂A es cerrado.

Una vez introducidos los conceptos básicos de los espacios topológicos se procede a introducir las aplicaciones entre estos espacios que conservan ciertas propiedades, las aplicaciones continuas.

Definición 2.1.11. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice *continua en* x si para todo entorno U de $f(x)$ existe un entorno V de x tal que $f(V) \subset U$.

Definición 2.1.12. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice *continua* si para todo $x \in X$ se tiene que f es continua en x.

Además de la Definición 2.1.12, que es la manera natural de extender la definición de continuidad en un punto al espacio total, existen otras caracterizaciones de continuidad de un espacio topológico que son en ocasiones más útiles. En la siguiente proposición se enuncian algunas de ellas. Todas estas equivalencias están probadas en el Teorema 18.1 de [7].

Proposición 2.1.13. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación entre los dos espacios topológicos. Entonces, son equivalentes:

1. f es continua.
2. Para cada cerrado C de Y, se tiene que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X.
3. Para cualquier subconjunto $A \subset X$, se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
4. Para cualquier abierto $U \subset Y$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X.

Definición 2.1.14. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación entre los dos espacios topológicos.

- f es *abierta* si, para todo abierto U de X, se tiene que $f(U)$ es un abierto de Y.
- f es *cerrada* si, para todo cerrado C de X, se tiene que $f(C)$ es un cerrado de Y.
- f es *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua y su inversa es continua. Si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos estos se dicen homeomorfos.

La condición de que $f^{-1} : Y \to X$ sea continua quiere decir que dado un abierto U de X se tiene que la contraimagen $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierta en Y. Sin embargo, $(f^{-1})^{-1}(U)$ no es más que el mismo abierto $f(U)$. Por tanto, dos espacios homeomorfos tienen una correspondencia uno a uno de sus abiertos, es decir, $f(U)$ es abierto si y solo si U es abierto.

Dada una aplicación f biyectiva, la propiedad de ser homeomorfismo es equivalente a que sea abierta (o cerrada) y continua. Sea f biyectiva y $U \subset X$ un abierto. Entonces

$$f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$$

y por tanto es equivalente decir que $(f^{-1})^{-1}(U)$ es abierto a que $f(U)$ es abierto. Por tanto, se tiene que en una aplicación biyectiva, ser homeomorfismo es equivalente a ser abierta. Un razonamiento similar se puede hacer para la propiedad de ser cerrada.

A continuación se introduce el concepto de convergencia de sucesiones en un espacio topológico y se ve que la convergencia de una sucesión es una propiedad invariante por aplicaciones continuas.

Definición 2.1.15. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X. Se dice que la sucesión *converge a* $x \in X$ si para cada entorno U de x existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. En este caso se escribe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$.

Al contrario que cuando se trabaja con sucesiones en espacios métricos, una sucesión no tiene porque converger a un único punto del espacio topológico. El siguiente resultado dice que la convergencia de una sucesión se mantiene por aplicaciones continuas. Su demostración puede encontrarse en el Teorema 21.3 de [7]

Proposición 2.1.16. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua entre los dos espacios topológicos. Entonces, para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X que converge a $x \in X$ se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x) \in Y$.

La conexión es una propiedad característica de los espacios topológicos. La conexión es una propiedad que permite diferenciar entre espacios que se pueden separar por abiertos y los que no.

Definición 2.1.17. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es *conexo* si no existen abiertos disjuntos U, V tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Un subconjunto $A \subset X$ se dice *conexo* si lo es con la topología de subespacio.

La conexión es una propiedad topológica, es decir, es invariante por homeomorfismos. Más concretamente, se ve que la imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es conexa. A continuación se enuncian este resultado y otro resultado que da algunas propiedades de los espacios conexos.

Proposición 2.1.18. Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua entre los dos espacios topológicos. Entonces, si X es conexo, $f(X)$ es conexo.

Proposición 2.1.19. Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto de X y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Si $X = U \cup V$ donde U, V son abiertos disjuntos no vacíos, entonces si A es conexo se tiene que $A \subset U$ o $A \subset V$.
2. Si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ y se tiene que $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ entonces X es conexo.
3. Si Y es un subespacio conexo de X y se tiene que $Y \subset A \subset \overline{Y}$ entonces A es conexo.
4. Si A es un subconjunto conexo entonces $\overline{A}$ es conexo.

A continuación se introduce brevemente el concepto de conexión por caminos. Este concepto es más fuerte que la conexión y es muy importante en la topología algebraica. Aunque no se utiliza demasiado en este trabajo, se introduce el concepto por su relación con la conexión y para la ayuda de la construcción de contraejemplos.

Definición 2.1.20. Un camino entre dos puntos x, y de un espacio topológico (X, τ) es una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$. Se dice que X es *conexo por caminos* si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un camino entre ellos.

Proposición 2.1.21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si X es conexo por caminos, entonces X es conexo.

Cerrando el tema de la conexión, se introduce el concepto de la conexión local de un espacio topológico. La idea detrás de la conexión local es caracterizar aquellos espacios que se "se comportan como si fueran conexos" alrededor de algunos puntos pero no son necesariamente conexos de manera global.

Definición 2.1.22. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es *localmente conexo* si para cada punto $x \in X$ y cada entorno U de x existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$, y V es conexo.

Se introduce ahora el concepto de compacidad en un espacio topológico. La compacidad es un concepto generaliza propiedades que tienen los conjuntos finitos. Es por esto por lo que existen conjuntos no finitos que comparten ciertas similitudes con los conjuntos finitos, por ejemplo, cualquier función continua del intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es acotada. La idea detrás de la compacidad es definir esta noción que hace que ciertos conjuntos tengan propiedades similares a las de los conjuntos como el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Previo a introducir las nociones de compacidad se introduce la notación que se va a utilizar para índices que recorren una familia finita de naturales. En este trabajo se va a utilizar la notación $[n] := \{1, 2, ..., n\}$ dado $n \in \mathbb{N}$. Por tanto si se tiene un índice i que recorre los n primeros naturales se va a escribir $i \in [n]$.

Definición 2.1.23. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- El espacio X se dice *compacto* si para cualquier familia de abiertos $\{U_\alpha\}$ que cumple que $\bigcup U_\alpha = X$ existe una subfamilia finita $\{U_{\alpha_i}\}_{i \in [n]}$ que cumple que $\bigcup_{i \in [n]} U_{\alpha_i} = X$. La familia $\{U_\alpha\}$ se llama *recubrimiento abierto* de X.
- Dado un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X se le llama *subrecubrimiento* a una subfamilia $\{U_{\alpha_\beta}\}_{\beta \in B}$ tal que $U_{\alpha_\beta} \in \mathcal{U}$ y $\bigcup_{\beta \in B} U_{\alpha_\beta} = X$.
- Se dice que un subespacio A de X es un *subespacio compacto* si lo es con la topología de subespacio.
- El espacio X se dice *localmente compacto* si para cada punto $x \in X$ existe un entorno U de x tal que $\overline{U}$ es un entorno compacto de x.

- El espacio X se dice que es un *continuo* si es compacto y conexo.

La definición de localmente compacto dada en este trabajo es la que se da en [7]. En caso de que el espacio sea Hausdorff, esta definición coincide con que cada entorno V de x contiene un entorno compacto K de x. Muchos autores utilizan esta última definición como definición de localmente compacto.

Observación 2.1.24. Por como se definen los abiertos de la topología de subespacio, se ve que es equivalente que un subespacio $A \subset X$ sea compacto a que para cada familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X tales que $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ exista una subfamilia finita $\{U_{\alpha_i}\}_{i\in[n]}$ que cumple que $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_{\alpha_i}$.

Ejemplo 2.1.25. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios y subespacios topológicos compactos:

- La unión finita de conjuntos compactos es compacta. Dados $\{X_1, ..., X_n\}$ conjuntos compactos, dado un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $X = \bigcup_{i\in[n]} X_i$, se tiene que $X_i \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ para cada $i \in [n]$. Como cada X_i es compacto, existe una subfamilia finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que recubre cada uno de los conjuntos X_i. Tomando la unión de estas subfamilias finitas se obtiene una subfamilia finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que recubre X. Por tanto, X es compacto.

- Un conjunto finito $X = \{x_1, ..., x_n\}$ es compacto para cualquier topología.

- Los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ son los conjuntos finitos.

  Dado $K \subset \mathbb{R}$ se tiene que si $K = \{x_1, ..., x_n\}$ es un conjunto finito de puntos, entonces K es compacto en X. Supongamos ahora que K es un conjunto infinito y veamos que no puede ser compacto.

  Como K es infinito, se puede encontrar una sucesión numerable de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidos en K. Tomamos los conjuntos $F_k = \{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ y los abiertos $U_k = \mathbb{R} \setminus F_k$. Se tiene entonces que

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \mathbb{R} \supset K$$

  ya que la intersección infinita de todos los conjuntos F_n es vacía. Por lo tanto, se tiene que la familia $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de K. Sin embargo, dada una subfamilia finita $\{U_{n_k}\}_{k\in[m]}$ de $\mathcal{U}$, se tiene que

  $$\bigcup_{k=1}^{m} U_{n_k} = \mathbb{R} \setminus (\bigcap_{k=1}^{m} F_{n_k})$$

  donde se va a ver que la intersección finita de los conjuntos F_{n_k} no es vacía y de hecho está contenida en K. Se considera $N = \text{máx}\{n_k : k \in [m]\}$ y se tiene que $x_{N+1} \in \bigcap_{j\in[m]} F_{n_k}$ y por tanto $x_{N+1} \notin \bigcup_{k\in[n]} U_{n_k}$. Luego el recubrimiento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene un subrecubrimiento finito. Se concluye que los compactos de $\mathbb{R}$ con τ_{conum} son los conjuntos finitos.

- Por último, para ilustrar la utilidad de los conjuntos compactos, se enuncia la generalización del Teorema de los valores extremos a espacios topológicos. Este teorema dice que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua y X es compacto, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en X. La demostración de una versión aún más general de este teorema se puede encontrar en el Teorema 27.4 de [7].

A continuación se introducen los axiomas de separabilidad. Estos axiomas son propiedades que pueden o no tener los espacios topológicos y que permiten separar por abiertos ciertos conjuntos contenidos en el espacio.

Definición 2.1.26. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que:

- El espacio X es T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U, V de la topología tales que $x \in U$, $y \notin U$ y $y \in V$, $x \notin V$.

- El espacio X es *Hausdorff* o T_2 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U, V de la topología tales que $x \in U$ y $y \in V$.
- El espacio X es *regular* o T_3 si es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cada cerrado C que no contiene a x existen abiertos disjuntos que contienen a x y C respectivamente.
- El espacio X es *normal* o T_4 si es T_1 y para cada par de cerrados disjuntos C_1, C_2 existen abiertos disjuntos que contienen a C_1 y C_2 respectivamente.

En este trabajo se han utilizado las definiciones de los axiomas de separabilidad dadas en [7].

Observación 2.1.27. La condición de ser T_2 es más restrictiva que la de ser T_1. Por otro lado, si X es T_1, dado $x_0 \in X$ y cualquier punto $x \in X \setminus \{x_0\}$, existe un entorno abierto U_x de x tal que $x_0 \notin U_x$. Por tanto, $X \setminus \{x_0\} = \cup_{x\in X} U_x$ es abierto, es decir, los puntos son cerrados. Es por esto por lo que se da la cadena de inclusiones $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$.

Observación 2.1.28. Las propiedades de separabilidad T_i se heredan en los subespacios ya que si dos subconjuntos de un espacio son separables por abiertos también lo son en un subespacio con la topología heredada ya que basta tomar las intersecciones de los abiertos con el subespacio.

Una vez definidos los espacios compactos y los axiomas de separabilidad se enuncian ciertas relaciones entre estos.

Proposición 2.1.29. Sean (X, τ_X) un espacio topológico y A, B dos subconjuntos de X dotados de la topología de subespacio. Se tiene entonces que:

1. Si X es compacto y A es cerrado en X, entonces A es compacto.
2. Si X es Hausdorff y A es compacto, entonces A es cerrado en X.
3. Si X es Hausdorff y A, B son compactos, entonces $A \cap B$ es compacto.
4. Si X es Hausdorff, entonces si los subconjuntos A y B son compactos y disjuntos, existen abiertos disjuntos U_A, U_B que contienen a A y B respectivamente.
5. Si X es regular, entonces para cada entorno U de un punto $x \in X$ existe un entorno V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.
6. Si X es normal, A es cerrado y B es abierto y $A \subset B$ entonces existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset B$

La demostración de esta Proposición se da en el Apéndice A. Cabe destacar que la propiedad 5 de la Proposición 2.1.29 es equivalente a afirmar que cada punto tiene una base de entornos compactos.

Por la Definición 2.1.23 se tiene que si un espacio es localmente compacto, entonces dado un punto x existe un entorno U de x de clausura compacta. Se ve bajo esta definición que todo espacio compacto es localmente compacto ya que si X es compacto, dado $x \in X$, existe un entorno $U = X$ de x tal que $\overline{U} = X$ es compacto. En el siguiente resultado se va a probar una propiedad de estos entornos U de clausura compacta. Esta propiedad se puede extender como se ha mencionado aquí al mismo espacio X si se tiene que X es compacto.

Corolario 2.1.30. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Sea $x \in X$ un punto y U el entorno de x que cumple que $\overline{U}$ es compacto. Entonces, el entorno compacto $\overline{U}$ de x es normal. Es más, cualquier entorno de x contiene un entorno compacto de x, es decir, en cada punto se puede definir una base de entornos compactos.

En particular, si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal y en cada punto se puede definir una base de entornos compactos.

La demostración de este Corolario se da en el Apéndice A.

Proposición 2.1.31. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Se tiene que:

1. Si X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.
2. Si X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.
3. Si X es compacto, Y es Hausdorff y f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

A continuación se introduce el concepto de compactificación de un espacio topológico. La compactificación es una herramienta que permite dotar a un espacio topológico de una estructura compacta.

Definición 2.1.32. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre X y $h(X) \subset Y$ donde Y es compacto y Hausdorff. Si $h(X)$ es denso en Y al par (Y, h) se le llama *compactificación* de X. Cuando $Y \setminus X$ es un punto, (Y, h) es una *compactificación por un punto* de X y se denota por X^*.

En el contexto de este trabajo se va a utilizar el caso particular de las compactificaciones por un punto donde la aplicación h es la inclusión de X en X^*. En este caso, dado X un espacio topológico Hausdorff y $p \notin X$ un punto fuera de X, se denota por $X^* = X \cup \{p\}$ a la compactificación por un punto de X.

Observación 2.1.33. Dado X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{B}$ una base de la topología de X y $p \notin X$ un punto fuera de X, se tiene que existe una compactificación por un punto de X al considerar el espacio $X^* = X \cup \{p\}$ donde la topología de X^* es la topología dada por la base $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_p$ con

$$\mathcal{B}_p = \{N \subset X^* : p \in N \text{ y } X^* \setminus N \text{ es compacto en } X\}$$

La demostración de esta Observación y otras propiedades sobre compactificaciones se discuten en más detalle en el Apéndice B

Por último, se enuncia un Lema técnico sobre los conjuntos compactos en el espacio producto $X \times Y$. Este Lema es muy útil para varias demostraciones a lo largo del trabajo y su demostración se puede encontrar en el Apéndice A

Proposición 2.1.34. Sean X e Y dos espacios topológicos, sea $K \subset Y$ un compacto de Y y sea x_0 un elemento de X. Sea W un abierto de $X \times Y$ que contiene a $\{x_0\} \times K$. Entonces, existe un abierto U de X tal que $U \times K \subset W$ y $x_0 \in U$.

2.2. Topología en espacios métricos

Una distancia sobre un conjunto X es una aplicación que permite determinar "como de cerca" están dos puntos de X. En este apartado se ve como una distancia dota a un conjunto de una topología y se presentan ciertas propiedades de los espacios dotados de una distancia. Por último, se enuncian algunos resultados que serán de utilidad en el Capítulo 5. Los resultados de esta sección se pueden encontrar en los Capítulos 20, 21 y 45 de [7].

Definición 2.2.1. Una *distancia* en un conjunto X es una aplicación

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Al par (X, d) se denomina *espacio métrico*

Dado $\varepsilon > 0$ se llama *bola abierta* de radio ε y centro $x \in X$ al conjunto

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

donde cuando la distancia d es clara se puede escribir $B(x, \varepsilon)$.

La *distancia entre dos subconjuntos* $A, B \subset X$ se define como

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$$

Si d es una distancia en el conjunto X, la familia de las bolas abiertas de X define una base para una topología en X. Esta topología se denomina *topología métrica* inducida por d.

Dada una aplicación $f : X \to Y$ entre un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, d), su continuidad se puede enunciar en términos de la distancia d. Una aplicación f entre un espacio topológico X y un espacio métrico (Y, d) es continua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f(U) \subset B_d(f(x_0), \varepsilon)$ o lo que es lo mismo, para todo $x \in U$ se tiene que

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

Cabe recalcar que no todos los espacios topológicos aceptan una distancia. La existencia de una distancia en un espacio topológico le da al conjunto algunas propiedades que permiten probar ciertos resultados. En la siguiente definición se diferencian aquellos espacios que admiten una distancia de aquellos que no.

Definición 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *metrizable* si existe una distancia d definida en X tal que la topología métrica inducida por d coincide con la topología de X.

Los espacios métricos son Hausdorff. Dados dos puntos distintos $x, y \in X$, se tiene que $d(x,y) > 0$ por tanto, se puede tomar $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ y se tiene que las bolas abiertas $B_d(x, \varepsilon)$ y $B_d(y, \varepsilon)$ son disjuntas y contienen a x e y respectivamente.

En un espacio métrico (X, d), un subconjunto $A \subset X$ se dice *acotado* si existe un número real $M > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se cumple que $d(x,y) < M$. Ampliando esta definición, se introduce la noción de espacio totalmente acotado que restringe más aún la noción de acotación.

Definición 2.2.3. Un espacio métrico (X, d) se dice *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número finito de bolas abiertas de radio ε que recubren a X, es decir, existe una familia finita de bolas abiertas $\{B(x_i, \varepsilon)\}_{i \in [n_\varepsilon]}$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(x_i, \varepsilon)$$

Ejemplo 2.2.4. Sea X un espacio métrico. Si X es totalmente acotado entonces X es acotado. Si X es totalmente acotado, existe un recubrimiento finito de X por bolas abiertas de radio $\frac{1}{2}$. Sea $\mathcal{B} = \{B(x_i, \frac{1}{2})\}_{i \in [n]}$ dicha familia finita de bolas abiertas. Se tiene entonces que la distancia entre dos puntos $x, y \in X$ cualesquiera es menor o igual que la cantidad

$$d(x,y) = 1 + \text{máx}\{d(x_i, x_j) : i, j \leq n\}$$

y por tanto se sigue que X es acotado.

Por otro lado, la acotación no implica acotación total. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la distancia

$$\bar{d}(x,y) = \text{mín}\{1, |y - x|\}$$

es acotado porque la distancia entre dos puntos cualesquiera es menor o igual que 1 pero tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, no se puede recubrir $\mathbb{R}$ por un número finito de bolas abiertas de dicho radio.

La distancia definida en la segunda parte del Ejemplo 2.2.4 induce la misma topología sobre $\mathbb{R}$ que la distancia usual dada por

$$d(x, y) = |x - y|$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Este tipo de distancias son de especial interés ya que permiten describir el mismo espacio topológico pero con la diferencia de que el nuevo espacio métrico es acotado.

Definición 2.2.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la *distancia acotada* correspondiente a d como la distancia $\bar{d}$ dada por

$$\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$$

para $x, y \in X$.

A continuación se enuncia el resultado que demuestra que la distancia acotada induce la misma topología que la distancia original. La demostración de este resultado se puede encontrar en el Teorema 20.1 de [7].

Teorema 2.2.6. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la topología inducida por la distancia acotada $\bar{d}$ correspondiente a d en X coincide con la topología inducida por d en X.

Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ es un subespacio compacto de X entonces A es totalmente acotado. Para todo $\varepsilon > 0$ se toma el recubrimiento abierto de A dado por la familia de abiertos $\{B_d(a, \varepsilon)\}_{a \in A}$. Como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito de A dado por $\{B_d(a_i, \varepsilon)\}_{i \in [n]}$. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ se puede recubrir A por un número finito de bolas abiertas de radio ε. Por tanto, A es totalmente acotado.

Por último, se va a enunciar y demostrar un resultado técnico que permite asegurar la existencia de la distancia mínima o máxima bajo ciertas condiciones. Este resultado se utiliza más adelante en la demostración de algunos resultados de la Sección 5.

Lema 2.2.7. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos. La aplicación

$$\begin{aligned} d_B : A &\longrightarrow [0, \infty) \\ a &\longmapsto d(a, B) \end{aligned}$$

es continua. Además, si A es compacto, entonces d_B alcanza un mínimo y un máximo.

El lema anterior es consecuencia de la desigualdad

$$|d(a_1, B) - d(a_2, B)| \leq d(a_1, a_2)$$

para $a_1, a_2 \in A$.

Capítulo 3

Topología producto

En este capítulo se introduce la topología producto sobre el producto cartesiano de espacios topológicos. El capítulo se separa en dos secciones. Primero, se demuestran una serie de propiedades básicas para la topología producto. En la segunda sección, se da el caso particular de la topología producto para el espacio de las aplicaciones entre espacios topológicos y se relaciona con la topología punto-abierta en dicho espacio. Para escribir esta sección se han seguido principalmente los libros [7] y [6].

3.1. Definición y propiedades

Definición 3.1.1. Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia arbitraria de conjuntos y A un conjunto. El conjunto X de todas las aplicaciones de A en $\bigcup_\alpha X_\alpha$ se llama el *producto cartesiano* de los espacios X_α y se denota por

$$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{x : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : x \text{ es aplicación}\}$$

Los elementos de X se pueden escribir como $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ donde $x_\alpha = x(\alpha)$. Se definen las *proyecciones* como las aplicaciones $p_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$ tales que $p_\beta(x) = x_\beta = x(\beta)$ para $\beta \in A$.

