Universidad de Cantabria

Facultad
de
Ciencias

# Compactificación de espacios topológicos.

(Compactification of topological spaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autora: Ester Espeso Queipo

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2025

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Nuria Corral, mi directora, por haberme ayudado y apoyado a lo largo de la realización de este trabajo. Pero también por abrirme las puertas al maravilloso mundo de la Topología, que tanto me ha apasionado en estos años.

A mis padres, que han sido siempre mi mayor apoyo y han hecho posible que yo haya llegado hasta aquí, muchas gracias.

También quiero agradecer a todas las amigas y amigos que he hecho en la universidad, que han sido sin duda el mejor regalo que me ha dado la carrera. Gracias por haber hecho de estos cuatro años una experiencia maravillosa a vuestro lado.

Y por último, muchas gracias a todos los profesores, tanto de mi etapa universitaria como en el instituto, que me han inspirado y transmitido su pasión por las matemáticas.

## Resumen

En este trabajo se estudiarán las compactificaciones de espacios topológicos. Una compactificación de un espacio topológico $X$ es un par ordenado $(K, h)$ donde $K$ es un espacio Hausdorff compacto y $h$ es un embebimento de $X$ en $K$ con $h(X)$ denso en $K$.

Para llevar a cabo este estudio, se introducirán primero nociones, resultados y ejemplos sobre axiomas de separación, en especial aquellas relativas a los espacios Hausdorff y Tychonoff, y sobre la compacidad local, ya que estos conceptos nos proporcionarán propiedades indispensables para la construcción de las compactificaciones. Posteriormente, definiremos las compactificaciones, daremos algunos ejemplos y definiremos un orden sobre el conjunto de las compactificaciones de un espacio topológico $X$. A continuación, estudiaremos en más detalle tres tipos de compactificaciones: la compactificación por un punto o compactificación de Alexandorff, que veremos que es la compactificación minimal considerando el orden dado para las compactificaciones. La compactificación de Stone-Čech, que probaremos que es la compactificación maximal. Y por último, la compatificación por $n$ puntos, que se puede considerar como una generalización de la de Alexandroff.



**Palabras clave:** compactificaciones, compacidad, embebimiento, Hausdorff, Tychonoff, localmente compacto, compactificación de Alexandroff, compactificación de Stone-Čech y compactifiación por $n$ puntos.



## Abstract

In this project we will study compactifications of topological spaces. A compactification of a topological space $X$ is an ordered pair $(K, h)$ where $K$ is a compact Hausdorff space and $h$ is an embedding of $X$ in $K$ with $h(X)$ dense in $K$.

In order to carry out this study, we will first introduce notions, results and examples on separation axioms, in particular those concerning the Hausdorff and Tychonoff spaces, and on local compactness, since all this concepts will provide indispensable properties for the construction of compactifications. We will then define compactifications, give some examples and define an order on the collection of compactifications of a topological space $X$. Afterwards, we will study in more detail three types of compactifications: the one-point compactification or Alexandorff compactification, which we will see that it is the minimal compactification according to the order given for the compactifications. The Stone-Čech compactification, which we will prove to be the maximal compactification. And lastly, the $n$-point compactification, which can be considered to be a generalisation of the Alexandroff compactification.



**Key words:** compactifications, compactness, embedding, Hasudorff, Tychonoff, local compactness, Alexandroff compactification, Stone-Čech compactification and $n$-points compactification.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

La finalidad de este trabajo es el estudio de las compactificaciones de espacios topológicos. Esta construcción nos permite embeber un espacio que no es compacto en otros que sí lo son, manteniendo su estructura topológica. Este proceso es de gran utilidad, ya que en numerosas ocasiones permite aplicar propiedades de los espacios topológicos compactos a espacios topológicos que no lo son.

En 1913, Carathéodory consideró formalmente por primera vez el problema de extender un espacio topológico, en su obra *Über die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete*. Posteriormente, aparecieron los primeros trabajos realizados sobre compactificaciones, por Tiezte, en *Beitrage zur allgemeinen Topologie, II*, por Alexandroff en *Uber die Metrisation der mi Kleinen kompakten topologischen Räume* y por Alexandroff y Uryshon, quienes introdujeron la compactificación por un punto en *Zur theorie der topologischen Räume*. Más adelante, Tychonoff demostró que todo espacio Tychonoff podía ser embebido en un espacio Hausdorff compacto en *Über die topologische Erweiterung von Räumen*. Más tarde, Čech en *On Bicompact Spaces* y M. H. Stone en *Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology*, probaron la maximalidad de la compactificación contruida por Tychonoff y le dieron nombre a la misma.

Con el objetivo de presentar este trabajo de la manera más clara y organizada posible, se ha seguido la siguiente estructura:

En el *Capítulo* 2 se introducen los conceptos básicos necesarios para la realización del trabajo. Este está dividido en tres secciones: teoría de conjuntos, topología general y la topología débil y la topología producto. En la primera sección de teoría de conjuntos, intoduciremos el espacio producto y daremos un resultado sobre el producto no vacío de conjuntos.

En la segunda sección de este primer capítulo, introduciremos los conceptos de topología general que se usarán a lo largo de todo el trabajo. Hablaremos sobre las topologías, las diferentes formas de definirlas y algunas de sus propiedades. A continuación, abordaremos nociones básicas como el interior y la adherencia de un conjunto, así como algunas ideas sobre aplicaciones continuas. También introduciremos la compacidad y, por último, trataremos ciertos aspectos relacionados con la topología cociente. Incluiremos además algunos ejemplos ilustrativos que resultarán útiles más adelante, especialmente al tratar el tema de las compactificaciones.

Por último, tenemos la tercera sección, en esta parte se estudiarán dos tipos importantes de topologías: la débil y la producto. Esta última será la que tomaremos como topología usual en los espacios producto. También introduciremos el concepto de separar puntos de conjuntos cerrados, junto con algunos resultados que serán de utilidad más adelante en el estudio de los espacios producto y los espacios de Tychonoff.

El *Capítulo* 3 versa sobre axiomas de separación y compacidad local. Ambos conceptos son de vital importancia para poder introducir las compactificaciones, ya que para llevar a cabo estas construcciones los espacios topológicos deberan cumplir una serie de propiedades. En la primera sección, intoduciremos los axiomas de separación $T_1$, $T_2$ o Hausdorff, regular, $T_3$, completamente regular, Tychonoff, normal y $T_4$. Estudiaremos sus principales propiedades, haciendo hincapié en los espacios Hausdorff y Tychonoff. También analizaremos algunos ejemplos relevantes, que nos permitiran profundizar y comprender mejor estas definiciones.

En la segunda sección de este tercer capítulo, hablamos sobre la compacidad local. En primer lugar fijaremos la definición que se va a usar a lo largo del trabajo y daremos un resultado que prueba que en espacios Hausdorff existen varias definiciones equivalentes. A continuación, se exponen varios ejemplos y se dan ciertas propiedades sobre los espacios localmente compactos.

Por último, en el *Capítulo* 4 introduciremos las compactificaciones. Comenzaremos dando algunas definiciones y resultados más genéricos y posteriormente definiremos tres tipos especiales de compactificaciones. En la primera sección de dicho capítulo, introduciremos la compactificación minimal, que es la compactificación por un punto, o también llamada de Alexandroff y analizaremos bajo que hipótesis un espacio admite una compactificación por un punto. Además, nos servirá como base para comprender mejor las compactificaciones por $n$ puntos que veremos más adelante.

En la segunda sección de este capítulo, trataremos la compactificación de Stone-Čech. Esta compactificación puede verse como la compactificación maximal de un espacio topológico. Analizaremos su construcción y daremos algunas propiedades, entre las cuales destaca la relativa a la extensión de funciones continuas, que veremos que caracteriza a este tipo de compactificaciones.

Por último, dedicaremos una sección al estudio de las compactificaciones por $n$ puntos, que podemos ver como una generalización de la compactificación de Alexandroff. Daremos una definición formal para estas compactificaciones y veremos su construcción junto con algunas de sus propiedades.

# Capítulo 2

# Preliminares

En esta sección se introducirán los conceptos básicos, notaciones, resultados y ejemplos que se utilizarán a lo largo del trabajo. La mayoría de ellos, junto con sus demostraciones, pueden encontarse en [8], [1], [6] y/o [9].

## 2.1. Teoría de conjuntos

A lo largo de este trabajo se va a utilizar en numerosas ocasiones el producto de espacios topológicos. Por este motivo, vamos a comenzar probando que el producto de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío. Para hacer esta prueba recordaremos algunas nociones de teoría de conjuntos que se pueden encontrar en [8].

**Definición 2.1.1.** Una relación $\preceq$ sobre un conjunto $S$ se llama *orden* si se verifican las siguientes condiciones para $x, y, z \in S$.

1. Si $x \preceq x$ para todo $x \in S$.
2. Si $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.
3. Si $x \preceq y$ e $y \preceq x$, entonces $x = y$.

Un conjunto $S$ con un orden $\preceq$ se dice que está *ordenado* y en caso de que para dos elementos $x, y \in S$ se tiene que $x \preceq y$ o $y \preceq x$, entonces se dice que $S$ está *totalmente ordenado.*

**Definición 2.1.2.** Sea $S$ un conjuto ordenado, podemos definir los siguientes elementos.

- Un elemento $x \in S$ se denomina *cota superior* para $T \subseteq S$ si $y \preceq x$ para todo $y \in T$.
- Un elemento $x \in S$ se denomina *maximal* si no existe ningún $y \in S$ con $x \neq y$ tal que $x \preceq y$.

A continuación, definimos el producto cartesiano de una familia de conjuntos.

**Definición 2.1.3.** Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Llamamos *producto cartesiano* de los conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$ al conjunto:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \ : \ x(i) \in X_i \text{ para cada } i \in I\}$$

Al valor $x(i)$ se le denota $x_i$ o $[x]_i$ y se llama *coordenada i-ésima* de $x$. La aplicación $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ definida por $\pi_j(x) = x_j$ se le denomina *proyección j-ésima* de $\prod_{i\in I} X_i$ sobre $X_j$.

Ahora enunciamos el lema de Zorn, que será necesario para demostrar el *Teorema* 2.1.5 que demuestra que el producto de conjuntos no vacíos es no vacío. Este resultado lo utilizaremos más adelante, en la *Sección* 3.1, para encunciar algunas propiedades de los espacios producto de espacios $T_1$ o espacios Tychonoff.

**Axioma 2.1.4.** ***Lema de Zorn.*** *Sea $S$ un conjunto ordenado no vacío, con la propiedad de que cada subconjunto no vacío totalmente ordenado tiene una cota superior. Entonces $S$ tiene un elemento maximal.*

Asumiendo este axioma, se puede probar el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.5.** *Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Entonces $\prod_{i\in I} S_i$ es no vacío.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{P}$ la familia de todos los pares $(J_f, f)$, donde $\emptyset \neq J_f \subseteq I$ y $f : J_f \to \bigcup_{j\in J_f} S_j$ con $f(j) \in S_j$ para todo $j \in J_f$. Observamos que $\mathcal{P}$ es no vacío: fijando $i \in I$, sea $x \in S_i$, podemos definir $f : \{i\} \to S_i$ como $f(i) = x$ y por lo tanto, $(\{i\}, f) \in \mathcal{P}$.

Ahora definimos un orden en $\mathcal{P}$. Dados dos pares $(J_f, f), (J_g, g) \in \mathcal{P}$, se tiene que:

$$(J_f, f) \preceq (J_g, g) \quad \Longleftrightarrow \quad J_f \subseteq J_g \ \text{ y } \ g|_{J_f} = f.$$

Sea $\mathcal{Q}$ un subconjunto no vacío totalmente ordenado de $\mathcal{P}$. Consideramos el conjunto:

$$J_g := \bigcup_{(J_f,f)\in\mathcal{Q}} J_f$$

y definimos la aplicación $g : J_g \to \bigcup_{j\in J_g} S_j$ de la siguiente manera: para cada $j \in J_g$, existe un $(J_f, f) \in \mathcal{Q}$ tal que $j \in J_f$ y entonces fijamos $g(j) = f(j)$. Como $\mathcal{Q}$ esta totalmente ordenado, se puede ver que $g$ está bien definida, ya que el valor de $g(j)$ no depende de la elección del par $(J_f, f) \in \mathcal{Q}$ con $j \in J_f$. Notemos que $(J_g, g) \in \mathcal{P}$ es una cota superior de $\mathcal{Q}$ para la relación $\preceq$.

Por el *Lema de Zorn* 2.1.4, $\mathcal{P}$ tiene un elemento maximal $(J_{max}, f_{max})$. Supongamos que $J_{max} \neq I$, es decir, existe un $i_0 \in I$ tal que $i_0 \in I \setminus J_{max}$. Fijamos un $x_0 \in S_{i_0}$ y definimos $\tilde{f} : J_{max} \cup \{i_0\} \to (\bigcup_{j\in J_{max}} S_j) \cup S_{i_0}$ como:

$$\tilde{f}(j) = \begin{cases} f_{max}(j), & j \in J_{max} \\ x_0, & j = j_0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $(J_{max} \cup \{i_0\}, \tilde{f}) \in \mathcal{P}$ con $(J_{max}, f_{max}) \preceq (J_{max} \cup \{i_0\}, \tilde{f})$, pero $(J_{max}, f_{max}) \neq (J_{max} \cup \{i_0\}, \tilde{f})$, lo que contradice que $(J_{max}, f_{max})$ sea maximal. Por lo tanto, $J_{max} = I$ y $f_{max} \in \prod_{i\in I} S_i$. $\square$

## 2.2. Topología general

En esta sección introduciremos las nociones de topología general que necesitaremos a lo largo del trabajo. Hablaremos sobre las topologías y las diferentes formas de definirlas, describiremos conceptos como el interior y la adherencia de un conjunto, introduciremos algunas nociones sobre aplicaciones y continuidad, definiremos la compacidad y por último explicaremos algunos conceptos relativos a la topología cociente. Además, daremos algunos ejemplos que nos serán de utilidad cuando introduzcamos las compactificaciones.

**Definición 2.2.1.** Un *espacio métrico* es un par $(M, \rho)$ donde $M$ es un conjunto y $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ es una aplicación tal que para $x, y, z \in M$, satisface:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (desigualdad triangular)

A $\rho$ se le denomina *distancia*. Dados $x \in M$ y $\varepsilon > 0$, llamaremos *bola de radio $\varepsilon$ centrada en $x$* al conjunto $B(x; \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$.

**Definición 2.2.2.** Un *espacio topológico* es un par $(X, \tau)$ donde $X$ es un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos que verifica:

- $\emptyset$ y $X$ están en $\tau$.
- La unión de los elementos de cualquier familia de $\tau$ está en $\tau$.
- La intersección de los elementos de cualquier familia finita de $\tau$ está en $\tau$.

A $\tau$ se le denomina *topología* sobre $X$ y a sus elementos se les llama *conjuntos abiertos*. Decimos que un subconjunto $F$ de $X$ es *cerrado* si existe un $U$ abierto de $X$ con $F = X \setminus U$. Un subconjunto $V$ de $X$ se dice que es un *entorno de $x$* si existe un $U$ abierto de $X$ con $x \in U \subseteq V$.

**Ejemplo 2.2.3.** Sea X un conjunto no vacío. Veamos dos ejemplos sencillos de topologías definidas en $X$:

1. *La topología trivial* es la topología cuyos únicos abiertos son el total y el conjunto vacío $\tau_{trivial} := \{\emptyset, X\}$.
2. *La topología discreta* es la topología en la cual todos los subconjuntos de $X$ son conjuntos abiertos $\tau_{discreta} := \mathcal{P}(X)$

**Definición 2.2.4.** Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. La colección $\tau_A = \{A \cap U : U \text{ es abierto en } X\}$ es una topología sobre $A$ y se le denomina la *topología de subespacio*. Con esta topología se dice que $(A, \tau_A)$ es un subespacio de $(X, \tau_X)$.

Como hemos visto en el ejemplo, sobre un mismo conjunto se pueden definir diferentes topologías y en algunas ocasiones podemos compararlas de la siguiente manera.

**Definición 2.2.5.** Sean $\tau_1$ y $\tau_2$ dos topologías sobre el conjunto $X$. Decimos que $\tau_1$ es *más fina* que $\tau_2$ si se tiene que $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Observamos que en general dos topologías sobre un mismo conjunto pueden ser no comparables con esta relación.

Las topologías se pueden definir de diferentes maneras, como por ejemplo, a través de bases o subbases.

**Definición 2.2.6.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una *base para la topología $\tau$ o base para $X$* es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que todo abierto de $\tau$ puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$. A los elementos de $\mathcal{B}$ se les denomina *elementos básicos.*

El siguiente resultado caracteriza cuando a partir de una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ se puede obtener una topología en $X$ para la cual $\mathcal{B}$ es base.

**Teorema 2.2.7.** *Sea $X$ un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se tiene que $\mathcal{B}$ es una base para una topología en $X$ si, y solo si:*

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,
2. *si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

**Ejemplo 2.2.8.** Veamos algunos ejemplos de topologías definidas a partir de una base:

1. **Topología usual en $\mathbb{R}$.** Llamamos *topología usual $\tau_u$ en $\mathbb{R}$* a la generada por la base

$$\mathcal{B}_u = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\}.$$

   En general, en $\mathbb{R}$ y en sus subconjuntos consideramos esta topología a no ser que se indique lo contrario.

