Facultad de Ciencias

Espacios Polacos (Polish Spaces)

Trabajo de Fin de Grado para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Miriam Gutiérrez Serrano

Director: Jesús Araujo Gómez

Junio - 2024

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a todas las personas que han estado a mi lado durante esta etapa. Primero a mi familia por aguantar mis épocas de estrés máximo, y sobretodo a mi padre que me ha devuelto todas las llamadas después de cada uno de mis exámenes, ya fuese parcial o final.

A los amigos (o ya segunda familia) que he conocido a lo largo de la carrera, gracias por todas las fiestas, los cafés y las risas. No hubiese aguantado estos años sin vosotros, aunque no era necesario arriesgar nuestras vidas alguna que otra vez. Y también a mis amigos de toda la vida, que sabemos que siempre vamos a estar ahí los unos para los otros. Y, como no, a los amigos del Erasmus, porque fue de los mejores años de toda la carrera y sé que aunque cada uno estemos en una punta, nos volvemos a ver de vez en cuando.

Por último, y los más importantes: mis perros. Me han acompañado en todas mis horas de estudio y descanso, no me han juzgado por hablar sola delante del ordenador y, sin duda, son lo mejor del mundo.

Y, por supuesto, gracias a Jesús, mi tutor, por su paciencia y comprensión, sobre todo sabiendo que estaba con el máster y que no siempre podía atender a las reuniones o tener todo listo a tiempo.

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de los espacios polacos, es decir, espacios topológicos separables y completamente metrizables. El objetivo es presentar sus propiedades fundamentales y una selección de ejemplos que ilustran las ventajas de trabajar en este marco.

Las condiciones de separabilidad y completitud convierten a los espacios polacos en un marco ideal para combinar las herramientas de la topología y de la teoría de la medida. Tras fijar la definición de espacio polaco y exponer sus características esenciales, se presentan ejemplos clásicos. A continuación, aprovechando el carácter metrizable y separable, se estudian las medidas en estos espacios. Finalmente, se introducen los conjuntos analíticos y se estudia la obtención de determinados subconjuntos en el contexto de estos espacios.

Palabras clave: Espacio polaco, separabilidad, métrica completa, conjuntos G_δ, conjuntos de Borel, conjuntos analíticos, espacio de Baire, espacio de Cantor.

Abstract

This work focuses on the study of Polish spaces, that is, separable topological spaces whose topology comes from a complete metric. Its aim is to present their fundamental properties and a selection of examples that illustrate the advantages of working within this framework.

The conditions of separability and completeness make Polish spaces the ideal setting in which to combine the tools of topology and measure theory. After stating the definition of Polish space and outlining its essential features, classical examples are presented. Next, building on their metrizable and separable structure, we study measures on these spaces. Finally, analytic sets are introduced and the formation of certain subsets within the context of Polish spaces is examined.

Key words: Polish space, separability, complete metric, G_δ sets, Borel sets, analytic sets, Baire space, Cantor set.

Índice general

Introducción

La historia de los espacios polacos esta estrechamente ligada al desarrollo de la escuela polaca matemática, una de las más influyentes del siglo XX, especialmente en los campos de topología, lógica, teoría de conjuntos y análisis funcional. El término "espacio polaco" proviene de la nacionalidad de los matemáticos que desarrollaron su teoría, en su mayoría durante el periodo de entreguerras, y fue popularizado en reconocimiento al liderazgo ejercido por tres figuras fundamentales en la escuela de Varsovia: Wacalw Sierpinski, Kazimierz Kuratowski y Alfred Tarski.

Aunque el término no se originó en Polonia, su uso se consolidó cuando matemáticos franceses comenzaron a emplearlo como homenaje a las contribuciones de esta escuela al estudio de espacios métricos. Así, el nombre no solo refleja las propiedades matemáticas de estos espacios, sino también rinde homenaje a una tradición matemática que impulsó desarrollos claves en diversas áreas como la teoría de probabilidades.

A la vez surgieron los conjuntos analíticos, introducidos inicialmente por Nikolái Luzin y Mikhail Souslin en Moscú, pero desarrollados en profundidad también por los matemáticos polacos. Estos conjuntos ampliaron el marco de los conjuntos de Borel y permitieron abordar propiedades topológicas y medibles en contextos más generales.