Sobre el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ de espacios topológicos parece natural definir la *topología por cajas*. Esta topología es la dada por la base

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in A} U_\alpha : U_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha\}$$

que se puede ver en el capítulo 19 de [7] que efectivamente define una base para alguna topología sobre el producto cartesiano. Esta topología comparte algunas propiedades con la topología producto que se define a continuación. Concretamente, en el caso de un producto cartesiano finito se tiene que ambas topologías coinciden como se verá más adelante. Sin embargo, se ve que la topología por cajas falla a la hora de generalizar la siguiente propiedad al producto infinito de espacios topológicos:

Sean $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ el producto cartesiano de n espacios topológicos e Y un espacio topológico. Si $f : Y \to X$ es una aplicación entre espacios topológicos dada por $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ se tiene que $f : Y \to X$ es continua si y solo si cada $f_i : Y \to X_i$ es continua.

Como se verá en 3.1.10 y en 3.1.11, con la topología producto se generaliza esta propiedad al producto infinito pero esto falla para la topología por cajas.

Definición 3.1.2. Sean $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto cartesiano de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y p_α las proyecciones correspondientes a cada $\alpha \in A$. La *topología producto* sobre X es la topología τ generada por la subbase $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ donde

$$S_\alpha = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \text{ abierto en } X_\alpha\}$$

Al par (X, τ) se le llama espacio topológico producto o espacio producto.

Observación 3.1.3. Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Entonces, los abiertos básicos de la topología producto son de la forma:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_{\alpha_i} \text{ es abierto en } X_{\alpha_i} \text{ para un número finito de índices } \alpha_i \text{ y } U_\alpha = X_\alpha \text{ para el resto de índices } \alpha \in A \right\}$$

Basta ver la forma que tienen las contraimágenes por las proyecciones de los abiertos $U_\beta \in X_\beta$.

$$p_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X : x_\beta \in U_\beta\} = \{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\beta \text{ es un abierto de } X_\beta \text{ y } U_\alpha = X_\alpha \text{ para todo } \alpha \neq \beta\}$$

de donde se ve claro que las intersecciones finitas de elementos de la subbase son los elementos de $\mathcal{B}$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de espacios topológicos producto. El segundo de estos ejemplos es el espacio de aplicaciones entre dos conjuntos. Este ejemplo es la razón por la que se introduce la topología producto en este trabajo ya que el espacio de aplicaciones es un caso particular del producto cartesiano de espacios topológicos y por tanto la topología producto es una posible topología sobre el espacio de aplicaciones.

Ejemplo 3.1.4. A continuación se presentan algunos ejemplos de espacios producto.

1. El producto cartesiano de dos espacios topológicos X e Y, $X \times Y$, es el espacio producto $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$ donde $X_1 = X$ y $X_2 = Y$. Aquí, y en general en el producto finito de espacios topológicos, la topología producto coincide con la topología por cajas donde los abiertos están formados por el producto de abiertos en cada uno de los espacios.

2. Dado que el producto cartesiano de conjuntos $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es el conjunto de aplicaciones entre A y $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, el conjunto de aplicaciones de X en Y no es más que el espacio producto $\prod_{x \in X} Y_\alpha$ donde $Y_\alpha = Y$ para todo $\alpha \in X$. Sabiendo esto la topología producto define una topología sobre el espacio de aplicaciones entre X e Y. El espacio de aplicaciones entre X e Y se denota en general por Y^X.

3. El espacio de las sucesiones con coeficientes en un conjunto C es un ejemplo particular de espacio de aplicaciones y por tanto de espacio producto. El espacio de las sucesiones con coeficientes en C es el espacio de aplicaciones de los naturales $\mathbb{N}$ en el conjunto C. Siguiendo la notación anterior se denota por $C^{\mathbb{N}}$. Este espacio se puede entender como el espacio producto $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ donde cada espacio X_i es una copia del conjunto C.

La topología producto está estrechamente relacionada con la continuidad de las proyecciones. En particular, se ve que la topología producto es la más gruesa que hace que todas las proyecciones sean continuas. Esto se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto cartesiano de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y sea τ una topología sobre X. Entonces, la topología producto τ es la topología más gruesa que hace que todas las proyecciones p_α sean continuas.

Demostración. Por un lado, sabemos que $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es abierto para todo abierto U_α de X_α con $\alpha \in A$. Por tanto, las proyecciones son continuas en la topología producto. Veamos que la topología producto es la más gruesa que hace que las proyecciones sean continuas.

Supongamos que τ es la topología producto y que τ' es una topología que hace que las proyecciones sean continuas. Dado que τ se define como la topología generada por $\mathcal{S}$, por la Observación 2.1.7, τ es la topología más gruesa que contiene a $\mathcal{S}$. Basta comprobar que $\mathcal{S} \subset \tau'$. Se considera el subconjunto $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ para algún abierto U_{α_0} de X_{α_0}. Como p_α es continua en τ' para todo α en A, $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ es un abierto en τ' y por lo tanto S_{α_0} es una familia de abiertos de τ', es decir, se tiene que $S_{\alpha_0} \subset \tau'$ y por tanto $\mathcal{S} \subset \tau'$ por lo que $\tau \subset \tau'$.

□

En las siguientes proposiciones se presentan algunas propiedades básicas de la topología producto. Como se ha mencionado previamente, la topología producto es una posible topología sobre el espacio de aplicaciones y por tanto estas propiedades se pueden aplicar a la topología producto sobre el espacio de aplicaciones directamente.

Proposición 3.1.6. Sea $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y sean p_α las proyecciones sobre los respectivos X_α. Entonces, las aplicaciones p_α son continuas y abiertas.

Demostración. Por definición de la topología producto, las proyecciones p_α son continuas. Para demostrar que son abiertas, basta considerar un abierto básico B y ver que $p_\alpha(B)$ es abierto en X_α. Por la Observación 3.1.3 se ve que los abiertos básicos son de la forma $B = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ donde U_α es un abierto de X_α para un número finito de índices $\{\alpha_i\}_{i\in[n]}$ y es igual a X_α para el resto de índices. Por lo tanto, $p_\alpha(B) = U_\alpha$ si α está en el conjunto de índices de $\{\alpha_i\}_{i\in[n]}$ y es igual a X_α si α no está en dicho conjunto de índices. En cualquiera de los casos, $p_\alpha(B)$ es un abierto de X_α por lo que p_α es una aplicación abierta.

□

Proposición 3.1.7. Sea $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y sea A_α un subespacio de X_α para cada $\alpha \in A$. Entonces se tiene la igualdad

$$\prod_{\alpha\in A} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$$

Como consecuencia se tiene que un subconjunto $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ es cerrado si y solo si A_α es cerrado para todo $\alpha \in A$

Demostración. Para demostrar esta igualdad de conjuntos se procede por doble contenido.

Sea $x \in \prod_{\alpha\in A} \overline{A_\alpha}$ y $B = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ un abierto básico que contiene a x dado por la caracterización de la Observación 3.1.3. Queremos ver que $B \cap \prod_{\alpha\in A} A_\alpha \neq \emptyset$ y por tanto que $x \in \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$. Se tiene que $p_\alpha(x) = x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ y por tanto, para todo abierto V_α de X_α que contiene a x_α, se cumple que $V_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset$. En particular, U_α interseca con A_α y por tanto B interseca con $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ y $x \in \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$.

Sea $x \in \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$ y veamos que para cada $\beta \in A$, se tiene que $x_\beta \in \overline{A_\beta}$. Para todo x_β se toma un abierto V_β de X_β tal que $x_\beta \in V_\beta$. Por ser las proyecciones continuas, $p_\beta^{-1}(V_\beta)$ es abierto en $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Por estar x en la clausura de $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$, la intersección de $p_\beta^{-1}(V_\beta)$ con $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ es no vacía. Dicho de otro modo, existe un punto $y \in (\prod_{\alpha\in A} A_\alpha) \cap p_\beta^{-1}(V_\beta)$. Tomando la proyección p_β de ambos lados de la igualdad queda que $y_\beta \in A_\beta \cap V_\beta$ o lo que es lo mismo, $A_\beta \cap V_\beta \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x_\beta \in \overline{A_\beta}$ y por tanto $x \in \prod_{\alpha\in A} \overline{A_\alpha}$.

Para la última parte del enunciado basta ver que si A_α es cerrado, entonces $A_\alpha = \overline{A_\alpha}$ y por tanto se da la cadena de igualdades

$$\prod_{\alpha\in A} A_\alpha = \prod_{\alpha\in A} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$$

donde $\overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$ es cerrado por ser la clausura de $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$.

Por otro lado, si $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha$ es cerrado entonces se da que $\prod_{\alpha\in A} A_\alpha = \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha}$ y por tanto se da la cadena de igualdades

$$\prod_{\alpha\in A} A_\alpha = \overline{\prod_{\alpha\in A} A_\alpha} = \prod_{\alpha\in A} \overline{A_\alpha}$$

donde cada $\overline{A_\alpha}$ es cerrado por ser la clausura de A_α.

□

Teorema 3.1.8. Sea $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Entonces, X es un espacio Hausdorff si y solo si cada X_α es un espacio Hausdorff.

Demostración. Supongamos que X es un espacio Hausdorff. Dado $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in X$, X_{α_0} se puede identificar mediante un homeomorfismo con el subconjunto $A = \prod_{\alpha \in A} A_\alpha \subset X$ donde $A_\alpha = \{x_\alpha\}$ y $A_{\alpha_0} = X_{\alpha_0}$. Como X es Hausdorff, A es también Hausdorff (por ser subespacio de X que es Hausdorff) y por tanto también lo es X_{α_0} por ser homeomorfo a A que es un espacio Hausdorff.

Recíprocamente, Supongamos que cada X_α es un espacio Hausdorff. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, es decir, existe al menos un índice α_0 tal que $x_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}(x) \neq p_{\alpha_0}(y) = y_{\alpha_0}$. Como X_{α_0} es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_{α_0} y V_{α_0} en X_{α_0} que contienen a x_{α_0} y y_{α_0} respectivamente. Tomando ahora $U = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ y $V = p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$, se tiene que U y V son abiertos de X que contienen a x e y respectivamente y son disjuntos ya que $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \cap p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donde la última igualdad se da por ser las aplicaciones p_α sobreyectivas. Por lo tanto, X es un espacio Hausdorff. □

Proposición 3.1.9. Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X. Entonces, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x si y solo si para todo $\alpha \in A$, la sucesión $\{p_\alpha(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $p_\alpha(x)$.

Demostración. Como p_α es continua, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x, por la Proposición 2.1.16, la sucesión $\{p_\alpha(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $p_\alpha(x)$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $\alpha \in A$, la sucesión $\{p_\alpha(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $p_\alpha(x)$. Sea $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ un abierto básico que contiene a x. Por la Observación 3.1.3, se tiene que U_α es un abierto de X_α para un número finito de índices α y es igual a X_α para el resto de índices. Por otro lado, por la Proposición 3.1.6, se tiene que p_α es una aplicación abierta con lo que se deduce que $p_\alpha(B) = U_\alpha$ es un abierto de X_α. Por tanto, para cada $\alpha \in A$, existe un natural $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_\alpha$, se tiene que $p_\alpha(x_n) \in U_\alpha$. Para los índices α tales que $U_\alpha = X_\alpha$ este natural es el uno y por tanto solo hay un conjunto finito de abiertos para los cuales N_α es mayor que uno lo que asegura que existe la cantidad $N = \max\{N_\alpha : \alpha \in A\}$. Por lo tanto, para todo $n \geq N$ se tiene que $p_\alpha(x_n) \in U_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, es decir, $x_n \in B$ lo que implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x. □

La razón por la que en esta sección se trabaja con la topología producto en lugar de la topología por cajas es, en gran medida, porque la topología producto cumple la siguiente propiedad relacionada con la continuidad de las aplicaciones entre el espacio producto y otros espacios topológicos. Esta propiedad es la generalización de la mencionada al principio de este capítulo. A pesar de que no es necesaria para el resto del trabajo se ha decidido enunciar ya que ilustra el interés de estudiar la topología producto. La demostración puede encontrarse en la Proposición 5 del capítulo 22 de [6].

Teorema 3.1.10. Sea $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ el espacio producto de la familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ y sea Y un espacio topológico. Entonces, una aplicación $f : Y \to X$ es continua si y solo si para cada $\alpha \in A$, la aplicación $p_\alpha \circ f : Y \to E_\alpha$ es continua. Además, la topología producto es la única topología que cumple esta propiedad para toda aplicación continua $f : Y \to X$.

Ejemplo 3.1.11. El siguiente ejemplo ilustra como el resultado anterior falla cuando se utiliza la topología por cajas.

Sean los espacios topológicos $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ la recta real con la topología usual y el espacio de las sucesiones reales con la topología por cajas respectivamente. Además, en cada componente del producto cartesiano se considera la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

Se considera primero la aplicación

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, \tau_u) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau) \\ t &\longmapsto (t, t, t, \ldots) \end{aligned}$$

entre la recta real y las sucesiones reales con la topología por cajas. Se ve que, dado $i \in \mathbb{N}$, la composición de la proyección p_i con la aplicación f tiene la forma

$$\begin{aligned} p_i \circ f : (\mathbb{R}, \tau_u) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u) \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

es decir, es la aplicación identidad entre $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Por lo tanto, $p_i \circ f$ es continua para todo $i \in \mathbb{N}$.

Se consideran ahora los abiertos de $\mathbb{R}$ de la forma $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Se tiene que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto

$$U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

es un abierto básico de la topología por cajas. Sin embargo, la contraimagen por f de U no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ ya que

$$f^{-1}(U) = \{t \in \mathbb{R} : t \in (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$$

Por tanto existe una aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau)$ de un espacio topológico en un producto cartesiano con la topología por cajas que cumple que es continua en todas sus componentes $p_i \circ f$ pero no es continua.

Para acabar con las propiedades de la topología producto se enuncia el Teorema de Tychonoff que caracteriza la compacidad de un espacio producto. La demostración de este Teorema se puede encontrar en el capítulo 5 de [7] o en la sección 35 de [6].

Teorema 3.1.12 (Teorema de Tychonoff)**.** El producto arbitrario de espacios topológicos $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, dotado de la topología producto, es compacto si y solo si cada X_α es compacto.

3.2. Espacio de aplicaciones y topología punto-abierta

Como se ha mencionado en el Ejemplo 3.1.4, el espacio de aplicaciones entre dos conjuntos X e Y es un espacio producto que se denota por Y^X. Concretamente, este es el espacio producto

$$Y^X = \prod_{x\in X} Y_x$$

donde $Y_x = Y$ para todo $x \in X$. Como se ha visto al introducir el producto cartesiano de espacios topológicos, $f \in \prod_{x\in X} Y_x$ se puede escribir como $f = (f_x)_{x\in X}$ donde $f_x = f(x)$ es la imagen de x por la aplicación f. Por lo tanto, se ve que las aplicaciones proyección

$$p_{x_0} : \prod_{x\in X} X_x \to Y_{x_0} = Y$$

son las aplicaciones evaluación $p_{x_0}(f) = f_{x_0} = f(x_0)$.

Dado el espacio de aplicaciones Y^X y dos subconjuntos K, U de X e Y respectivamente, es de especial interés estudiar el conjunto de aplicaciones que llevan K en U.

Definición 3.2.1. Sean X e Y dos conjuntos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Dados $U \subseteq Y$ un subconjunto de Y y $K \subseteq X$ un subconjunto de X, se define el conjunto

$$U^K = \{f \in Y^X : f(K) \subset U\}$$

A continuación se presentan ciertas propiedades básicas de estos conjuntos.

Proposición 3.2.2. Sean X e Y dos conjuntos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Dados $U, U' \subseteq Y$ subconjuntos de Y, $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de Y, dos subconjuntos $K, K' \subseteq X$ de X y $\{K_i\}_{i\in I}$ subconjuntos de X, se cumple que

1. Si $U \subset U'$ entonces $U^K \subseteq (U')^K$.
2. Si $K \supset K'$ entonces $U^K \subseteq U^{(K')}$.
3. $\cap_{i\in I}(U_i^{K_i}) \subset (\cup_{i\in I} U_i)^{(\cup_{i\in I} K_i)}$

Demostración. Se demuestra cada una de las inclusiones por separado.

1. Sea $f \in U^K$. Entonces, $f(K) \subset U \subset U'$ y por tanto $f \in (U')^K$,
2. Sea $f \in U^K$. Luego, $f(K') \subset f(K) \subset U$ y obtenemos $f \in U^{(K')}$.
3. Sea $f \in \cap_{i\in I}(U_i^{K_i})$. Entonces $f(K_i) \subset U_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $f(\cup_{i\in I}K_i) = \cup_{i\in I}f(K_i) \subset \cup_{i\in I}U_i$ y obtenemos $f \in (\cup_{i\in I}U_i)^{(\cup_{i\in I}K_i)}$.

□

Utilizando este tipo de conjuntos se define una subbase para la topología punto-abierta sobre el espacio de aplicaciones Y^X. Para la definición de la topología punto-abierta se consideran un conjunto X, un espacio topológico Y y el conjunto Y^X de aplicaciones entre X e Y. Se define la familia de subconjuntos de Y^X dada por

$$\mathcal{S}_p = \{U^x : x \in X, U \text{ abierto de } Y\}$$

Dado un elemento de $f \in Y^X$, se tiene que $f \in Y^x$ para todo $x \in X$ y por tanto, $Y^x \in \mathcal{S}_p$. Luego, $Y^X = \bigcup_{x\in X} Y^x$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_p$ es una subbase sobre Y^X.

Definición 3.2.3. Sean X un conjunto e Y un espacio topológico. La *topología punto-abierta* sobre Y^X es la topología τ_p generada por la subbase $\mathcal{S}_p = \{U^x : x \in X, U \text{ abierto en } Y\}$.

En la siguiente proposición se ve que esta topología no es más que una particularización de la topología producto del espacio $\prod_{x\in X} Y_x$ donde $Y_x = Y$ para todo $x \in X$. Se ve como consecuencia de esto que la topología punto-abierta comparte muchas propiedades descritas en la Sección 3.1.

Proposición 3.2.4. Sean X un conjunto, Y un espacio topológico, Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y y τ_p la topología punto-abierta. Entonces, se cumple que τ_p es la topología producto sobre Y^X. Por tanto, la topología punto-abierta cumple las siguientes propiedades

1. τ_p es la topología más gruesa que hace que todas las proyecciones $p_x : Y^X \to Y$ sean continuas.
2. Si Y^X se dota de la topología τ_p entonces, dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de X en Y, se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f si y solo si para todo $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.
3. El subespacio A^X de Y^X es cerrado si y solo si A es cerrado en Y.
4. El espacio Y^X con la topología τ_p es Hausdorff si y solo si Y es Hausdorff.

Demostración. Se ve primero que las subbases que generan la topología producto y la topología punto abierta coinciden debido a la siguiente cadena de igualdades

$$U^x = \{f \in \prod_{t\in X} Y_t : f(x) \in U\} = \{f \in \prod_{t\in X} Y_t : p_x(f) \in U\} = p_x^{-1}(U)$$

Por lo tanto se concluye que ambas topologías coinciden por estar generadas por la misma subbase sobre el mismo conjunto.

Por otro lado, las demás propiedades son consecuencia directa de las propiedades demostradas en la Sección 3.1. □

Debido a la segunda propiedad de la Proposición 3.2.4, se puede ver que una sucesión de aplicaciones converge si y solo si converge para cada punto del espacio X. Esta es la razón por la cual muchos autores llaman a esta topología la *topología de la convergencia puntual*.

Capítulo 4

Topología compacto-abierta sobre Y^X

En este capítulo se estudia la topología compacto-abierta sobre el espacio de aplicaciones Y^X. En la primera sección se dan propiedades de dicha topología así como su relación con la topología punto-abierta previamente definida. En la segunda sección se estudian las restricciones de las topologías a diferentes subespacios de Y^X como el espacio de las aplicaciones continuas entre X e Y denotado por $\mathcal{C}(X,Y)$. Para la realización de este capítulo se han seguido principalmente los libros [1], [7] y[6].

Recordando lo mencionado en el capítulo 3, se denota por Y^X al conjunto de aplicaciones de X en Y que es un producto cartesiano de espacios topológicos dado por

$$Y^X = \prod_{x\in X} Y_x$$

donde $Y_x = Y$ para todo $x \in X$. Por otro lado, se tiene que las aplicaciones proyección

$$p_{x_0} : \prod_{x\in X} Y_x \to Y$$

son las aplicaciones de evaluación $p_{x_0}(f) = f_{x_0} = f(x_0)$.

Dada cualquier topología definida sobre el espacio de aplicaciones para el caso particular donde tanto el espacio de salida como el de llegada son espacios topológicos, una propiedad que puede cumplir la topología es que la aplicación evaluación sea continua. A raíz de esto, se introduce la siguiente definición.

Definición 4.0.1. Sean X e Y dos espacios topológicos e Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Se dice que una topología τ sobre Y^X es *admisible* o *de continuidad conjunta* si la aplicación evaluación

$$\begin{aligned} e : Y^X \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es continua. Una topología se dice *admisible en compactos* o *de continuidad conjunta en compactos* si para cualquier compacto K de X la restricción e_K de e al subespacio $Y^X \times K$ es continua. Es decir, si la aplicación

$$\begin{aligned} e_K : Y^X \times K &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es continua.

4.1. Topología compacto-abierta

Para poder definir la topología compacto-abierta en Y^X se requiere que tanto X como Y sean espacios topológicos. En este caso, se considera la familia de subconjuntos

$$\mathcal{S}_k = \{U^K : K \subset X \text{ es compacto en } X \text{ y } U \subset Y \text{ es abierto en } Y\}$$

Donde se recuerda que U^K es el conjunto de las aplicaciones $f \in Y^X$ que cumplen que $f(K) \subset U$. Como $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}_k$ ya que los puntos son conjuntos compactos de X para cualquier topología, se tiene que la familia $\mathcal{S}_k$ forma una subbase de Y^X.

Definición 4.1.1. Sean X e Y espacios topológicos y sea Y^X el espacio de aplicaciones de X en Y. Dada la subbase

$$\mathcal{S}_k = \{U^K : K \text{ compacto en } X, U \text{ abierto en } Y\}$$

se llama la topología *compacto-abierta* sobre Y^X a la topología generada por $\mathcal{S}_k$. Esta topología se denota por τ_k.

A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades sobre la relación que tiene la topología compacto-abierta, la topología punto-abierta y las topologías admisibles en compactos.

Proposición 4.1.2. Sea τ_a una topología admisible en compactos en Y^X. Entonces, se tiene la siguiente cadena de contenidos:

$$\tau_p \subset \tau_k \subset \tau_a$$

Además, esta cadena de inclusiones sigue siendo cierta sobre un subconjunto $\mathcal{F} \subset Y^X$ tomando las topologías de subespacio heredadas de τ_p y τ_k y una topología admisible en compactos τ_a sobre $\mathcal{F}$.