2. **Topología sobre espacios métricos.** Sea $(M, \rho)$ un espacio métrico. El conjunto de todas las bolas $B_\rho(x; \epsilon)$ para $x \in X$ y $\epsilon > 0$ es base para una topología sobre $M$. A esta topología se le denomina *topología métrica inducida por $\rho$.*

3. **Topología del orden.** Sean X un conjunto y $\leq$ una relación de orden total en $X$. Dados $a, b \in X$ con $a < b$ podemos definir los subconjuntos:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in X : a < x < b\} \\
(a, b] &= \{x \in X : a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in X : a \leq x < b\} \\
[a, b] &= \{x \in X : a \leq x \leq b\}
\end{aligned}$$

a los que se les denomina *abiertos, semi-abiertos por la izquierda, semi-abiertos por la derecha y cerrados.* Con estos subconjuntos podemos construir una base $\mathcal{B}$ para una topología sobre $X$ de la siguiente manera. La familia $\mathcal{B}$ está formada por:

- Todos los conjuntos de la forma $(a, b)$.
- Si existe un elemento mínimo $a_0$, todos los conjuntos de la forma $[a_0, b)$.
- Si existe un elemento máximo $b_0$, todos los elementos de la forma $(a, b_0]$.

A la topología $\tau$ sobre $X$ generada por la base anterior se le denomina topología del orden.

Observamos que la topología usual en $\mathbb{R}$ coincide con la topología del orden para el orden habitual en $\mathbb{R}$.

4. **Recta real extendida.** La recta real extendida es el conjunto

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

de todos los números reales y dos puntos $-\infty, +\infty$ que no pertenecen a $\mathbb{R}$. Podemos extender el orden usual de $\mathbb{R}$ a un orden en $\mathbb{R}^*$ fijando las relaciones:

$$-\infty < +\infty$$

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Con esto, podemos definir la topología $\tau^*$ sobre $\mathbb{R}^*$ como la topología del orden para este orden dado. Este ejemplo aparecerá en el *Capítulo* 4 cuando estudiemos la compactificación por un punto de la recta real extendida (ver *Ejemplo* 4.0.2).

**Definición 2.2.9.** Una *subbase* $\mathcal{S}$ para una topología sobre $X$ es una colección de subconjuntos de $X$ cuya unión es igual a $X$. La *topología generada por la subbase* $\mathcal{S}$ es la colección $\tau$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

**Ejemplo 2.2.10.** La colección $\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (b, \infty) : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ forma una subbase para $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Por último, en algunos casos, se pueden definir las topologías describiendo como son los entornos abiertos de cada punto.

**Definición 2.2.11.** Sea $X$ un espacio topológico y $x \in X$. Llamamos *sistema de entornos* de $x$ al conjunto $\mathscr{U}_x$ de todos los entornos abiertos de $x$.

**Teorema 2.2.12.** *Sea $\mathscr{U}_x$ un sistema de entornos de $x$ en un espacio topológico $X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si $U \in \mathscr{U}_X$, entonces $x \in U$.*

2. *Si $U, V \in \mathscr{U}_x$, entonces $U \cap V \in \mathscr{U}_x$.*

3. *Si $U \in \mathscr{U}_x$, entonces existe un $V \in \mathscr{U}_x$ tal que $U \in \mathscr{U}_y$ para todo $y \in V$.*

4. *Si* $U \in \mathscr{U}_x$ *y* $U \subset V$*, entonces* $V \in \mathscr{U}_x$*.*

5. $G \subseteq X$ *es abierto si y solo si,* $G$ *contine un entorno de cada uno de sus puntos.*

*Recíprocamente, si en un conjunto* $X$ *damos un conjunto* $\mathscr{U}_x$ *para cada* $x \in X$ *cumpliendo las afirmaciones 1. a 4. y definiendo los abiertos con 5., obtenemos una topología en* $X$ *cuyos sistemas de entornos para cada* $x \in X$ *son los conjuntos* $\mathscr{U}_x$*.*

Ahora veremos como dado un conjunto de un espacio topológico podemos definir diferentes conjuntos asociados a él.

**Definición 2.2.13.** Sea $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Llamamos *clausura* de $A$ en $X$ a la intersección de todos los conjuntos cerrados en $X$ que contienen a $A$.

$$Cl_X(A) = Cl(A) = \bar{A} = \bigcap_{K \text{ es cerrado, } A \subseteq K} K$$

Llamamos *interior* de $A$ en $X$ a la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en $A$:

$$Int_X(A) = Int(A) = \bigcup_{G \text{ es abierto, } G \subseteq A} G$$

Notemos que la clausura de un conjunto $A$ es el menor cerrado que lo contiene y su interior es el mayor abierto contenido en $A$.

*Observación* 2.2.14. Si $Y$ es un subespacio de un espacio topológico $X$, y $A \subseteq Y$, se tiene que

$$Cl_Y(A) = Cl_X(A) \cap Y.$$

**Definición 2.2.15.** Un subconjunto $A$ de un espacio $X$ se dice que es *denso* en $X$ si $Cl(A) = X$.

**Definición 2.2.16.** Sean $A$ un subconjunto de un espacio topológico $X$ y $x$ un punto de $X$. Se dice que $x$ es un *punto límite o de acumulación* de A si cada entorno de $x$ interseca a $A$ en un punto distinto al propio $x$.

Si detonatamos al conjunto de todos los puntos de acumulación de $A$ como $A'$, se verifica que $Cl(A) = \overline{A} = A \cup A'$, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.17. La recta real es un subconjunto denso de la recta real extendida.** Tenemos que $\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^*$ y es sencillo ver que $\{-\infty, +\infty\}$ son puntos de acumulación, ya que sus entornos abiertos son de la forma $[-\infty, a)$ y $(b, +\infty]$, respectivamente, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Y se tiene que $[-\infty, a) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ y $(b, +\infty] \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $Cl_{\mathbb{R}^*}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$, por lo que $\mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}^*$.

A continuación introducimos varias definiciones relativas a aplicaciones, la continuidad, las aplicaciones abiertas, los homeomorfismos y los embebimientos, que serán de gran importancia a lo largo de todo el trabajo.

**Definición 2.2.18.** Sean $(X, \tau_X)$ e $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Se dice que $f$ es una *aplicación continua* si para cada abierto $U \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$.

**Proposición 2.2.19.** *Sean $(X, \tau_X)$ e $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $A$ un subconjunto de $X$. Entonces $f(Cl_X(A)) \subseteq Cl_Y(f(A))$.*

Si tenemos una aplicación $f : X \to Y$ y una base $\mathcal{B}$ para la topología en el espacio $Y$, entonces para ver la continuidad de $f$ basta con comprobar que para cada $B \in \mathcal{B}$, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en $X$, ya que cualquier conjunto abierto $V$ de $Y$ se puede escribir como unión de abiertos de $\mathcal{B}$:

$$V = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$ para todo $\alpha \in A$. Entonces,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha)$$

luego si $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in A$, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto.

Si la topología en $Y$ está dada por una subbase, para comprobar la continuidad de $f : X \to Y$ basta con ver que la imagen inversa de cada elemento de la subbase es abierta, ya que un elemento básico $B$ de $Y$ se puede escribir como $B = S_1 \cap \cdots \cap S_n$, donde $S_i$ es un elemento de la subbase para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_n)$$

de donde observamos que si la imagen inversa de los elementos de la subbase es abierta, entonces la imagen inversa de cada elemento básico es abierta.

**Ejemplo 2.2.20.** Algunos ejemplos de aplicaciones continuas son los siguientes:

1. Las aplicaciones constantes son continuas.
2. Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subespacio de $X$. La aplicación inclusión $i_A : A \to X$ es continua.
3. Sean $X$ e $Y$ un espacios topológicos, $A$ un subespacio de $X$ y $f : X \to Y$ una aplicación continua. La restricción $f|_A : A \to Y$ es continua.

**Definición 2.2.21.** Sean $(X, \tau_X)$ e $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación, se dice que $f$ es *abierta* si para cada abierto $U$ de $X$ se tiene que $f(U)$ es abierto en $Y$.

**Definición 2.2.22.** Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y $f$ una aplicación de $X$ en $Y$. Se dice que $f$ es un *homeomorfismo* si $f$ es biyectiva, continua y $f^{-1}$ también es continua. En este caso, se dice que $X$ e $Y$ son *homeomorfos*. Si $f$ es continua, inyectiva y se tiene que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, se dice que $f$ es un *embebimiento* de $X$ en $Y$ y se dice que $X$ *está embebido* en $Y$ por $f$.

A continuación introducimos el concepto de la compacidad, que será fundamental a lo largo de todo el trabajo.

**Definición 2.2.23.** Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio $X$ se denomina *recubrimiento* de $X$ si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ es $X$. Si además los elementos de $A$ son conjuntos abiertos, se dice que $\mathcal{A}$ es un *recubrimento abierto* de $X$.

**Definición 2.2.24.** Un espacio $X$ es *compacto* si para todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de $X$ existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que también es recubrimento abierto de $X$.

Dado $A \subset X$, se dice que $A$ es un subespacio compacto de $X$ si $(A, \tau_A)$ es compacto, donde $\tau_A$ es la topología de subespacio. Esto es equivalente a que para cada familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos en $X$ con $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ se verifica que existen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ tales que $A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

El siguiente resultado describe algunas propiedades de los espacios compactos.

**Lema 2.2.25.** *Se verifican las siguientes propiedades de los espacios compactos:*

1. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

2. *Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos, $X$ compacto y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces $f(X)$ es compacto.*

**Ejemplo 2.2.26.** A continuación veremos algunos ejemplos de espacios y subespacios compactos.

1. Los conjuntos compactos en $\mathbb{R}$ se pueden caracterizar de la siguiente manera. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto, si y solo si $A$ es cerrado y acotado.

2. **La recta real extendida es un espacio compacto.** Consideremos la función continua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^*$, donde
$$f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \cot(\pi x) & \text{si } x \in (0,1) \\ -\infty & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
Como $f$ es continua, por el *Lema* 2.2.25, $f([0,1]) = \mathbb{R}^*$ es compacto.

Otros conceptos que nos serán de gran utilidad son el de aplicación, topología y espacio cociente.

**Definición 2.2.27.** Sea $X$ un espacio topológico, $Y$ un conjunto y $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Llamamos *topología cociente* en $Y$ inducida por $p$ a $\tau_p = \{U \subseteq Y : p^{-1}(U)$ es abierto en $X\}$.

**Definición 2.2.28.** Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos y $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. Decimos que la aplicación $p$ es una *aplicación cociente* si la topología en $Y$ es la topología cociente inducida por $p$.

Una situación particular en la que es muy frecuente encontrar la topología cociente es el espacio cociente que definimos a continuación.

**Definición 2.2.29.** Sean $X$ un espacio topológico y $X^*$ una familia de subconjuntos disjuntos no vacíos de $X$ cuya unión es $X$. Sea $p : X \to X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva a cada punto de $X$ al elemento de $X^*$ que lo contiene. Con la topología cociente inducida por $p$, al espacio $X^*$ se le denomina *espacio cociente* de $X$.

Dado $X^*$, existe una relación de equivalencia en $X$ en la que los elementos de $X^*$ son las clases de equivalencia. De hecho, el espacio cociente $X^*$ se puede definir a partir de una relación de equivalencia $\sim$ como el conjunto $X/\sim$ con la topología $\tau_p = \{V \subseteq X/\sim : p^{-1}(V)$ es abierto en $X\}$.

**Ejemplo 2.2.30. Cociente por un conjunto cerrado.** Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto cerrado de $X$. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $X$ que identifica todos los puntos de $A$ entre ellos.

$$x \sim y \iff x \in A \text{ e } y \in A$$

Los puntos del conjunto cociente $X/\sim$ son los $\{x\}$ con $x \notin A$ y un representante $\{a\}$ de los elementos del conjunto $A$. En ocasiones a este conjunto también se denota como $X/A$ y se dice que se obtiene colapsando $A$ en un punto.

Sea

$$p : X \to X/\sim$$

la aplicación cociente. Entonces $p(X \setminus A) = (X/\sim) \setminus \{a\}$, es decir, $p$ envía a $(X \setminus A)$ al complementario de $\{a\}$ en el espacio cociente $X/\sim$. Luego $(X/\sim) \setminus \{a\}$ es abierto en $X/\sim$ por ser $p^{-1}((X/\sim)\setminus\{a\}) = p^{-1}(p(X\setminus A)) = X\setminus A$ abierto en $X$. Además, $p$ induce el homeomorfismo

$$X \setminus A \cong (X/\sim) \setminus \{a\}$$

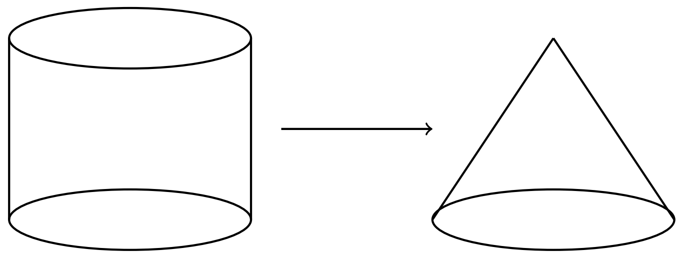
ya que $p$ es una aplicación continua, sobreyectiva y abierta cuya restricción a $X \setminus A$ es también inyectiva.

Un ejemplo típico del cociente por un conjunto cerrado es el cono $\Lambda(X)$ sobre $X$. Si $X$ es un espacio topológico, definimos el cono de la siguinete manera:

$$\Lambda(X) \cong (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$$

donde $X \times \{1\}$ es un conjunto cerrado sobre $X \times [0,1]$. De esta manera se identifican todos los puntos de la forma $(x,1)$ con $x \in X$.

Si tomamos $X = \mathbb{S}^1$, obtenemos:



## 2.3. La topología débil y la topología producto

En esta sección introduciremos las nociones de topología débil y topología producto. Esta segunda, será la topología usual que consideraremos en el espacio producto. Es importante definir esta topología de manera adecuada, ya que en el caso de los productos infinitos, la idea intuitiva de topología en el espacio producto que se podría tener, no tiene por qué cumplir ciertas propiedades fundamentales que necesitaremos que cumpla nuestro espacio producto. Además, definiremos el concepto de separar puntos de conjuntos cerrados y enunciaremos algunos resultados que serán clave más adelante para trabajar con espacios producto y espacios Tychonoff.

**Definición 2.3.1.** Sean $X$ un conjunto y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos con $f_\alpha : X \to X_\alpha$, para cada $\alpha \in A$. La *topología débil* inducida en $X$ por el conjunto de funciones $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ es la topología menos fina que hace a cada $f_\alpha$ continua.

Podemos ver que esta topología sobre $X$ es la generada por la subbase

$$\bigcup_{\alpha\in A} \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \ U_\alpha \text{ es abierto en } X_\alpha\}.$$

Un ejemplo sencillo de esta topología es la topología de subespacio. Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto de $X$ al que dotamos de la topología de subespacio definida por $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau_X\}$. Esta topología es la topología débil en $A$ inducida por la aplicación inclusión $i : A \hookrightarrow X$, ya que $i^{-1}(U) = U \cap A$. Más adelante veremos otro ejemplo de la topología débil cuando hablemos de la topología producto.

*Observación* 2.3.2. Notemos que si $\mathcal{S}_\alpha$ es una subbase para cada $X_\alpha$ con $\alpha \in A$, también podemos obtener una subbase de la topología débil en $X$ inducida por el conjunto de funciones $\{f_\alpha : X \to X_\alpha : \quad \alpha \in A\}$ si consideramos la familia

$$\bigcup_{\alpha\in A} \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \ U_\alpha \in \mathcal{S}_\alpha\}.$$

**Topología producto en el caso de dos espacios topológicos.** Sean $(X, \tau_X)$ e $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. La familia de conjuntos del producto $X \times Y$,

$$\mathcal{B} = \{U \times V : \ U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

es una base para una la topología del espacio producto $X \times Y$. A esta topología se le denomina topología producto en $X \times Y$.

Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, consideramos el conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ que hemos intoducido en la *Definición* 2.1.3. Recordemos que la coordenada $i$-ésima la denotamos como $x_i$ o $[x]_i$ y que la proyección $j$-ésima es la aplicación $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ definida por $\pi_j(x) = x_j$.

Viendo como hemos definido la topología producto en el caso de dos espacios topológicos, podríamos considerar el conjunto

$$\mathcal{B} = \{\prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i\}$$

como base para una topología en el producto $\prod_{i \in I} X_i$ donde $(X_i, \tau_i)$ son espacios topológicos para todo $i \in I$. A esta topología se le denomina *topología por cajas*, pero generalmente no se suele utilizar, ya que existen resultados que se cumplen para productos finitos que no se cumplen en productos arbitrarios, como veremos a continuación.