En esta memoria nos centraremos en el estudio de los espacios polacos desde una perspectiva topológica y de medida, así como su relación con los conjuntos de Borel y los conjuntos analíticos. A lo largo del trabajo, se introducen conceptos y resultados clave acompañados de ejemplos clásicos y construcciones detalladas. Para ello, se sigue principalmente el estudio desarrollado por Donald L.Cohn en el libro Measure Theory (ver [4]), una referencia fundamental en este área.

Además, a lo largo del trabajo, se ha intentado no sólo exponer los resultados teóricos principales, sino también desarrollar el contexto que los motiva y las técnicas que permiten demostrarlos. De este modo, se podrá apreciar no solo la teoría de los espacios polacos, sino también su papel como marco general en el que confluyen diversas ramas de las matemáticas.

En primer lugar, se presenta la definición formal de espacio polaco y se desarrollan sus propiedades topológicas fundamentales. Se parte del estudio de su estabilidad bajo operaciones topológicas como uniones disjuntas, la formación de productos o la toma de subespacios, analizando en qué condiciones se conserva la estructura polaca. Se incluye además una caracterización esencial que nos permitirá ilustrar ejemplos fundamentales y que proporciona una herramienta clave para la construcción teórica de nuestro estudio de espacios polacos. Este capítulo sienta así las bases topológicas, en particular desde el punto de vista de la topología de espacios métricos, necesarias para el desarrollo de este trabajo.

El capítulo dos esta dedicado al estudio de la teoría de la medida sobre espacios polacos. Se recuerdan la noción de función medibles y la σ-álgebra de Borel, y se exploran propiedades relevantes que nos permitirán demostrar cómo se comportan ciertas medidas en estos espacios. Asimismo, se abordan propiedades importantes como la existencia de regularidad exterior e interior.

Finalmente, veremos los conjuntos analíticos en el contexto de espacios polacos. En primer lugar, se abordan propiedades fundamentales de los conjuntos analíticos que nos permiten ilustrar resultados más generales en el contexto de estos espacios. Para el análisis de estos conjuntos, se hace uso de espacios canónicos como el espacio de Baire y el espacio de Cantor presentados previamente, debido a su papel como espacios desde los cuales es posible obtener, mediante homeomorfismos o funciones adecuadas, representaciones de conjuntos analíticos y conjuntos de Borel en otros espacios polacos.

Capítulo 1

Espacios polacos

En este capítulo, vamos a introducir la definición de espacio polaco para posteriormente presentar el concepto de conjunto analítico. La mayoría de resultados serán igualmente válidos en el contexto más amplio de los espacios métricos completos y separables.

1.1. Definición y ejemplos básicos

Se dice que un espacio topológico X es metrizable si existe una métrica d en X que genera la topología original; de esta forma, se dice que la métrica d metriza X.

Recordemos además que un espacio topológico se dice separable si admite un subconjunto denso y contable.

Definición 1.1. *Un espacio polaco es un espacio topológico separable que puede ser metrizado bajo una métrica completa.*

Veamos a continuación algunos ejemplos de espacios polacos:

Ejemplo 1.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio $\mathbb{R}^n$, con su topología usual, es polaco.*

Ejemplo 1.2. *Cada espacio de Banach separable, con la topología inducida por su norma, es polaco.*

Ejemplo 1.3. *Veremos ahora que todo espacio compacto metrizable es polaco. En primer lugar, probaremos que el hecho de ser compacto implica que el espacio es completo.*

Proposición 1.1. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Hay que ver que la sucesión es convergente.

Como X es compacto existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) convergente a un punto $x \in X$. Veamos que entonces la sucesión (x_n) converge a $x \in X$.

Debido a que (x_n) es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_1$ se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, teníamos que la subsucesión (x_{n_k}) es convergente a x, luego existe k_0 tal que si $n_k > n_{k_0}$ se cumple que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$. Como $n, n_k > n_0$, se tiene

$$d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando ambas desigualdades, si $n > n_0$,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de modo que la sucesión (x_n) converge a x. □

Por último, veremos que el hecho de ser compacto también implica que el espacio es separable.

Proposición 1.2. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Encontraremos un subconjunto denso y numerable de X.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

Como X es compacto, encontraremos una familia finita de bolas $B(x_1^n, \frac{1}{n}), ..., B(x_{m_n}^n, \frac{1}{n})$ tales que

$$X = \bigcup_{j=1}^{m_n} B\left(x_j^n, \frac{1}{n}\right)$$

Llamamos $A_n := \{x_1^n, ..., x_{m_n}^n\}$ y definimos $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Obviamente A es contable. Veamos que A es denso. Fijamos $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Vamos a ver que existe $x_0 \in A$ con $x_0 \in B(x, \epsilon)$. Consideramos $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{n} < \epsilon$. Sabemos que existe $x_j^n \in A_n$ con $x \in B(x_j^n, \frac{1}{n})$. Con ello $d(x, x_j^n) < \frac{1}{n} < \epsilon$, es decir, $x_0 := x_j^n \in B(x, \epsilon)$.