Demostración. La primera inclusión se obtiene directamente de que los puntos de un espacio topológico son siempre compactos y por tanto hay una inclusión de las subbases.

Para probar la segunda inclusión basta ver que los abiertos subbásicos U^K de la topología τ_k son abiertos en la topología τ_a. Sea $f \in U^K$ donde U es abierto de Y y K es un compacto de X. Se quiere ver que existe un abierto $W_f \in \tau_a$ tal que $f \in W_f \subset U^K$.

Sea $e_K : Y^X \times K \to Y$ la aplicación evaluación restringida a $Y^X \times K$ y consideramos aquí la topología producto de τ_a y la topología de subespacio en K. Por ser K compacto en X y U abierto en Y se tiene que $e_K^{-1}(U)$ es abierto en $Y^X \times K$ para la topología τ_a en Y^X y la topología de subespacio en K. Como $f \in U^K$, se tiene que $e_K(f, K) = f(K) \subset U$ y por tanto que $\{f\} \times K \subset e_K^{-1}(U)$. Por el Lema 2.1.34, existe un abierto W_f de τ_a tal que

$$\{f\} \times K \subset W_f \times K \subset e_K^{-1}(U)$$

Por último, se quiere ver que $W_f \subset U^K$. Como $W_f \times K \subset e_K^{-1}(U)$, se tiene que para todo $(g, k) \in W_f \times K$ se cumple que $g(k) = e_K(g, k) \in U$. Dado $g \in W_f$, se tiene que para todo $k \in K$, $g(k) \in U$, es decir, $g(K) \subset U$ y que $g \in U^K$. Por lo tanto, $W_f \subset U^K$. Luego, para todo $f \in U^K$ existe un abierto W_f de τ_a tal que $f \in W_f \subset U^K$. Se concluye que $\tau_k \subset \tau_a$.

Para la última afirmación basta dar una demostración análoga a la anterior pero teniendo en cuenta los abiertos $U^K \cap \mathcal{F}$ de la topología de subespacio. $\square$

Proposición 4.1.3. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y dotado de la topología compacto-abierta. Entonces se tiene que Y^X es Hausdorff si y solo si Y es Hausdorff.

Demostración. Supongamos que Y^X es Hausdorff y veamos que también lo es Y. Sean $y_1, y_2 \in Y$ dos elementos distintos de Y y sean $f_1, f_2 \in Y^X$ las aplicaciones constantes que llevan X en y_1 y y_2 respectivamente. Por ser Y^X Hausdorff, existen abiertos básicos B_1, B_2 de Y^X de modo que $f_1 \in B_1$, $f_2 \in B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Por ser B_1, B_2 abiertos básicos de la topología compacto-abierta, estos se pueden escribir como intersección finita de elementos de la subbase, es decir, $B_1 = \bigcap_{i \in [n_1]} U_i^{K_i}$ y $B_2 = \bigcap_{i \in [n_2]} V_i^{C_i}$.

Se definen ahora los abiertos $U = \bigcap_{i \in [n_1]} U_i$ y $V = \bigcap_{i \in [n_2]} V_i$ en Y de manera que $y_1 \in U$ y $y_2 \in V$ ya que $y_1 \in U_i$ para todo $i \leq n$ y lo análogo pasa para y_2. Veamos ahora que la intersección de U y V es vacía.

Si existiera un elemento $y_3 \in U \cap V$, se tendría que la aplicación constante f_3 tal que $f_3(x) = y_3$ para todo $x \in X$ pertenecería a la intersección de B_1 y B_2 ya que para cada K_i, C_j se tendría que $f_3(K_i) = y_3 \in U$ y $f_3(C_j) = y_3 \in V$. Por tanto, $f_3 \in B_1 \cap B_2$ lo que contradice que estos conjuntos sean disjuntos. Se concluye que, $U \cap V = \emptyset$ y que Y es Hausdorff.

Recíprocamente, como Y es Hausdorff, se tiene que Y^X es Hausdorff para la topología punto-abierta por la Proposición 3.2.4. Por tanto, por la Proposición 4.1.2, se tiene que Y^X es Hausdorff para la topología compacto-abierta. □

Teorema 4.1.4. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Sean τ_p, τ_k y τ_a las topologías punto-abierta, compacto-abierta y una topología admisible sobre compactos cualquiera en Y^X respectivamente. Entonces, si Y^X es compacto para la topología τ_a y el espacio Y es Hausdorff, se tiene que $\tau_p = \tau_k = \tau_a$.

Demostración. Por la Proposición 4.1.2, se tiene que $\tau_p \subset \tau_a$ y por tanto la aplicación identidad $Id : (Y^X, \tau_a) \to (Y^X, \tau_p)$ es continua. Además, por la Proposición 3.2.4, se tiene que el espacio (Y^X, τ_p) es Hausdorff y por tanto la aplicación identidad es una aplicación continua entre un espacio compacto y un espacio Hausdorff. Por lo tanto, por la Proposición 2.1.31, se tiene que la aplicación identidad es un homeomorfismo y por tanto $\tau_p = \tau_a$. Teniendo en cuenta que por la Proposición 4.1.2, se tiene que $\tau_p \subset \tau_k \subset \tau_a$, se concluye que $\tau_p = \tau_k = \tau_a$. □

4.2. Subconjuntos de Y^X con las topologías de subespacio

Siguiendo con la notación de los apartados anteriores, dados dos espacios topológicos X e Y se van a llamar τ_p, τ_k y τ_a a las topologías punto-abierta, compacto-abierta y una topología admisible sobre compactos en Y^X respectivamente. En este apartado se estudian las propiedades de ciertos subconjuntos de Y^X con las topologías de subespacio inducidas por τ_p, τ_k y τ_a.

A pesar de que no se diga expresamente a lo largo de este capítulo, si se refiere a alguno de estos subconjuntos de Y^X con las topologías "inducidas" o "heredadas" de las topologías de Y^X se esta refiriendo a las topologías de subespacio.

Definición 4.2.1. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Se definen los siguientes subconjuntos de Y^X:

- $\mathcal{C}(X,Y) = \{f \in Y^X : f \text{ es continua}\}$
- $\mathcal{K}(X,Y) = \{f \in Y^X : \text{ la restricción de } f \text{ a cualquier compacto de } X \text{ es continua}\}$

Se tiene la inclusión $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Y)$ ya que si f es continua en todo X, en particular su restricción a compactos también lo es. El siguiente ejemplo ilustra que la inclusión no es en general una igualdad y la proposición 4.2.3 da las condiciones necesarias para que se de la igualdad.

Ejemplo 4.2.2. Sea X el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ e Y el espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Veamos que existe una aplicación $f : X \to Y$ que no es continua pero su restricción a cualquier compacto de $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ es continua. Para esto se utiliza que los compactos de $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ son los conjuntos finitos (ver Ejemplo 2.1.25) y que la topología de subespacio sobre estos conjuntos coincide con la topología discreta.

Como la restricción de cualquier aplicación a un conjunto con la topología discreta es continua, se tiene que la restricción de cualquier aplicación $f : X \to Y$ a un compacto de $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ es continua. Tomando en particular la aplicación identidad $id_X : X \to Y$ dada por $id_X(x) = x$ se tiene que la restricción de id_X a cualquier compacto de X es continua y por tanto $id_X \in \mathcal{K}(X,Y)$. Sin embargo, si id_X fuera continua, entonces los intervalos abiertos (a,b) serían abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$ pero el complementario de estos conjuntos no es numerable ni finito y por tanto no pueden ser abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_{conum})$. Se concluye entonces que $id_X \in \mathcal{K}(X,Y)$ pero $id_X \notin \mathcal{C}(X,Y)$ y por tanto que la inclusión $\mathcal{C}(X,Y) \subsetneq \mathcal{K}(X,Y)$ es estricta.

Proposición 4.2.3. Si X es localmente compacto entonces se da la igualdad $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{K}(X,Y)$, se quiere ver que f es continua. Para ello, basta ver que dado un abierto U de Y entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Sea U un abierto de Y y $x \in f^{-1}(U)$. Como X es localmente compacto, existe un entorno compacto K de x. Por otro lado, como $f \in \mathcal{K}(X,Y)$, se tiene que $f|_K : K \to Y$ es continua, y por tanto, $f|_K^{-1}(U) = K \cap f^{-1}(U) = V_K$ es abierto en K. Por definición la topología de subespacio, existe V abierto de X tal que $V_K = K \cap V$ y como $x \in K$ por ser K entorno de x, se tiene que

$$x \in K \cap f^{-1}(U) = V_K = K \cap V \subset V$$

y por tanto $x \in V$. Además, por definición de entorno existe un abierto W en X que cumple que $x \in W \subset K$. Tomamos el abierto $W_x = W \cap V \subset K \cap V$ de X que cumple que,

$$x \in W_x \subset K \cap V = K \cap f^{-1}(U) \subset f^{-1}(U)$$

Por tanto se tiene que para cada $x \in f^{-1}(U)$ existe un abierto W_x de X tal que $x \in W_x \subset f^{-1}(U)$, es decir, para cualquier abierto U de Y se cumple que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Por lo tanto, f es continua y se ha probado que $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{C}(X,Y)$. Se concluye que $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$. □

La siguiente proposición muestra una manera de obtener una subbase de $(\mathcal{C}(X,Y), \tau_k)$ a partir de una subbase de la topología de Y. Dada una subbase $\mathcal{S}$ de la topología de Y, entonces se puede definir la familia de subconjuntos

$$\mathcal{S}'_k = \{S^K \cap \mathcal{C}(X,Y) : S \in \mathcal{S}, K \text{ compacto en } X\}$$

Esta familia es una subbase de $\mathcal{C}(X,Y)$ ya que dada una aplicación continua $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y un punto $x \in X$, la imagen $f(x)$ pertenece a algún elemento S de la subbase $\mathcal{S}$ (ya que por definición de subbase se tiene que $Y = \cup_{S\in\mathcal{S}} S$) y por tanto $f \in S^{\{x\}}$. Se tiene entonces que $\mathcal{C}(X,Y)$ se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{S}'_k$ y se concluye que $\mathcal{S}'_k$ es una subbase de $\mathcal{C}(X,Y)$. En la siguiente proposición se ve que la topología que genera $\mathcal{S}'_k$ coincide con la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}(X,Y)$.

Proposición 4.2.4. Sean X e Y dos espacios topológicos y $\mathcal{C}(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y. Sea $\mathcal{S}$ una subbase para la topología de Y. Entonces, si X es Hausdorff se tiene que la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S}'_k = \{S^K \cap \mathcal{C}(X,Y) : S \text{ es un elemento de la subbase } \mathcal{S} \text{ y } K \text{ es compacto en } X\}$$

coincide con la topología compacto-abierta τ_k sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.

Demostración. A lo largo de esta demostración se trabaja sobre el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$. En este caso, se trabajará con los subconjuntos $U^K \cap \mathcal{C}(X,Y)$ que se denotarán por U^K para abreviar. Es decir, salvo que se indique lo contrario, se entenderá por U^K el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y que llevan el subconjunto $K \subset X$ sobre el subconjunto $U \subset Y$.

Sea τ la topología en $\mathcal{C}(X,Y)$ generada por la subbase $\mathcal{S}'_k$. Como los elementos de la subbase $\mathcal{S}_k$ de la topología compacto-abierta son de la forma U^K con U abierto en Y y K compacto en X, se tiene que en particular los elementos S^K con $S \in \mathcal{S}$ son abiertos en τ_k y por tanto se tiene la inclusión $\tau \subset \tau_k$.

Para ver la otra inclusión basta con ver que dado un abierto subbásico de τ_k de la forma U^K se cumple que dada una aplicación $f \in U^K$ existe un abierto W de la topología generada por $\mathcal{S}'_k$ tal que $f \in W \subset U^K$.

Sean U un abierto de Y, K un compacto de X y $f \in U^K$. Como $\mathcal{S}$ es una subbase de la topología de Y, se puede expresar U como

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} \Big(\bigcap_{j\in[n_\alpha]} V_j^\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

con $V_j^\alpha \in \mathcal{S}$. Luego U_α son los elementos de la base generada por la subbase $\mathcal{S}$. Como f es continua, se tiene que la familia $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ forma un recubrimiento abierto de K y como K es compacto, existe una subfamilia finita $\{f^{-1}(U_{\alpha_i})\}_{i\in[m]}$ que recubre K, es decir, para cada $k \in K$ se cumple que $k \in f^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algún $i \in [m]$. Como K es compacto y es subespacio de X, que un espacio Hausdorff, se tiene que K es compacto y Hausdorff y por tanto normal por el Corolario 2.1.30.

Por el Corolario 2.1.30, se tiene que para cada $k \in K$ existe un entorno compacto K_k de k tal que $k \in K_k \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$. Por ser K_k entorno de k, existe un abierto W_k de X tal que $k \in W_k \subset K_k$ y por tanto la familia $\{W_k\}_{k\in K}$ es un recubrimiento abierto de K por lo que tiene un subrecubrimiento finito $\{W_{k_t}\}_{t\in[s]}$ con su correspondiente subfamilia finita de compactos $\{K_{k_t}\}_{t\in[s]}$.

Como cada K_{k_t} está contenido en algún abierto $f^{-1}(U_{\alpha_i})$, se definen los conjuntos K_i como la unión de todos los K_{k_t} contenidos en un abierto $f^{-1}(U_{\alpha_i})$. Como hay un número finito de compactos K_{k_t}, los conjuntos K_i son unión finita de compactos y por tanto, K_i es compacto.

Para cualquier índice $i \in [m]$, se tiene que $K_i \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$ por construcción y por tanto $f \in U_{\alpha_i}^{K_i}$. Además, por un lado tenemos que

$$U_{\alpha_i}^{K_i} = (\bigcap_{j\in[n_{\alpha_i}]} V_j^{\alpha_i})^{K_i} = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f(K_i) \subset V_j^{\alpha} \text{ para todo } j \in [n_{\alpha_i}]\} = \bigcap_{j\in[n_{\alpha_i}]} (V_j^{\alpha_i})^{K_i}$$

y por otro lado que, dado que $K \subset \cup_{i\in[m]} K_i$ y $U \supset \cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i}$, por la Proposición 3.2.2 se da la inclusión

$$\bigcap_{i\in[m]} (\bigcap_{j\in[n_{\alpha_i}]} (V_j^{\alpha_i})^{K_i}) = \bigcap_{i\in[m]} U_{\alpha_i}^{K_i} \subset (\cup_{i\in[m]} U_{\alpha_i})^{(\cup_{i\in[m]} K_i)} \subset U^K$$

Juntando estos resultados se tiene que para cada $f \in U^K$ se cumple que

$$f \in \bigcap_{i\in[m]} (\bigcap_{j\in[n_{\alpha_i}]} (V_j^{\alpha_i})^{K_i}) \subset U^K$$

de donde se concluye que U^K es abierto en la topología τ generada por la subbase $\mathcal{S}'_k$. Por tanto, se tiene que $\tau_k \subset \tau$ y como ya se había visto que $\tau \subset \tau_k$, se concluye que ambas topologías son iguales. Por tanto, se ha demostrado que la subbase $\mathcal{S}'_k$ genera la topología compacto-abierta τ_k. $\square$

A continuación se enuncia y demuestra un resultado similar al anterior, esta vez a cerca de las subbases de la topología compacto-abierta cuando se estudia el espacio de aplicaciones continuas de un espacio topológico X en si mismo cuando X es localmente compacto, localmente conexo (ver Definición 2.1.22) y Hausdorff. Este resultado es de utilidad en la demostración del Teorema 6.2.4 pero se enuncia aquí por su relación con el capítulo y el resultado anterior.

Proposición 4.2.5. Sea X un espacio topológico localmente compacto, localmente conexo y Hausdorff y $\mathcal{C}(X,X)$ el espacio de aplicaciones continuas de X en X. Entonces, la subbase

$$\mathcal{S} = \{U^L : U \text{ es abierto en } X \text{ y } L \text{ es compacto, conexo y de interior no vacío en } X\}$$

genera la topología compacto-abierta τ_k sobre $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. A lo largo de esta demostración se toman los conjuntos U^K como subconjuntos de $\mathcal{C}(X,X)$, es decir, se denota por U^K al conjunto de aplicaciones continuas de X en X que llevan el compacto $K \subset X$ sobre el abierto $U \subset X$.

Sean U un abierto y K un compacto de X respectivamente y sea $h \in U^K$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, es normal por el Corolario 2.1.30 y como $h^{-1}(U)$ es abierto, para cada $x \in K$ existe un abierto W_x con clausura compacta tal que $x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset h^{-1}(U)$. Además, como X es localmente conexo, existe un abierto V_x conexo tal que $x \in V_x \subset W_x$. Como $\overline{W}_x$ es compacto y $\overline{V}_x$ es un cerrado tal que $\overline{V}_x \subset \overline{W}_x$, entonces $\overline{V}_x$ es compacto. Se tiene que para todo $x \in K$ existe un abierto conexo V_x de clausura compacta y conexa tal que $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset h^{-1}(U)$, es decir, se cumple que $h(\overline{V}_x) \subset U$. Luego la familia $\{V_x\}_{x\in K}$ recubre K y por tanto existe una subfamilia finita $\{V_{x_i}\}_{i\in[n]}$ que recubre K. Se definen los conjuntos $L_i = \overline{V}_{x_i}$ que son compactos, conexos y de interior no vacío. Además, se tiene que $K \subset \bigcup_{i\in[n]} L_i$. Como $h(L_i) = h(\overline{V_{x_i}}) \subset U$ para todo $i \in [n]$,

$$h \in \bigcap_{i\in[n]} U^{L_i} \subset U^{\cup_{i\in[n]} L_i} \subset U^K.$$

Se concluye que, para cada homeomorfismo $h \in U^K$, existe un abierto $W = \bigcap_{i\in[n]} U^{L_i}$ de la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ tal que $h \in W \subset U^K$, es decir, U^K es abierto en la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$. Por tanto, los abiertos de τ_k son también abiertos en la topología generada por $\mathcal{S}$. Además, como $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_k$, se deduce que los abiertos de la topología generada por $\mathcal{S}$ son también abiertos en la topología compacto-abierta. Se concluye que la topología generada por $\mathcal{S}$ coincide con la topología compacto-abierta τ_k. □

Proposición 4.2.6. Sean X e Y dos espacios topológicos y $\mathcal{C}(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y. Si Y es Hausdorff, entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ y $\mathcal{K}(X,Y)$ son Hausdorff para las topologías de subespacio inducidas por las tres topologías τ_p, τ_k y τ_a.

Demostración. Dado que Y es Hausdorff, por la Proposición 3.2.4, se tiene que Y^X es Hausdorff para la topología τ_p. Además, por la Observación 2.1.28, se tiene que $\mathcal{C}(X,Y)$ y $\mathcal{K}(X,Y)$ son Hausdorff para la topología de subespacio inducida por τ_p. Por último, dado que por la Proposición 4.1.2 $\tau_p \subset \tau_k \subset \tau_a$, se tiene que $\mathcal{C}(X,Y)$ y $\mathcal{K}(X,Y)$ son Hausdorff para las topologías de subespacio inducidas por τ_k y τ_a ya que estas contienen los abiertos de τ_p. □

Proposición 4.2.7. Sean X e Y dos espacios topológicos y $\mathcal{K}(X,Y)$ el conjunto de aplicaciones de X en Y que son continuas en compactos. Entonces, si X es Hausdorff se tiene que la topología heredada de la compacto-abierta sobre el conjunto $\mathcal{K}(X,Y)$ es admisible en compactos.

Demostración. A lo largo de esta demostración se trabaja sobre el espacio de aplicaciones continuas en compactos $\mathcal{K}(X,Y)$. En este caso, se trabajará con los subconjuntos $U^K \cap \mathcal{K}(X,Y)$ que se denotarán por U^K para abreviar. Por lo tanto, U^K, si no se indica lo contrario, se entenderá como el conjunto de aplicaciones que llevan $K \subset X$ en $U \subset K$ y que además pertenecen a $\mathcal{K}(X,Y)$.

Sea $K \subset X$ un subconjunto compacto de X. Se considera la restricción $e_K : \mathcal{K}(X,Y) \times K \to Y$ de la aplicación evaluación. Veamos que e_K es continua. Sea U un abierto de Y y tomamos $(f,x) \in e_K^{-1}(U)$.

Como $f|_K : K \to Y$ es continua, se tiene que $f|_K^{-1}(U)$ es un abierto en K que contiene a x. Como X es Hausdorff, también lo es el subespacio K. Como además K es compacto, por el Corolario 2.1.30, existe un entorno compacto C de x tal que $x \in C \subset f^{-1}(U)$, es decir, $x \in C$ y $f \in U^C$.

Por otro lado, dado un par $(g,y) \in U^C \times C$ se tiene que $e_K(g,y) = g(y) \in U$ por lo que

$$(g,y) \in U^C \times C \subset e_K^{-1}(U)$$

de donde se concluye que existen entornos U^C y C de f y x respectivamente tales que $(f,x) \in U^C \times C \subset e_K^{-1}(U)$, es decir, la topología τ_k sobre $\mathcal{K}(X,Y)$ es admisible en compactos. □

La siguiente proposición da una condición bajo la cual se puede asegurar que las topologías admisibles y admisibles en compactos son equivalentes. Como consecuencia de este resultado se pueden dar condiciones suficientes para que la topología compacto-abierta sobre el espacio de aplicaciones continuas sea admisible. Más concretamente, se muestra que bajo estas condiciones, la topología compacto-abierta sobre el espacio de aplicaciones continuas es la más gruesa de todas las topologías admisibles.

Proposición 4.2.8. Sean X e Y dos espacios topológicos y Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Entonces, si X es localmente compacto y Hausdorff, una topología en $\mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$ es admisible si y solo si es admisible en compactos.

Demostración. Si una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible entonces en particular es admisible en compactos ya que si la aplicación evaluación es continua, su restricción a un subconjunto $\mathcal{C}(X,Y) \times K \subset \mathcal{C}(X,Y) \times X$ también es continua.

Recíprocamente, supongamos que una topología τ en $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible en compactos. Veamos que la aplicación $e : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ es continua cuando en $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ se tiene la topología producto generada por τ y la topología de X.