**Ejemplo 2.3.3.** Sea $\mathbb{R}^\omega = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ donde $X_n = \mathbb{R}$ con la topología usual para todo $n \in \mathbb{N}$ y en $\mathbb{R}^\omega$ consideremos la topología por cajas. Definimos la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ donde $[f(x)]_n = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que la aplicación $\pi_n \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la identidad para todo $n \in \mathbb{N}$, luego es continua. Sin embargo, la aplicación $f$ no es continua, ya que si tomamos el abierto $B = (-1, 1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \times \cdots$, tenemos que $f^{-1}(B) = \{0\}$, que no es abierto.

Para solucionar el problema que esta topología puede suponer, tomaremos como la topología usual en el espacio producto a la topología Tychonoff o topología producto.

**Definición 2.3.4.** Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. La *topología Tychonoff o topología producto* en el espacio producto $\prod_{i \in I} X_i$ es la topología que tiene como subbase a la colección:

$$\bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ abierto en } X_i\}$$

Luego los elementos de la base pueden escibirse de la siguente manera:

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

con $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ un subconjunto finito del conjunto de índices $I$ y cada $U_{i_l}$ es un abierto de $X_{i_l}$ para todo $l \in \{1, 2, ..., n\}$.

Esta topología coincide con la topología por cajas en el caso de los productos finitos. Además, la topología producto se puede ver como la topología débil inducida en $\prod_{i \in I} X_i$ por el conjunto de las proyecciones $\{\pi_i\}_{i \in I}$ donde $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ para todo $i \in I$.

Para la topología producto se tiene el siguiente resultado sobre las aplicaciones continuas con imagen en un espacio producto.

**Teorema 2.3.5.** *Sea* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos. Consideramos* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *con la topología producto y una aplicación* $f : Z \to X$*. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *La aplicación* $f$ *es continua si, y solo si,* $f_i = \pi_i \circ f$ *es coninua para todo* $i \in I$*.*
2. *La topología producto es la única topología en* $X$ *que verifica la afirmación anterior para toda aplicación* $f$*.*

*Demostración.* Veamos las dos afirmaciones.

1. Suponemos que $f$ es continua. Entonces $\pi_i \circ f$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas.
   Recíprocamente, suponemos que $f_i = \pi_i \circ f$ es continua para todo $i \in I$ y queremos ver que $f$ es contina. Los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$ con $U_i$ abierto en $X_i$ forman una subbase para la topología producto en $X$. Además, tenemos que $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i)$, luego por la continuidad de $\pi_i \circ f$, las contraimagenes por $f$ de los conjuntos que forman la subbase son abiertas y por lo tanto $f$ es continua.

2. Suponemos que existe otra topología $\tau$ en $X$ que cumple la afirmación 1. Denotemos la topología producto como $\tau_{prod}$ y veamos que $\tau = \tau_{prod}$.

   Si consideramos la aplicación $Id_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es continua, luego $\pi_i \circ Id_X : X \to X_i$ es también continua para todo $i \in I$. En particular, obtenemos que los conjuntos $\{\pi_i^{-1}(U_i) : \ U_i \text{ abierto en } X_i\}$ son abiertos de $\tau$. Como consecuencia $\tau_{prod} \subseteq \tau$.

   Por otro lado, si consideramos ahora la aplicación $Id_X : (X, \tau_{prod}) \to (X, \tau)$, tenemos que $\pi_i \circ Id_X : (X, \tau_{prod}) \to X_i$ coincide con la aplicación $\pi_i : (X, \tau_{prod}) \to X_i$ y por lo tanto es continua. Como $\tau$ cumple la propiedad 1., entonces $Id_X : (X, \tau_{prod}) \to (X, \tau)$ es continua y esto implica $\tau \subseteq \tau_{prod}$.

□

Podemos enunciar un teorema similar al que acabamos de demostrar, pero para espacios con la topología débil inducida por una colección de aplicaciones.

**Teorema 2.3.6.** *Sean* $X$ *un espacio con la topología débil inducida por la colección* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ *donde* $f_\alpha : X \to X_\alpha$ *e* $Y$ *un espacio topológico. Entonces se tiene que la aplicación* $f : Y \to X$ *es continua si, y solo si,* $f_\alpha \circ f$ *es continua para cada* $\alpha \in A$*.*

La demostración de este resultado es análogo a la descrita en el *Teorema* 2.3.5.

**Definición 2.3.7.** Sean $X$ un conjunto y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos con $f_\alpha : X \to X_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Entonces, la *aplicación evaluación* $e : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ inducida por la colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ se define de la siguiente manera: para cada $x \in X$, $[e(x)]_\alpha = f_\alpha(x)$. Es decir, para cada $x \in X$, $e(x)$ es el elemento de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ cuya $\alpha$-ésima coordenada es $f_\alpha(x)$ para todo $\alpha \in A$.

Además, diremos que la colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ *separa puntos* si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe algún $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

**Teorema 2.3.8.** *Sean $X$ y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ espacios topológicos y $f_\alpha : X \to X_\alpha$ aplicaciones para todo $\alpha \in A$. Entonces la aplicación evaluación $e : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un embebimiento si, y solo si, $X$ tiene la topología débil inducida por las funciones $f_\alpha$ y la colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ separa puntos en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $e : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es un embebimiento, por lo tanto, $e : X \longrightarrow e(X)$ es un homeomorfismo. Tenemos la siguiente situación, donde $i : e(X) \hookrightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la aplicación inclusión.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[rrr, bend left, "f_\alpha"] & e(X) \arrow[r, "i"] & \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & X_\alpha \\
x \arrow[r, mapsto] & e(x) \arrow[r, mapsto] & e(x) \arrow[r, mapsto] & \pi_\alpha(e(x)) = f_\alpha(x)
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\bigcup_{\alpha \in A} \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \ U_\alpha \text{ es abierto en } X\},$$

es una base para la topología en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ y por lo tanto, como $e(X)$ tiene la topología de subespacio, tenemos que

$$\bigcup_{\alpha \in A} \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap e(X) : \ U_\alpha \text{ es abierto en } X\},$$

es una subbase para la topología de subespacio en $e(X)$. Observemos que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap e(X) = (\pi_\alpha \circ i)^{-1}(U_\alpha)$. Además, como $e : X \longrightarrow e(X)$ es un homeomorfismo se tiene que $U$ es abierto en $e(X)$ si y solo si, $e^{-1}(U)$ es abierto en $X$ y por lo tanto los elementos de la forma

$$e^{-1}[(\pi_\alpha \circ i)^{-1}(U_\alpha)] = (\pi_\alpha \circ i \circ e)^{-1}(U_\alpha) = f_\alpha(U_\alpha)$$

forman una subbase para la topología en $X$. Luego la topología en $X$ es la topología débil asociada a la familia $\{f_\alpha : \ \alpha \in A\}$.

Además, si $x \neq y$ en $X$, entonces $e(x) \neq e(y)$, es decir, existe un $\alpha \in A$ tal que $[e(x)]_\alpha \neq [e(y)]_\alpha$, o lo que es lo mismo, $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Por lo tanto, la colección $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ separa puntos en $X$.

Recíprocamente, supongamos que $X$ tiene la topología débil inducida por las funciones $f_\alpha$ y la colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ separa puntos en $X$. Entonces, para cada $\alpha \in A$, la aplicación

$\pi_\alpha \circ e = f_\alpha$ es continua y por el *Teorema* 2.3.5, la aplicación evaluación $e$ es contina. Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, como la colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ separa puntos en $X$, existe un $\alpha_0 \in A$ tal que $f_{\alpha_0}(x) \neq f_{\alpha_0}(y)$, es decir, $[e(x)]_{\alpha_0} \neq [e(y)]_{\alpha_0}$. Y por ello, la aplicación $e$ es inyectiva.

Por último, veamos que $e$ es una aplicación abierta, es decir, si $U$ es abierto en $X$, entonces $e(U)$ es abierto en $e(X)$. Como $e$ es inyectiva, se tiene que $e(f_{\alpha_1}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_{\alpha_k}^{-1}(V_k)) = e(f_{\alpha_1}^{-1}(V_1)) \cap \cdots \cap e(f_{\alpha_k}^{-1}(V_k))$, luego basta ver que $e(U)$ es abierto cuando $U$ es un elemento de la subbase de $X$. Por lo tanto, suponemos que $U$ es de la forma $f_\alpha^{-1}(V)$ con $\alpha \in A$ y $V$ un abierto en $X_\alpha$ y entonces,

$$U = f_\alpha^{-1}(V) = [(\pi_\alpha|_{e(X)} \circ e)]^{-1}(V) = e^{-1}[(\pi|_{e(X)})^{-1}(V)],$$

y con ello,

$$e(U) = (\pi|_{e(X)})^{-1}(V) = \pi_\alpha^{-1}(V) \cap e(X),$$

que es abierto en $e(X)$, ya que $\pi_\alpha^{-1}(V)$ es abierto en $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. □

También necesitamos introducir la noción de las funciones o conjuntos de funciones que separan puntos de conjuntos cerrados, ya que la utilizaremos en numerosas ocasiones a lo largo del trabajo.

**Definición 2.3.9.** Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de funciones continas de un espacio topológico $X$ a otro espacio topológico $X_\alpha$. Se dice que las funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *separan puntos de conjuntos cerrados* si para cualquier conjunto cerrado $B$ en $X$ y $x \notin B$, existe un $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(B)}$.

El siguiente resultado caracteriza la propiedad de que una familia de aplicaciones $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, separe puntos de cerrados en términos de la topología de $X$.

**Teorema 2.3.10.** *Una colección $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de aplicaciones continuas, de un espacio topológico $X$ a un otro espacio topológico $X_\alpha$, separa puntos de conjuntos cerrados en $X$ si, y solo si, $\{f_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A$ y $V$ es abierto en $X_\alpha\}$ forma una base para la topología en $X$.*

*Demostración.* Supongamos que $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ separa puntos de conjuntos cerrados en $X$. Tomamos un subconjunto abierto $U \subseteq X$ y $x \in U$. Ahora definimos $B := X \setminus U$ que es un conjunto cerrado en $X$, por lo tanto, existe un $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(B)}$. Luego $f_\alpha(x) \in X_\alpha \setminus \overline{f_\alpha(B)}$ y como $X_\alpha \setminus \overline{f_\alpha(B)}$ es abierto en $X_\alpha$, existe un conjunto abierto $V$ en $X_\alpha$ tal que $f_\alpha(x) \in V \subseteq X_\alpha \setminus \overline{f_\alpha(B)}$. Entonces,

$$x \in f_\alpha^{-1}(V) \subseteq f_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \overline{f_\alpha(B)}) = X \setminus f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)}) \subseteq X \setminus f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B)) \subseteq X \setminus B = U.$$

Por lo tanto, $\{f_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A$ y $V$ es abierto en $X_\alpha\}$ forma una base para la topología en $X$.

Recíprocamente, supongamos que $\{f_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A$ y $V$ es abierto en $X_\alpha\}$ forma una base para la topología en $X$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no separa puntos de cerrados, por lo tanto, existe un conjunto $B$ cerrado en $X$ con $x \notin B$ tal que

$$f_\alpha(x) \in \overline{f_\alpha(B)} \text{ para todo } \alpha \in A. \qquad (*)$$

Luego para todo $V$ abierto en $X_\alpha$ con $f_\alpha(x) \in V$, se tiene por (*) que $V \cap f_\alpha(B) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $z \in V$ tal que $z = f_\alpha(b)$ con $b \in B$, lo que implica que $b \in f_\alpha^{-1}(V) \cap B$. Luego $f_\alpha^{-1}(V) \not\subset X \setminus B$ para todo $V$ y todo $\alpha \in A$, lo que contradice que $\{f_\alpha^{-1}(V) : \alpha \in A$ y $V$ es abierto en $X_\alpha\}$ sea una base en $X$. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.11.** *Sea $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ una colección de aplicaciones continuas, de un espacio topológico $X$ a un otro espacio topológico $X_\alpha$, que separa puntos de conjuntos cerrados en $X$. Entonces la topología en $X$ es la topología débil inducida por las aplicaciones continuas $f_\alpha$.*

Cuando los conjunto unipuntuales sean cerrados en $X$, una colección de aplicaciones que separe puntos de conjuntos cerrados también separará puntos.

Por último, enunciaremos el teorema de Tychonoff que trata sobre el producto de espacios compactos. Este teorema será fundamental, ya que lo usaremos varias veces a lo largo del trabajo. Su prueba se puede encontrar en la sección 37 de [6] o en la sección 17 de [9].

**Teorema 2.3.12.** ***Teorema de Tychonoff.*** *Un producto no vacío de espacios topológicos es compacto si, y solo si, cada factor del producto es compacto.*

# Capítulo 3

# Axiomas de separación y compacidad local.

Más adelante, cuando hablemos de los distintos tipos de compactificaciones en el *Capítulo* 4, deberemos exigirles a nuestros espacios que cumplan una serie de propiedades. En particular, será fundamental intoducir nociones relativas a los axiomas de separación y a la compacidad local, para lo cual nos basaremos en las definiciones y resultados dados en [9] y [1] y utilizaremos algunos ejemplos mencionados en [3] y [7].

## 3.1. Axiomas de separación

A continuación, se introducirán algunos axiomas de separación, llamados así por estudiar la "separación"de ciertos conjuntos en $X$ y algunas de sus propiedades. La finalidad principal de esta sección es estudiar algunas características de los espacios Hausdorff y espacios Tychonoff que serán necesarias más adelante para estudiar las compactificaciones.

**Definición 3.1.1.** Un espacio topológico $X$ es un *espacio* $T_1$ si para cada par de puntos $x, y \in X$ distintos, existen entornos abiertos $U$ y $V$ de $x$ y de $y$, respectivamente, con $x \notin V$ y $y \notin U$.

Algunos resultados sobre espacios $T_1$ que nos serán de utilidad son los siguientes:

**Lema 3.1.2.** *Un espacio topológico $X$ es $T_1$ si y solo si los conjuntos unipuntuales son cerrados en $X$.*

Como consecuencia de este lema, del *Corolario* 2.3.11 y del *Teorema* 2.3.8, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 3.1.3.** *Si $X$ es un espacio $T_1$ y $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ es un conjunto de aplicaciones continuas de $X$ en $X_\alpha$ que separa puntos de conjuntos cerrados, entonces la aplicación evaluacion $e : X \to \prod X_\alpha$, inducida por la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, es un embebimiento.*

En el siguiente resultado se muestra que la propiedad de ser $T_1$ se comporta bien para subespacios y productos.

**Lema 3.1.4.** *Se verifican los siguientes propiedades:*

1. *Los subespacios de los espacios $T_1$ son también $T_1$.*

2. *El producto de espacios no vacíos es $T_1$ si y solo si cada espacio factor es $T_1$.*

*Demostración.* Vamos a probar las dos afirmaciones.

1. Sean $X$ un espacio $T_1$ y $A \subseteq X$. Dados $x, y \in A$ distintos, tenemos que $x, y \in X$, luego por ser $X$ espacio $T_1$ existen $U$ y $V$ entornos abiertos en $X$ de $x$ e $y$, respectivamente con $x \notin V$ e $y \notin U$. Por último, basta tomar los entornos abiertos $U \cap A$ y $V \cap A$ en $A$ de $x$ e $y$, respectivamente.

2. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y entonces el espacio producto $\prod_{i\in I} X_i$ es no vacío, como hemos visto en el *Teorema* 2.1.5. Suponemos que el espacio producto es $T_1$, podemos fijar un punto $x \in \prod_{i\in I} X_i$ con $x = (x_i)_{i\in I}$. Fijamos $i_0 \in I$ y podemos construir el subespacio $B_{i_0} = \{y \in \prod_{i\in I} X_i : \ y_k = x_k$ excepto si $k = i_0\}$. Este subespacio es homeomorfo a $X_{i_0}$, luego por el apartado anterior $X_{i_0}$ es $T_1$. Esto prueba que cada espacio $X_i$ es $T_1$.

   Recíprocamente, sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos $T_1$. Dados $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$ con $x \neq y$, entonces, para alguna coordenada $j$ se tiene $x_j \neq y_j$. Por lo tanto, tenemos entornos abiertos $U_j, V_j$ de $x$ e $y$, respectivamente, en $X_j$ con $y \notin U_j$ y $x \notin V_j$. Ahora tomamos $\pi_j^{-1}(U_j)$ que es un abierto en $\prod_{i\in I} X_i$ con $x \in \pi_j^{-1}(U_j)$ e $y \notin \pi_j^{-1}(U_j)$, de la misma manera, $\pi_j^{-1}(V_j)$ es abierto en $\prod_{i\in I} X_i$ con $y \in \pi_j^{-1}(V_j)$ y $x \notin \pi_j^{-1}(V_j)$. Luego tenemos que $\prod_{i\in I} X_i$ es $T_1$.

□

**Definición 3.1.5.** Un espacio topológico $X$ se dice que es un *espacio de Hausdorff o espacio* $T_2$ si para $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, existen abiertos disjuntos $U_1, U_2$ con $x_1 \in U_1, \ x_2 \in U_2$.