□

Ejemplo 1.4. *Más en general, todo espacio de Hausdorff compacto que admite una base contable es polaco. Una prueba de este hecho, puede encontrarse en [12].*

1.2. Primeras propiedades

En esta sección recopilamos las propiedades fundamentales que utilizaremos a lo largo del trabajo para asegurar la estabilidad de los espacios polacos bajo las construcciones que se presentan en las secciones posteriores.

Observación 1.1. *Para realizar las siguientes demostraciones, es necesario tener en cuenta lo siguiente:*

Si X es un conjunto segundo contable, es decir, su topología admite una base contable, entonces es separable: si $\mathcal{U}$ es una base contable de X, podemos construir un subconjunto denso contable de X tomando un punto de cada conjunto no vacío de $\mathcal{U}$.

Sin embargo, en general, el recíproco no se cumple, aunque sí se cumple en el caso de los espacios métricos: si d metriza la topología X y D es un subconjunto denso contable de X, entonces la colección de bolas abiertas $B(x,r)$ con $x \in D$ y r racional positivo, forman una base numerable para la topología de X.

Por otra parte, si un espacio topológico X es segundo contable, e Y es un subespacio de X, entonces Y es segundo contable: si definimos $\mathcal{U}$ una base contable de X, entonces $\{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una base contable de Y.

En consecuencia, todo espacio metrizable separable es segundo contable. Por lo tanto, si X es un espacio metrizable separable e Y es un subespacio de X, entonces Y es segundo contable y así separable.

Proposición 1.3. *Todo subespacio cerrado, y todo subespacio abierto, de un espacio polaco son polacos.*

Demostración. Sea X un espacio polaco. Sabemos que todo subespacio de un espacio separable que se puede metrizar es separable por Observación (1.1); por lo tanto, tenemos que todo subespacio de X es separable. De este modo, es suficiente demostrar que tanto los subespacios cerrados como los abiertos pueden ser metrizados de acuerdo con una métrica completa.

Supondremos entonces que d es una métrica completa en X. Primero estudiamos el caso de los cerrados.

Recordemos que un subespacio métrico de X es completo con respecto a la métrica si y solo si es cerrado. Por ello, si F es un subespacio cerrado de X, tendremos que la restricción $d|_F$ es una métrica completa para F. Por tanto, F es un espacio polaco.

A continuación, veremos el caso de los abiertos. Para ello, sea ahora U un subespacio abierto de X. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $U \neq X$. Como es habitual, definimos la distancia entre un punto x y el subespacio no vacío U^c, $\text{dist}(x, U^c)$ de la siguiente manera:

$$\text{dist}(x, U^c) := \text{ínf}\{d(x,z) : z \in U^c\}$$

Es fácil de ver que

$$d_0(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{\text{dist}(x,U^c)} - \frac{1}{\text{dist}(y,U^c)} \right|$$

define una métrica d_0 en el conjunto U. Veremos que d_0 metriza la topología que U hereda como subespacio de X y, por otra parte, que U es un subespacio completo bajo d_0.

Para ver que d_0 metriza U, hay que ver que genera la topología de U. Esto es equivalente a ver que los cerrados en ambas topologías coinciden o, de otra manera, que las clausuras de todos los conjuntos coinciden. Para ello es suficiente ver que una sucesión (x_n) converge a un punto x_0 con respecto a d_0 si y solo si lo hace con respecto a d.

En definitiva, hay que ver que (U, d_0) es completo y que todas las sucesiones convergen a los mismos puntos. En primer lugar, $d(x, y) \leq d_0(x, y)$ para todo $x, y \in U$.

Sea (x_n) una sucesión en U. Si (x_n) converge a $x_0 \in U$ con respecto a d_0, por lo anterior, también converge a x_0 con respecto a d.

Por otra parte, si (x_n) converge a $x_0 \in U$ con respecto a d, veremos a continuación que (x_n) converge a x_0 con respecto a d_0.