Consideramos $U \subset Y$ un abierto de Y y el par $(f,x) \in e^{-1}(U)$. Como $f : X \to Y$ es continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X con $x \in f^{-1}(U)$. Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe un entorno compacto K de x tal que $x \in K \subset f^{-1}(U)$ luego $f(K) \subset U$ y observemos que $\{f\} \times K \subset e^{-1}(U)$. Por la Proposición 2.1.34, existe un abierto W de τ en $\mathcal{C}(X,Y)$ con $f \in W$ tal que

$$(f,x) \in \{f\} \times K \subset W \times K \subset e^{-1}(U)$$

es decir, dado un punto $(f,x) \in e^{-1}(U)$ existe un abierto W de τ tal que $(f,x) \in W \times K \subset e^{-1}(U)$. Como K es un entorno de x, existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset K$ y por tanto, dado un punto $(f,x) \in e^{-1}(U)$ existe un abierto $W \times U$ de $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ tal que $(f,g) \in W \times U \subset e^{-1}(U)$. Por tanto, se tiene que la aplicación evaluación e es continua y por tanto τ es admisible. □

Corolario 4.2.9. Sean X e Y dos espacios topológicos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Entonces, si X es localmente compacto y Hausdorff la topología heredada de la compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ es la topología admisible más gruesa.

Demostración. Por la Proposición 4.1.2 se tiene que la topología compacto-abierta es más gruesa que cualquier topología admisible en compactos sobre Y^X. Además, tomando el subconjunto $\mathcal{C}(X,Y) \subset Y^X$, este mismo Teorema dice que la topología compacto-abierta es más gruesa que cualquier topología admisible sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.

Por la Proposición 4.2.8, se tiene que si una topología τ sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible en compactos entonces también es admisible sobre $\mathcal{C}(X,Y)$.

Por otro lado, por la Proposición 4.2.7, se tiene que la topología heredada de la compacto-abierta sobre $\mathcal{K}(X,Y)$ es admisible en compactos. Como X es localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$ y por tanto la topología heredada de la compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible en compactos. Se concluye que la topología heredada de la compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible. □

Una aplicación de los resultados anteriores viene al analizar las aplicaciones inducidas por aplicaciones definidas sobre el producto de dos espacios topológicos. Este tipo de aplicaciones están relacionadas con las homotopías y el espacio de caminos de un espacio topológico.

Definición 4.2.10. Sean X, Y y Z tres espacios topológicos y $f : X \times Z \to Y$ una aplicación. Se puede definir una aplicación $\hat{f} : Z \to Y^X$ dada por

$$\begin{aligned} \hat{f} : Z &\longrightarrow Y^X \\ z &\longmapsto \hat{f}(z) = \hat{f}_z \end{aligned}$$

donde $\hat{f}(z) : X \to Y$ es la aplicación definida por $\hat{f}_z(x) = f(x,z)$. A la aplicación $\hat{f}$ se le llama *aplicación inducida por* f.

Se tiene que la aplicación $\hat{f}$ tiene como rango el conjunto de aplicaciones de X en Y pero si la aplicación f es continua, entonces se tiene que $\hat{f} : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ asocia una aplicación continua a cada $z \in Z$. En el siguiente teorema se ve que la continuidad de f implica la continuidad de $\hat{f}$ y se estudia bajo que condiciones se da el recíproco.

Teorema 4.2.11. Sean X, Y y Z tres espacios topológicos y se considera sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ la topología heredada de la topología compacto-abierta. Entonces, si la aplicación $f : X \times Z \to Y$ es continua, se tiene que la aplicación $\hat{f} : Z \longrightarrow \mathcal{C}(X,Y)$ inducida por f es continua. El recíproco se da cuando X es localmente compacto y Hausdorff.

Demostración. Sea U^K un abierto subbásico de la topología compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ donde U es abierto en Y y K es un compacto de X. Se quiere ver que $\hat{f}$ es continua, esto es, que $\hat{f}^{-1}(U^K)$ es abierto en Z. Sea $z \in \hat{f}^{-1}(U^K)$ un elemento de la contraimagen por $\hat{f}$ de U^K y se quiere ver que existe un abierto W_z de Z tal que $z \in W_z \subset \hat{f}^{-1}(U^K)$.

Como $z \in \hat{f}^{-1}(U^K)$ se tiene que $\hat{f}_z \in U^K$, es decir, $\hat{f}_z(K) = f(K, z) \subset U$, lo que implica que $K \times \{z\} \in f^{-1}(U)$. Además, dado que $f : X \times Z \to Y$ es continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X \times Z$ y como $K \subset X$ es compacto, por la Proposición 2.1.34, existe un abierto W_z de Z tal que $K \times \{z\} \subset K \times W_z \subset f^{-1}(U)$ y $z \in W_z$.

Se quiere ver ahora que $W_z \subset \hat{f}^{-1}(U^K)$, o lo que es lo mismo, que para todo $t \in W_z$ la aplicación $\hat{f}_t \in U^K$. Sean $t \in W_z$ y $k \in K$. Se tiene que $(k, t) \in K \times W_z \subset f^{-1}(U)$ y por tanto $f(k, t) \in U$. Es decir, para todo $k \in K$ se tiene que $\hat{f}_t(k) \subset U$ por lo que $\hat{f}_t \in U^K$. Se ha visto entonces que para todo $t \in W_z$ se tiene que $\hat{f}_t \in U^K$ por lo que $t \in \hat{f}^{-1}(U^K)$.

Se concluye que dado $z \in \hat{f}^{-1}(U^K)$ existe un abierto W_z de Z tal que $z \in W_z \subset \hat{f}^{-1}(U^K)$ y por tanto que $\hat{f}^{-1}(U^K)$ es abierto en Z y que $\hat{f}$ es continua.

Por otro lado, si X es localmente compacto y Hausdorff entonces la aplicación evaluación $e : \mathcal{C}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$ es continua por el Corolario 4.2.9. Además, se ve que la aplicación f se puede escribir como,

$$\begin{aligned} f : X \times Z &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Y) \times X \longrightarrow Y \\ (x, z) &\longmapsto (\hat{f}(z), x) \longmapsto e(\hat{f}(z), x) \end{aligned}$$

De modo que la aplicación f es continua ya que $\hat{f}$ es continua por hipótesis y e es continua por el Corolario 4.2.9. $\square$

Como resultado de este teorema se puede estudiar la aplicación natural definida por las aplicaciones inducidas

$$\begin{aligned} \phi : (\mathcal{C}(X \times Z, Y), \tau_k) &\longrightarrow (\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)), \tau_k) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

que lleva una aplicación $f : X \times Z \to Y$ a la aplicación $\hat{f} : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$. Más concretamente, bajo ciertas condiciones, la aplicación ϕ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos $(\mathcal{C}(X \times Z, Y), \tau_k)$ y $(\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)), \tau_k)$. Este resultado se ha obtenido de [5].

Corolario 4.2.12. Sean X, Y y Z tres espacios topológicos. Si X es localmente compacto y Hausdorff y Z es Hausdorff, entonces ϕ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos $(\mathcal{C}(X \times Z, Y), \tau_k)$ y $(\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)), \tau_k)$.

Demostración. A lo largo de esta demostración se consideran únicamente las aplicaciones continuas.

Por el Teorema 4.2.11 la aplicación ϕ es siempre inyectiva y es sobreyectiva cuando el espacio X es localmente compacto y Hausdorff.

Para demostrar que la aplicación ϕ es un homeomorfismo vamos a ver que transforma una subbase de la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$ una subbase de la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$. Para esto, vamos a encontrar una subbase $\mathcal{S}_1$ de la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$ cuyos abiertos subbásicos son de la forma $U^{K \times C}$ donde U es un abierto en Y, K es compacto en X y C es compacto en Z.

Sea la familia

$$\mathcal{S}_1 = \{U^{K \times C} : U \text{ es abierto en } Y \text{ y } K, C \text{ son compactos en } X \text{ y } Z \text{ respectivamente}\}$$

una familia de subconjuntos de $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$. Vamos a probar ahora que la familia $\mathcal{S}_1$ es una subbase de $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$ y que la topología τ generada por esta coincide con la topología compacto-abierta. Dado $(x, z) \in X \times Z$ se puede escribir como $(x, z) = \{x\} \times \{z\}$ que es producto de compactos en X y Z respectivamente. Por tanto, se tiene que la familia $\mathcal{S}_1$ es subbase para alguna topología τ sobre $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$ ya que la unión de los elementos de la subbase es el espacio $Y^{X \times Z}$. Por otro lado, como los subconjuntos de la forma $K \times C \subset X \times Z$ son compactos si K y C son compactos, se tiene que se da la inclusión $\tau \subset \tau_k$.

Para ver la otra inclusión, se toma K un compacto de $X \times Z$, U un abierto de Y y una aplicación $f \in U^K$. Se quiere probar que existe un abierto W_f de τ de modo que $f \in W_f \subset U^K$. Sean $K_X = p_1(K)$ y

$K_Z = p_2(K)$ las proyecciones de K sobre X y Z respectivamente. Como K es compacto, se tiene que K_X y K_Z son compactos y como X y Z son Hausdorff, también lo son K, K_X y K_Z. Consideramos el punto $k \in K \subset K_X \times K_Z$ y el abierto O_f de $K_X \times K_Z$ dado por $O_f = f^{-1}(U) \cap (K_X \times K_Z)$. Como $K_X \times K_Z$ es Hausdorff y compacto, entonces es normal y, como $k \in f^{-1}(U) \subset O_f$, por la Proposición 2.1.29, existe un abierto V de $K_X \times K_Z$ tal que

$$k \in V \subset \overline{V} \subset O_f \subset (K_X \times K_Z)$$

Se tiene entonces que se puede encontrar un abierto básico $A_k \times B_k$ de la topología de subespacio en $K_X \times K_Z$ tal que

$$k \in A_k \times B_k \subset \overline{A_k \times B_k} = \overline{A_k} \times \overline{B_k} \subset \overline{V} \subset O_f$$

de modo que la familia $\{A_k \times B_k\}_{k \in K}$ forma un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, se tiene que existe una subfamilia finita $\{A_{k_i} \times B_{k_i}\}_{i \in [n]}$ que recubre K. Además, como para todo índice $i \in [n]$ se cumple que $\overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}} \subset O_f = f^{-1}(U) \cap (K_X \times K_Z)$, se tiene que $f \in \cap_{i \in [n]} U^{\overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}}}$ y por tanto, como $K \subset \cup_{i \in [n]} \overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}}$, por la Proposición 3.2.2

$$f \in \bigcap_{i \in [n]} U^{\overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}}} \subset U^{\cup_{i \in [n]} \overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}}} \subset U^K$$

Como para todo $i \in [n]$ el conjunto $\overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}} \subset K_X \times K_Z$ es un conjunto cerrado contenido en un compacto, se tiene que $\overline{A_{k_i}}$ y $\overline{B_{k_i}}$ son compactos y que $W_f = \cap_{i \in [n]} U^{\overline{A_{k_i}} \times \overline{B_{k_i}}}$ es el abierto de τ buscado. Se concluye que los elementos de la subbase que genera la topología compacto-abierta son abiertos en la topología τ y por tanto que $\tau = \tau_k$.

Sea $U^{K \times C}$ un elemento de la subbase $\mathcal{S}_1$. Se tiene que

$$\phi(U^{K \times C}) = \{\hat{f} \in \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y)) : f(K \times C) \subset U\} = \{\hat{f} \in \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y)) : \hat{f}(C) \subset U^K\} = (U^K)^C$$

Se considera la familia $\mathcal{S}_2$ de subconjuntos de $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$ de la forma

$$\mathcal{S}_2 = \{(U^K)^C : U \text{ es abierto en } Y \text{ y } K, C \text{ son compactos en } X \text{ y } Z \text{ respectivamente}\}$$

Por la Proposición 4.2.4 se tiene que $\mathcal{S}_2$ es una subbase en $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$ y la topología generada por $\mathcal{S}_2$ coincide con la topología compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$.

Se concluye que la aplicación ϕ biyectiva y transforma una subbase de la topología compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(X \times Z, Y)$ en una subbase de la topología compacto-abierta sobre $\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$. Por tanto, se tiene que la aplicación ϕ es un homeomorfismo entre los espacios topológicos $(\mathcal{C}(X \times Z, Y), \tau_k)$ y $(\mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X,Y)), \tau_k)$. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra un posible uso del Teorema 4.2.11 para determinar propiedades topológicas del espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$.

Ejemplo 4.2.13. Sea $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad de $\mathbb{R}^2$ con la topología de subespacio heredada de la topología usual. Veamos que el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{D}$ en si mismo $\mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ es conexo por caminos. Para demostrar esto, vamos a probar que dada una aplicación $f \in \mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ existe un camino $\hat{\sigma} : [0,1] \to \mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ tal que $\hat{\sigma}(0) = f$ y $\hat{\sigma}(1) = id_{\mathbb{D}}$ donde $id_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es la aplicación identidad.

Consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{D} \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{D} \\ (x,t) &\longmapsto \sigma(x,t) = (1-t)f(x) + tx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{\sigma} : [0,1] &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \\ t &\longmapsto \hat{\sigma}(t) = (1-t)f(x) + tx \end{aligned}$$

que cumplen que $\hat{\sigma}$ es la aplicación inducida por σ. Ambas aplicaciones están bien definidas por ser $\mathbb{D}$ convexo. Por tanto, basta demostrar que σ es continua para concluir que $\hat{\sigma}$ es continua por el Teorema 4.2.11.

Como $f(x)$ y $id_{\mathbb{D}}(x) = x$ son aplicaciones continuas, σ es composición de aplicaciones continuas y por tanto es continua. Se concluye que $\hat{\sigma}$ es continua, es decir, existe un camino $\hat{\sigma}$ que une f con la aplicación identidad $id_{\mathbb{D}}$. Por tanto, el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ es conexo por caminos.

Capítulo 5

Topologías del espacio de aplicaciones en espacios métricos

Como se ha mencionado en el apartado 2.2, la existencia de una distancia en un espacio topológico dota al espacio de propiedades que en general no se pueden definir en un espacio topológico arbitrario. En este caso, si se considera el espacio de aplicaciones Y^X de un conjunto X en un espacio métrico (Y, d), se pueden definir topologías sobre Y^X utilizando la distancia d de Y. Además, la distancia d facilita la definición de convergencia de aplicaciones. Los resultados presentados en este capítulo se han sacado del capítulo 7 del libro [7].

Definición 5.0.1. Sean X un conjunto e (Y, d) un espacio métrico. Sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones $f_n : X \to Y$. Se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a una aplicación $f \in Y^X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in X$. Para indicar que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones converge uniformemente a una aplicación f se escribe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{u} f$

5.1. Topología uniforme y topología de convergencia compacta

Como se ha mencionado en la introducción del capítulo, si se estudia el espacio de aplicaciones Y^X de un conjunto X en un espacio métrico (Y, d), es posible definir nuevas topologías para Y^X utilizando la distancia d. A lo largo de esta sección se introducen de este modo la topología uniforme y la topología de la convergencia compacta sobre Y^X. Una vez introducidas, se demuestran ciertas propiedades de estas topologías y se estudia la relación entre estas y la topología compacto-abierta y punto-abierta definidas en los capítulos anteriores. Por último, se restringe el estudio al subconjunto de las aplicaciones continuas de X en Y y se ve que sobre este subconjunto la distancia d no tiene un papel tan importante como sugieren las definiciones de las nuevas topologías.

Definición 5.1.1. Sean X un conjunto e (Y, d) un espacio métrico. Sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y. Se define la *distancia uniforme* $\bar{\rho}$ sobre Y^X como la aplicación

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup_{x\in X}\{\bar{d}(f(x), g(x))\}$$

donde $\bar{d}$ es la distancia acotada asociada a d sobre Y dada por $\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$.

Se llama *topología uniforme* τ_d sobre Y^X a la topología inducida por la distancia uniforme $\bar{\rho}$ sobre el espacio métrico $(Y^X, \bar{\rho})$.

Definición 5.1.2. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Dados una aplicación $f \in Y^X$, un subconjunto compacto $C \subset X$ y un número real $\varepsilon > 0$, se define el subconjunto de Y^X

$$B_C(f,\varepsilon) = \{g \in Y^X : \sup_{x\in C}\{d(f(x),g(x))\} < \varepsilon\}$$

Se define la *topología de la convergencia compacta* τ_c sobre Y^X como la topología que tiene como abiertos básicos los conjuntos de la forma $B_C(f,\varepsilon)$.

Para ver que la familia

$$\mathcal{B} = \{B_C(f,\varepsilon) : f \in Y^X, \varepsilon > 0 \text{ y } C \subset X \text{ compacto}\}$$

es una base, se comprueban las dos condiciones del Teorema 2.1.3. Primero, dado $x_0 \in X$, para todo $g \in Y^X$ se cumple que $g \in B_{\{x_0\}}(g,1)$ y por tanto se tiene que

$$Y^X = \bigcup_{g\in Y^X} B_{\{x_0\}}(g,1).$$

Por otro lado, dado $f \in B_{C_1}(g_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_2}(g_2,\varepsilon_2)$, se definen el compacto $K = C_1 \cup C_2$ y el número real

$$\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1 - \sup_{x\in C_1}\{d(f(x),g_1(x))\}, \varepsilon_2 - \sup_{x\in C_2}\{d(f(x),g_2(x))\}\}$$

se considera el abierto básico $B_K(f,\varepsilon)$ que cumple que $f \in B_K(f,\varepsilon)$. Además, se tiene que si $h \in B_K(f,\varepsilon)$ entonces

$$\sup_{x\in C_1}\{d(h(x),g_1(x))\} \leq \sup_{x\in C_1}\{d(h(x),f(x))\} + \sup_{x\in C_1}\{d(f(x),g_1(x))\} \leq \sup_{x\in K}\{d(h(x),f(x))\} + \sup_{x\in C_1}\{d(f(x),g_1(x))\} < \varepsilon_1$$

y por tanto $h \in B_{C_1}(g_1,\varepsilon_1)$. Por un argumento análogo, se llega a que $h \in B_{C_2}(g_2,\varepsilon_2)$ y por tanto que $B_K(f,\varepsilon) \subset B_{C_1}(g_1,\varepsilon_1) \cap B_{C_1}(g_1,\varepsilon_1)$.

Como se ha probado que $\mathcal{B}$ es base, dado un abierto U de la topología de la convergencia compacta y $f \in U$ se tiene que existe un abierto básico $B_C(g,\varepsilon)$ tal que $f \in B_C(g,\varepsilon) \subset U$. Además, de la demostración deduce que este abierto básico siempre se puede tomar de la forma $B_K(f,\delta)$.

De manera similar a como en la topología punto-abierta una sucesión de aplicaciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una aplicación f si y solo si la sucesión converge puntualmente a f (ver Proposición 3.2.4), para la topología uniforme y la topología de la convergencia compacta también se puede caracterizar la convergencia de sucesiones de aplicaciones, esta vez en términos de la convergencia uniforme de las sucesiones de aplicaciones.

Proposición 5.1.3. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones $f_n : X \to Y$. Se tiene que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una aplicación $f \in Y^X$ en la topología uniforme si y solo si la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Demostración. Previo a la demostración hagamos un inciso a cerca de la convergencia en la topología uniforme. Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una aplicación f en la topología uniforme si para cada abierto $B_{\bar\rho}(f,\varepsilon)$ existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f_n \in B_{\bar\rho}(f,\varepsilon)$. Por definición de la distancia uniforme $\bar\rho$, esto es equivalente a que para todo $\varepsilon > 0$ se cumpla que

$$\sup_{x\in X}\{\bar d(f_n(x),f(x))\} < \varepsilon$$

Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f y veamos que la sucesión converge a f con la topología uniforme. Si $\varepsilon \geq 1$ entonces $B_{\bar\rho}(f,\varepsilon) = Y^X$ y toda la sucesión está contenida en la bola. Tomamos $0 < \varepsilon < 1$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$d(f_n(x),f(x)) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

para todo $x \in X$. Entonces, la sucesión converge a f en la topología uniforme ya que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$\sup_{x\in X}\{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} = \sup_{x\in X}\{d(f_n(x), f(x))\} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología uniforme y veamos que la sucesión converge uniformemente a f. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \text{mín}\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología uniforme, existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$\sup_{x\in X}\{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} < \delta.$$

Entonces, para todo $x_0 \in X$

$$d(f_n(x_0), f(x_0)) \leq \sup_{x\in X}\{\bar{d}(f_n(x), f(x))\} = \sup_{x\in X}\{d(f_n(x), f(x))\} < \delta \leq \varepsilon$$

y por tanto la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. □

Proposición 5.1.4. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones $f_n : X \to Y$. Se tiene que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una aplicación $f \in Y^X$ en la topología de la convergencia compacta si y solo si para cada subespacio compacto $C \subset X$ la sucesión $\{f_n|_C\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f|_C$.

Demostración. Supongamos primero que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una aplicación $f \in Y^X$ en la topología de la convergencia compacta y probemos que la restricción de la sucesión a cualquier compacto $C \subset X$ converge uniformemente a la restricción de f a C.

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología de la convergencia compacta, se tiene que dado el entorno abierto $B_C(f, \varepsilon)$ de la topología de la convergencia compacta, existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f_n \in B_C(f, \varepsilon)$. Por definición de los conjuntos $B_C(f, \varepsilon)$,

$$\sup_{x\in C}\{d(f(x), f_n(x))\} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por tanto, restringiendo las aplicaciones al compacto C, se tiene que, para todo $x_0 \in C$

$$d(f_n|_C(x_0), f|_C(x_0)) \leq \sup_{x\in C}\{d(f_n|_C(x), f|_C(x))\} < \varepsilon$$

es decir, la sucesión $\{f_n|_C\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f|_C$.

Recíprocamente, supongamos que para cada compacto $C \subset X$ la sucesión $\{f_n|_C\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f|_C$. Se quiere ver que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología de la convergencia compacta. Como para cada abierto U que contiene a f existe un abierto básico $B_C(f, \varepsilon)$ de la topología de convergencia compacta tal que $f \in B_C(f, \varepsilon) \subset U$, basta ver que dado un abierto $B_C(f, \varepsilon)$ existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $f_n \in B_C(f, \varepsilon)$.

Como $\{f_n|_C\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{u} f|_C$, dado $\delta > 0$, existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que

$$d(f_n|_C(x), f|_C(x)) < \delta$$

para todo $x \in C$. Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, se tiene la cadena de desigualdades

$$\sup_{x\in C}\{d(f_n(x), f(x))\} = \sup_{x\in C}\{d(f_n|_C(x), f|_C(x))\} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y por tanto que $f_n \in B_C(f, \varepsilon)$ para todo $n \geq N$. Obtenemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología de convergencia compacta. □

Los siguientes resultados estudian la relación que hay entre las dos topologías nuevas definidas en este capítulo y las topologías punto-abierta y compacto-abierta. En concreto, se demuestra que hay una cadena de inclusiones entre las topologías τ_p, τ_c y τ_d y se dan condiciones suficientes para que las topologías sean iguales. Además, se demuestra que bajo ciertas condiciones, la topología de la convergencia compacta coincide con la topología compacto-abierta.