Con estas definiciones vemos de forma inmediata que todo espacio Hausdorff es un espacio $T_1$, pero el recíproco no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.6. Topología de los complementos finitos en un espacio numerable.** Sea $X$ un conjunto numerable al que dotamos de la topología de los complementos finitos o topología cofinita definida por $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{U : X \setminus U \text{ es finito }\}$. Vamos a ver que este espacio topológico es $T_1$ pero no es Hausdorff.

Veamos primero que es $T_1$. Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, tenemos que $U = X \setminus \{y\}$ es un entorno abierto de $x$ con $y \notin U$ y $V = X \setminus \{x\}$ es un entorno abierto de $y$ con $x \notin V$.

Y ahora veamos que no es Hausdorff. Dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, si tomamos dos entornos abiertos $U$ y $V$ de $x$ e $y$, respectivamente, ambos entornos deben tener un complementario finito y por lo tanto la intersección de ambos ha de ser distinta del vacío.

A continuación, se enuncian varios resultados y propiedades de los espacios Hausdorff que nos serán de gran utilidad más adelante.

**Lema 3.1.7.** *Cada subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

**Lema 3.1.8.** *Sean $X$ un espacio topológico compacto, $Y$ un espacio topológico Hausdorff y $h : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua y biyectiva. Entonces, $h$ es un homeomorfismo.*

**Lema 3.1.9.** *Si $Y$ es un subespacio compacto de un espacio Hausdorff $X$ y $x_0$ no está en $Y$, entonces existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ de $X$ conteniendo a $x_0$ y a $Y$ respectivamente.*

A continación hablaremos sobre la intersección de espacios compactos y en qué ocasiones la intersección de compactos es compacta, ya que esta propiedad la utilizaremos más adelante cuando introduzcamos la compactificación de Alexandroff.

**Lema 3.1.10.** *Sean $X$ un espacio Hausdorff y $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios compactos de $X$, entonces la intersección $\bigcap_{i\in I} K_i$ es compacta.*

*Demostración.* Sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios compactos en $X$, y por el *Lema* 3.1.7, $K_i$ es cerrado para todo $i \in I$. Por lo tanto,

$$K = \bigcap_{i\in I} K_i,$$

es cerrado. Como $K \subseteq K_i$ es un cerrado contenido en un compacto, por el *Lema* 2.2.25, $K$ es compacto. □

Ahora veremos como la condición de que el espacio $X$ sea Hausdorff es necesaria para que se de esta propiedad sobre la intersección de compactos, incluso si se trata de la intersección de dos conjuntos.

**Ejemplo 3.1.11.** [3] Consideremos el espacio $X = (\mathbb{R} \times Y, \tau_u \times \tau_{discreta})$ donde $Y = \{a, b\}$ y observamos que $X$ no es Hausdorff. Tomamos los conjuntos:

$$A = [0, 1) \times \{a\} \cup [1, 2] \times \{b\} \text{ y } B = [0, 1] \times \{a\} \cup (1, 2] \times \{b\},$$

veamos que son compactos en $X$. En primer lugar, veamos que si $U$ es un abierto no vacío en $X$, como $Y$ tiene la topología discreta, $U$ es de la forma $V \times Y$ con $V \in \tau_u$. Como $U$ es un abierto en $X$ con la topología producto, tenemos que $U = V \times W$ donde $V \in \tau_u$ y $W \in \tau_{discreta}$. Los únicos abiertos en $Y$ son $\emptyset$ e $Y$, pero $U$ es no vacío, luego por el *Teorema* 2.1.5, $W = Y$.

Ahora veamos que $A$ es compacto, para $B$ basta con razonar de manera análoga. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos no vacíos en $X$ con $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Podemos escribir $U_i = V_i \times Y$, donde $V \in \tau_u$, por lo tanto $[1, 2] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ y como $[1, 2]$ es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, existen $V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ con $[1, 2] \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$. Luego $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ y con ello $A$ es compacto.

Por último veamos que $A \cap B$ no es compacto.

$$\begin{aligned} A \cap B &= ([0,1) \times \{a\} \cup [1,2] \times \{b\}) \cap ([0,1] \times \{a\} \cup (1,2] \times \{b\}) \\ &= [0,1) \times \{a\} \cup (1,2] \times \{b\}. \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos los conjuntos abiertos:

$$\begin{aligned} U_n &= (-1, 1 - \tfrac{1}{n}) \times Y \quad \text{y} \\ V_n &= (1 + \tfrac{1}{n}, 3) \times Y, \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{U} = \{U_n, V_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de abiertos en $X$ con $A \cap B$ contenido en su unión, pero no existe un número finito de $U_n$ y $V_n$ tales que $A \cap B$ esté contenido en la unión finita de dichos conjuntos.

**Lema 3.1.12.** *Sean $X$ un espacio topológico, $Y$ un espacio topológico Hausdorff y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas que coinciden en un conjunto denso $D$ de $X$ ($f|_D = g|_D$). Entonces $f = g$ en todo $X$.*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Como $Y$ es un espacio Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ en $Y$ con $f(x_0) \in U$ y $g(x_0) \in V$. Por ser $f$ y $g$ aplicaciones continuas, tenemos que $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son abiertos en $X$ que contienen a $x_0$. Ahora definimos el conjunto

$$W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$$

que también es un abierto en $X$ que contiene a $x_0$. Ahora bien, como $D$ es denso en $X$, tenemos que $W \cap D \neq \emptyset$, es decir, existe un punto $x_1 \in W \cap D$ y por lo tanto se tiene:

- $x_1 \in f^{-1}(U)$, luego $f(x_1) \in U$
- $x_1 \in g^{-1}(V)$, luego $g(x_1) \in V$

pero por hipótesis, $f|_D = g|_D$, luego $f(x_1) = g(x_1)$, lo que contradice que $U$ y $V$ sean disjuntos. □

**Lema 3.1.13.** *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y $A$ es denso en $X$, entonces $f(A)$ es denso en $f(X)$.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f$ es sobreyectiva y basta probar que $f(A)$ es denso en $Y$.

Sea $y \in Y$ y $U$ un abierto en $Y$ con $y \in U$. Como $f$ es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$ y como $A$ es denso en $X$, contonces $f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$. Luego, $f(f^{-1}(U) \cap A) = U \cap f(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(A)$ es denso en $f(X)$. □

**Definición 3.1.14.** Un espacio topológico $X$ es *regular* si y solo si, dados un conjunto cerrado $A$ de $X$ y $x \notin A$, existen dos abiertos disjuntos $U$ y $V$ con $x \in U$ y $A \subset V$.

**Ejemplo 3.1.15. El espacio $\mathbb{R}_K$ es Hausdorff pero no regular.** Llamamos $\mathbb{R}_K$ al espacio de los números reales con la topología que tiene como base a todos lo intervalos de la forma $(a, b)$ y todos los conjuntos $(a, b) \setminus K$ donde $K$ es el conjunto $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Este espacio es Hausdorff ya que dados cualesquiera dos puntos, podemos encontrar dos intervalos abiertos disjuntos que los contengan.

Ahora veamos que no es regular. El conjunto $K$ es cerrado en $\mathbb{R}_K$ y no contiene al 0. Supongamos que existen $U$ y $V$ abiertos disjuntos en $\mathbb{R}_K$ conteniendo a 0 y $K$, respectivamente. Tomamos un elemento $U$ de la base que contenga al 0 y no interseque a $K$. El abierto $U$ debe ser de la forma $U = (a, b) \setminus K$, ya que el 0 es punto de acumulación de $K$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y si fuese de otra forma intersecaría a $K$. Tomamos $n$ suficientemente grande de manera que $\frac{1}{n} \in (a, b)$ y después elegimos un elemento $V$ de la base que contenga a $\frac{1}{n}$, que debe ser de la forma $V = (c, d)$. Finalmente, si tomamos un $t$ con $\max\{c, \frac{1}{n+1}\} < t < \frac{1}{n}$, tenemos que $t \in U$ y $t \in V$.

Observamos que si los conjuntos unipuntuales fuesen conjuntos cerrados, entonces la separación de puntos respecto de conjuntos cerrados implicaría la separación entre puntos, y por ello se introduce la siguiente definición.

**Definición 3.1.16.** Se dice que un espacio topológico es un *espacio* $T_3$ si es $T_1$ y regular.

**Definición 3.1.17.** Un espacio topológico $X$ se dice *completamente regular* si para cada subconjunto cerrado $A$ en $X$ tal que $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ verificando que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$.

Notemos que para que $X$ fuese completamente regular, bastaría con encontrar una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b, f(A) = a$ donde $a \neq b$. Además, podemos ver que esta función cumple la *Definición* 2.3.9 si la vemos como una colección de funciones formada únicamente por una función y por lo tanto decimos que $f$ separa puntos de conjuntos cerrados.

Observemos también que para comprobar que $X$ es un espacio completamente regular basta ver que para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto $U$ con $x \in U$, existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus U) = 1$.

Todo espacio completamente regular es regular, pero como veremos a continuación, el recíproco no es cierto.

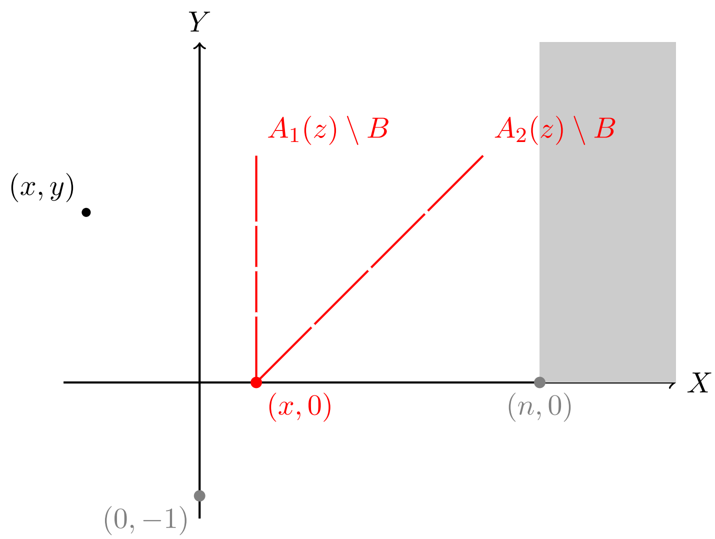
**Ejemplo 3.1.18.** ([7], ver también [2]).

**Existen espacios regulares que no son completamente regulares.** Sea $M := M_0 \cup \{z_0\}$, donde $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$ y $z_0 = (0, -1)$. Denotamos por $L$ a la recta $y = 0$ y $L_i$ al segmento $\{(x, 0) \in L \text{ con } i - 1 \leq x \leq i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para cada $z = (x, 0) \in L$, sean $A_1(z)$ y $A_2(z)$ los siguientes conjuntos:

$$A_1(z) := \{(x, y) \in M_0 : \ 0 \leq y \leq 2\} \quad \text{y}$$
$$A_2(z) := \{(x + y, y) \in M_0 : \ 0 \leq y \leq 2\}.$$

Y sea $B(z)$ la familia de todos los conjuntos de la forma $(A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B$, donde $B$ es un conjunto finito de puntos con $z \notin B$.

Para los puntos $z \in M_0 \setminus L$, tomamos $B(z) = \{z\}$ y para el punto $z_0$, consideramos $B(z_0) = \{U_i(z_0)\}_{i=1}^{\infty}$, donde $U_i(z_0) := \{z_0\} \cup \{(x,y) \in M_0 : \ x \geq i \text{ para } i \in \mathbb{N}\}$.




Se puede comprobar que la familia $\{B(z)\}_{z \in M}$ cumple las propiedades 1. a 4. del *Teorema* 2.2.12 y por lo tanto $M$ es un espacio topológico con la topología generada por el sistema de entornos $\{B(z)\}_{z \in M}$.

Ahora veamos que $M$ es regular. En primer lugar, veamos que para todo $z \in M_0$ la familia $B(z)$ está formada por conjuntos abiertos y cerrados en $M$. Está claro que son abiertos, por como hemos definido la topología, basta ver que son cerrados. Si $z = (x,y) \in M_0 \setminus L$, $B(z)$ veamos que su complementario es abierto, es decir, para cada punto de $M \setminus B(z)$ existe un entorno abierto contenido en dicho conjunto. Para comprobarlo, lo separamos en tres casos.

- $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M \setminus B(z)$ con $\tilde{y} > 0$ y necesariamente $\tilde{z} \neq z$. Basta tomar el entorno abierto $\{(\tilde{x}, \tilde{y})\} \subset M \setminus B(z)$.
- $\tilde{z} = (\tilde{x}, 0) \in M \setminus B(z)$. Basta tomar el entorno abierto $(A_1(\tilde{z}) \cup A_2(\tilde{z})) \setminus \{z\}$.
- $\tilde{z} = z_0 \in M \setminus B(z)$. Basta tomar un entorno abierto $U_n(z_0)$ con $n > 3 + \lceil x \rceil$.

Ahora, si $z = (x, 0) \in L$, $B(z) = (A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B$, al igual que en el caso anterior, tenemos los siguientes casos:

- $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M \setminus B(z)$ con $\tilde{y} > 0$. Basta tomar el entorno abierto $\{(\tilde{x}, \tilde{y})\} \subset M \setminus B(z)$.
- $\tilde{z} = (\tilde{x}, 0) \in M \setminus B(z)$. Observamos que necesariamente $\tilde{x} \neq x$. Basta tomar el entorno abierto $(A_1(\tilde{z}) \cup A_2(\tilde{z})) \setminus B_{\tilde{z}}$, donde $B_{\tilde{z}} = (A_1(\tilde{z}) \cup A_2(\tilde{z})) \cap B(z)$.

- $\tilde{z} = z_0 \in M \setminus B(z)$. Basta tomar un entorno abierto $U_n(z_0)$ con $n > 3 + \lceil x \rceil$.

Por lo tanto, basta ver que para cada conjunto cerrado $F \subseteq M$ con $z_0 \notin F$ existen abiertos $U_1$ y $U_2$ tales que $z_0 \in U_1$, $F \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como $F$ es cerrado y $z_0 \notin F$, existe un entorno $U_{i_0}(z_0)$ de $z_0$ con $F \cap U_{i_0}(z_0) = \emptyset$. Si tomamos $U_1 = U_{i_0+2}(z_0)$ y $U_2 = M \setminus (U_{i_0+2}(z_0) \cup L_{i_0} \cup L_{i_0+1})$ tenemos los abiertos que buscamos.

Y por último, veamos que $M$ no es completamente regular. Consideramos una función continua $f : M \to [0,1]$ tal que $f(L_1) = \{0\}$. Para probar que el espacio $M$ no es completamente regular, basta probar que $f(z_0) = 0$. Este resultado se obtiene a partir de la continuidad de $f$ y de que el conjunto $K_i = \{z \in L_i : \ f(z) = 0\}$ es infinito para $i = 1, 2, 3 \dots$ Veamos que esta segunda afirmación es cierta usando inducción. Para $i = 1$, $K_1 = L_1$ es infinito. Supongamos que $K_n$ es infinito y veamos que $K_{n+1}$ también lo es. Como $K_n$ es infinito, contiene un conjunto numerable $K'_n \subset K_n$. Veamos que para cada $z \in K'_n$ existe un conjunto numerable $A_0(z) \subset A_2(z)$ tal que

$$f(A_2(z) \setminus A_0(z)) = \{0\}.$$

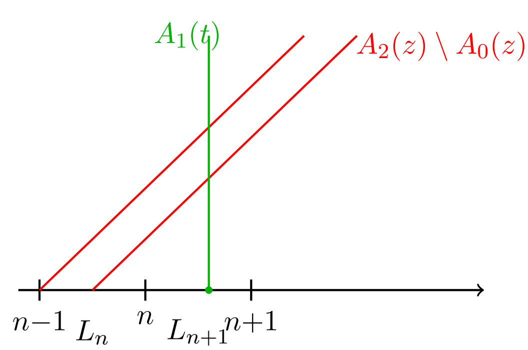
Como $z = (x, 0) \in K'_n \subset K_n$, tenemos que $f(z) = 0$. Por ser $f$ continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $V$ entorno abierto de $z$ tal que $f(V) \subseteq [0, \varepsilon)$, es decir, $V \subseteq f^{-1}([0, \varepsilon))$. Para todo $j \geq 0$, existe $V_j = ((A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus B_j)$ con $f(V_j) \subseteq [0, \frac{1}{j})$. Tomando el conjunto numerable

$$A_0(z) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$$

tenemos que $f(A_2(z) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j) = \{0\}$. Consideramos el conjunto numerable $\tilde{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{z \in K'_n} A_0(z)$ y llamamos $A$ a su proyección sobre $L$, que también es numerable. Es decir, $A = \pi(\tilde{A}) \subset L$, donde

$$\begin{aligned} \pi : \ & M_0 \longrightarrow L \\ & (x, y) \longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Ahora para cada $t \in L_{n+1} \setminus A$, el conjunto $A_1(t)$ interseca a los conjuntos $A_2(z) \setminus A_0(z)$ para cada $z \in K'_n$.