Primero veamos que $\text{dist}(x_n, U^c)$ converge a $\text{dist}(x_0, U^c)$, o equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} |\text{dist}(x_n, U^c) - \text{dist}(x_0, U^c)| = 0.$$

Sabemos que (x_n) tiende a x_0 respecto de d. Por la desigualdad triangular en d, dado $y \in U^c$,

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y),$$

con lo que

$$\text{dist}(x_n, U^c) \leq d(x_n, x_0) + \text{dist}(x_0, U^c)$$

y

$$\text{dist}(x_n, U^c) - \text{dist}(x_0, U^c) \leq d(x_n, x_0).$$

Del mismo modo, $d(x_0, y) \leq d(x_n, x_0) + d(x_n, y)$, con lo que $\text{dist}(x_0, U^c) \leq d(x_n, x_0) + \text{dist}(x_n, U^c)$. Con ello concluimos que,

$$|\text{dist}(x_n, U^c) - \text{dist}(x_0, U^c)| \leq d(x_n, x_0).$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} |\text{dist}(x_n, U^c) - \text{dist}(x_0, U^c)| \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

Entonces, tenemos que $\text{dist}(x_n, U^c)$ converge a $\text{dist}(x_0, U^c)$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\text{dist}(x_n, U^c)} - \frac{1}{\text{dist}(x_0, U^c)} \right| = 0$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} d_0(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) + \left| \frac{1}{\text{dist}(x_n, U^c)} - \frac{1}{\text{dist}(x_0, U^c)} \right| = 0$$

Acabamos entonces de probar que la convergencia de sucesiones con respecto a d y a d_0 coincide, y por tanto, las topologías generadas por d y d_0 son las misma.

Veamos ahora que (U, d_0) es completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en U con respecto a d_0. Como $d(x, y) \leq d_0(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in U$, entonces todas las sucesiones de Cauchy con respecto a d_0 son sucesiones de Cauchy con respecto a d. Por lo tanto, por ser X completo con respecto a d, (x_n) converge a un punto x_0 de X (con respecto a d). Tenemos que probar que $x_0 \in U$.

Supongamos que $x_0 \notin U$. Fijamos $\epsilon > 0$. Fijamos $k \in \mathbb{N}$ cualquiera y veamos que existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, tal que

$$d_0(x_k, x_m) \geq \epsilon.$$

Llamamos $a := \dfrac{1}{\mathrm{dist}(x_k, U^c)} > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dist}(x_n, U^c) = 0$, podemos tomar $m \geq k$ tal que

$$\mathrm{dist}(x_m, U^c) \leq \frac{1}{a+\epsilon},$$

y así

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(x_m, U^c)} \geq a + \epsilon,$$

es decir,

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(x_m, U^c)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_k, U^c)} \geq \epsilon.$$

Así,

$$d_0(x_m, x_k) \geq \frac{1}{\mathrm{dist}(x_m, U^c)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_k, U^c)} \geq \epsilon.$$

Por lo tanto, (x_n) no es de Cauchy con respecto a d_0, en contra de lo que habíamos supuesto. De esta forma, $x_0 \in U$. Por lo tanto, si (x_n) tiende a x_0 con respecto de d, hemos visto que (x_n) tiende a x_0 con respecto de d_0. Así, (x_n) coverge a $x_0 \in U$ y (U, d_0) es completo. $\square$

Observación 1.2. *En el caso de los subconjuntos cerrados, en la prueba de Proposición 1.3, tomamos como métrica asociada la restricción de la métrica original. Un proceso similar no puede llevarse a cabo en el caso de los subconjuntos abiertos como se ve en el siguiente ejemplo:*

Ejemplo 1.5. *Sabemos que $\mathbb{R}$ es un espacio polaco con la métrica usual. Por lo tanto, por Proposición 1.3, el intervalo abierto $(0,1)$ también es polaco.*

Consideremos la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, que es una sucesión de Cauchy en $(0,1)$ convergente a 0 (con respecto a la métrica usual). Observamos que esta sucesión no converge en $(0,1)$. Por consiguiente, el intervalo no es completo, aunque la proposición afirma que debería serlo. Esto indica que la métrica no puede ser la original y, por lo tanto, es necesario cambiar de métrica. Así, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ no será una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica d_0 (definida en la demostración de la Proposición 1.3).

De esta forma, las métricas d y d_0 consideradas en la prueba de la Proposición 1.3 comparten las mismas sucesiones convergentes, pero no las mismas sucesiones de Cauchy.