Teorema 5.1.5. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Se consideran las topologías punto-abierta τ_p, de la convergencia compacta τ_c y uniforme τ_d sobre el conjunto de aplicaciones Y^X. Se tiene la siguiente cadena de inclusiones de topologías:

$$\tau_p \subset \tau_c \subset \tau_d$$

Demostración. Se comprueba primero la inclusión $\tau_p \subset \tau_c$. Sea $f \in U^{x_0}$ donde U es un abierto de Y y $x_0 \in X$. Se quiere ver que existe un abierto W de τ_c tal que $f \in W \subset U^{x_0}$. Como Y es un espacio métrico, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $f(x_0) \in B_d(f(x_0), \varepsilon_0) \subset U$. Consideramos el abierto de τ_c

$$B_{x_0}(f, \varepsilon_0) = \{g \in Y^X : \sup_{x \in x_0}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon_0\} = \{g \in Y^X : d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon_0\}.$$

Si $h \in B_{x_0}(f, \varepsilon_0)$, entonces $h(x_0) \in B_d(f(x_0), \varepsilon_0) \subset U$, es decir, $h \in U^{x_0}$. Se concluye que $f \in B_{x_0}(f, \varepsilon_0) \subset U^{x_0}$. Luego, $\tau_p \subset \tau_c$.

Para demostrar que $\tau_c \subset \tau_d$, basta probar que, dada una aplicación $f \in Y^X$ y un abierto $B_C(f, \varepsilon)$ de τ_c, existe un abierto W de la topología uniforme τ_d tal que $f \in W \subset B_C(f, \varepsilon)$. Esta demostración se separa en dos casos. Primero, supongamos que $\varepsilon \geq 1$.

En este caso, se toma el conjunto

$$B_{\bar{\rho}}(f, \tfrac{1}{2}) = \{g \in Y^X : \sup_{x \in X}\{\bar{d}(f(x), g(x))\} < \tfrac{1}{2}\} = \{g \in Y^X : \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\} < \tfrac{1}{2}\}$$

donde la segunda igualdad se da porque si $g \in B_{\bar{\rho}}(f, \frac{1}{2})$, entonces para todo $x_0 \in X$,

$$\text{mín}\{1, d(f(x_0), g(x_0))\} = \bar{d}(f(x_0), g(x_0)) \leq \sup_{x \in X}\{\bar{d}(f(x), g(x))\} < \tfrac{1}{2}.$$

por lo que $d(f(x_0), g(x_0)) < \frac{1}{2}$. Por último, se tiene la cadena de inclusiones

$$\{g \in Y^X : \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\} < \tfrac{1}{2}\} \subset \{g \in Y^X : \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} \subset \{g \in Y^X : \sup_{x \in C}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\}$$

y por tanto se tiene que $f \in B_{\bar{\rho}}(f, \frac{1}{2}) \subset B_C(f, \varepsilon)$

Por otro lado, si $\varepsilon < 1$, se toma el abierto $B_{\bar{\rho}}(f, \varepsilon)$ de la topología uniforme τ_d. Por un argumento similar al anterior, se tiene que si $g \in B_{\bar{\rho}}(f, \varepsilon)$, entonces $\bar{d}(f(x), g(x)) = d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y como consecuencia,

$$B_{\bar{\rho}}(f, \varepsilon) = \{g \in Y^X : \sup_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} \subset \{g \in Y^X : \sup_{x \in C}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} = B_C(f, \varepsilon)$$

por lo que se concluye que $f \in B_{\bar{\rho}}(f, \varepsilon) \subset B_C(f, \varepsilon)$ y que por tanto $\tau_c \subset \tau_d$. $\square$

Corolario 5.1.6. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Entonces, sobre el conjunto de aplicaciones Y^X de X en Y se tiene:

1. La topología uniforme τ_d coincide con la topología de la convergencia compacta τ_c si X es un espacio compacto.

2. La topología de la convergencia compacta τ_c coincide con la topología punto-abierta τ_p si X es un espacio discreto.

Demostración. Para la primera afirmación, hay que tener en cuenta que si $\varepsilon \geq 1$, se tiene que $B_{\bar{\rho}}(f, \varepsilon) = Y^X$ que es un abierto en la topología de la convergencia compacta. Sea $0 < \varepsilon < 1$. En este caso, se tiene la cadena de igualdades

$$B_{\bar{\rho}}(f,\varepsilon) = \{g \in Y^X : \sup_{x\in X}\{\bar{d}(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} = \{g \in Y^X : \sup_{x\in X}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} = B_X(f, \varepsilon)$$

donde $B_X(f, \varepsilon)$ es abierto en la topología de la convergencia compacta por ser X compacto. Por tanto, se tiene que $\tau_d \subset \tau_c$ y por el teorema anterior se da la igualdad $\tau_d = \tau_c$.

Para la segunda afirmación, hay que tener en cuenta que si $C \subset X$ es un subconjunto compacto de un espacio discreto X, entonces $C = \{x_1, ..., x_n\}$ es un subconjunto finito de X. Teniendo esto en cuenta, se quiere probar que si $f \in B_C(f, \varepsilon)$ entonces existe un abierto W de la topología punto-abierta τ_p tal que $f \in W \subset B_C(f, \varepsilon)$. Sea el abierto de la topología punto-abierta

$$W = \bigcup_{i\in[n]} B_d(f(x_i), \tfrac{\varepsilon}{2})^{x_i}.$$

Sea $g \in W$. Entonces, se tiene que $g(x_i) \in B_d(f(x_i), \varepsilon)$ para todo $i \in [n]$, es decir, $d(g(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in [n]$. Por lo tanto, se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\sup_{x\in C}\{d(g(x), f(x))\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

de donde se deduce que $g \in B_C(f, \varepsilon)$. Se concluye que $f \in W \subset B_C(f, \varepsilon)$. Es decir, $\tau_c \subset \tau_p$ y por el teorema anterior se da la igualdad $\tau_c = \tau_p$. □

A continuación, se va a ver la relación entre la topología compacto-abierta y las topologías de la convergencia compacta y uniforme cuando se restringe el estudio al subconjunto de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X, Y)$ de un espacio topológico X en un espacio métrico (Y, d). De aquí en adelante se va a trabajar con las restricciones de los conjuntos del tipo U^K y $B_C(f, \varepsilon)$ a $\mathcal{C}(X, Y)$, es decir, salvo que se indique lo contrario, se va a considerar que los conjuntos U^K y $B_C(f, \varepsilon)$ son subconjuntos de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Proposición 5.1.7. Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Sea $\mathcal{C}(X, Y)$ el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y. Entonces, la topología de la convergencia compacta τ_c sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ es admisible en compactos, es decir, para cada subconjunto compacto $K \subset X$, la aplicación

$$\begin{aligned} e_K : \mathcal{C}(X, Y) \times K &\longrightarrow Y \\ (f, k) &\longmapsto f(k) \end{aligned}$$

es continua, donde considera la topología producto en $\mathcal{C}(X, Y) \times K$ inducida por la topología de la convergencia compacta τ_c sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ y la topología de subespacio sobre K.

Demostración. Sea $B_d(y, \varepsilon)$ un abierto de Y y sea $(f, k) \in \mathcal{C}(X, Y) \times K$ tal que $e(f, k) \in B_d(y, \varepsilon)$. Se tiene que la contraimagen del abierto $B_d(y, \varepsilon)$ por la aplicación e_K es el conjunto

$$e_K^{-1}(B_d(y, \varepsilon)) = \{(g, x) \in \mathcal{C}(X, Y) \times K : g(x) \in B_d(y, \varepsilon)\} = \{(g, x) \in \mathcal{C}(X, Y) \times K : d(y, g(x)) < \varepsilon\}.$$

En particular, como $(f, k) \in e^{-1}(B_d(y, \varepsilon))$, se cumple que $d(y, f(k)) < \varepsilon$. Buscamos $\delta > 0$ tal que los abiertos W y V de $\mathcal{C}(X, Y)$ y K respectivamente definidos por

$$W = B_K(f, \delta) = \{g \in \mathcal{C}(X, Y) : \sup_{x\in K}\{d(g(x), f(x))\} < \delta\}$$

$$V = \{x \in K : d(f(x), f(k)) < \delta\} = f^{-1}(B_d(f(k), \delta)) \cap K$$

cumplen que $(f, k) \in W \times V \subset e_K^{-1}(B_d(y, \varepsilon))$.

Por construcción de los abiertos W y V se tiene que $(f,k) \in W \times V$. Veamos que $W \times V \subset e_K^{-1}(B_d(y,\epsilon))$. Sea $(g,x) \in W \times V$. Por la desigualdad triangular,

$$d(y,g(x)) \leq d(y,f(k)) + d(f(k),g(x)) \leq d(y,f(k)) + d(f(k),f(x)) + d(f(x),g(x)) < d(y,f(k)) + \delta + \delta$$

donde la última desigualdad se da porque $g \in W$ y $x \in V \subset K$. Tomando

$$\delta = \frac{\varepsilon - d(y,f(k))}{2}$$

que es positivo ya que $d(y,f(k)) < \varepsilon$. Entonces, $d(y,g(x)) < \varepsilon$ y por tanto $W \times V \subset e_K^{-1}(B_d(y,\varepsilon))$. Se concluye que la aplicación e_K es continua y que la topología de la convergencia compacta τ_c sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ es admisible en compactos. □

Lema 5.1.8. Sea (Y,d) un espacio métrico y $A \subset Y$ un subconjunto compacto de Y. Dado un subconjunto abierto V de Y tal que $A \subset V$, se tiene que existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$U(A,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,A) < \epsilon\}$$

cumple que $A \subset U(A,\varepsilon) \subset V$.

Demostración. Se considera la aplicación definida por

$$\begin{aligned} d_{X\setminus V} : A &\longrightarrow [0,\infty) \\ a &\longmapsto d(a, X\setminus V) \end{aligned}$$

que por el Lema 2.2.7 es continua y tiene un mínimo $a_{\text{mín}}$ en A. Se define $\varepsilon_0 = d_{X\setminus V}(a_{\text{mín}})$.

Veamos primero que $\varepsilon_0 > 0$. Si $\varepsilon_0 = 0$, entonces $a_{\text{mín}} \in \overline{X\setminus V}$ y como V es abierto, se concluye que $a_{\text{mín}} \in X \setminus V$ lo que es un absurdo porque $a_{\text{mín}} \in A \subset V$.

Veamos por último que $U(A,\varepsilon_0)$ es el conjunto que buscamos. Sea $x \in U(A,\varepsilon_0)$. Si $d(x, X\setminus V) = 0$ entonces, por un argumento análogo al anterior, $x \in X \setminus V$. Sin embargo, como $x \in U(A,\varepsilon_0)$, se tiene que $d(A,x) < \varepsilon_0$ y entonces sigue que $d(A, X\setminus V) < \varepsilon_0$ lo que es un absurdo. Se concluye que para todo $x \in U(A,\varepsilon_0)$, la distancia $d(x, X\setminus V)$ es estrictamente positiva y por tanto que $U(A,\varepsilon_0) \subset V$. □

Teorema 5.1.9. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. En el conjunto de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$ la topología compacto-abierta τ_k coincide con la topología de la convergencia compacta τ_c.

Demostración. Vamos a ver primero que la topología de la convergencia compacta es más fina que la topología compacto-abierta, es decir, que $\tau_c \subset \tau_k$. Sean C un subconjunto compacto de X y V un abierto de Y. Se toma un subconjunto V^C de $\mathcal{C}(X,Y)$ y $f \in V^C$. Luego $f(C)$ es un subconjunto compacto de Y contenido en el abierto V. Del Lema 5.1.8, se tiene que existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$U(f(C),\varepsilon) = \{y \in Y : d(y,f(C)) < \varepsilon\} \subset V$$

Tomamos el abierto $B_C(f,\varepsilon)$ de la topología de la convergencia compacta. Si $g \in B_C(f,\varepsilon)$, para todo $c \in C$, se tiene que

$$d(g(c),f(C)) = \inf_{x\in C}\{d(g(c),f(x))\} \leq \sup_{x\in C}\{d(g(x),f(x))\} < \epsilon$$

entonces, para todo $c \in C$ se tiene que $g(c) \in U(f(C),\varepsilon) \subset V$ y por tanto que $g(C) \subset V$, es decir, $g \in V^C$. Se concluye que $f \in B_C(f,\varepsilon) \subset V^C$ y que $\tau_c \subset \tau_k$.

La otra inclusión es consecuencia de la Proposición 5.1.7. Este resultado dice que la topología de la convergencia compacta es admisible en compactos sobre $\mathcal{C}(X,Y)$. Por otro lado, la Proposición 4.1.2 dice que la topología compacto-abierta es más gruesa que cualquier topología admisible en compactos. Por tanto, se tiene que $\tau_k \subset \tau_c$. □

Como consecuencia de este Teorema, se tiene que la topología de la convergencia compacta sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ no depende de la distancia d. Por tanto, por el Corolario 5.1.6, si X es compacto, la topología uniforme τ_d sobre $\mathcal{C}(X,Y)$ tampoco depende de la distancia d.

5.2. Teorema de Ascoli

En esta sección se va a demostrar el Teorema de Ascoli utilizando argumentos desarrollados a lo largo de este trabajo en las Secciones 3, 4 y 2.2. Este es un resultado clásico tiene muchas aplicaciones en análisis pero estas se escapan del contexto del trabajo.

Recordemos que una aplicación f entre un espacio topológico X y un espacio métrico (Y,d) es continua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que para todo $x \in U$ se tiene que

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

Un conjunto $\mathcal{F} \subset Y^X$ es equicontinuo en x_0 cuando el mismo abierto U que aparece en la definición de continuidad para una de las aplicaciones vale para el resto de las aplicaciones de $\mathcal{F}$. Este tipo de subconjuntos de Y^X se utilizan en la demostración del Teorema de Ascoli y su definición formal se enuncia a continuación.

Definición 5.2.1. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Un subconjunto $\mathcal{F}$ del espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$ se dice *equicontinuo* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto U de x_0 tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $x \in U$ se tiene que

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada punto x_0 de X, se dice que $\mathcal{F}$ es *equicontinuo*.

Por el comentario previo a la definición se concluye que todas las aplicaciones de un conjunto equicontinuo son continuas. Además, dado un conjunto $\mathcal{F}$ equicontinuo en x_0 y un subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, se tiene que $\mathcal{G}$ es también equicontinuo en x_0. A continuación se enuncia un resultado que relaciona la equicontinuidad de un conjunto de aplicaciones con la total acotación de dicho conjunto respecto a la distancia uniforme.

Lema 5.2.2. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico. Si un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$ está totalmente acotado para la distancia uniforme $\overline{\rho}$ correspondiente a d, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a la distancia d

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto totalmente acotado de $\mathcal{C}(X,Y)$ para $\overline{\rho}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d. Para esto, basta ver que dados un punto $x_0 \in X$ y un valor $0 < \varepsilon < 1$, existe un entorno abierto U de x_0 tal que, para todo $f \in \mathcal{F}$ y para todo $x \in U$, se cumple que

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Para $\varepsilon \geq 1$ basta tomar un abierto U que cumple la condición para algún $\varepsilon_0 < 1$.

Como $\mathcal{F}$ es totalmente acotado, dado $\delta > 0$ existen $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ con $\mathcal{F} \subset \cup_{i\in[n]} B_{\overline{\rho}}(f_i, \delta)$. Si $g \in B_{\overline{\rho}}(f_i, \delta)$ entonces, para todo $x_0 \in X$, se cumple que

$$\bar{d}(f_i(x_0), g(x_0)) \leq \sup_{x\in X}\{\bar{d}(f_i(x), g(x))\} < \delta$$

Dados $x_0 \in X$ y $\gamma > 0$, como las aplicaciones f_i son continuas, $U_i = f_i^{-1}(B_d(f_i(x_0), \gamma))$ es un abierto de X. Se ve que para todo $x \in U_i$ se cumple que

$$d(f_i(x_0), f_i(x)) < \gamma$$

Sea $g \in \mathcal{F}$ una aplicación de $\mathcal{F}$. Entonces existe $i_0 \in [n]$ tal que $g \in B_{\overline{\rho}}(f_{i_0}, \delta)$. Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$d(g(x_0), g(x)) \leq d(g(x_0), f_{i_0}(x_0)) + d(f_{i_0}(x_0), g(x)) \leq d(g(x_0), f_{i_0}(x_0)) + d(f_{i_0}(x_0), f_{i_0}(x)) + d(f_{i_0}(x), g(x))$$

Tomando $\delta = \gamma = \frac{\varepsilon}{3}$, por ser $\delta < \epsilon < 1$, la distancia acotada $\bar{d}$ y la distancia d coinciden, y para todo $x \in U_{i_0}$, se cumple la desigualdad

$$d(g(x_0), g(x)) < \delta + \gamma + \delta = \varepsilon$$

y por tanto que $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d en x_0, para todo $x_0 \in X$. Luego $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d. □

Teorema 5.2.3 (Teorema de Ascoli)**.** Sean X un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Se considera el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X, Y)$ dotado de la topología de convergencia compacta τ_c y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{C}(X, Y)$. Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo respecto a d y, para cada $a \in X$, el conjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$$

verifica que $\overline{\mathcal{F}_a}$ es compacto en Y, entonces $\mathcal{F}$ está contenido en un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X, Y)$. El recíproco es cierto si X es Hausdorff y localmente compacto.

Demostración. A lo largo de esta demostración, salvo que se especifique lo contrario, se va a considerar el espacio de aplicaciones Y^X dotado de la topología punto-abierta τ_p y el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X, Y)$ dotado de la topología de la convergencia compacta τ_c. Bajo estas condiciones, en general, $\mathcal{C}(X, Y)$ no es un subespacio de Y^X.

Primera implicación: Para la primera implicación, la demostración se separa en tres pasos.

1. Se ve que el conjunto $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$ es compacto en Y^X con la topología punto abierta.
2. Se ve que $\mathcal{G}$ es equicontinuo respecto a d (y que por tanto todas las aplicaciones $g \in \mathcal{G}$ son continuas).
3. Se ve que la topología punto abierta en Y^X y la topología de la convergencia compacta en $\mathcal{C}(X, Y)$ restringidas a $\mathcal{G}$ coinciden.

Como consecuencia de estas tres afirmaciones, se concluye que el conjunto $\mathcal{G}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{C}(X, Y)$ para la topología de la convergencia compacta, es decir, $\mathcal{G}$ es un subespacio compacto de $\mathcal{C}(X, Y)$ que contiene a $\mathcal{F}$.

Paso 1: Consideramos los subconjuntos cerrados $C_a = \overline{\mathcal{F}_a}$ de Y que son compactos por hipótesis. Se considera el conjunto de la topología producto (que es la misma que la topología punto abierta) en Y^X dado por

$$\prod_{a \in X} C_a = \{g \in Y^X : g(a) \in C_a \text{ para todo } a \in X\}.$$

Para todo $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $f(a) \in \mathcal{F}_a \subset C_a$ y por tanto

$$\mathcal{F} \subset \prod_{a \in X} C_a.$$

Por otro lado, como los subconjuntos C_a son cerrados y compactos, por la Proposición 3.1.7 y el Teorema 3.1.12, se tiene que $\prod_{a \in X} C_a$ es cerrado y compacto en Y^X. Luego

$$\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}} \subset \prod_{a \in X} C_a$$

y $\mathcal{G}$ es compacto en Y^X con la topología punto-abierta por ser un subconjunto cerrado de un espacio compacto.

Paso 2: Veamos que $\mathcal{G}$ es equicontinuo respecto a d. Como $\mathcal{F}$ es equicontinuo, se tiene que para todo $x_0 \in X$ y $\delta > 0$, existe un entorno abierto $U_\delta \subset X$ de x_0 tal que para todo $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x), f(x_0)) < \delta$$

para todo $x \in U_\delta$. Basta probar que dado $\varepsilon > 0$, para todo $g \in \mathcal{G}$ y para todo $x \in U_\delta$ se cumple que

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$$

Sean $g \in \mathcal{G}$ y $x \in U_\delta$. Fijamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ y tomamos el abierto de la topología punto-abierta

$$V_x = B_d(g(x), \delta)^x \cap B_d(g(x_0), \delta)^{x_0}$$

de modo que si $f \in V_x$ se tiene que

$$d(f(x), g(x)) < \delta \quad \text{y} \quad d(f(x_0), g(x_0)) < \delta.$$

Luego $g \in V_x$. Como $g \in \mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$, entonces $V_x \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ y por tanto existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f \in V_x$. Aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$d(g(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < 3\delta = \varepsilon.$$

Luego se tiene la desigualdad buscada

Paso 3: Veamos que la topología punto-abierta τ_p sobre Y^X restringida a $\mathcal{G}$ coincide con la topología de convergencia compacta τ_c sobre $\mathcal{C}(X, Y)$. Como la topología punto abierta es siempre más gruesa que la topología de convergencia compacta (ver Teorema 5.1.5), basta probar que restringiendo las topologías a $\mathcal{G}$, se tiene la inclusión $\tau_c \subset \tau_p$. Sea $g \in B_C(g, \varepsilon) \cap \mathcal{G}$ con $C \subset X$ un subespacio compacto y $\varepsilon > 0$. Se quiere encontrar un abierto W de la topología punto-abierta sobre Y^X tal que $g \in W \cap \mathcal{G} \subset B_C(g, \varepsilon) \cap \mathcal{G}$

Como $\mathcal{G}$ es equicontinuo, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, se tiene que para todo $c \in C$ se puede encontrar un entorno abierto $U_c \subset X$ de c tal que para todo $f \in \mathcal{G}$ y todo $x \in U_c$ se cumple que

$$d(f(x), f(c)) < \delta.$$

La familia de abiertos $\{U_c\}_{c \in C}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto C. Luego existe subfamilia finita $\{U_{c_i}\}_{i \in [n]}$ con $C \subset \cup_{i \in [n]} U_{c_i}$. Tomamos el abierto W de la topología punto-abierta dado por

$$W = \bigcap_{i \in [n]} B_d(g(c_i), \delta)^{c_i}.$$

Se tiene que para todo $h \in W$ se cumple que

$$d(h(c_i), g(c_i)) < \delta$$

para todo $i \in [n]$. Veamos que $W \cap \mathcal{G} \subset B_C(g, \varepsilon)$. Sea $h \in W \cap \mathcal{G}$. Dado $x \in C$, se toma el índice i tal que $x \in U_{c_i}$. Como $h, g \in \mathcal{G}$ y $h \in W$, por la desigualdad triangular, se tiene que

$$d(h(x), g(x)) \leq d(h(x), g(c_i)) + d(g(c_i), g(x)) \leq d(h(x), h(c_i)) + d(h(c_i), g(c_i)) + d(g(c_i), g(x)) < 3\delta = \varepsilon.$$

Luego se tiene la desigualdad buscada

Segunda implicación: Supongamos que X es Hausdorff y localmente compacto, y sea $\mathcal{G}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{C}(X, Y)$ que contiene a $\mathcal{F}$. Se quiere ver que $\mathcal{F}$ es equicontinuo y que los conjuntos $\overline{\mathcal{F}_a}$ son compactos para todo $a \in X$. Para esto, basta ver que $\mathcal{G}$ es equicontinuo y que los conjuntos $\mathcal{G}_a$ son compactos. Si $\mathcal{G}$ es equicontinuo, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F}$ también es equicontinuo. Por otro lado, si los conjuntos $\mathcal{G}_a$ son compactos, entonces como $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{G}_a$, se tiene que $\overline{\mathcal{F}_a} \subset \mathcal{G}$ porque $\mathcal{G}$ es cerrado por ser un subespacio compacto de un espacio Hausdorff. Por tanto $\overline{\mathcal{F}_a}$ es compacto.