Veamos que $f(t) = 0$. Si $f(t) \neq 0$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $0 \notin (f(t)-\varepsilon, f(t)+\varepsilon)$. Como $f$ es continua, existe $V$ un entorno abierto de $t$ con $f(V) \subseteq (f(t)-\varepsilon, f(t)+\varepsilon)$. Por ser $V$ entorno abierto, se tiene que $((A_1(t) \cup A_2(t)) \setminus B_t) \subseteq V$. Luego existe un $w \in (A_1(t) \cap (A_2(z) \setminus A_0(z)))$ con $w \in V$ para algún $z \in K'_n$, por lo tanto $f(w) = 0$, luego llegamos a la contradicción $f(w) \notin (f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon)$, por lo que concluimos que $f(t) = 0$.

**Definición 3.1.19.** Un espacio topológico $X$ es un *espacio de Tychonoff* si es un espacio $T_1$ completamente regular.

**Ejemplo 3.1.20. Todo espacio métrico es Tychonoff.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico, observamos fácilmente que es $T_1$, ya que dados dos puntos distintos $x, y \in X$ tenemos que $d(x, y) = \delta$, luego basta tomar las bolas abiertas $B(x, \frac{\delta}{2})$ y $B(y, \frac{\delta}{2})$.

Ahora veamos que es completamente regular. Sean $x \in X$ y $C \subset X$ cerrado con $x \notin C$. Observemos primero que la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto d(y, C) = \inf \{d(y, c) : c \in C\}, \end{aligned}$$

es continua. Esto es consecuencia de la desigualdad $|d(y_1, C) - d(y_2, C)| \leq d(y_1, y_2)$, que se deduce de la desigualdad $d(y_1, C) \leq d(y_1, c) \leq d(y_1, y_2) + d(y_2, a)$, que se tiene para todo $a \in A$ y $y_1, y_2 \in X$. Podemos definir la función $f : X \to [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$f(y) = 1 - \tfrac{d(y,C)}{d(y,C)+d(y,x)}$$

donde $d(y, C) = \inf\{d(y, c) : c \in C\}$. De esta manera tenemos que:

- El denominador es no nulo, ya que si $y \notin C$, como $C$ es cerrado, entonces $d(y, C) > 0$. Y si $y \in C$, como $x \notin C$ y $C$ es cerrado, $d(x, y) > 0$.
- $f$ es continua por ser resta y cociente con denominador no nulo de aplicaciones continuas.
- $f(x) = 0$ y $f(c) = 1$ para todo $c \in C$.

Y por lo tanto $(X, d)$ es completamente regular.

A continuación, se enuncian varios lemas, relativos a los espacios Tychonoff, $T_1$ y completamente regulares, necesarios para la demostración del *Teorema* 3.1.23, en el que se muestra la equivalencia entre ser espacio Tychonoff y ser homeomorfo a algún subespacio de un cubo.

**Lema 3.1.21.** *Se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *Todo subespacio de un espacio Tychonoff es un espacio Tychonoff.*
2. *Un producto de espacios no vacíos es Tychonoff si y solo si cada espacio factor es Tychonoff.*

*Demostración.* Veamos las dos afirmaciones:

1. Supongamos que $X$ es un espacio Tychonoff y que $Y \subseteq X$. Por el *Lema* 3.1.4, $Y$ es un espacio $T_1$, luego nos falta ver que es completamente regular. Si $A$ es un conjunto cerrado con $A \subseteq Y$, entonces $A = B \cap Y$ donde $B$ es un conjunto cerrado $X$. Dado $x \in Y \setminus A$, se tiene que $x \notin B$ y por lo tanto, existe una aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0, f(B) = 1$. Luego tenemos que $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ separa a $x$ y $A$ en $Y$, por lo que $Y$ es completamente regular.

2. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos cuyo espacio producto es Tychonoff. Como ya vimos en el *Lema* 3.1.4, $X_i$ es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{i \in I} X_i$ para todo $i \in I$, luego por el apartado anterior, $X_i$ es Tychonoff para todo $i \in I$.

   Recíprocamente, sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos Tychonoff. Por el *Lema* 3.1.4, el espacio $\prod_{i \in I} X_i$ es $T_1$. Falta ver que es completamente regular. Sean $x \in \prod_{i \in I} X_i$ y un conjunto cerrado $A$ en $\prod_{i \in I} X_i$ con $x \notin A$. Tomamos un elemento de la base $B = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ de la topología producto de $\prod_{i \in I} X_i$ donde $U_{i_j}$ es abierto de $X_{i_j}$, de tal forma que $B$ contenga a $x$ y no interseque a $A$. Para $k = 1, ..., n$, existe una aplicación continua $f_k : X_{i_k} \to [0, 1]$ donde $f_k(x_{i_k}) = 1$ y $f_k(X_{i_k} \setminus U_k) = 0$. Ahora definimos $g : \prod_{i \in I} X_i \to [0, 1]$ como

   $$g(y) = \min\{f_k(y_{i_k}) : k = 1, ..., n\}.$$

   De esta forma, $g$ es una aplicación continua por ser el mínimo de un número finito de aplicaciones continuas, $g(x) = 1$ y $g(A) = 0$.

□

Dado un espacio topológico $X$, podemos considerar las siguientes familias de funciones:

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua } \}$$
$$C^*(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua y acotada } \}$$

Utilizando esta segunda familia de funciones, el siguiente resultado relaciona la propiedad de ser completemente regular con la topología débil.

**Lema 3.1.22.** *Un espacio topológico es completamente regular si y solo si tiene la topología débil inducida por la familia $C^*(X)$ de funciones continuas reales acotadas definidas en $X$.*

*Demostración.* Si $X$ es completamente regular, entonces el conjuto $C^*(X)$ separa puntos de conjuntos cerrados y por el *Corolario* 2.3.11, el espacio $X$ tiene la topología débil inducida por $C^*(X)$.

Recíprocamente, suponemos que $X$ tiene la topología débil inducida por $C^*(X)$. Sea $U$ un abierto en $X$ y $x_0 \in U$, entonces, como vimos en la *Observación* 2.3.2, existen funciones $f_1, ..., f_n$ en $C^*(X)$ y conjuntos abiertos de una subbase $V_1, ..., V_n$ de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ de manera que:

$$x_0 \in f_1^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(V_n) \subseteq U.$$

Por el *Ejemplo* 2.2.10, $V_i$ es o bien de la forma $(-\infty, a_i)$, o bien de la forma $(a_i, \infty)$. Pero si $V_i = (-\infty, a_i)$, tenemos que

$$f^{-1}(V_i) = (-f)^{-1}(-a_i, \infty),$$

por lo que se podría tomar $-f_i$ en lugar de $f_i$ y con esto ya podemos asumir que $V_i = (a_i, \infty)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora consideremos la función

$$g_i(x) = \sup\{f_i(x) - a_i,\ 0\},$$

que es no negativa y se tiene que $g_i^{-1}(0, \infty) = f_i^{-1}(a_i, \infty)$. Por lo tanto, tenemos que

$$x_0 \in g_1^{-1}(0, \infty) \cap \cdots \cap g_n^{-1}(0, \infty) \subseteq U.$$

Sea $g = g_1 \cdots g_n$, entonces $g(x_0) = g_1(x_0) \cdots g_n(x_0)$ es positivo. Además, si $g(x) > 0$, entonces $g_i(x) \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto $g_i(x) > 0$, luego

$$x_0 \in g^{-1}(0, \infty) \subseteq U.$$

Por lo tanto, $g(x_0) \neq 0$ y $g(X \setminus U) = 0$, por lo que $X$ es completamente regular. □

A cualquier producto de intervalos cerrados y acotados lo llamaremos cubo y es homeomorfo a un producto de copias del intervalo unidad $[0, 1]$. El siguiente resultado caracteriza los espacios Tychonoff.

**Teorema 3.1.23.** *Un espacio topológico $X$ es Tychonoff si y solo si es homeomorfo a algún subespacio de algún cubo.*

*Demostración.* Todo cubo es producto de espacios métricos y por el *Lema* 3.1.21 es un espacio Tychonoff. Luego todo subespacio de un cubo es un espacio Tychonoff.

Recíprocamente, supongemos que $X$ es un espacio Tychonoff, entonces $X$ es $T_1$ y completamente regular. Por el *Lema* 3.1.22, $X$ tiene la topología débil inducida por las funciones continuas acotadas $C^*(X)$. La imagen de cada una de estas funciones $f : X \to \mathbb{R}$ está contenida es un intervalo cerrado y acotado $I_f$ y por lo tanto se puede ver como una función de $X$ en $I_f$. Por último, por el *Lema* 3.1.3, la función evaluación

$$e : X \to \prod_{f \in C^*(X)} I_f$$

inducida por $C^*(X)$ y definida como $[e(x)]_f = f(x)$ es un embebimiento. Luego X es homeomorfo a un subespacio del cubo $\prod_{f \in C^*(X)} I_f$. □

**Definición 3.1.24.** Un espacio $X$ es *normal* si dados dos conjuntos cerrados $A$ y $B$ disjuntos en $X$, existen conjuntos abiertos disjuntos $U$ y $V$ con $A \subset U$ y $B \subset V$. Un espacio normal y $T_1$ se denominará *espacio* $T_4$.

A continuación, enunciaremos un resultado conocido como Lema de Urysohn. Este teorema garantiza la existencia de determinadas funciones continuas en un espacio normal $X$. Su demostración se puede encontrar detallada tanto en la sección 33 de [6], como en la sección 15 de [9].

**Lema 3.1.25.** ***Lema de Urysohn.*** *Un espacio $X$ es normal si, y solo si, para cualesquiera $A$ y $B$ conjuntos cerrados en $X$, existe una aplicación continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ con $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

Como consecuencia de este lema, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.26.** *Todo espacio $T_4$ es Tychonoff.*

A partir de la definición de compacidad se puede probar el siguente lema.

**Lema 3.1.27.** *Un espacio Hausdorff compacto es $T_4$.*

*Demostración.* Sea $X$ un espacio Hausdorff compacto, queremos ver que $X$ es $T_4$, es decir, normal y $T_1$. La condición de ser $T_1$ se da de manera inmediata, ya que todo espacio Hausdorff es también $T_1$. Por lo tanto, nos falta ver que $X$ es normal.

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos cerrados disjuntos en $X$. Para cada $a \in A$ y $b \in B$, como $X$ es Hausdorff, existen abiertos $U_{a,b}$ y $V_{a,b}$ tales que $a \in U_{a,b}$, $b \in V_{a,b}$ y $U_{a,b} \cap V_{a,b} = \emptyset$. Fijamos un $a \in A$, entonces la familia de abiertos $\{V_{a,b}\}_{b\in B}$ es un recubrimiento abierto de $B$ por abiertos de $X$. Como $B$ es un conjunto cerrado en el compacto $X$, por el *Lema* 2.2.25, $B$ es compacto. Por lo tanto, existe un número finito de $b_1, \dots, b_n \in B$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a,b_i}.$$

Ahora definimos los conjuntos abiertos $U_a = \bigcap_{i=1}^n U_{a,b_i}$ y $V_a = \bigcup_{i=1}^n V_{a,b_i}$ con $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$ y $U_a \cap V_a = \emptyset$, ya que para cada $b_i$ se tiene que $U_{a,b_i} \cap V_{a,b_i} = \emptyset$. Aplicando de nuevo el mismo razonamiento, $\{U_a\}_{a\in A}$ es un recubrimiento abierto de $A$ por abiertos de $X$. Como $A$ es un conjunto cerrado contenido en el espacio compacto $X$, por el *Lema* 2.2.25, $A$ es compacto y por lo tanto existen $a_1, \dots, a_m$ tales que,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}.$$

Como en el caso anterior, definimos los conjuntos abiertos $U = \bigcup_{i=1}^m U_{a_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^m V_{a_i}$ que cumplen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $X$ es normal.

□

Como consecuencia de los resultados anteriores se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.28.** *Sea $X$ un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$X$ es Tychonoff.*

2. *$X$ es homeomorfo a un subespacio de algún cubo.*

3. *$X$ es homeomorfo a un subespacio de algún espacio Hausdorff compacto.*

4. *$X$ es homeomorfo a un subespacio de algún espacio $T_4$.*

*Demostración.* Veamos las siguientes implicaciones.

1.$\Longrightarrow$2. Por el *Teorema* 3.1.23.

2.$\Longrightarrow$3. Todo cubo es un espacio Hausdorff compacto.

3.$\Longrightarrow$4. Por el *Lema* 3.1.27.

4.$\Longrightarrow$1. Consecuencia del *Corolario* 3.1.26 y del *Lema* 3.1.21. □

## 3.2. Compacidad local

Como ya hemos visto en las secciones anteriores, la compacidad es una característica de los espacios topológicos que conlleva un gran número de propiedades muy útiles a la hora de trabajar con ellos. Pero, hay muchos espacios que no cumplen esta condición. Por ello nace la idea de estudiar la compacidad local, para poder aplicar las propiedades de la compacidad a espacios no compactos, siempre que estos cumplan dicha propiedad de manera local, en el sentido de que cada punto admita entornos compactos arbitrariamente pequeños.

A continuación se introduce la definición de espacio localmente compacto que se utilizará a lo largo de este trabajo, siguiendo la definición dada por Willard [9].

**Definición 3.2.1.** Un espacio X se dice que es *localmente compacto* si para todo $x$ en $X$ y $U$ entorno de $x$, existe un entorno compacto $V$ de $x$ con $x \in V \subseteq U$.

Una definición alternativa de este concepto es la dada en [6], que establece que un espacio $X$ es localmente compacto si todo punto $x \in X$ tiene un entorno compacto. En el siguiente resultado, se muestra que ambas definiciones son equivalentes en caso de que $X$ sea Hausdorff.

**Lema 3.2.2.** *Sea $X$ un espacio Hausdorff, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$X$ es localmente compacto.*

2. *Para cada $x \in X$ y cada $U$ entorno de $x$, existe un entorno abierto $V$ de $x$ tal que $Cl(V)$ es compacto y $Cl(V) \subset U$.*

3. *Para cada $x \in X$, existe un entorno compacto en $X$.*

*Demostración. 1.$\Longrightarrow$ 2.* Supongamos que $X$ es localmente compacto. Sea $x \in X$ y $U$ un entorno de $x$. Por ser $X$ localmente compacto, existe un $W$ entorno compacto de $x$ con $W \subseteq U$. Tomemos el conjunto

$$V = Int(W),$$

luego $V$ es un entorno abierto de $x$. Ahora, como $W$ es un compacto contenido en el espacio Hausdorff $X$, por el *Lema* 3.1.7, $W$ es cerrado. Por lo tanto, $Cl(V) \subseteq Cl(W) = W \subseteq U$ y $Cl(V)$ es compacto por ser un conjunto cerrado contenido en el compacto $W$, como vimos en el *Lema* 2.2.25.

*2.*$\Longrightarrow$ *3.* Dado $x \in X$, como $X$ es entorno de $x$, existe un entorno abierto $V$ de $x$ tal que $Cl(V)$ es compacto y $Cl(V) \subseteq X$, entonces $Cl(V)$ es un entorno compacto de $x$.

*3.*$\Longrightarrow$ *1.* Supongamos que para cada $x \in X$, existe un entorno compacto en $X$. Sea $x \in X$ y $U$ cualquier entorno de $x$ en $X$. Por hipótesis, existe un entorno compacto $K$ de $x$ en $X$. Tomemos

$$W = Int(U \cap K),$$

que es un entorno abierto de $x$ en $X$. Observemos que $W \neq \emptyset$, porque como $U$ es entorno de $x$, existe $\tilde{U}$ abierto con $x \in \tilde{U} \subseteq U$ y como $K$ es entorno de $x$, existe $\tilde{V}$ abierto con $x \in \tilde{V} \subseteq K$, luego $x \in \tilde{U} \cap \tilde{V} \subseteq Int(U \cap K)$. Como $K$ es un espacio Hausdorff compacto, entonces el conjunto

$$Y = Cl(W) \subseteq K,$$

es Hausdorff por ser subespacio de un espacio Hausdorff y es compacto por ser cerrado en el compacto $K$, como vimos en el *Lema* 2.2.25. Ahora, en $Y$, tomamos el conjunto cerrado $Y \setminus W = Y \cap (X \setminus W)$, que por el *Lema* 2.2.25 es compacto por ser cerrado en el compacto $Y$ y además se cumple que $x \notin Y \setminus W$. Por lo tanto, por el *Lema* 3.1.9, existen $M$ y $N$ abiertos en $Y$ con $x \in M$, $Y \setminus W \subseteq N$ y $M \cap N = \emptyset$. Consideramos el conjunto cerrado en $Y$

$$V = Y \setminus N.$$

Como $x \in M \subseteq V \subseteq W$, entonces $V$ es un entorno de $x$ en $Y$ con $V \subseteq U$. Además, aplicando de nuevo el *Lema* 2.2.25, $V$ es compacto por ser un cerrado en el compacto $Y$. Por último, veamos que $V$ también es entorno de $x$ en $X$. Como $M$ es abierto en $Y = Cl(W)$, entonces $M = Y \cap \tilde{M}$ con $\tilde{M}$ abierto en $X$. Luego podemos considerar $W \cap \tilde{M}$ que es un abierto en $X$ que cumple $x \in W \cap \tilde{M} \subseteq M \subseteq V$. Luego $V$ es también entorno de $x$ en $X$.