Para los siguientes resultados es necesario definir una técnica para construir métricas acotadas. Supongamos que d es una métrica en un espacio X. Veamos que

$$d'(x,y) = \min(1, d(x,y)) \tag{1.1}$$

define una métrica en X:

i) $d'(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$:

Dado que $d(x,y) \geq 0$, por ser d métrica, por definición de d', se tiene que $d'(x,y) = \min(1, d(x,y)) \geq 0$.

ii) $d'(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$:

Si $x = y$, entonces $d(x,y) = 0$ y $d'(x,y) = \text{mín}(1,0) = 0$. Por otro lado, si $d'(x,y) = 0$, entonces $d(x,y) = 0$, y como d es una métrica, se sigue que $x = y$.

iii) $d'(x,y) = d'(y,x)$ para todo $x, y \in X$:

Como d es métrica, $d(x,y) = d(y,x)$ y se tiene que $d'(x,y) = \text{mín}(1, d(x,y)) = \text{mín}(1, d(y,x)) = d'(y,x)$.

iv) Desigualdad triangular ($d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)$):

Notemos que, si $d(x,y) \geq 1$ ó $d(y,z) \geq 1$, entonces para cualesquiera $x, y, z \in X$ $d'(x,y) + d'(y,z) \geq 1 \geq d'(x,z)$. Por otra parte, si $d(x,y) < 1$ y $d(y,z) < 1$, entonces $d'(x,y) = d(x,y)$ y $d'(y,z) = d(y,z)$. Así deducimos que $d'(x,y) + d'(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \geq d'(x,z)$, por la definición de d', teniendo en cuenta de d es una métrica.

Podemos ver que la sucesiones de Cauchy y las convergentes con respecto a ambas métricas d y d' coinciden. Por ello, X es completo con respecto a d' y lo es con respecto a d. Además, d y d' generan la misma topología en X.

Para enunciar la siguiente proposición, debemos introducir el concepto de unión disjunta de espacios topológicos, también conocida como suma de espacios topológicos. Esta construcción permite combinar varios espacios disjuntos en un único espacio dotado de una topología que refleja las propiedades de cada una de ellas individualmente. Este concepto servirá como base para la construcción de nuevos espacios polacos.

Definición 1.2. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos disjuntos. Se considera $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, y se define sobre X la topología*

$$\tau_\Sigma = \{U \subset X : U \cap X_i \in \tau_i, \ \text{para todo } i \in I\}.$$

El par (X, τ_Σ) se llama suma o unión disjunta de los espacios dados. En general, se denota $X = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Observación 1.3. *La definición anterior puede generalizarse en el caso en el que los conjuntos no sean disjuntos. Así, podemos introducir el siguiente ejemplo:*

Ejemplo 1.6. *Consideremos el espacio de Cantor, formado por el producto de espacios discretos de dos puntos, denotado por $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Tomamos una colección contable $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde $X_n = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ para cada n. La unión disjunta contable se expresa de la siguiente forma:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n = \{(x,n) : x \in X_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Siguiendo la definición, tenemos que un conjunto $U \subseteq \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es abierto si, y solo, si $U \cap X_n$ es abierto en X_n para cada n.

Ejemplo 1.7. *Consideremos un caso de conjuntos más sencillos. Sean* $X_1 = [0,1]$ *y* $X_2 = [2,3]$. *La suma disjunta es:*

$$X = [0,1] \cup [2,3] = \sum_{i=1}^{2} X_i = \{(x,1) : x \in [0,1]\} \cup \{(x,2) : x \in [2,3]\}$$

La topología en X *se construye de forma que un subconjunto* $U \subseteq X$ *es abierto si, y solo si,* $U \cap X_1$ *es abierto en* X_1, *y* $U \cap X_2$ *es abierto en* X_2, *junto a su topología subespacio respectivamente. Se ve facilmente que si las topologías de* X_1 *y de* X_2 *son las heredadas de* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *entonces* X *es homeomorfo a* $Y := [0,1] \cup [2,3]$, *donde en* Y *se considera la topología heredada de* $\mathbb{R}$.

Proposición 1.4. *La unión disjunta contable, ya sea finita o infinita, de espacios polacos, es polaca.*

Demostración. Sean $X_1, X_2, ...$ espacios polacos, y sea $\sum_n X_n$ su unión disjunta. Nuestra primera tarea consistirá en definir una métrica adecuada en $\sum_n X_n$ que metrizará esta unión disjunta.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos D_n un subconjunto denso y numerable de X_n y d_n será la métrica completa en X_n. Por (1.1), podemos asumir que $d_n(x,y) \leq 1$ para cada n y para todo $x, y \in X_n$. Entonces $\bigcup_n D_n$ es un subconjunto contable de $\sum_n X_n$. Veamos además que es denso. Para ello, tenemos que probar que la clausura de $\bigcup_n D_n$ es el conjunto $\sum_n X_n$, o equivalentemente, ver que todo abierto no vacío en $\sum_n X_n$ contiene al menos un punto de $\bigcup_n D_n$.