$\mathcal{G}$ es equicontinuo: Para ver que $\mathcal{G}$ es equicontinuo en un punto $a \in X$, basta ver que, dado A un entorno compacto de a (que existe por ser X localmente compacto), el conjunto

$$\mathcal{R} = \{f|_A : f \in \mathcal{G}\}$$

es equicontinuo en a. Esto es porque si $\mathcal{R}$ es equicontinuo en a, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto $U \subset A$ de a tal que para todo $f|_A \in \mathcal{R}$ y para todo $x \in U$ se cumple que

$$d(f|_A(x), f|_A(a)) < \varepsilon.$$

Como A es un entorno de a, existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset A$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe un entorno abierto $U \cap V \subset X$ de a tal que

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

para todo $f \in \mathcal{G}$ y para todo $x \in U \cap V$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es equicontinuo en a si lo es $\mathcal{R}$.

Se considera el conjunto $\mathcal{C}(A, Y)$ con la topología de la convergencia compacta y la aplicación restricción

$$\begin{aligned} r_A : \mathcal{C}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(A, Y) \\ f &\longmapsto f|_A \end{aligned}$$

Sean $f|_A \in (A, Y)$. Dado $\varepsilon > 0$ y $C \subset A$ un compacto, consideramos $B_C(f|_A, \varepsilon)$. Tomamos el abierto $B_C(f, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ y tenemos

$$\begin{aligned} r_A(B_C(f, \varepsilon)) = \{r_A(g) : g \in B_C(f, \varepsilon)\} = \{g|A : \sup_{x \in C}\{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon\} \subset \\ \subset \{g|_A : \sup_{x \in C}\{d(f|_A(x), g|_A(x))\} < \varepsilon\} = B_C(f|_A, \varepsilon). \end{aligned}$$

Como $r_A(B_C(f, \varepsilon)) \subset B_C(f|_A, \varepsilon)$ concluimos que r_A es continua en $\mathcal{C}(X, Y)$.

La imagen de $\mathcal{G}$ por la aplicación r_A es el conjunto

$$r_A(\mathcal{G}) = \{f|_A : f \in \mathcal{G}\} = \mathcal{R}.$$

Como $\mathcal{G}$ es compacto y r_A es continua, $\mathcal{R}$ es compacto en $\mathcal{C}(A, Y)$ con la topología de la convergencia compacta. Además, como A es compacto, la topología de convergencia compacta y la topología uniforme coinciden en $\mathcal{C}(A, Y)$ (ver Corolario 5.1.6). Por tanto, $\mathcal{R}$ es compacto en $(\mathcal{C}(A, Y), \overline{\rho})$ donde $\overline{\rho}$ es la distancia uniforme inducida por d. Por último, como $\mathcal{R}$ es compacto en $(\mathcal{C}(A, Y), \overline{\rho})$, se tiene que $\mathcal{R}$ es totalmente acotado para la distancia $\overline{\rho}$ y por el Lema 5.2.2, se concluye que $\mathcal{R}$ es equicontinuo en a. Por tanto, $\mathcal{G}$ es equicontinuo en a.

$\mathcal{G}_a$ es compacto: Para ver que el conjunto $\mathcal{G}_a$ es compacto, se consideran las aplicaciones

$$\begin{aligned} j_a : \mathcal{C}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Y) \times X \\ f &\longmapsto (f, a) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} e : \mathcal{C}(X, Y) \times X &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

La aplicación j_a es continua ya que dado un abierto $W \times V$ de $\mathcal{C}(X, Y) \times X$ se tiene que $j_a^{-1}(W \times V) = W$ si $a \in V$ y $j_a^{-1}(W \times V) = \emptyset$ si $a \notin V$. Por otro lado, la aplicación e es continua por considerarse $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología de la convergencia compacta τ_c que coincide con la topología compacto-abierta τ_k por el Teorema 5.1.9. Como X es Hausdorff y localmente compacto, se cumple que la topología compacto-abierta es admisible sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ por el Corolario 4.2.9. Por tanto, la aplicación $e \circ j_a$ es continua. Luego el conjunto

$$e \circ j_a(\mathcal{G}) = \{e(j(f)) : f \in \mathcal{G}\} = \{f(a) : f \in \mathcal{G}\} = \mathcal{G}_a$$

es compacto para todo $a \in X$. $\square$

Capítulo 6

Topologías en el espacio de homeomorfismos

Este capítulo está dedicado al estudio de las topologías en el espacio de homeomorfismos de un espacio topológico en si mismo. Concretamente, se va a definir una nueva topología sobre este espacio, se va a estudiar como esta se relaciona con la topología compacto-abierta y se van a dar una serie de resultados que permiten asegurar que el espacio de homeomorfismos es un grupo topológico bajo ciertas condiciones. Los resultados aquí presentados se han sacado de [2] y [3].

6.1. Espacio de homeomorfismos y la g-topología

En este capitulo se va a estudiar el espacio de homeomorfismos de X en si mismo. Se define el conjunto

$$\mathcal{H}(X) = \{f \in X^X \text{ tal que } f \text{ es homeomorfismo}\}$$

que en caso de que el espacio X sea claro por el contexto denota $\mathcal{H}$. Por otro lado, al tratar con un único espacio topológico, se simplifica la notación y se escribe $\mathcal{C}(X)$ en lugar de $\mathcal{C}(X, X)$ para el espacio de aplicaciones continuas de X en si mismo. Al igual que con los homeomorfismos, si el espacio X es claro por el contexto, se escribe $\mathcal{C}$ en lugar de $\mathcal{C}(X)$.

Dado un espacio topológico X, el conjunto $\mathcal{H}(X)$ forma un grupo con la composición de aplicaciones como operación binaria. Este resultado es conocido y se puede encontrar en cualquier libro de topología general.

Las topologías compacto-abierta y punto-abierta siguen estando bien definidas en este contexto y además, como $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{C}(X)$, algunos resultados demostrados para las aplicaciones continuas se cumplen de manera inmediata para los homeomorfismos.

A continuación se define una nueva topología sobre el conjunto $\mathcal{H}$ y se estudia cuando coincide con las topologías anteriormente definidas. Además, esta nueva topología permite probar que bajo ciertas condiciones el espacio de homeomorfismos es un grupo topológico.

Definición 6.1.1. Sea X un espacio topológico. Se define la *g-topología* sobre el conjunto $\mathcal{H}(X)$ como la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S}_g = \{U^K \subset \mathcal{H}(X) : K \text{ cerrado}, U \text{ abierto y } K \text{ o } X \setminus U \text{ compactos}\}$$

Esta topología se denota por τ_g.

Observación 6.1.2. Si X es compacto, entonces $\tau_g \subset \tau_k$ ya que en este caso los subconjuntos cerrados de X son compactos y por tanto $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_k$. Si X es Hausdorff, entonces $\tau_k \subset \tau_g$ ya que en este caso los subconjuntos compactos de X son cerrados y por tanto $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_g$. Es decir, si X es compacto y Hausdorff entonces ambas topologías coinciden en $\mathcal{H}(X)$.

Se ha visto en el Capítulo 4 que cuando el espacio X es localmente compacto y Hausdorff, el espacio de aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$ tiene ciertas propiedades de interés. Además, bajo estas condiciones, se ha probado que existe una compactificación por un punto X^* de X (ver Apéndice B). Dado que cuando el espacio X es compacto se pueden relacionar las topologías τ_g y τ_k, es razonable plantearse si existe alguna relación entre el grupo de homeomorfismos de X y el grupo de homeomorfismos de su compactificación X^*.

Definición 6.1.3. Sean X un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, $X^* = X \cup \{p\}$ su compactificación por un punto con $p \notin X$ y $\mathcal{C}(X^*)$ y $\mathcal{H}(X^*)$ los conjuntos de aplicaciones continuas y homeomorfismos de X^* respectivamente. Se definen los conjuntos

- $\mathcal{C}^* = \{f \in \mathcal{C}(X^*) : f(p) = p\} \subset \mathcal{C}(X^*)$
- $\mathcal{H}^* = \{f \in \mathcal{H}(X^*) : f(p) = p\} \subset \mathcal{H}(X^*)$

Observación 6.1.4. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces, el subconjunto $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}(X^*)$ es un subgrupo de $\mathcal{H}(X^*)$. Dadas dos aplicaciones $f^*, g^* \in \mathcal{H}^*$ se tiene que $(f^* \circ (g^*)^{-1})(p) = f^*((g^*)^{-1}(p)) = f^*(p) = p$ y para $x \neq p$ se tiene que $(g^*)^{-1}(x) \neq p$ y por tanto $(f^* \circ (g^*)^{-1})(x) \neq p$.

Si X es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, entonces se puede considerar su compactificación por un punto $X^* = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$. Además, dada una aplicación f de $\mathcal{C}(X)$, se puede considerar su extensión f^* a $\mathcal{C}^*$ dada por $f^*(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $f^*(p) = p$. La extensión f^* es continua ya que los abiertos básicos de X^* son o bien abiertos de X o bien conjuntos N tales que $p \in N$ y $X^* \setminus N$ es compacto en X (ver Apéndice B). Si se tiene un abierto N del segundo tipo, entonces

$$X^* \setminus (f^*)^{-1}(N) = X^* \setminus (f^{-1}(N \setminus \{p\}) \cup \{p\}) = X \setminus f^{-1}(N \setminus \{p\}) = f^{-1}(X \setminus (N \setminus \{p\}))$$

es compacto por ser la contraimagen por una aplicación continua de un compacto en un espacio Hausdorff y por tanto $(f^*)^{-1}(N)$ es abierto en X^*. Entonces se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : (\mathcal{C}(X), \tau_g) &\longrightarrow (\mathcal{C}^*, \tau_k) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

está bien definida.

Observación 6.1.5. Se tiene que $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ ya que para $x \in X$, como $g^*(x) = g(x) \in X$, se tiene que

$$(f \circ g)^*(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g^*(x)) = f^*(g^*(x)) = (f^* \circ g^*)(x)$$

y para p se tiene que $(f \circ g)^*(p) = p = f^*(g^*(p))$.

Hasta ahora no han sido necesarias las topologías sobre $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*$. Ahora se demuestra que tomando la g-topología en $\mathcal{C}(X)$ y la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}^*$, la aplicación ϕ es un homeomorfismo.

Proposición 6.1.6. Sean X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y $X^* = X \cup \{p\}$ su compactificación por un punto. Entonces, la aplicación $\phi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}^*$ que a cada aplicación f le asocia su extensión f^* es un homeomorfismo entre $(\mathcal{C}(X), \tau_g)$ y $(\mathcal{C}^*, \tau_k)$.

Demostración. La aplicación es sobreyectiva porque dada $f^* \in \mathcal{C}^*$ se puede considerar $f^*|_X \in \mathcal{C}(X)$ y $\phi(f^*|_X) = f^*$. Por otro lado, si $f^* = g^*$ entonces $f(x) = f^*(x) = g^*(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $f = g$. Por tanto, la aplicación ϕ es biyectiva. Basta ver que ϕ es también continua y abierta.

Previo a demostrar que ϕ es abierta, cabe recalcar que a lo largo de esta demostración, siempre que no se indique lo contrario, se considera que los conjuntos U^K son subconjuntos de $\mathcal{C}(X)$ y $(U^K)^*$ son subconjuntos de $\mathcal{C}^*$. Es decir, estos conjuntos denotan al conjunto de aplicaciones f tales que $f(K) \subset U$ y $f \in \mathcal{C}$ o $f \in \mathcal{C}^*$ respectivamente.

Para ver que ϕ es abierta hay que tener en cuenta que en $\mathcal{C}(X^*)$ las subbases de las topologías τ_k y τ_g coinciden por ser X^* compacto y Hausdorff. Por otro lado, sea $U^K \subset \mathcal{C}(X)$ un abierto subbásico de τ_g. Se tiene que

$$\phi(U^K) = \{\phi(f) = f^* \in C^* : f \in U^K\} = \{f^* \in \mathcal{C}(X^*) : f(K) \subset U\} \cap \{f^* \in \mathcal{C}(X^*) : f^*(p) = p\}$$

que es el abierto subbásico $(U^K)^* = \{f^* \in \mathcal{C}^* : f(K) \subset U\}$. Se ve que $\phi(U^K) = (U^K)^*$ es abierto para τ_k por serlo para τ_g. Por tanto la imagen por ϕ de un abierto subbásico de $(\mathcal{C}(X), \tau_g)$ es abierto en $(\mathcal{C}^*, \tau_k)$, es decir, ϕ es abierta.

Sea ahora $(U^K)^* = \{f^* \in \mathcal{C}^* : f^*(K) \subset U\}$ un abierto subbásico de $(\mathcal{C}^*, \tau_k)$. Viendo como son los abiertos de la base $\mathcal{B}^*$ de X^* se pueden separar dos casos. Por la Observación 2.1.33 se tiene que

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_p = \mathcal{B} \cup \{N \subset X^* : p \in N \text{ y } X^* \setminus N \text{ compacto en } X\}$$

es base de X^*. Si $U \in \mathcal{B}$ entonces $p \notin U$ y como para todo $f^* \in (U^K)^*$ se tiene que $f^*(K) \subset U$ y $f^*(p) = p$, $p \notin K$. Por esto, la contraimagen de $(U^K)^*$ por ϕ es

$$\phi^{-1}((U^K)^*) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(K) \subset U\} = U^K$$

que es un abierto subbásico de τ_k. Como X es Hausdorff, se tiene que $\tau_k \subset \tau_g$, es decir, $\phi^{-1}(U^K) \in \tau_g$. Por otro lado, si $U \in \mathcal{B}_p$ entonces se tiene que

$$\phi^{-1}((U^K)^*) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(K \setminus \{p\}) \subset (U \setminus \{p\})\} = (U \setminus \{p\})^{(K \setminus \{p\})}$$

En este caso, $K \setminus \{p\} = K \cap X$ y $U \setminus \{p\} = U \cap X$ son cerrado y abierto en X respectivamente. Además, por construcción de $\mathcal{B}_p$ se tiene que $X^* \setminus U = X \setminus (U \setminus \{p\})$ es compacto en X. Por tanto $\phi^{-1}(U^K)$ es abierto en τ_g y ϕ es continua.

Se concluye que como ϕ es biyectiva, continua y abierta entonces ϕ es homeomorfismo. $\square$

Corolario 6.1.7. Sean X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y $X^* = X \cup \{p\}$ su compactificación por un punto. Entonces, la aplicación dada por

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{H}} : (\mathcal{H}(X), \tau_g) &\longrightarrow (\mathcal{H}^*, \tau_k) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

es un homeomorfismo de espacios topológicos y un isomorfismo de grupos.

Demostración. Se tiene que $\phi_{\mathcal{H}} = \phi|_{\mathcal{H}}$ es la restricción al grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}$ de la aplicación ϕ. Además como

$$\phi(\mathcal{H}) = \{f^* \in \mathcal{C}^* : f \in \mathcal{H}(X)\} = \mathcal{H}^*$$

Se tiene que la restricción $\phi_{\mathcal{H}}$ es homeomorfismo. Basta comprobar que $\phi_{\mathcal{H}}$ es un homomorfismo de grupos. Sin embargo esto es directo gracias a la Observación 6.1.5 ya que $\phi(f \circ g) = (f \circ g)^* = f^* \circ g^* = \phi(f) \circ \phi(g)$. $\square$

6.2. Estructura de grupo topológico del espacio de homeomorfismos

Un grupo $(G, \cdot)$ se puede dotar de una estructura de espacio topológico. Si bajo esta estructura las aplicaciones de grupo son continuas, se dice que G es un grupo topológico. En este apartado se va a estudiar que condiciones debe cumplir el espacio de homeomorfismos para que sea grupo topológico para la topología compacto-abierta y para la g-topología.

Definición 6.2.1. Un conjunto G dotado de estructura de espacio topológico y de grupo se dice que es un *grupo topológico* si las aplicaciones *producto* $p : G \times G \to G$ dada por $p(x, y) = x \cdot y$ e *inversa* $i : G \to G$ dada por $i(x) = x^{-1}$ son continuas.

Un desarrollo más detallado a cerca de los grupos topológicos se puede encontrar en el Apéndice C.

Proposición 6.2.2. Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea $\mathcal{H}$ su grupo de homeomorfismos. Entonces, $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_k.

Demostración. Para comprobar que $(\mathcal{H}, \tau_k)$ es un grupo topológico basta probar que las aplicaciones inversa $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $i(h) = h^{-1}$ y producto $p : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $p(f, g) = f \circ g$ son continuas.

La aplicación inversa i es continua: Sea $h \in \mathcal{H}$ y consideramos U^K un abierto subbásico con $h \in U^K$, donde U es abierto en X y K es compacto en X. Como $h \in U^K$, tiene que $h(K) \subset U$ o lo que es lo mismo

$$X \setminus U \subset X \setminus h(K) = h(X) \setminus h(K) = h(X \setminus K).$$

Tomando ahora la inversa de h a ambos lados se tiene que $h^{-1}(X \setminus U) \subset (X \setminus K)$ o lo que es lo mismo, $h^{-1} \in (X \setminus K)^{(X \setminus U)}$ donde $X \setminus K$ es abierto en X por ser K cerrado y $X \setminus U$ es cerrado en X por ser U abierto y por tanto, $X \setminus U$ es compacto por ser X compacto. Se tiene entonces que dada la aplicación inversión $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ y un abierto subbásico U^K,

$$i^{-1}(U^K) = \{f \in \mathcal{H} : f^{-1} \in U^K\} = \{f \in \mathcal{H} : f \in (X \setminus K)^{(X \setminus U)}\} = (X \setminus K)^{(X \setminus U)}$$

que es un abierto de τ_k. Por lo tanto la aplicación inversa es continua.

La aplicación producto p es continua: Para probar que la aplicación producto (o composición) es continua se ve primero que dado U^K con U abierto en X y K compacto en X, existe un abierto V de X tal que:

$$p^{-1}(U^K) = \{(f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : f \circ g \in U^K\} = U^{\overline{V}} \times V^K$$

Por un lado, si $f \circ g \in U^K$ entonces $f(g(K)) \subset U$ o lo que es lo mismo, $g(K) \subset f^{-1}(U)$ donde $g(K)$ es cerrado y $f^{-1}(U)$ es abierto. Por ser X compacto y Hausdorff, por el Corolario 2.1.30 se tiene que X es normal y por tanto, por la Proposición 2.1.29, existe un abierto V tal que $g(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(U)$ (donde $\overline{V}$ es compacto por ser X compacto). Es decir, $g(K) \subset V$ y $f(\overline{V}) \subset U$ o lo que es lo mismo, $(f, g) \in U^{\overline{V}} \times V^K$. Recíprocamente, si $(f, g) \in U^{\overline{V}} \times V^K$ entonces $g(K) \subset V \subset \overline{V}$ y por tanto $f(g(K)) \subset U$. Con esta igualdad demostrada, se puede ver que si $p : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es la aplicación producto, entonces, dado un abierto subbásico U^K de τ_k,

$$p^{-1}(U^K) = \{(f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : f \circ g \in U^K\} = U^{\overline{V}} \times V^K$$

es abierto en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ por ser V abierto en X y $\overline{V}$ compacto en X por ser cerrado en X con X compacto. Por lo tanto se tiene que la aplicación producto también es continua. Es decir, $(\mathcal{H}, \tau_k)$ es un grupo topológico. □

Teorema 6.2.3. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y sea $\mathcal{H}$ el grupo de homeomorfismos de X. Entonces, la topología τ_g es la topología admisible más gruesa que hace que $\mathcal{H}$ sea grupo topológico.

Demostración. Por ser X localmente compacto y Hausdorff se tiene que existe una compactificación por un punto de X dada por $X^* = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$ (ver Apéndice B). Dado que X^* es compacto y Hausdorff, por la Proposición 6.2.2, se tiene que $\mathcal{H}(X^*)$ es un grupo topológico con la topología τ_k. Por otro lado, se ha visto en la Observación 6.1.4 que $\mathcal{H}^*$ es un subgrupo de $\mathcal{H}(X^*)$ y por tanto también es un grupo topológico con la topología de subespacio inducida por la topología τ_k. Teniendo en cuenta ahora el Corolario 6.1.7, se tiene que, como $\mathcal{H}$ con la topología τ_g es homeomorfo e isomorfo a $\mathcal{H}^*$ con la topología τ_k, entonces $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_g.

Para ver que τ_g es la topología admisible más gruesa que hace que $\mathcal{H}$ sea grupo topológico, se ve primero que τ_g es admisible en $\mathcal{H}$. Como X es Hausdorff, se tiene que $\tau_k \subset \tau_g$ y por tanto, como X es también localmente compacto y $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$, la aplicación evaluación $e : \mathcal{H} \times X \longrightarrow X$ dada por $e(f, x) = f(x)$ es continua considerando en $\mathcal{H}$ la topología compacto-abierta. Entonces, la aplicación evaluación es también continua para la g-topología y τ_g es admisible en $\mathcal{H}$.