$\square$

Este lema implica que todos los espacios Hausdorff compactos son también localmente compactos.

**Ejemplo 3.2.3.** A continuación se muestran algunos ejemplos.

1. Cualquier espacio topológico $(X, \tau_{discreta})$ es localmente compacto, ya que para todo $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un entorno compacto de $x$.

2. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es un espacio Hausdorff localmente compacto no compacto.

A continuación enunciamos un teorema que explica como son los subespacio de los espacios localmente compactos.

**Teorema 3.2.4.** *En un espacio Hausdorff localmente compacto, la intersección de un conjunto abierto y un conjunto cerrado es localmente compacta. Recíprocamente, un subconjunto localmente compacto de un espacio Hausdorff es la intersección de un subconjunto abierto y uno cerrado.*

*Demostración.* Sea $X$ un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Si $A$ es abierto en $X$ y $a \in A$, entonces $a$ tiene un entorno compacto $K \subseteq A$ en $X$ y por lo tanto $K$ es un entorno compacto de $a$ en $A$, luego $A$ es localmente compacto. Sea $B$ un conjunto cerrado en $X$ y $b \in B$, $b$ tiene un entorno compacto $\tilde{K}$ por ser $X$ localmente compacto y se tiene que $B \cap \tilde{K}$ es compacto por el *Lema* 2.2.25. Luego $B \cap \tilde{K}$ es un entorno compacto de $b$ en $B$ y con ello $B$ es localmente compacto.

Ya hemos visto que los abiertos y los cerrados de un espacio localmente compacto, son localmente compacto, por lo que solo nos falta ver que la intersección de dos espacios localmente compactos es localmente compacta. Sean $A, B$ espacios localmente compactos, dado $x \in A \cap B$, se tiene que $x \in K_A$ entorno compacto en $A$ y $x \in K_B$ entorno compacto en $B$. Como $X$ es Hausdorff, la intersección de compactos es compacto, como vimos en el *Lema* 3.1.10, por lo tanto $x \in K_A \cap K_B$ que es un entorno compacto en $A \cap B$.

Recíprocamente, sea $Y$ un espacio Hausdorff y $X$ un subespacio localmente compacto de $Y$. Basta ver que $X$ es abierto en $Cl_Y(X)$, ya que con ello tendríamos que $X = X \cap Cl_Y(X)$ donde $X$ es abierto en $Y$ y $Cl_Y(X)$ es cerrado en $Y$. Dado $x \in X$, por el *Lema* 3.2.2 existe un entorno $U$ de $x$ en $X$ tal que $Cl_X(U)$ es compacto. Como $U$ es abierto en $X$ con la topología de subespacio, entonces $U = X \cap V$ con $V$ abierto en $Y$. Entonces,

$$Cl_Y(X \cap V) \cap X = Cl_Y(U) \cap X = Cl_X(U)$$

donde sabemos que $Cl_X(U)$ es compacto. Por lo tanto, por el *Lema* 3.1.7, $Cl_Y(X \cap V) \cap X$ es cerrado en $Y$ por ser compacto en el espacio Hausdorff $Y$. Pero como $X \cap V \subseteq Cl_Y(X \cap V) \cap X$, entonces $Cl_Y(X \cap V) \subseteq Cl_Y(X \cap V) \cap X$. Por ello, $Cl_Y(X \cap V) \subseteq X$, observamos que $Cl_Y(X) \cap V \subseteq Cl_Y(X \cap V)$ y por lo tanto, $Cl_Y(X) \cap V \subseteq X$. Y con esto, $Cl_Y(X) \cap V$ es un entorno abierto de $x$ en $Cl_Y(X)$ con $Cl_Y(X) \cap V \subseteq X$, luego $X$ es abierto en $Cl_Y(X)$. □

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente resultado que nos será de utilidad cuando introduzcamos las compactificaciones.

**Corolario 3.2.5.** *Un subespacio denso de un espacio Hausdorff compacto es localmente compacto si y solo si, es abierto.*

*Demostración.* Sea $X$ un espacio Hausdorff compacto, por lo que también es localmente compacto y $A$ un subespacio denso de $X$. Como hemos visto en la demostración anterior, si $A$ es abierto en $X$ localmente compacto, entonces $A$ es localmente compacto.

Falta ver que si $A$ es localmente compacto, entonces $A$ es abierto. En el Teorema anterior hemos probado que si $A$ es localmente compacto, entonces $A$ es abierto en $Cl_X(A) = X$. Esto nos da el resultado que queremos. □

Por último veremos bajo que condiciones se conserva la compacidad local a través de las aplicaciones.

**Lema 3.2.6.** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos con $X$ localmente compacto y $f : X \longrightarrow Y$ un aplicación continua, abierta y sobreyectiva. Entonces $Y$ es localmente compacto.*

*Demostración.* Dado $y \in Y$, existe un entorno abierto $V$ de $y$ en $Y$. Tomamos un $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $f$ es continua, $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de $x$ en $X$, luego por ser $X$ localmente compacto, existe un entorno compacto $K$ de $x$ en $X$ con $K \subseteq f^{-1}(V)$. Ahora, como $f$ es abierta, $f(K)$ es un entorno de $y$ en $Y$ y $f(K) \subseteq V$. Y por último, tenemos que $f(K)$ la imagen de un compacto por una aplicación continua, luego por el *Lema* 2.2.25, $f(K)$ es compacto. $\square$

# Capítulo 4

# Compactificaciones

De entre los distintos tipos de espacios topológicos, aquellos que son Hausdorff y compactos simultáneamente, presentan numerosas ventajas para trabajar con ellos en matemáticas, ya que tienen una serie de propiedades muy útiles a la hora de realizar construcciones y demostraciones. Por lo tanto, cuando tenemos un espacio que no tiene estas características, es habitual intentar verlo como subespacio de otro espacio mayor que si las cumpla. Esto nos lleva de forma natural a plantearnos la pregunta ¿Bajo qué condiciones es un espacio topológico homeomorfo a un subespacio de un espacio Hausdorff compacto? De aquí nace el concepto de compactificación que trataremos a lo largo de este capítulo, basándonos en las definiciones y resultados que podemos encontrar en [9], [4], [1] y [5].

**Definición 4.0.1.** Una *compactificación* de un espacio topológico $X$ es un par ordenado $(K, h)$ donde $K$ es un espacio Hausdorff compacto y $h$ es un embebimento de $X$ en $K$ con $h(X)$ denso en $K$.

En numerosas ocasiones $h$ es la inclusión, por lo que $X \subset K$. En otros casos, haciendo un abuso de notación llamaremos $X$ a $h(X)$, ya que ambos espacios son homeomorfos, por ello tenemos de nuevo $X \subset K$. En cualquiera de estas dos situaciones, diremos que $K$ es una compactificación de $X$.

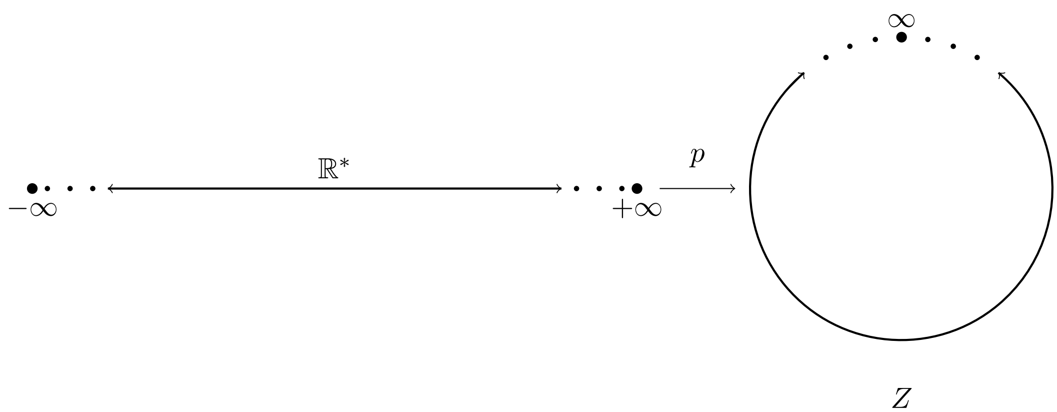
**Ejemplo 4.0.2.** Veamos algunos ejemplos de compactificaciones.

- $[0, 1]$ es una compactificación de $[0, 1)$.
- **Compactificación por un punto de** $\mathbb{R}$. [1] Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual. Este espacio es localmente compacto, Hausdorff y no compacto. Como hemos visto en el *Ejemplo* 2.2.17, $\mathbb{R}$ es denso como subespacio en el espacio compacto $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la recta real extendida, donde $+\infty, -\infty$ serán los elementos maximal y minimal, respectivamente, para el orden usual en $\mathbb{R}$ y en el que tomaremos la topología del orden vista en el *Ejemplo* 2.2.8. Por lo tanto, añadiendo dos puntos al espacio localmente compacto $\mathbb{R}$ podemos obtener un espacio compacto. Pero podemos incluso construir un espacio compacto añadiendo únicamente un punto.

Consideremos el espacio cociente (ver *Ejemplo* 2.2.30):

$$Z = \mathbb{R}^*/\{-\infty, +\infty\}$$

obtenido al colapsar el conjunto $\{-\infty, +\infty\}$ en un único punto al que denotaremos $\infty$.




El espacio $Z$ es compacto por serlo $\mathbb{R}^*$ y por ser $p$ continua. Además, por el *Ejemplo* 2.2.30, sabemos que la aplicación cociente

$$p : \mathbb{R}^* \to Z$$

da un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y el subconjunto abierto

$$p(\mathbb{R}) = Z \setminus \{\infty\}.$$

También podemos ver que $Z$ es Hausdorff. Recordemos que en $Z$ tenemos la topología $\tau_p = \{U \subseteq Z :\ p^{-1}(U) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^*\}$, por lo tanto, dados dos puntos $x, y \in Z \setminus \{\infty\}$, existen $U$ y $V$ abiertos en $\mathbb{R}$, por ser $\mathbb{R}$ Hausdorff, tales que $p^{-1}(x) \in U$, $p^{-1}(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, luego $x \in p(U)$, $y \in p(V)$ y $p(U) \cap p(V) = \emptyset$, con $p(U), p(V)$ abiertos en $Z$. Ahora, si $x = \infty$ e $y \in Z \setminus \{\infty\}$, como $\mathbb{R}^*$ Hausdorff, por el *Lema* 3.1.9, existen abiertos $U, V$ en $\mathbb{R}^*$ tales que $p^{-1}(\infty) = \{+\infty, -\infty\} \subset U$, $p^{-1}(y) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, tenemos que $p(U) \cap p(V) = \emptyset$ con $\infty \in p(U)$ e $y \in p(V)$ con $p(U)$ y $p(V)$ abiertos en $Z$.

Por otra parte, $p(\mathbb{R})$ es denso en $Z$ por ser $\mathbb{R}$ denso en $\mathbb{R}^*$. Ahora podemos ver $\mathbb{R}$ como subespacio de $Z$ reemplazando $p(\mathbb{R})$ por su copia homeomorfa $\mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos que $\mathbb{R}$ es un subespacio abierto denso en $Z$ cuyo complementario es el punto $\{\infty\}$. Luego los abiertos en $Z$ que no contienen a $\{\infty\}$ son los abiertos en $\mathbb{R}$.

Veamos como son los subconjuntos abiertos de $Z$ que contienen a $\{\infty\}$. Sea $U$ un abierto en $Z$ con $\infty \in U$. Entonces $V = p^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^*$ con $-\infty, +\infty \in V$. Luego

$[-\infty, a) \cup (b, +\infty] \subseteq V$ para algunos $a < b$ reales. Por lo tanto el conjunto $\mathbb{R} \setminus V$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y satisface $\mathbb{R} \setminus V \subseteq [a, b]$, y por el *Lema* 2.2.25, el conjunto $\mathbb{R} \setminus V$ es compacto. Llamemos

$$K = p(\mathbb{R} \setminus V) = p(\mathbb{R}^* \setminus V)$$

tenemos que $K$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R} = Z \setminus \{\infty\}$, por el *Lema* 2.2.25, con

$$U = Z \setminus K.$$

Con esto concluimos que la topología en $Z$ es la siguiente:

$$\tau = \{U : U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\} \cup \{Z \setminus K : K \subseteq \mathbb{R},\, K \text{ es compacto en } \mathbb{R}\}$$

Con esta topología, $Z$ es un espacio compacto que contiene a $\mathbb{R}$ como subespacio denso con $Z \setminus \mathbb{R} = \{\infty\}$. En la siguiente sección veremos que esto significa que $Z$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}$.

A continuación, vamos a ver que podemos definir un orden en el conjunto de las compactificaciones de un espacio $X$.

**Definición 4.0.3.** Sean $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ dos compactificaciones del espacio topológico $X$. Escribimos $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ si existe una función continua $F : K_2 \to K_1$tal que $F \circ h_2 = h_1$.

$$\begin{tikzcd} K_2 \arrow[rr, "F"] & & K_1 \\ & X \arrow[ul, "h_2"] \arrow[ur, "h_1"'] & \end{tikzcd}$$

Gracias a este orden, podemos determinar cuando consideraremos que dos compactificaciones de un mismo espacio $X$ son equivalentes.

**Lema 4.0.4.** *Dos compactificaciones $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ de $X$ cumplen $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ y $(K_2, h_2) \leq (K_1, h_1)$, si y solo si, existe un homeomorfismo $H : K_2 \to K_1$ tal que $H \circ h_2 = h_1$. En este caso diremos que $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ son topológicamente equivalentes.*

*Demostración.* Suponemos que existe un homeomorfismo $H : K_2 \to K_1$ con $H \circ h_2 = h_1$. Luego por la *Definición* 4.0.3, tenemos que $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$. Por otro lado, como $H$ es homeomorfismo, $H$ tiene inversa. Componiendo $H \circ h_2 = h_1$ a ambos lados con dicha inversa, se tiene $h_2 = H^{-1} \circ H \circ h_2 = H^{-1} \circ h_1$, y de nuevo por definición, $(K_2, h_2) \leq (K_1, h_1)$.

Recíprocamente, suponemos que $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ y $(K_2, h_2) \leq (K_1, h_1)$. Luego $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ implica que existe $H : K_2 \to K_1$ continua con $H \circ h_2 = h_1$ y análogamente, existe $G : K_1 \to K_2$ continua con $G \circ h_1 = h_2$. Luego tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
K_2 \arrow[r, "H"] & K_1 \arrow[r, "G"] & K_2 \\
& X \arrow[ul, "h_2"] \arrow[u, "h_1"'] \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $H \circ G \circ h_1 = h_1$ y $G \circ H \circ h_2 = h_2$, luego $H \circ G|_{h_1(X)} = Id_{K_1}|_{h_1(X)}$ y $G \circ H|_{h_2(X)} = Id_{K_2}|_{h_2(X)}$. Por el *Lema* 3.1.12, como $h_1(X)$ es denso en $K_1$, entonces $G \circ H = Id_{K_1}$ y como $h_2(X)$ es denso en $K_2$, tenemos que $H \circ G = Id_{K_2}$. Luego $G$ es la inversa de $H$ y por lo tanto $H$ es el homeomorfismo que buscarmos. □

## 4.1. La compactificación de Alexandroff

En esta sección, estudiaremos la compactificación por un punto o compactificación de Alexandroff. Analizaremos bajo que hipótesis un espacio admite la compactificación de Alexandroff y veremos algunas de sus propiedades.

Sea $(X, \tau)$ un espacio Hausdorff, localmente compacto y no compacto, y consideramos un punto $p$ con $p \notin X$. Sea $X^* = X \cup \{p\}$ y consideremos la topología $\tau^*$ sobre $X^*$ donde los conjuntos abiertos contenidos en $X$ son abiertos en $X^*$ y los conjuntos que contienen a $p$ son abiertos si son de la forma $\{p\} \cup (X \setminus L)$ con $L$ un conjunto compacto en $X$.

**Proposición 4.1.1.** *El espacio topológico $(X^*, \tau^*)$ es compacto y Hausdorff y $X$ es un subconjunto abierto y denso en $X^*$.*

*Demostración.* Veamos que efectivamente la familia $\tau^*$ define una topología en $X^*$, el espacio $X^*$ es compacto, $X$ es denso en $X^*$ y $X^*$ es Hausdorff.

La topología $\tau^*$ está dada por

$$\tau^* = \{U \subseteq X^* : p \notin U, U \in \tau\} \cup \{U \subseteq X^* : p \in U, \exists K \text{ compacto en } X \text{ con } U = \{p\} \cup (X \setminus K)\}$$

Veamos que $\tau^*$ cumple las propiedades para ser una topología en $X^*$.

- $X^* \in \tau^*$, ya que basta tomar $K = \emptyset$ y $X^* = \{p\} \cup X$.
  $\emptyset \in \tau^*$ ya que $\emptyset \in \tau$.

- Veamos que dada una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ con $U_i \in \tau^*$ para todo $i \in I$, se tiene $U = \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau^*$.