Sea U un conjunto abierto de $\sum_n X_n$, es decir, $U \cap X_n$ es abierto en X_n para todo n. Queremos ver que $U \cap (\bigcup_n D_n) \neq \emptyset$. Como $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U \cap X_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $U \cap X_{n_0} \neq \emptyset$. Como $U \cap X_{n_0}$ es abierto no vacío y D_{n_0} es denso en X_{n_0}, $(U \cap X_{n_0}) \cap D_{n_0} \neq \emptyset$. Así,

$$U \cap \bigcup_n D_n \supseteq U \cap D_{n_0} \supset (U \cap X_{n_0}) \cap D_{n_0} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $U \cap \left(\bigcup_n D_n \right) \neq \emptyset$ y el conjunto es denso.

Ahora definimos

$$d(x,y) = \begin{cases} d_n(x,y) & \text{si} \quad x, y \in X_n \quad \text{para algún} \quad n \\ 1 & \text{si} \quad x \in X_m \quad \text{y} \quad y \in X_n, \quad \text{con} \quad m \neq n \end{cases}$$

El hecho de que d es una métrica es fácilmente verificable. Veamos ahora que d satisface las condiciones requeridas, es decir, $\left(\sum_n X_n, d \right)$ es espacio métrico completo y que d metriza la topología de $\sum_n X_n$.

Primero veamos que es una métrica completa: sea (x_k) una sucesión de Cauchy en $\sum_n X_n$. Fijamos $\epsilon \in (0,1)$. Como la sucesión (x_k) es de Cauchy, para todo k, j lo suficientemente grandes, $d(x_k, x_j) < \epsilon < 1$. Por lo tanto x_k y x_j deben pertenecer a un mismo X_{n_0} para algún n_0: de lo contrario, si $x_k \in X_m$ y $x_j \in X_{n_0}$, con $m \neq n$, tendríamos que $d(x_k, x_j) = 1$, contradiciendo que la sucesión es de Cauchy. Por lo tanto, existe un n_0 tal que, a partir de un cierto índice, todos los términos están contenidos en un único X_{n_0}. Por otra parte, tenemos que (x_k) es una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica d_{n_0}. Además, cada X_{n_0} es un espacio polaco, con lo que d_n es completa y entonces (x_k) converge a un punto $x \in X_{n_0}$. De esta forma, (x_k) converge a $x \in \sum_n X_n$ y d es una métrica completa.

Falta por verificar que d metriza $\sum_n X_n$, es decir, probar que la topología inducida por d coincide con la topología de la unión disjunta de $\sum_n X_n$. Debemos ver que los cerrados con respecto a ambas topologías coinciden o, equivalentemente, que las clausuras de los conjuntos coinciden.

Supongamos que $A \subset \sum_n X_n$ y que $x \in \overline{A}^{\tau_\Sigma}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X_{n_0}$. Fijamos $\epsilon \in (0,1)$. Consideramos $B_d(x, \epsilon)$. Por definición de d, $B_d(x, \epsilon) \subset X_{n_0}$ y, con ello, $B_d(x, \epsilon) = B_{d_{n_0}}(x, \epsilon)$, que es un abierto con respecto a la topología τ_Σ. Ahora $B_{d_{n_0}}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ porque $x \in \overline{A}^{\tau_\Sigma}$. Así, $B_d(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Con ello, $x \in \overline{A}^d$.

Veamos ahora el recíproco. Tenemos que probar que x pertenece a la clausura de A con respecto a la topología de la suma, es decir, vemos que si $x \in \overline{A}^d$, entonces $x \in \overline{A}^{\tau_\Sigma}$. Fijamos un entorno abierto U de x con respecto a la suma. Entonces $X_{n_0} \cap U$ también es entorno abierto con respecto a la suma (y en X_{n_0}). Como (X_{n_0}, d_{n_0}) es espacio métrico, existe $\epsilon \in (0,1)$ tal que $B_{d_{n_0}}(x, \epsilon) \subset X_{n_0} \cap U$. Por otra parte, como $\epsilon < 1$, $B_{d_{n_0}}(x, \epsilon) = B_d(x, \epsilon) \subset X_{n_0} \cap U$. Además $B_d(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, con lo que $U \cap A \neq \emptyset$ y, de este modo, $x \in \overline{A}^{\tau_\Sigma}$. $\square$