Supongamos que hay otra topología τ' que es admisible en $\mathcal{H}$ y que hace que $\mathcal{H}$ sea un grupo topológico. Como τ' es admisible, también es admisible en compactos y por la Proposición 4.1.2, se tiene que $\tau_k \subset \tau'$. Como X es Hausdorff, los subconjuntos compactos K de X son cerrados y la subbase $\mathcal{S}_g$ puede escribirse como

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_k \cup \{O^F : F \text{ es cerrado}, O \text{ es abierto y } X \setminus O \text{ es compacto}\}.$$

Sea O^F un abierto subbásico de τ_g. Si $O^F \in \mathcal{S}_k$ entonces como $\tau_k \subset \tau'$ se tiene que $O^F \in \tau'$. Por otro lado, si O^F cumple que F es cerrado y O es abierto con $X \setminus O$ compacto, entonces como se ha visto en la demostración de la continuidad de la aplicación inversa en la Proposición 6.2.2, se tiene que

$$i^{-1}(O^F) = (X \setminus F)^{(X \setminus O)}$$

donde $X \setminus O$ es compacto y $X \setminus K$ es abierto por ser K cerrado. Por tanto, $i^{-1}(O^F) \in \tau_k \subset \tau'$. Además, como $\mathcal{H}$ es grupo topológico para la topología τ', se tiene que la aplicación inversa es continua y por tanto que el conjunto $i(i^{-1}(O^F)) = O^F$ es abierto en τ'.

Se concluye que dado un abierto subbásico O^F de τ_g, entonces O^F es abierto en τ' y por tanto que $\tau_g \subset \tau'$. Es decir, τ_g es la topología admisible más gruesa que hace que $\mathcal{H}$ sea grupo topológico. $\square$

Si en las hipótesis además el espacio X es localmente conexo (ver Definición 2.1.22), se tiene que el espacio de homeomorfismos $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico con la topología compacto-abierta τ_k.

Teorema 6.2.4. Sean X un espacio topológico y $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X)$ su grupo de homeomorfismos. Si X es localmente compacto, localmente conexo y Hausdorff, se tiene que $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_k.

Demostración. En esta demostración, se prueba primero que la aplicación producto $p : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por $p(f,g) = f \circ g$ es continua. Para esto no es necesaria la hipótesis de localmente conexo. Esta hipótesis se utiliza para demostrar que la aplicación inversa $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por $i(f) = f^{-1}$ es continua.

Continuidad de la apliacación p: Para demostrar la continuidad de la aplicación producto se utiliza un razonamiento similar al de la Proposición 6.2.2. Sean f, g un homeomorfismos de X tales que $f \circ g \in U^K$ con U un abierto y K un compacto de X. Se tiene entonces que $f(g(K)) \subset U$ o lo que es lo mismo, $g(K) \subset f^{-1}(U)$ donde $g(K)$ es cerrado y $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Como X es localmente compacto y Hausdorff, cada punto admite una base de entornos compactos y por tanto, para todo $x \in g(K)$ existe un entorno compacto K_x tal que $x \in K_x \subset f^{-1}(U)$. Como K_x es entorno de X, existe entonces un abierto V_x tal que $x \in V_x \subset K_x \subset f^{-1}(U)$. Como K_x es compacto en un espacio Hausdorff, se tiene que K_x es cerrado y por tanto que $\overline{V}_x \subset K_x$ y por ser $\overline{V}_x$ cerrado contenido en un espacio compacto, también es compacto. Se concluye que, para cada punto $x \in g(K)$, existe un abierto V_x de clausura compacta tal que $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset f^{-1}(U)$.

Como K es compacto y g es una aplicación continua, se tiene que $g(K)$ es compacto y como la familia $\{V_x\}_{x \in g(K)}$ recubre $g(K)$, se tiene que existe una subfamilia finita $\{V_{x_i}\}_{i \in [n]}$ que recubre $g(K)$. Se define el abierto

$$V = \bigcup_{i \in [n]} V_{x_i}$$

de manera que su clausura viene dada por

$$\overline{V} = \bigcup_{i \in [n]} \overline{V}_{x_i}.$$

Luego $\overline{V}$ es también compacto por ser unión finita de conjuntos compactos. Se tiene que $g(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(U)$ o lo que es lo mismo, $g(K) \subset V$ y $f(\overline{V}) \subset U$. Por lo tanto $g \in V^K$ y $f \in U^{\overline{V}}$. Por otro lado, si

$(f,g) \in U^{\overline{V}} \times V^K$, entonces $f(\overline{V}) \subset U$ y $g(K) \subset V$ de lo que sigue que $f(g(K)) \subset f(V) \subset f(\overline{V}) \subset U$, o lo que es lo mismo, $f \circ g \in U^K$. De aquí se deduce la igualdad

$$p^{-1}(U^K) = U^{\overline{V}} \times V^K$$

y por tanto que la aplicación producto es continua.

Continuidad de la aplicación i: Veamos ahora que la aplicación inversa $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por $i(h) = h^{-1}$ es continua. Para esto, se utiliza que, por la Proposición 4.2.5 se tiene que la subbase

$$\mathcal{S} = \{U^L : U \text{ es abierto en } X \text{ y } L \text{ es compacto, conexo y de interior no vacío en } X\}$$

es subbase para la topología compacto-abierta. Sea U un abierto de X y L un conjunto compacto, conexo y de interior no vacío en X con $h^{-1} \in U^L$. Se quiere ver existe un abierto W_h en $(\mathcal{H}, \tau_k)$ que contiene a h tal que $i(W_h) \subset U^L$. y que por tanto, la aplicación inversa es continua en h para cualquier $h \in \mathcal{H}$.

Como se ha visto en parte anterior, existe un abierto G de X clausura compacta tal que $h^{-1}(L) \subset G \subset \overline{G} \subset U$. Aplicando de nuevo este razonamiento con el compacto $\overline{G}$ y el abierto U, se tiene que existe un abierto V de X de clausura compacta tal que

$$h^{-1}(L) \subset G \subset \overline{G} \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Se tiene además que $h(\overline{V}) \subset h(U)$ y como $h^{-1}(L) \subset G$, que $h(X \setminus G) \subset X \setminus L$. Entonces,

$$h((X \setminus G) \cap \overline{V}) \subset (X \setminus L) \cap h(\overline{V}) \subset (X \setminus L) \cap h(U)$$

donde $(X \setminus G) \cap \overline{V}$ es compacto por ser cerrado y contenido en $\overline{V}$ que es compacto. Además, como el interior de L es no vacío, existe un punto $y \in L^\circ$ y por ser h homeomorfismo, se tiene que $h(x) = y \in L^\circ$ para algún $x \in X$. Por tanto,

$$h \in ((X \setminus L) \cap h(U))^{((X \setminus G) \cap \overline{V})} \cap (L^\circ)^x = W_h$$

donde por simplicidad de notación se ha llamado W_h al abierto definido en la expresión anterior. Para cada aplicación h^{-1}, dado un abierto subbásico U^L con $h^{-1} \in U^L$ existe un abierto subbásico W_h tal que $h \in W_h$. Falta ver que $i(W_h) \subset U^L$ para ver que la aplicación inversa es continua.

Sea $f \in W_h$. Para ver que $i(W_h) \subset U^L$ se tiene que ver que $i(f) = f^{-1} \in U^L$. Como $f \in W_h$, se tiene que

$$f((X \setminus G) \cap \overline{V}) \subset ((X \setminus L) \cap h(U)).$$

tomando los complementarios de los conjuntos y teniendo en cuenta que, por ser f un homeomorfismo, para dos subconjuntos $A, B \subset X$ cualesquiera, $f(A) \subset B$ implica que $X \setminus B \subset f(X \setminus A)$, se tiene que

$$L \subset L \cup (X \setminus h(U)) = X \setminus ((X \setminus L) \cap h(U)) \subset f(X \setminus ((X \setminus G) \cap \overline{V})) = f(G \cup (X \setminus \overline{V})) = f(G) \cup f(X \setminus \overline{V})$$

Como $G \subset \overline{V}$, se tiene que $f(G) \cap f(X \setminus \overline{V}) = \emptyset$ y como L es conexo y $f(G), f(X \setminus \overline{V})$ son abiertos, entonces $L \subset f(G)$ o $L \subset f(X \setminus \overline{V})$. Como se tiene que $h(x) \in L^\circ$, se sigue que

$$x \in h^{-1}(L^\circ) \subset h^{-1}(L) \subset \overline{V}$$

de donde se deduce que $x \in \overline{V}$ y por tanto que $x \notin X \setminus \overline{V}$. Como además $f \in (L^\circ)^x$, entonces $f(x) \in L^\circ$ y si se cumpliera que $L \subset f(X \setminus \overline{V})$, como $f(x) \in L^\circ$, se tendría que

$$f(x) \in L^\circ \subset L \subset f(X \setminus \overline{V})$$

luego, tomando la imagen inversa de f a ambos lados, $x \in X \setminus \overline{V}$ lo que es un absurdo. Se tiene entonces que $L \subset f(G)$ y por tanto

$$f^{-1}(L) \subset G \subset U$$

es decir, $f^{-1} \in U^L$. Entonces, $i(W_h) \subset U^L$ y por tanto la aplicación inversa es continua.

Como se ha visto que la aplicación inversa y la aplicación producto son continuas, se concluye que el grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_k. $\square$

Como se ha mencionado en la Observación 6.1.2, si el espacio X es compacto y Hausdorff, las topologías τ_g y τ_k coinciden en $\mathcal{H}$. Sin embargo, J.J.Dijkstra en [3] demostró una condición diferente que permite también asegurar que ambas topologías coinciden. Este reemplaza la hipótesis de compacidad de X por la de que cada punto de X tiene un entorno continuo (compacto y conexo).

Teorema 6.2.5. Sea X un espacio topológico Hausdorff y no compacto y sea $\mathcal{H}$ su grupo de homeomorfismos. Si cada punto de X tiene un entorno continuo, entonces la topología τ_k y la topología τ_g coinciden en $\mathcal{H}$.

Demostración. Como se ha mencionado en la Observación 6.1.2, dado que X es Hausdorff, se tiene que $\tau_k \subset \tau_g$. Más concretamente, cuando X es Hausdorff, la topología τ_g viene dada por la subbase

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_k \cup \{O^F : F \text{ es cerrado y }, O \text{ es abierto y } X \setminus O \text{ es compacto}\}$$

donde $\mathcal{S}_k$ es la subbase de la topología τ_k. Por tanto, es suficiente ver que los subconjuntos de la forma O^F con F cerrado y $X \setminus O$ compacto son abiertos en la topología τ_k.

Consideremos F un conjunto cerrado en X y O un conjunto abierto en X cuyo complementario $K = X \setminus O$ sea compacto. Se quiere ver que dado $f \in O^F$ existe un abierto U_f de la topología compacto-abierta τ_k tal que $f \in U_f \subset O^F$.

Como f es un homeomorfismo, se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto. Para cada $k \in f^{-1}(K)$, tomamos un entorno continuo C_k tal que $k \in C_k \subset f^{-1}(K)$. Como C_k es un entorno, existe un abierto W_k tale que

$$k \in W_k \subset C_k \subset f^{-1}(K).$$

Luego la familia $\{W_k\}_{k \in f^{-1}(K)}$ recubre $f^{-1}(K)$. Por tanto, como $f^{-1}(K)$ es compacto, existe una subfamilia finita $\{W_{k_i}\}_{i \in [n]}$ que recubre $f^{-1}(K)$. Además, para cada W_{k_i} existe un entorno que es un continuo C_{k_i}. Se cumple entonces que

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{i \in [n]} W_{k_i} \subset \bigcup_{i \in [n]} (C_{k_i})^\circ \subset \bigcup_{i \in [n]} C_{k_i}$$

donde $C_{k_i}^\circ$ es el interior de C_{k_i}. Como la familia $\{C_{k_i}\}_{i \in [n]}$ es finita, se define el compacto

$$C = \bigcup_{i \in [n]} C_{k_i}.$$

Por un razonamiento análogo al anterior, para cada $x \in C$ se puede encontrar un entorno que es un continuo C'_x y un abierto V_x tales que $x \in V_x \subset C'_x$. Por la compacidad de C se puede encontrar una subfamilia finita $\{V_{x_i}\}_{j \in [m]}$ de abiertos de modo que

$$C \subset \bigcup_{j \in [m]} V_{x_j} \subset \bigcup_{j \in [m]} (C'_{x_j})^\circ \subset \bigcup_{j \in [m]} C'_{x_j}$$

donde $(C'_{x_j})^\circ$ es el interior de C'_{x_j}. Se define el compacto

$$C' = \bigcup_{j \in [m]} C'_{x_j}$$

que cumple la cadena de inclusiones

$$f^{-1}(K) \subset C \subset C'$$

donde se tiene que tanto C como C' son compactos y por tanto, como X es Hausdorff, C y C' son cerrados.

Vamos a considerar ahora dos casos, primero se considera el caso en que C' no es abierto y luego el caso en que sí lo es. En cada uno de estos casos, se va a proceder de la siguiente manera: Primero se define un conjunto U_f y se comprueba que es abierto. Luego se ve que $f \in U_f$. Por último se ve que $U_f \subset O^F$.

Supongamos que C' no es abierto: Entonces, su frontera $\partial C'$ es no vacía. Se define el conjunto

$$U_f = (O^{C'\cap F}) \cap (f(X\setminus C)^{\partial C'}) \cap (\bigcap_{i\in[n]} f(C^\circ_{k_i})^{k_i}).$$

$\underline{U_f \text{ es abierto de } \tau_k}$: O es abierto por hipótesis y $f(X\setminus C)$ y $f(C^\circ_{k_i})$ son abiertos por ser imágenes de abiertos por f que es homeomorfismo. Por otro lado, se tiene que $C'\cap F$ es cerrado por ser intersección de cerrados, $\partial C'$ es cerrado por ser la frontera de un conjunto y k_i es cerrado por ser un punto en un espacio Hausdorff. Además, como $C'\cap F$, $\partial C'$ y $\{k_i\}$ están contenidos en C' que es compacto, se tiene que estos también son compactos por ser cerrados. Se tiene que U_f es abierto en la topología compacto-abierta.

$\underline{f \in U_f}$: Por un lado, como $f \in O^F$, se cumple que $f(F) \subset O$ y por tanto $f(C'\cap F) \subset f(F) \subset O$, es decir,

$$f(C'\cap F) \subset O.$$

Como $C \subset \cup_{i\in[n]}(C'_{k_i})^\circ \subset C'$ y C' se ha supuesto que no es abierto, se tiene que $C \subset \cup_{i\in[n]}(C'_{k_i})^\circ \subsetneq C'$ y por tanto $\partial C' \subset X\setminus C$, o lo que es lo mismo,

$$f(\partial C') \subset f(X\setminus C).$$

Por último, como para cada $i\in[n]$ se tiene que C_{k_i} es entorno de k_i, se cumple que $k_i \in C^\circ_{k_i}$ y por tanto que

$$f(k_i) \in f(C^\circ_{k_i}).$$

Luego $f \in U_f$.

$\underline{U_f \subset O^F}$: Supongamos que existe $h \in U_f$ con $h \notin O^F$. Entonces existe un punto $x \in F$ tal que $h(x) \notin O$, es decir, $h(x) \in X\setminus O = K$. Como $h \in U_f \subset O^{(C'\cap F)}$, se tiene que $x \notin C'$ ya que si $x \in C'$ se tendría que $h(C'\cap F) \nsubseteq O$. Por otro lado, como $f^{-1}(K) \subset C$, se tiene que $K \subset f(C)$ y por tanto

$$x \in h^{-1}(K) \subset h^{-1}(f(C)).$$

Luego, para algún $i \in [n]$, se cumple que $x \in h^{-1}(f(C_{k_i}))$. Reordenando y sin pérdida de generalidad, se puede nombrar este i como $i=1$ y obtenemos que $x \in h^{-1}(f(C_{k_1}))$. Teniendo en cuenta que

$$h \in U_f \subset f(C^\circ_{k_1})^{k_1}$$

se deduce que $h(k_1) \in f(C^\circ_{k_1})$, es decir, $k_1 \in h^{-1}(f(C^\circ_{k_1}))$ y además, por como se han tomado los elementos k_i se cumple que $k_1 \in C \subset C'$.

Como tanto f como h son homeomorfismos, $C_1 = h^{-1}(f(C_{k_1}))$ es compacto y conexo. Además, se tiene que $x \in C_1$ y $k_1 \in C_1$ con $x \notin C'$ y $k_1 \in C'$. Teniendo en cuenta que $X = (C')^\circ \cup \partial C' \cup (X\setminus C')^\circ$,

$$C_1 = (C_1 \cap (C')^\circ) \cup (C_1 \cap \partial C') \cup (C_1 \cap (X\setminus C'))$$

y por tanto si $(C_1 \cap \partial C') = \emptyset$ entonces C_1, que es conexo, se puede escribir como la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos (ya que $k_1 \in W_{k_1} \subset C^\circ_{k_1} \subset (C')^\circ$ y $x \notin C'$), lo que es un absurdo. Luego existe un punto $y \in C_1 \cap \partial C'$. Ahora, como

$$h \in U_f \subset f(X\setminus C)^{\partial C'}$$

se tiene que $h(\partial C') \subset f(X\setminus C) = X\setminus f(C)$ y por tanto que $h(y) \in f(X\setminus C)$, es decir, $h(y) \notin f(C)$ lo que contradice que $y \in C_1 = h^{-1}(f(C_{k_1})) \subset h^{-1}(f(C))$.

Como consecuencia, si C' no es abierto, entonces para cada $f \in O^F$ se puede encontrar un abierto U_f de la topología compacto-abierta τ_k tal que $f \in U_f \subset O^F$.

Supongamos que C' es abierto: El procedimiento en este caso es muy similar al caso anterior. Se considera el conjunto

$$U'_f = (O^{C' \cap F}) \cap (\bigcap_{i \in [n]} f(C^{\circ}_{k_i})^{k_i})$$

que por argumentos similares al caso anterior es un abierto de la topología compacto-abierta que cumple que $f \in U'_f$. De manera análoga al caso de que C' no es abierto, supongamos que existe un $h \in U'_f \setminus O^F$. Entonces que existe un punto $t \in F$ tal que $h(t) \notin O$ o lo que es lo mismo, $h(t) \in K$. Por el mismo argumento que antes, se llega a que existe un índice $i \in [n]$, que por evitar confusiones se puede suponer que es $i = 2$, tal que $t, k_2 \in h^{-1}(f(C_{k_2}))$ y que $t \notin C'$ pero $k_2 \in C'$. Como antes, definiendo el conjunto compacto y conexo $C_2 = h^{-1}(f(C_{k_2}))$, se tiene que

$$C_2 = (C_2 \cap (C')^{\circ}) \cup (C_2 \cap \partial C') \cup (C_2 \cap (X \setminus C'))$$

pero como C' es abierto y cerrado, se tiene que $\partial C' = \emptyset$ y por tanto que C_2 se puede escribir como la unión de dos conjuntos abiertos no vacíos (ya que $k_2 \in W_{k_2} \subset C_{k_2}(C')^{\circ})$, lo que es un absurdo. Se deduce que si C' es abierto, se tiene que para cada $f \in O^F$ existe un abierto U'_f de la topología compacto-abierta τ_k tal que $f \in U'_f \subset O^F$.

Se concluye que para cada $f \in O^F$ existe un abierto U_f de la topología compacto-abierta τ_k tal que $f \in U_f \subset O^F$. Por tanto, se tiene que la topología τ_g es igual a la topología compacto-abierta τ_k. □

Corolario 6.2.6. Sea X un espacio topológico Hausdorff y no compacto y sea $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X)$ su grupo de homeomorfismos. Si cada punto de X tiene un entorno que es un continuo, entonces $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_k

Demostración. Como se ha visto en el Teorema 6.2.5, bajo las hipótesis del corolario las topologías τ_g y τ_k coinciden. Además, por el Teorema 6.2.3, como X es Hausdorff y localmente compacto, se tiene que $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_g. Por tanto, se concluye que $\mathcal{H}$ es un grupo topológico con la topología τ_k. □

Para terminar capítulo, se presenta un ejemplo de espacio métrico localmente compacto que no es grupo topológico para la topología compacto-abierta, esto es, un espacio que cumple las hipótesis del Teorema 6.2.3 pero no es grupo topológico porque se toma con la topología compacto-abierta y no con la g-topología. Este ejemplo se puede encontrar en [3].

Ejemplo 6.2.7. Sea C el conjunto de Cantor en la recta real $\mathbb{R}$ dado por

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n} : \varepsilon_n \in \{0, 2\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

y dotado de la topología de subespacio heredada de la topología usual. Con esta topología C es un espacio métrico y por tanto Hausdorff. Además, C es localmente compacto ya que es compacto por ser un subconjunto cerrado del espacio compacto $[0, 1]$. Se considera el subespacio $X = C \setminus \{0\}$ que también es un espacio métrico. Además, como X es abierto y denso en C, se tiene que X es localmente compacto como consecuencia del Teorema 18.4 de [9].

Se definen dos familias de entornos entornos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 y 1 respectivamente de la forma

$$U_n = C \cap [0, \tfrac{1}{3^n}] \quad \text{y} \quad V_n = C \cap [1 - \tfrac{1}{3^n}, 1]$$

de modo que $U_n \cap V_n = \emptyset$, $U_{n+1} \subsetneq U_n$ y $V_{n+1} \subsetneq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la aplicación $h_n : C \to C$ dada por

$$
\begin{aligned}
h_n(x) &= x \quad \text{si } x \in C \setminus (U_n \cup V_n),\\
h_n(0) &= 0,\\
h_n(U_{n+1}) &= U_n,\\
h_n(U_n \setminus U_{n+1}) &= V_{n+1},\\
h_n(V_n) &= V_n \setminus V_{n+1}
\end{aligned}
$$

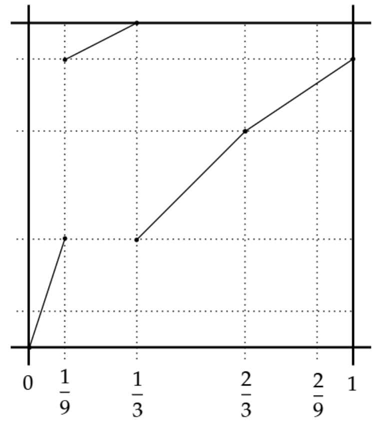

Figura 6.1: Definición por trozos de las aplicaciones $h_n : C \to C$ y representación de la aplicación h_1.