  (1) Si $p \notin U$, entonces $U_i \in \tau$ para todo $i \in I$, luego por ser $\tau$ topología en $X$ entonces, $U \in \tau \subset \tau^*$.

(2) Si $p \in U$, entonces tenemos dos opciones. La primera, que $p \in U_i$ para todo $i \in I$, luego $U_i = X^* \setminus K_i$ con $K_i$ compacto de $X$ para todo $i \in I$ y con ello,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X^* \setminus K_i) = X^* \setminus (\bigcap_{i \in I} K_i) = X^* \setminus K \in \tau^*$$

ya que o bien $K = \emptyset$ y $\bigcup_{i \in I} U_i = X^* \in \tau^*$, o bien $K$ es compacto por ser intersección de compactos en un espacio Hausdorff, como hemos visto en el *Lema* 3.1.10.
Y la segunda opción, escribimos $I = J \cup S$, de forma que $p \in U_j = X^* \setminus K_j$ con $K_j$ compacto para todo $j \in J$ y $p \notin U_s$ para todo $s \in S$. Luego,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = (\bigcup_{s \in S} U_s) \cup (\bigcup_{j \in J} (X^* \setminus K_j)) = U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U) \in \tau^*$$

ya que $K \setminus U$ es un conjunto cerrado en $K$, y por lo tanto, $K \setminus U$ es compacto en $X$ por el *Lema* 2.2.25.

- Falta ver que si $U_1, U_2 \in \tau^*$ entonces $U = U_1 \cap U_2 \in \tau^*$:

  (1) Si $p \notin U$, entonces o bien $U_1, U_2 \in \tau$, luego por ser $\tau$ topología sobre $X$ se tiene $U \in \tau \subset \tau^*$. O bien $p \in U_1 = \{p\} \cup (X \setminus K)$ con $K$ compacto en $X$ y $U_2 \in \tau$. Como $K$ es compacto en un espacio Hausdorff $X$, entonces $K$ es cerrado en $X$, luego $X \setminus K$ es abierto en $X$ y por lo tanto $U = U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (X \setminus K) \in \tau \subset \tau^*$.

  (2) Si $p \in U$, entonces $p \in U_1 = \{p\} \cup (X \setminus K_1)$ y $p \in U_2 = \{p\} \cup (X \setminus K_2)$ con $K_1, K_2$ compactos en $X$. Luego,

$$U = U_1 \cap U_2 = \{p\} \cup ((X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2)) = \{p\} \cup (X \setminus (K_1 \cup K_2)) \in \tau^*$$

  ya que $K_1 \cup K_2$ es compacto por ser unión finita de compactos.

Además, veamos que $X^*$ es compacto. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $X^*$. Existe un $i_0 \in I$ tal que $p \in U_{i_0}$, luego $U_{i_0} = \{p\} \cup (X \setminus K_{i_0})$ con $K_{i_0}$ compacto en $X$. Por lo tanto, $X^* \setminus U_{i_0} = K_{i_0}$ es compacto en $X$ y por ello se tiene lo siguiente:

Tomamos $\tilde{U_i} = X \cap U_i \in \tau$ para todo $i \in I$, entonces se tiene:

$$K_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I, i \neq i_0} \tilde{U_i}$$

donde $\{\tilde{U_i}\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de $K$ por abiertos de $X$. Luego por ser $K_{i_0}$ compacto en $X$, existen

$$\tilde{U}_{i_1}, \tilde{U}_{i_2}, \ldots, \tilde{U}_{i_n} \text{ con } K_{i_0} \subseteq \tilde{U}_{i_1} \cup \tilde{U}_{i_2} \cup, ..., \cup \tilde{U}_{i_n}.$$

Luego,

$$X^* = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n} \cup U_{i_0}.$$

Con lo que concluimos que $X^*$ es compacto.

A continuación, se muestra que $X$ es denso en $X^*$. Por reducción al absurdo, si $X$ no fuese denso en $(X^*, \tau^*)$, entonces existiría un $U \in \tau^*$ tal que $U \cap X = \emptyset$. Como $U \in \tau^*$, o bien $U \subseteq X$ con $U \in \tau$, esto no es posible ya que $U \cap X = \emptyset$, o bien $U = \{p\} \cup (X \setminus K)$ con $K$ compacto. Como $X$ no es compacto, $X \setminus K \neq \emptyset$, luego $U \cap X \neq \emptyset$, que de nuevo contradice la suposición inicial. Por lo tanto $X$ es denso en $X^*$.

Y por último probamos que $X^*$ es Hausdorff. Dados $x, y \in X^*$, si $x, y \in X$, es trivial por ser $X$ un espacio Hausdorff. Por otra parte, si $x \in X$ e $y = p$, como $X$ es localmente compacto, existe un entorno compacto $K$ de $x$ en $X$. Luego $x \in U \subseteq K$ con $U$ abierto en $X$ e $y \in \{p\} \cup (X \setminus K)$, donde se tiene $U \cap (\{p\} \cup (X \setminus K)) = \emptyset$.

□

Al espacio $(X^*, \tau^*)$ se le llama la *compactificación por un punto o compactificación de Alexandroff* de $X$. Cuando sea necesario explicitar el embebimiento, también la podremos denotar como $((X^*, \tau^*), i)$ donde $i$ es la inclusión de $X$ en $X^*$.

Haciendo uso del *Corolario* 3.1.28, la construcción de la compactificación de Alexandroff tiene como consecuencia directa el siguente teorema:

**Teorema 4.1.2.** *Todo espacio Hausdorff localmente compacto es un espacio de Tychonoff.*

*Demostración.* Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico Hausdorff localmente compacto y $((X^*, \tau^*), i)$ su compactificación de Alexandroff. Entonces, la aplicación inclusión $i : X \longrightarrow X^*$ nos da un homeomorfismo $i : X \longrightarrow i(X) \subset X^*$. Como $X^*$ es un espacio Hausdorff compacto, tenemos que $X$ es homeomorfo a un subespacio de un espacio Hausdorff compacto y por el *Corolario* 3.1.28, $X$ es un espacio Tychonoff. □

A continación, veremos un resulatdo en el que se muestra porqué la compactificación de Alexandroff se considera la compactificación minimal.

**Lema 4.1.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico no compato, localmente compacto y Hausdorff. Consideremos su compactificación de Alexandroff $((X^*, \tau^*), i)$. Si $((K, \tau_K), f)$ es una compactificación de $(X, \tau)$, se tiene que $((X^*, \tau^*), i) \leq ((K, \tau_K), f)$.*

*Demostración.* Sea $X^* = X \cup \{p\}$, consideramos la aplicación $F : K \longrightarrow X^*$ definida como

$$F(k) = \begin{cases} p, & k \in K \setminus f(X) \\ f^{-1}(k), & k \in f(X), \end{cases}$$

de donde tenemos que $F \circ f = i$, como podemos ver en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "F"] & & X^* \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Falta ver que la aplicación $F : K \longrightarrow X^*$ es continua. Sea $U \in \tau^*$, si $p \notin U$, se tiene que $F^{-1}(U) = f(U)$ es abierto en $f(X)$ por ser $f$ embebimiento. Como $X$ es localmente compacto, por el *Lema* 3.2.6, $f(X)$ también es localmente compacto y con ello, por el *Lema* 3.2.5, $f(X)$ es abierto en $(K, \tau_K)$. Por lo tanto, $F^{-1}(U)$ es abierto en $(K, \tau_K)$.

Ahora, si $p \in U$, entonces $X^* \setminus U$ es compacto en $X$, por lo tanto,

$$F^{-1}(X^* \setminus U) = K \setminus F^{-1}(U) = f(X^* \setminus U)$$

es la imagen de un compacto por una aplicación continua, luego por el *Lema* 2.2.25, compacto en $(K, \tau_K)$. Además, $K \setminus F^{-1}(U)$ es un compacto en el espacio Hausdorff $K$, luego por el *Lema* 3.1.7, $K \setminus F^{-1}(U)$ es cerrado en $(K, \tau_K)$. □

## 4.2. La compactificación de Stone-Čech

En la *Sección* 4.1 hemos estudiado la compactificación por un punto, que podría considerarse la compactificación minimal, mientras que en esta sección estudiaremos la compactificación de Stone-Čech, a la que podríamos considerar una compactificación maximal.

A continuación, se muestra la construcción de la compactificación de Stone-Čech, utilizando un procedimiento parecido al usado en el *Teorema* 3.1.23, pero esta vez con las funciones continuas y acotadas de $X$ en $\mathbb{R}$:

Sea $X$ un espacio topológico Tychonoff. Consideramos $C^*(X)$ el conjunto de las funciones continuas y acotadas de $X$ en $\mathbb{R}$, en las cuales se puede tomar el rango de $f \in C^*(X)$ como un intervalo cerrado y acotado $I_f$ de $\mathbb{R}$. Como $X$ un espacio Tychonoff, por el *Lema* 3.1.22 las funciones del conjunto $C^*(X)$ separan puntos de conjuntos cerrados en X y por lo tanto, la función evaluación

$$e : X \to \prod_{f \in C^*(X)} I_f$$

definida como $[e(x)]_f = f(x)$ es un embebimiento de $X$ en $\prod I_f$ por el *Lema* 3.1.3. Observamos que $f = \pi_f \circ e$, donde $\pi_f$ es la $f$-ésima proyección.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & e(X) \arrow[dl, "\pi_f"] \\ & I_f & \end{tikzcd}$$

Con todo esto, ya podemos definir la compactificación de Stone-Čech.

**Definición 4.2.1.** La *compactificación de Stone-Čech* de $X$ es la clausura $\beta X$ de $e(X)$ en el producto $\prod I_f$. Formalmente, se escribe $(\beta X, e)$.

El siguiente resultado muestra que toda aplicación continua de un espacio Tychonoff $X$ en un espacio compacto y Hausdorff se puede extender a la compactificación de Stone-Čech $\beta X$ de X.

**Teorema 4.2.2.** *Sean $X$ un espacio topológico Tychonoff y $K$ un espacio Hausdorff compacto. Si $f : X \to K$ es una aplicación continua, existe una aplicación continua $F : \beta X \to K$ tal que $F \circ e = f$.*

*Demostración.* Por el *Corolario* 3.1.28, $K$ es un espacio Tychonoff y por el *Lema* 3.1.23, puede ser embebido en un cubo $\prod_{g\in C^*(K)} I_g$ donde $C^*(K)$ es el conjunto de funciones continuas y acotadas de K en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{f\in C^*(X)} I_f & & \prod_{g\in C^*(K)} I_g \\
\cup & & \cup \\
e(X) & & e'(K) \\
e\uparrow & & \uparrow e' \\
X & \xrightarrow[f]{\hspace{2cm}} & K
\end{array}$$

Podemos definir una aplicación $H : \prod_{f\in C^*(X)} I_f \to \prod_{g\in C^*(K)} I_g$ de la siguiente manera: para cada $t \in \prod_{f\in C^*(X)} I_f$, tenemos que la $g$-ésima coordenada de $H(t)$ es $[H(t)]_g = t_{g\circ f}$ con $g \in C^*(K)$. Notemos que $g \circ f \in C^*(X)$, ya que tenemos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & K \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Por el *Teorema* 2.3.5, la aplicación $H$ es continua si y solo si su composición con la proyección $\pi_g$ lo es para todo $g \in C^*(K)$. Tenemos $(\pi_g \circ H)(t) = \pi_{g\circ f}(t)$, luego $H$ es continua.

Ahora veamos que $H(e(X)) \subseteq e'(K)$. Dado $x \in X$, tenemos que:

$$H(e(x))_g = [e(x)]_{g\circ f} = g \circ f(x) = [e'(f(x))]_g$$

Por lo tanto, $H(e(x)) = e'(f(x))$ para todo $x \in X$, y con ello $H(e(X)) \subseteq e'(K)$.

Además, $e(X)$ es denso en $\beta X$ y por ser $H$ continua tenemos que, por la *Proposición* 2.2.19, $H(\beta X) = H(\overline{e(X)}) \subseteq \overline{H(e(X))}$. Además, como $e(X)$ es denso en $\beta X$ y $H$ es continua, por el *Lema* 3.1.13, $H(e(X))$ es denso en $H(\beta X)$. Luego, como $e'(K)$ es cerrado y contiene a $H(e(X))$, entonces $H(\beta X) \subseteq e'(K)$. Con esto ya podemos definir la aplicación $F : \beta X \to K$ dada por $F = (e')^{-1} \circ H|_{\beta X}$. Esta aplicación $F : \beta X \to K$ es continua y veamos que verifica $F \circ e = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & & K \\
X \arrow[r, "e"'] \arrow[urr, dashed, "f"] & \beta X \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "F"'] & e'(K) \arrow[u, "(e')^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Dado $x \in X$, teniendo en cuenta que $H(e(x)) = e'(f(x))$, obtenemos que

$$F \circ e(x) = e'^{-1}[H(e(x))] = e'^{-1}[e'(f(x))] = f(x),$$

como queríamos ver. □

Esta propiedad de extensión es una de las más importantes de la compactificación de Stone-Čech. De hecho, caracteriza a este tipo de compactificaciones como veremos a continuación.

Llamaremos compactificación de Stone-Čech a cualquier compactificación de $X$ topológicamente equivalente a $(\beta X, e)$.

A continuación, enunciaremos un lema auxiliar que utilizaremos para demostrar un resultado posterior (*Lema* 4.2.4) en el que se demuestra que la aplicación $F$ descrita en la *Definición* 4.0.3 envía los puntos de $K_2 \setminus h_2(K)$ a $K_1 \setminus h_1(X)$.

**Lema 4.2.3.** *Sean $S$ y $T$ espacios topológicos con $S$ Hausdorff. Si $f : S \longrightarrow T$ es una aplicación continua tal que $f|_A : A \longrightarrow f(A)$ es un homeomorfismo donde $A$ es un subespacio denso de $S$. Entonces, $f(S \setminus A) \subseteq T \setminus f(A)$.*

*Demostración.* Supongamos por reducción al abusurdo que $f(S \setminus A) \nsubseteq T \setminus f(A)$, es decir $f(S \setminus A) \cap f(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existen $x \in A$ e $y \in S \setminus A$ con $f(x) = f(y)$. Como $S$ es Hausdorff, existen $U$ y $V$ abiertos con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Además, $U \cap A$ es un abierto en $A$ con $x \in U \cap A$ y como la aplicación

$$f|_A : A \longrightarrow f(A)$$

es un homeomorfismo, entonces $f(U \cap A)$ es un entono abierto de $f(x)$ en $f(A)$. Por lo tanto, $f(U \cap A) = W \cap f(A)$ donde $W$ es un abierto en $T$ con $f(x) \in T$. Ahora, como $f(x) = f(y) \in W$ y $f$ es continua, existe un $\tilde{V}$ abierto en $S$ con $y \in \tilde{V}$ y tal que

$$y \in \tilde{V} \subseteq f^{-1}(W).$$

Consideremos el conjunto $V_1 = \tilde{V} \cap V$ que es abierto en $S$ y que cumple $y \in \tilde{V} \cap V$. Como $A$ es denso en $S$, $V_1 \cap A \neq \emptyset$, es decir, existe $z \in V_1 \cap A \subseteq V$, luego $z \in V$. Ademas, como $V_1 \subseteq \tilde{V} \subseteq f^{-1}(W)$, se tienen que $f(V_1) \subseteq W$. Pero esto no es posible, ya que entonces se tendría que $f(z) \in f(A)$ y $f(z) \in W$, lo que implica que

$$f(z) \in W \cap f(A) = f(U \cap A).$$

Como $f|_A$ es un homeomorfismo, obtendríamos que $z \in U$ y por lo tanto $U \cap V \neq \emptyset$. □

**Lema 4.2.4.** *Sean $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ dos compactificaciones de $X$ con $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$. Si $F : K_2 \longrightarrow K_1$ es la aplicación continua tal que $F \circ h_2 = h_1$, entonces se tiene que:*

1. *$F|_{h_2(X)}$ es un homeomorfismo entre $h_2(X)$ y $h_1(X)$.*
2. *$F$ lleva $K_2 \setminus h_2(X)$ en $K_1 \setminus h_1(X)$.*

*Demostración.* Veamos las dos afirmaciones:

1. Por simplificar la notación, denominamos $\tilde{h}_1 : X \to h_1(X)$ y $\tilde{h}_2 : X \to h_2(X)$, con $\tilde{h}_1(x) = h_1(x)$ y $\tilde{h}_2(x) = h_2(x)$ para $x \in X$. Tenemos que $\tilde{h}_1$ y $\tilde{h}_2$ son homeomorfismos y por lo tanto podemos construir el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} h_2(X) \arrow[r, "\tilde{h}_2^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "F|_{h_2(X)}"'] & X \arrow[r, "\tilde{h}_1"] & h_1(X) \end{tikzcd}$$

   Por lo tanto, $F|_{h_2(X)} = \tilde{h}_1 \circ \tilde{h}_2^{-1}$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos.