Proposición 1.5. *El producto contable de espacios polacos, ya sea finito o infinito, es polaco.*

Demostración. Sean $X_1, X_2, ...$ espacios polacos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada n, sea d_n una métrica completa que metriza X_n y que satisface $d_n(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X_n$ (ver 1.1). Para los puntos x e y en $\prod_n X_n$, con coordenadas $(x_1, x_2, \ldots)$ e $(y_1, y_2, \ldots)$, respectivamente, definimos

$$d(x, y) := \sum_n \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

Veamos que d define una métrica en $\prod_n X_n$:

i) $d(x, y) \geq 0 \quad$ para todo x, y.

Dado que la métrica $d_n(x_n, y_n) \geq 0$ para todo n, se tiene que cada término de la serie es mayor o igual que cero. Como la suma de términos no negativos es no negativa, $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x,y)=0$ si y solo si $x=y$

Si $x=y$, entonces $x_n=y_n$ para cada n, luego $d_n(x_n,y_n)=0$ para todo n, y así $d(x,y)=\sum_n \frac{1}{2^n}\cdot 0=0$.

Ahora, si $d(x,y)=0$, entonces cada término $\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)=0$ ($d_n(x_n,y_n)\geq 0$). Como $\frac{1}{2^n}>0$, $d_n(x_n,y_n)=0$ para todo n. De esta forma, dado que cada d_n es métrica, $x_n=y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $x=y$.

iii) $d(x,y)=d(y,x)$ para todo $x,y\in X$.

Tenemos que $d_n(x_n,y_n)=d_n(y_n,x_n)$. Entonces,

$$d(x,y)=\sum_n \frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)=\sum_n \frac{1}{2^n}d_n(y_n,x_n)=d(y,x).$$

iv) Desigualdad triangular: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

Dado que d_n es métrica, para todo n, satisface la desigualdad triangular, es decir, $d_n(x_n,z_n)\leq d_n(x_n,y_n)+d_n(y_n,z_n)$. Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{1}{2^n}d_n(x_n,z_n)\leq \frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)+\frac{1}{2^n}d_n(y_n,z_n),$$

lo que al sumar sobre todos los n implica:

$$d(x,z)=\sum_n \frac{1}{2^n}d_n(x_n,z_n)\leq \sum_n \frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)+\sum_n \frac{1}{2^n}d_n(y_n,z_n)=d(x,y)+d(y,z).$$

Se puede ver que d metriza la topología producto en $\prod_n X_n$, y que $\prod_n X_n$ es completo con respecto a d.

Para demostrar que $\prod_n X_n$ es un conjunto separable es suficiente construir una base contable de $\prod_n X_n$ (ver Observación 1.1). Para cada n elegimos una base contable $\mathcal{U}_n$ de X_n. Entonces, la colección de subconjuntos de $\prod_n X_n$ de la forma:

$$U_1\times\cdots\times U_n\times X_{N+1}\times X_{N+2}\times\cdots$$

para algún N y cualquier elección de conjuntos U_n en $\mathcal{U}_n$, $n=1,...,N$, es una base contable de $\prod_n X_n$. □

1.3. Caracterización de los subespacios polacos

En el estudio de espacios polacos, los conjuntos que se van a describir a continuación desempeñan un papel fundamental debido a su relación directa con las propiedades topológicas y métricas de dichos subespacios. El teorema que sigue resalta la importancia de los conjuntos en la caracterización de estos espacios, ya que su estructura asegura tanto la separabilidad como la completitud bajo la métrica inducida.

Definición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ no vacío. Decimos que:*

- *A es un conjunto G_δ en X si $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, donde los U_n son abiertos en X.*
- *A es un conjunto F_σ en X si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, donde los F_n son cerrados en X.*

Ejemplo 1.8. *Todo conjunto abierto es un conjunto G_δ, y de la misma forma todo cerrado es un conjunto F_σ.*

Ejemplo 1.9. *Los números irracionales constituyen un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$ con respecto a la topología usual. Se pueden escribir como la intersección contable de conjuntos abiertos de la siguiente forma:*

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}^c.$$

Y, por otra parte, el conjunto de los racionales es un conjunto F_σ en $\mathbb{R}$, ya que se puede escribir como la unión de cerrados de la forma $\{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$.