Esta aplicación es biyectiva ya que se puede entender como la restricción a C de una transformación lineal a trozos (ver Figura 6.1). Además, es continua ya que es continua a trozos y los puntos de discontinuidad son aquellos puntos que coinciden con los valores $\frac{1}{3^n}$ que por definición de C no pertenecen al conjunto. Por tanto, $h_n \in \mathcal{H}(C)$ y como $h_n(0) = 0$, la restricción $h_n|_X \in \mathcal{H}(X)$.

Se va a ver ahora que con la topología compacto-abierta la sucesión $\{h_n|_X\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a la aplicación identidad $id_X : X \to X$ pero que esto no es el caso para la sucesión $\{h_n|_X^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto implica que la aplicación inversa $i : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ dada por $i(h) = h^{-1}$ no es continua ya que si esta lo fuera, entonces por la Proposición 2.1.16 se tendría que, como $\{h_n|_X\}_{n\in\mathbb{N}} \to id_X$, entonces

$$\{h_n|_X^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{i(h_n|_X)\}_{n\in\mathbb{N}} \to i(id_X) = id_X$$

pero esto entraría en contradicción con que la sucesión $\{h_n|_X^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a id_X y por tanto quedaría demostrado que $\mathcal{H}(X)$ no es un grupo topológico con la topología compacto-abierta.

Probemos primero que $\{h_n|_X\}_{n\in\mathbb{N}} \to id_X$, es decir, dado un entorno abierto O^K de id_X con O abierto y K compacto en X, queremos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumpla que $h_n|_X \in O^K$. Como O^K es un entorno de id_X se tiene que $id_X(K) = K \subset O \subset X$ y como $0 \notin X$, se tiene que existe un $\tilde{M} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \tilde{M}$ se cumple que $U_n \cap K = \emptyset$. Se separa ahora la demostración en dos casos dependiendo de si 1 pertenece o no a K.

Se considera primero que $1 \notin K$. Entonces, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$, la intersección $V_n \cap K$ es vacía. Tomando $N = \max\{\tilde{M}, M\}$, para todo $n \geq N$ se cumple que $U_n \cap K = \emptyset$ y $V_n \cap K = \emptyset$. Por tanto, $K \subset C \setminus (U_n \cup V_n)$ y $h_n|_X(k) = k$ para todo $k \in K$, es decir, $h_n|_X \in O^K$ para todo $n \geq N$.

Por otro lado, si $1 \in K$, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M$ se tiene que $V_n \subset K$. Tomando $N = \max\{\tilde{M}, M\}$ se tiene que para todo $n \geq N$ se cumple que $K \setminus V_n \subset C \setminus (U_n \cup V_n)$ y por tanto que

$$h_n(K \setminus V_n) = K \setminus V_n \subset O \quad \text{y} \quad h_n(K \cap V_n) = h_n(V_n) = V_n \setminus V_{n+1} \subset V_n \subset K \subset O$$

es decir, $h_n(K) \subset O$. Luego, $h_n|_X \in O^K$. Se concluye que $\{h_n|_X\}_{n\in\mathbb{N}} \to id_X$.

Por otro lado, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $1 \in V_n$, se tiene que $h_n^{-1}(1) \in U_n$. Entonces, tomando el compacto $K = \{1\}$ y el abierto $O = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, se verifica que $id_X \in O^K$ pero para todo $n \in \mathbb{N}$, $h_n^{-1}(1) \in U_n$ y $O \cap U_n = \emptyset$. Entonces, $h_n^{-1}(K) \nsubseteq O$ y se concluye que $\{h_n|_X^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a id_X.

Bibliografía

[1] M. Aguilar et al. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer. (2002)

[2] R.Arens. *Topologies for Homeomorphism Groups*. American Journal of Mathematics **68**(4), (1946) pp. 593-610.

[3] J.J. Dijkstra. *On Homeomorphism Groups and the Compact-Open Topology*. The American Mathematical Monthly **112**(10), (2005) pp. 910-912.

[4] R.C. Freiwald. *An Introduction to Set Theory and Topology*. Washington University in St. Louis. (2014)

[5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press. (2002)

[6] T. Husain. *Topology and maps*. Plenum. (1977)

[7] J. R. Munkres. *Topología*. Prentice Hall **2ª edición**. (2000)

[8] K. Parthasaraty. *Topology*. Springer **Volume 134**. (1967)

[9] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications. (2004)

Apéndice A

Demostraciones de algunos de los resultados preliminares

Proposición 2.1.29. Sean (X, τ_X) un espacio topológico y A, B dos subconjuntos de X dotados de la topología de subespacio. Se tiene entonces que:

1. Si X es compacto y A es cerrado en X, entonces A es compacto.
2. Si X es Hausdorff y A es compacto, entonces A es cerrado en X.
3. Si X es Hausdorff y A, B son compactos, entonces $A \cap B$ es compacto.
4. Si X es Hausdorff, entonces si los subconjuntos A y B son compactos y disjuntos, existen abiertos disjuntos U_A, U_B que contienen a A y B respectivamente.
5. Si X es regular, entonces para cada entorno U de un punto $x \in X$ existe un entorno V de x tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.
6. Si X es normal, A es cerrado y B es abierto y $A \subset B$ entonces existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset B$.

Demostración. Los resultados de los apartados *1* y *2* se pueden encontrar en cualquier libro de topología general como [7] o [6]. Por otro lado el apartado *3* es consecuencia directa de los dos primeros apartados. A continuación se demuestran los apartados *4*, *5* y *6*.

4. Como A y B son disjuntos, dados $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $a \neq b$. Por tanto, dado que X es Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U_{a,b}, V_{a,b}$ que contienen a a y a b respectivamente. Fijando $b \in B$, se puede repetir este proceso para todos los elementos de A de donde se obtiene que $\{U_{a,b}\}_{a \in A}$ es un recubrimiento abierto de A por lo que existe un subrecubrimiento finito $\{U_{a_i,b}\}_{i \in [n]}$ y sus correspondientes abiertos disjuntos $\{V_{a_i,b}\}_{i \in [n]}$. Se definen ahora los conjuntos $U_b = \bigcup_{i \in [n]} U_{a_i,b}$ y $V_b = \bigcap_{i \in [n]} V_{a_i,b}$ que son abiertos por ser unión y intersección finita de abiertos y $A \subset U_b$ por ser los $U_{a_i,b}$ recubrimiento. Además, se tiene que como

$$U_b \cap V_b = (\bigcup_{i \in [n]} U_{a_i,b}) \cap (\bigcap_{j \in [n]} V_{a_j,b}) = \bigcup_{i \in [n]} (U_i \cap (\bigcap_{j \in [n]} V_{a_j,b})) \subset \bigcup_{i \in [n]} (U_i \cap V_i) = \emptyset$$

son abiertos disjuntos. De manera similar, como V_b es abierto para todo elemento de B se tiene que $\{V_b\}_{b \in B}$ forma un recubrimiento abierto de B y por tanto existe un subrecubrimiento finito $\{V_{b_k}\}_{k \in [m]}$ con sus correspondientes abiertos disjuntos $\{U_{b_k}\}_{k \in [m]}$. Definiendo entonces $U = \bigcap_{k \in [m]} U_{b_k}$ y $V = \bigcup_{k \in [m]} V_{b_k}$ se tiene que como $A \subset U_{b_k}$ para todo $k \in [m]$, $A \subset U$ y por ser $\{V_{b_k}\}_{k \in [m]}$ recubrimiento $B \subset V$. Además, se tiene que

$$U \cap V = (\bigcap_{k \in [m]} U_{b_k}) \cap (\bigcup_{t \in [m]} V_{b_t}) = \bigcup_{t \in [m]} ((\bigcap_{k \in [m]} U_{b_k}) \cap V_{b_t}) \subset \bigcup_{t \in [m]} (U_{b_t} \cap V_{b_t}) = \emptyset$$

Por lo tanto se tiene que existen abiertos disjuntos U, V que contienen a A y B respectivamente.

5. Sea U un abierto que contiene a x. Se tiene que $X \setminus U$ es un cerrado que no contiene a x. Por ser X regular, existen abiertos disjuntos que contienen a x y $X \setminus U$ que se pueden llamar V y W respectivamente. Como V y W son disjuntos se tiene que $V \subset (X \setminus W)$ y por otro lado se tiene que como $(X \setminus U) \subset W$ entonces $(X \setminus W) \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Por lo tanto, se tiene la cadena

$$x \in V \subset \overline{V} \subset (X \setminus W) \subset U$$

que se da por ser $X \setminus W$ cerrado.

6. Como B es abierto se tiene que $X \setminus B$ es cerrado. Como X es normal, existen abiertos disjuntos V_A, V_B tales que $A \subset V_A$ y $X \setminus B \subset V_B$. Además, $V_A \subset X \setminus V_B \subset B$, y $X \setminus V_B$ es cerrado, se tiene que $A \subset V_A \subset \overline{V_A} \subset X \setminus V_B \subset B$. □

Proposición 2.1.30. Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Sea $x \in X$ un punto y U el entorno de x que cumple que $\overline{U}$ es compacto. Entonces, el entorno compacto $\overline{U}$ de x es normal. Es más, cualquier entorno de x contiene un entorno compacto de x, es decir, en cada punto se puede definir una base de entornos compactos.

En particular, si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal y en cada punto se puede definir una base de entornos compactos.

Demostración. La primera parte del resultado sigue inmediatamente de la Proposición 2.1.29 ya que si X es Hausdorff, entonces U es Hausdorff y dados dos cerrados disjuntos C_1, C_2 de $\overline{U}$ con la topología de subespacio, se tiene que estos son compactos y por tanto, por el apartado 4 de la Proposición 2.1.29, están contenidos en dos abiertos disjuntos de $\overline{U}$.

Para la segunda parte, utilizando también la Proposición 2.1.29, dado un entorno V de x se tiene que $V \cap \overline{U}$ es entorno de x en $\overline{U}$ y por ser $\overline{U}$ normal, $\overline{U}$ es también regular por lo que existe un entorno W de x en $\overline{U}$ tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset V \cap \overline{U}$. Por ser $\overline{U}$ compacto, se tiene que $\overline{W}$ es compacto en $\overline{U}$ y por tanto también en X.

Por último, si X es compacto y Hausdorff entonces basta tomar $U = X$ de donde se concluye que X es normal y por el apartado 5 de la Proposición 2.1.29, se tiene que en cada punto de X se puede definir una base de entornos compactos. □

Proposición 2.1.34. Sean X e Y dos espacios topológicos, sea $K \subset Y$ un compacto de Y y sea x_0 un elemento de X. Sea W un abierto de $X \times Y$ que contiene a $\{x_0\} \times K$. Entonces, existe un abierto U de X tal que $U \times K \subset W$ y $x_0 \in U$.

Demostración. Como W es un abierto de la topología producto y $\{x_0\} \times K \subset W$, se tiene que para cada punto $(x_0, y) \in \{x_0\} \times K$ existen abiertos U_y, V_y de X e Y respectivamente tales que

$$(x_0, y) \in (U_y \times V_y) \subset W$$

de forma que la familia $\{U_y \times V_y\}_{y \in K}$ es un recubrimiento abierto de $\{x_0\} \times K$. Por ser K compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{U_{y_i} \times V_{y_i}\}_{i \in [n]}$ que recubre $\{x_0\} \times K$. Definiendo $U = \bigcap_{i \in [n]} U_{y_i}$ se tiene que U es un abierto de X que contiene a x_0 y que para cualquier $i \in [n]$ se cumple que,

$$(\{x_0\} \times K) \subset (U \times K) \subset (U_{y_i} \times K) \subset W$$

de donde se deduce que U es un abierto de X tal que $U \times K \subset W$ y $x_0 \in U$. □

Apéndice B

Compactificaciones

En este apartado se introducen brevemente las compactificaciones de los espacios topológicos. Dado un espacio topológico X, una compactificación de X busca encontrar un espacio compacto Y que preserve algunas propiedades topológicas de X. De esta manera, se busca extender a X ciertas propiedades topológicas que requieren de un espacio compacto para ser satisfechas. Los resultados de este Apéndice se pueden encontrar en el capítulo 10 de [4].

Definición B.0.1. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre X y $h(X) \subset Y$ donde Y es compacto y Hausdorff. Si $h(X)$ es denso en Y al par (Y, h) se le llama *compactificación* de X. Cuando $Y \setminus X$ es un punto, (Y, h) es una *compactificación por un punto* de X y se denota por X^*.

Observación B.0.2. Por la definición que se ha dado de compactificación de X solo se plantean compactificaciones de espacios Hausdorff ya que este va a ser el caso que se estudia en este trabajo. Sin embargo, se pueden definir compactificaciones de espacios topológicos no Hausdorff.

Lema B.0.3. Sean $X \neq \emptyset$ un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y el conjunto $X^* = X \cup \{p\}$ con $p \notin X$. Sea $\mathcal{B}$ una base de X y

$$\mathcal{B}_p = \{N \subset X^* : p \in N \text{ y } X^* \setminus N \text{ compacto en } X\}$$

una familia de subconjuntos de X^* que contienen a p. Entonces $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_p$ es una base para una topología en X^*.

Demostración. Se ve que los conjuntos del tipo $X^* \setminus \{x\}$ pertenecen a $\mathcal{B}_p$ por tanto $\mathcal{B}_p$ es no vacío y $X^* = \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} B$.

Para demostrar la segunda propiedad del Teorema 2.1.3, se toman dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^*$ y un punto $x \in B_1 \cap B_2$. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ (por lo que $x \neq p$), entonces por ser $\mathcal{B}$ una base de X existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_p$, se tiene que $X^* \setminus (B_1 \cap B_2) = (X^* \setminus B_1) \cap (X^* \setminus B_2)$ es intersección de dos compactos y por ser X^* Hausdorff, la intersección es compacta y por lo tanto $B_3 = B_1 \cap B_2$ es un elemento de la base $\mathcal{B}_p$.

Por último, si $B_1 \in \mathcal{B}_p$ y $B_2 \in \mathcal{B}$ se tiene que $X^* \setminus B_1 \subset X$ es compacto y por ser X un espacio Hausdorff, se tiene que $X^* \setminus B_1$ es cerrado. Por lo tanto, $B_1 \cap X$ es abierto en X y como $p \notin B_2$, $B_1 \cap B_2 = (B_1 \cap X) \cap B_2$ es abierto en X y por tanto para todo $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Se concluye entonces que $\mathcal{B}^*$ es base para una topología en X^* □

En el siguiente teorema se da una caracterización de los espacios topológicos que tienen una compactificación de un punto. En muchas de las demostraciones de los teoremas que aparecen en El capítulo 6 se requieren las condiciones de este teorema.

Teorema B.0.4. Sea $X \neq \emptyset$ un espacio topológico no compacto. Entonces, X tiene una compactificación por un punto $X^* = X \cup \{p\}$ si y solo si X es localmente compacto y Hausdorff.

Demostración. Supóngase primero que $X^* = X \cup \{p\}$ es una compactificación por un punto de X. Por definición X es Hausdorff y falta ver que es localmente compacto. Sea $x \in X$ un punto de X. Por ser X^* Hausdorff existen abiertos disjuntos U, V de X^* que contienen a x y p respectivamente. Entonces $X^* \setminus V$ es cerrado en X^* y por ser X^* compacto, $X^* \setminus V$ es compacto en X^*. Como $U \cap V = \emptyset$, entonces $U \subset X^* \setminus V$ y por tanto $X^* \setminus V$ es un entorno de x en X que cumple que $\overline{X^* \setminus V}$ es compacto, es decir, X es localmente compacto.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente compacto y Hausdorff. Se considera sobre X^* la topología definida en el Lema B.0.3. Hay que probar ahora que X^* dotado de esta topología es compacto, Hausdorff y que X es denso en X^* para esta topología.

Para ver que X^* es compacto se toma un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Como $\mathcal{U}$ es recubrimiento abierto de X^* existe al menos un abierto U_{α_0} tal que $p \in U_{\alpha_0}$. Existe entonces un elemento $B \in \mathcal{B}_p$ tal que $X^* \setminus B$ es compacto con $p \in B \subset U_{\alpha_0}$. Por tanto, existe una subfamilia finita $\{U_{\alpha_i}\}_{i \in [n]}$ tal que $X^* \setminus B \subset \bigcup_{i \in [n]} U_{\alpha_i}$. Por último, como $B \subset U_{\alpha_0}$, se tiene que $\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ que recubre a X^*. Por lo tanto, X^* es compacto.

Para ver que X^* es Hausdorff tan solo es necesario ver que dado cualquier punto $x \in X$ existen abiertos disjuntos U, V de X^* que contienen a x y p respectivamente ya que X es Hausdorff por hipótesis. Como X es localmente compacto, dado $x \in X$ existe un entorno compacto K de x. Luego $B = X^* \setminus K$ es un entorno abierto de p disjunto a K. Por lo tanto, existen abiertos U, V contenidos en K y $X^* \setminus K$ respectivamente tales que $x \in U$ y $p \in V$. Por lo tanto X^* es Hausdorff.

Por último, para ver que $\overline{X} = X^*$ basta ver que $\{p\}$ no es abierto en X^* ya que entonces X no sería cerrado por lo que $X \subsetneq \overline{X}$ o lo que es lo mismo, $\overline{X} = X \cup \{p\} = X^*$. Si $\{p\}$ fuera abierto entonces se cumpliría que $\{p\} \in \mathcal{B}_p$ y por tanto se tendría que $X^* \setminus \{p\} = X$ sería compacto. Por lo tanto se tiene que $\{p\}$ no puede ser abierto en X^* y X es denso en X^*. $\square$

Apéndice C

Grupos y grupos topológicos

En este apartado se introduce brevemente la noción de grupo y alguna de las propiedades de estos con el objetivo de poder definir los grupos topológicos.

Definición C.0.1. Un conjunto G junto con una operación binaria interna $\cdot : G \times G \to G$ se dice que es un *grupo* si cumple las siguientes propiedades:

1. *Asociatividad:* $\forall a, b, c \in G$ se tiene que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

2. *Elemento neutro:* Existe un elemento $e \in G$ tal que $\forall a \in G$ se tiene que $a \cdot e = e \cdot a = a$.

3. *Inverso:* $\forall a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Un subconjunto $H \subset G$ se dice *subgrupo* de G si H es un grupo con la operación $\cdot$ restringida a H.

Proposición C.0.2. Sea G un grupo y $H \subset G$ un subconjunto no vacío. Entonces H es un subgrupo de G si y solo si para dos elementos cualesquiera $a, b \in H$ se tiene que $a \cdot b^{-1} \in H$.

Definición C.0.3. Sean $(G, \cdot_G)$ y $(H, \cdot_H)$ dos grupos. Se llama *homomorfismo de grupos* a una aplicación $f : G \to H$ que cumple para todo $g_1, g_2 \in G$,

$$f(g_1 \cdot_G g_2) = f(g_1) \cdot_H f(g_2)$$

Si f es además biyectiva se llama *isomorfismo de grupos.*

Proposición C.0.4. Sean $(G, \cdot_G)$ y $(H, \cdot_H)$ dos grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Se cumple entonces que

1. $f(e_G) = e_H$ donde e_G y e_H son los elementos neutros de G y H respectivamente.

2. Para todo $g \in G$ se cumple que $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$

3. Si H es un subgrupo de G entonces $f(H)$ es un subgrupo de H.

Dado que sobre un conjunto de puntos se puede definir una estructura de espacio topológico, no hay nada que impida que el conjunto de elementos de un grupo tenga una estructura de espacio topológico. En este caso, se dice que el grupo es un grupo topológico cuando las operaciones de grupo son continuas. La combinación de la estructura de grupo y la continuidad de las operaciones de grupo gracias a la estructura de espacio topológico dota a los grupos topológicos de propiedades interesantes. A continuación se define formalmente un grupo topológico y se presentan y demuestran algunas de sus propiedades más relevantes para este trabajo.

Definición C.0.5. Un conjunto G dotado de estructura de espacio topológico y de grupo se dice que es un *grupo topológico* si las aplicaciones $p(x, y) = x \cdot y$ de $G \times G$ en G y $i(x) = x^{-1}$ son continuas.

Proposición C.0.6. Sea G un conjunto dotado de estructura de grupo y de espacio topológico. Entonces G es un grupo topológico si y solo si la aplicación

$$\begin{aligned} h : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Se ve que $h(x, y) = p(x, i(y))$. Por tanto si G es un grupo topológico entonces como p e i son continuas también lo es h. Recíprocamente, si h es continua se ve que, como $p(x, y) = h(x, y^{-1})$ y $i(y) = h(e, y)$, p e i son continuas y por tanto G es un grupo topológico. □

Proposición C.0.7. Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G entonces H es un grupo topológico con la topología inducida por G.

Demostración. Como G es grupo topológico se tiene que la aplicación $h : G \times G \to G$ dada por $h(x, y) = x \cdot y^{-1}$ es continua. Si se restringe la aplicación a $H \times H$ se tiene la aplicación $h|_H : H \times H \to H$ dada por $h|_H(x, y) = x \cdot y^{-1}$ que está bien definida porque al ser H subgrupo $x \cdot y^{-1} \in H$ para todo $x, y \in H$ y además es continua porque la restricción de una aplicación continua a un subconjunto es continua. Por lo tanto, H es un grupo topológico. □

Proposición C.0.8. Sean X un grupo topológico, Y un espacio topológico y $\phi : X \to Y$ una aplicación entre ambos. Entonces, si ϕ es un homeomorfismo y un isomorfismo de grupos entonces Y es un grupo topológico.

Demostración. Sean las aplicaciones $h_X : X \times X \to X$ tal que $h_X(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^{-1}$ y $h_Y : Y \times Y \to Y$ tal que $h_Y(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2^{-1}$. Se ve que dado que ϕ es biyectiva para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $\phi(x) = y$. Se tiene entonces que $h_Y(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2^{-1} = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2)^{-1}$ aplicando ahora que ϕ es un homomorfismo de grupos, se tiene que $\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)^{-1} = \phi(x_1 \cdot x_2^{-1}) = \phi(h_X(x_1, x_2)) = \phi(h_X(\phi^{-1}(y_1), \phi^{-1}(y_2)))$. Entonces, como h_X es continua por ser X grupo topológico y ϕ y su inversa son continuas por ser homeomorfismos, se tiene que h_Y es continua, es decir, Y es un grupo topológico. □