2. Basta tomar $S = K_2$, $T = K_1$, $A = h_2(X)$ y $f = F$ en el *Lema* 4.2.3.

$\square$

**Teorema 4.2.5.** *Si $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ son compactificaciones de $X$ y $(K_2, h_2)$ cumple la propiedad de la extensión del* Teorema *4.2.2, entonces $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$.*

*Demostración.* Como el espacio $(K_2, h_2)$ cumple la propiedad de la extensión del *Teorema* 4.2.2, tenemos que toda aplicación continua de $X$ en un espacio compacto $K$ puede extenderse a una aplicación continua de $K_2$ en $K$, es decir, si $K$ es un espacio compacto y $f : X \to K$ es una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua $G : K_2 \to K$ tal que $G \circ h_2 = f$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[d, "f"] \\ K_2 \arrow[r, "G"'] & K \end{tikzcd}$$

Ahora bien, como $(K_2, h_2)$ cumple esta propiedad de extensión y tenemos la aplicación $h_1 : X \to K_1$, entonces sabemos que existe una aplicación $F : K_2 \to K_1$ cumpliendo $F \circ h_2 = h_1$, como queríamos demostrar.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "h_2"'] \arrow[d, "h_1"] \\ K_2 \arrow[r, "F"'] & K_1 \end{tikzcd}$$

□

**Corolario 4.2.6.** *La compactificación de Stone-Čech $(\beta X, e)$ está caracterizada, salvo equivalencia topológica, por el* Teorema *4.2.2 de la propiedad de la extensión.*

Como consecuencia de los resultados anteriores obtenemos que la compactificación de Stone-Čech es maximal en la familia de las compactificaciones de $X$ parcialmente ordenadas por la relación $\leq$ intoducida en la *Definición* 4.0.3.

## 4.3. Compactificaciones por $n$ puntos

En la *Sección* 4.1 ya hemos visto la compactificación de Alexandroff o compactificación por un punto. Ahora vamos a introducir una generalización de dicha compactificación, las compactificaciones Hausdorff por $n$ puntos. En esta sección tomaremos como referencia [4] y [5].

**Definición 4.3.1.** Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff, $n \in \mathbb{N}$ y $h(X)$ una compactificación Hausdorff de $X$. Decimos que $h(X)$ es una *compactificación Hausdorff por $n$ puntos de $X$* si el conjunto $h(X) \setminus X$ tienen $n$ puntos y la denotaremos como $X_n^*$.

A continuación, se enuncia un teorema que caracteriza la existencia de las compactificaciones por $n$ puntos. Además, su demostración nos proporcionará una construcción del espacio $(X_n^*, \tau_n^*)$, lo que nos permitirá ver cómo es la topología en la compactificación.

**Teorema 4.3.2.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$X$ tiene una compactificación Hausdorff por $n$ puntos.*

2. *$X$ es localmente compacto y contiene un subconjunto compacto $K$ cuyo complementario es la unión de $n$ subconjuntos abiertos $\{G_i\}_{i=1}^n$ disjuntos dos a dos, tales que $K \cup G_i$ es no compacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

3. *$X$ es localmente compacto y contiene un subconjunto compacto $K$ cuyo complementario es la unión de $n$ subconjuntos abiertos $\{G_i\}_{i=1}^n$ disjuntos dos a dos, tales que $K \cup G_i$ no está contenido en ningún subconjunto compacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

4. *$X$ es localmente compacto y contiene $n$ subconjuntos abiertos $\{G_i\}_{i=1}^n$ disjuntos dos a dos, tales que $X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_n)$ es compacto, mientras que $X \setminus (G_1 \cup \cdots G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n)$ es no compacto para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

*Demostración.* A continuación, demostramos las siguientes implicaciones.

*1.* $\Longrightarrow$ *2.* Sea $X_n^*$ la compactificacion por $n$ puntos de $X$ y denotamos a los puntos de $X_n^* \setminus X$ por $\infty_1, \ldots \infty_n$. Como $X_n^*$ es Hausdorff, existe una familia de conjuntos abiertos $\{G_i'\}_{i=1}^n$ disjuntos dos a dos tales que $\infty_i \in G_i'$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Llamamos $G_i := G_i' \setminus \{\infty_i\}$ y como $X$ es denso en $X_n^*$, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el conjunto $G_i$ es un abierto no vacío de $X$. Por lo tanto,

$$K = X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_n) = X_n^* \setminus (G_1' \cup \cdots \cup G_n')$$

es un subconjunto cerrado de $X_n^*$. Como $X_n^*$ es compacto, entonces $K$ es compacto por el *Lema* 2.2.25. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} K \cup G_i &= X \setminus (G_1 \cup \cdots G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n) \\ &= (X_n^* \setminus (G_1' \cup \cdots G_{i-1}' \cup G_{i+1}' \cup \cdots \cup G_n')) \cap (X_n^* \setminus \{\infty_i\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $K \cup G_i$ fuese compacto, entonces por el *Lema* 3.1.7, tenemos que $K \cup G_i$ es un subconjunto cerrado de $X_n^*$ y por ello su complementario

$$X_n^* \setminus (K \cup G_i) = \{\infty_i\} \cup (G_1' \cup \cdots G_{i-1}' \cup G_{i+1}' \cup \cdots \cup G_n'),$$

es un subconjunto abierto de $X_n^*$. La intersección de $X_n^* \setminus (K \cup G_i)$ y $G_i'$ es $\{\infty_i\}$, luego que el conjunto $\{\infty_i\}$ es abierto en $X_n^*$, pero $\{\infty_i\} \cap X = \emptyset$, lo que contradice que $X$ sea denso en $X_n^*$. Por lo tanto, $K \cup G_i$ no es compacto. Por último, $X = X_n^* \setminus \{\infty_i\}_{i=1}^n$, luego $X$ es abierto en $X_n^*$ y por el *Corolario* 3.2.5, $X$ es localmente compacto.

*2.$\Longrightarrow$3.* Basta ver que si $K \cup G_i$ no es compacto, entonces no está contenido en un subespacio no compacto. Esto es consecuencia de que

$$K \cup G_i = X \setminus (G_1 \cup \cdots G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n),$$

y por lo tanto es un conjunto cerrado en $X$. Si $K \cup G_i$ estuviese contenido en un conjunto compacto, por el *Lema* 2.2.25, sería compacto.

*3.$\Longrightarrow$4.* De nuevo, esto se tiene ya que $K = X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_n)$ es compacto y

$$K \cup G_i = X \setminus (G_1 \cup \cdots G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n),$$

no es compacto, ya que si lo fuese, al estar contenido en sí mismo, contradiría que $K \cup G_i$ no está contenido en ningún subconjunto compacto.

*4.$\Longrightarrow$1.* Sean $K = X \setminus (G_i \cup \cdots \cup G_n)$ y consideramos $n$ elementos distintos $\{\infty_i\}_{i=1}^n$ con $\infty_i \notin X$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cualquier $A$ subespacio de $X$, denotamos $A^i = A \cup \{\infty_i\}$. Definimos:

$$\begin{aligned} &X_n^* = X \cup \{\infty_1, \ldots, \infty_n\} \text{ y} \\ &\mathscr{B}_n^* = \tau \cup \{A^i : \ A \in \tau, \ (K \cup G_i) \cap (X \setminus A) \text{ es compacto en } X \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

En primer lugar, vemos que $\mathscr{B}_n^*$ es base para un topología $\tau_n^*$ en $X_n^*$, aplicando el *Teorema* 2.2.7.

1. $\bigcup_{B \in \mathscr{B}_n^*} B = X_n^*$, ya que $\bigcup_{B \in \tau} B = X$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $\infty_i \in G_i \cup \{\infty_i\}$.

2. Dados $B_1$, $B_2 \in \mathscr{B}^*$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathscr{B}_n^*$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Si $x \in X$, basta tomar
$$B_3 = B_1 \cap B_2 \cap X \in \tau \subset \mathscr{B}_n^*.$$
Y si $x \notin X$, entonces $x = \infty_i$, $B_1 = A_1^i$, $B_2 = A_2^i$ y se tiene que
$$(K \cup G_i) \cap X \setminus (A_1 \cap A_2) = [(K \cup G_i) \cap (X \setminus A_1)] \cup [(K \cup G_i) \cap (X \setminus A_2)]$$
es compacto por ser unión finita de compactos y por lo tanto basta tomar $B_3 = A_1^i \cap A_2^i$.

En segundo lugar, notemos que $\tau_n^*|_X = \tau$.

En tercer lugar, vemos que $(X_n^*, \tau_n^*)$ es un espacio Hausdorff. Sean $x, y \in X_n^*$ con $x \neq y$. Si $x, y \in X$, por ser $X$ Hausdorff, existen abiertos $U$ y $V$ en $X$ con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, y por ser abiertos en $X$ también son abiertos en $X_n^*$. Si $x = \infty_i$ e $y \in X$, como $X$ es localmente compacto y Hausdorff, por el *Lema* 3.2.2, existe $V$ entorno abierto de $y$ en $X$ con $\overline{V}$ compacto. Observemos que $X \setminus (K \cup G_i) = G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n$, luego $K \cup G_i$ es cerrado en $X$. Entonces $(K \cup G_i) \cap \overline{V}$ es cerrado en el compacto $\overline{V}$ y por el *Lema* 2.2.25, es compacto. Por lo tanto, $U = (X \setminus \overline{V}) \cap \{\infty_i\}$ es un entorno abierto de $\infty_i$ en $X_n^*$ con $U \cap V = \emptyset$. Por último, si $x = \infty_i$ e $y = \infty_j$ con $i \neq j$, entonces basta tomar los abiertos $G_i^i, G_j^j$.

A continuación, veamos que $(X_n^*, \tau_n^*)$ es compacto. Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $X_n^*$, existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ tales que
$$\infty_1 \in U_{i_1}, \ldots, \infty_n \in U_{i_n}.$$
Por lo tanto, existen $A_1, \ldots, A_n \in \tau$ con
$$A_1^1 \subseteq U_1, \ldots, A_n^n \subseteq U_n$$
tales que $(K \cup G_i) \cap (X \setminus A_i)$ es compacto en $X$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $G_i \cap G_j = \emptyset$ si $i \neq j$, tenemos:
$$\bigcap_{i=1}^{n} (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1} \cup A_i \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$$
Por lo tanto,
$$X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Big( X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1} \cup A_i \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n) \Big),$$
y esto implica:
$$\begin{aligned} X_n^* \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}) &\subseteq X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Big( X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1} \cup A_i \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n) \Big) \\ &= \bigcup_{i=0}^{n} ((K \cup G_i) \cap (X \setminus A_i)). \end{aligned}$$

que es compacto por ser unión finita de compactos. Por lo tanto, $X_n^* \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n})$ es un cerrado en el compacto $\bigcup_{i=0}^n ((K \cup G_i) \cap (X \setminus A_i))$, luego por el *Lema* 2.2.25, $X_n^* \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n})$ es compacto. Por lo tanto, está cubierto por un número finito de elementos de $\mathscr{U}$ y con ello, $X_n^* = \Big(X_n^* \setminus (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n})\Big) \cup (U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n})$ también está cubierto por un número finito de abiertos de $\mathscr{U}$ y en consecuencia, es compacto.

Por último, veamos que $X$ es denso en $X_n^*$. Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para todo $A^i = A \cup \{\infty_i\}$ entorno abierto de $\infty_i$ en $X_n^*$, se tiene que $A \in \tau$ y

$$(K \cup G_i) \cap (X \setminus A)$$

es compacto en $X$. Como $K \cup G_i$ no es compacto, entonces $X \setminus A \neq X$, es decir, $A \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$A^i \cap X \neq \emptyset$$

para todo entorno $A^i$ de $\infty_i$ y todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, luego $X$ es denso en $X_n^*$.

$\square$

A continuación, veamos la relación entre las compactificaciones por $n$ puntos de un espacio.

**Definición 4.3.3.** Sean $X$ un espacio topológico y $\mathscr{G} = \{G_i\}_{i=0}^n$ una familia de subconjuntos abiertos disjuntos dos a dos tales que:

1. $X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_n)$ es compacto.

2. $X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \cdots \cup G_n)$ no es compacto para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Entonces, a la familia $\mathscr{G} = \{G_i\}_{i=0}^n$ se le denominará *n-estrella* de $X$ y el conjunto de las $n$-estrellas de $(X, \tau)$ lo representaremos como $\mathscr{E}_n(X)$.

A partir de ahora, al conjunto $X \setminus (G_1 \cup \cdots \cup G_n)$, el complementario de la $n$-estrella, lo denotaremos por $K_G$.

Con la implicación *4.*$\Longrightarrow$*1.*, del *Teorema* 4.3.2 hemos demostrado que cada $n$-estrella de un espacio localmente compacto da lugar a una compactificación por $n$ puntos, por lo tanto la llamaremos la compactificación inducida por la $n$-estrella. Ahora podemos definir la relación $\sim$ en $\mathscr{E}_n(X)$ como:

$$\mathscr{G} \sim \mathscr{H} \iff \begin{array}{l} \text{los elementos } \{G_i\}_{i=1}^n \text{ y } \{H_i\}_{i=1}^n, \text{ de } \mathscr{G} \text{ y } \mathscr{H}, \text{ respectivamente, pueden} \\ \text{ordenarse de manera que } (K_H \cup H_i) \cap (X \setminus G_i) \text{ es compacto en } X \text{ para cada } i. \end{array}$$

Teniendo en cuanta esta relación, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.4.** *Si $X$ es un espacio localmente compacto, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{E}_n(X)$ y hay una biyección entre las clases de equivalencia de $\mathscr{E}_n(X)$ y las diferentes compactificaciones por $n$ puntos de $X$.*

*Demostración.* Sean $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ dos elementos de $\mathscr{E}_n(X)$, con $\mathscr{G} = \{G_i\}_{i=1}^n$ y $\mathscr{H} = \{H_i\}_{i=1}^n$. Sean $X_n^*$ y $X_n^{**}$ las compactificaciones inducidas por $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$, respectivamente. Denotamos los puntos de $X_n^* \setminus X$ como $\{\infty_i\}_{i=1}^n$ y los puntos $X_n^{**} \setminus X$ como $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$. Ahora, supongamos que $\mathscr{G} \sim \mathscr{H}$, es decir, los elementos $\{G_i\}_{i=1}^n$ y $\{H_i\}_{i=1}^n$, pueden ordenarse de manera que $(K_H \cup H_i) \cap (X \setminus G_i)$ es compacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, si $U$ es cualquier subconjunto de abierto en $X$ tal que $(K_G \cup G_i) \cap (X \setminus U)$ es compacto, entonces, por el *Lema* 2.2.25, $(K_H \cup H_i) \cap (X \setminus U)$ es compacto por ser cerrado en el compacto

$$[(K_H \cup H_i) \cap (X \setminus G_i)] \cup [(K_G \cup G_i) \cap (X \setminus U)].$$

Como consecuencia, si $V$ es cualquier conjunto abierto de $X_n^*$ que contiene a $\infty_i$, entonces $(V \setminus \{\infty_i\}) \cup \{\Delta_i\}$ es un conjunto abierto de $X_n^{**}$. Por lo tanto, se existe una aplicación continua $h : X_n^{**} \longrightarrow X_n^*$ definida por $h(\Delta_i) = \infty_i$ y $h(x) = x$ si $x \in X$. Además, como $h$ es una aplicación continua y biyectiva de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, por el *Lema* 3.1.8, $h$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, si $\mathscr{G} \sim \mathscr{H}$, se tiene que las compactificaciones inducidas por $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ son equivalentes.

Veamos que si $X_n^*$ y $X_n^{**}$ son equivalentes, entonces $\mathscr{G} \sim \mathscr{H}$. Por hipótesis, existe un homeomorfismo $h : X_n^{**} \longrightarrow X_n^*$ tal que $h \circ i^{**} = i^*$, donde $i^{**} : X \longrightarrow X_n^{**}$ e $i^* : X \longrightarrow X_n^*$ son las inclusiones. Podemos reordenar los elementos $\{H_i\}_{i=1}^n$ de manera que $h(\Delta_i) = \infty_i$, luego $h(H_i) = G_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, y con ello $(X \setminus H_i) = (X \setminus G_i)$.

Por lo tanto,

$$K_H = (K_H \cup H_i) \cap (X \setminus H_i) = (K_H \cup H_i) \cap (X \setminus G_i),$$

es compacto. Luego $\mathscr{G} \sim \mathscr{H}$.

Como consecuencia de las dos propiedades que hemos probado, obtenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

$\square$

# Bibliografía


[1] M. Eisenberg. *Topology* Holt, Rinehart and Winston. 1974.

[2] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[3] M. Macho-Stadler. *Topología.* Disponible en: `https://www.ehu.eus/~mtwmastm/Topologia1415.pdf`.

[4] K. D. Magill: *N-points compactifications.* The American Mathematical Monthly, 72(10), (1965), 1075-1081.

[5] J. Margalef Roig, E. Outerelo Domínguez, J.L. Pinilla Ferrando. *Topología.* Vol. III. Alhambra, 1980.

[6] J.R. Munkres. *Topología.* 2ª. Springer-Velag, 1994.

[7] A. Mysior. *A Regular Space Which is Not Completely Regular.* Procedings of the American Mathematical Society, 81(4), (1981), 652-653.

[8] V. Runde. *A Taste of Topology.* Springer, 2005.

[9] S. Willard. *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Company, 1970.