Claramente, el complementario de un conjunto G_δ es un conjunto F_σ, y viceversa.

Las siguientes proposiciones serán usadas inmediatamente después.

Proposición 1.6. *Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico es un G_δ. Respectivamente, todo subconjunto abierto es un F_σ.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y C un subconjunto cerrado no vacío de X. Entonces, el conjunto C puede expresarse de la siguiente forma:

$$C = \bigcap_{n} \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) < \frac{1}{n} \right\}$$

donde $\operatorname{dist}(x, C)$ denota la distancia de x al conjunto C. Veamos que, dado $r > 0$, el conjunto

$$A := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) < r\}$$

es abierto. Sea $x \in A$; entonces por definición del conjunto, tenemos que $\operatorname{dist}(x, C) < r$. Es decir, existe un punto $y \in C$ tal que $d(x, y) < r$. Fijamos $\epsilon := r - d(x, y) > 0$. Consideramos la bola abierta $B(x, \epsilon) = \{z \in X : d(x, z) < \epsilon\}$ y tomamos un punto $z \in B(x, \epsilon)$. Por la desigualdad triangular, tenemos que

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \epsilon + d(x, y)$$

Sustituyendo el valor de ϵ,

$$d(z, y) < r - d(x, y) + d(x, y) = r$$

Por lo tanto, dado que $y \in C$, $\operatorname{dist}(z, C) \leq d(z, y) < r$ y $z \in A$. De esta forma, $B(x, \epsilon) \subset A$ y con ello, A es un conjunto abierto.

Es decir, C se puede escribir como la intersección de conjuntos abiertos de X; por lo tanto, es un G_δ.

La prueba de la otra afirmación es inmediata. □

Aunque los conjuntos G_δ se definen como intersecciones numerables de conjuntos abiertos, esto no implica necesariamente que sean abiertos o cerrados. A continuación, presentamos un ejemplo que ilustra esta idea.

Ejemplo 1.10. *Consideremos el espacio* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y el conjunto* $A = [0, 1)$*. El conjunto no es ni abierto ni cerrado con respecto a la topología usual, pero es un conjunto* G_δ*:*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}, 1 \right)$$

Proposición 1.7. *Sean* X, Y *espacios métricos homeomorfos. Entonces, si* Y *es polaco, también lo es* X*.*

Demostración. Queremos probar que X es un espacio polaco, es decir, que es separable y completamente metrizable. Dado que X e Y son homeomorfos, existe un homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$. Además, sabemos que Y es completamente metrizable, por lo que existe la métrica completa d_2 en Y. Definimos en X la siguiente métrica:

$$d_1(x, y) = d_2(h(x_1), h(x_2)), \quad x, y \in X$$

Primero probemos que X es separable, es decir, contiene un subconjunto denso y contable. Como Y es separable, existe un subconjunto denso y contable $D \subseteq Y$. Consideramos la imagen inversa de D respecto de h:

$$D_1 = h^{-1}(D) \subset X$$

Ahora, veamos que D_1 es denso y contable en X. Como h es biyectiva, podemos definir el conjunto de la siguiente forma:

$$h^{-1}(D) = \{x \in X : h(x) \in D\}$$

Dado que D es contable y h establece una correspondencia uno a uno entre X e Y, se sigue que D_1 es contable. Por otra parte, D es denso en Y, es decir, para todo $y \in Y$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $y' \in D$ tal que, $d_2(y, y') < \epsilon$. Ahora, fijamos $x \in X$. Por lo anterior, existe $y' \in D$ con $d_2(h(x), y') < \epsilon$. Además, existe $x' \in D_1$ con $y' = h(x')$. Con ello,

$$d_1(x, x') = d_2(h(x), h(x')) = d_2(h(x), y') < \epsilon$$

Podemos concluir que $D_1 = f^{-1}(D) \subset X$ es denso y, por otra parte, contable; así X es separable.

Para concluir que X es espacio polaco, falta probar que es completamente metrizable. En particular, queremos ver que (X, d_1) es un espacio métrico completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X con respecto de la métrica d_1. Esto significa que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si, $n, m \geq N$, entonces

$$d_1(x_n, x_m) = d_2(h(x_n), h(x_m)) < \epsilon$$

Es decir, la sucesión $(h(x_n))$ en Y es también de Cauchy con respecto a d_2. Como Y es completo, existe un punto $y \in Y$ tal que $(h(x_n))$ converge a y. Además, dado que h es un homeomorfismo, su inversa h^{-1} es continua en Y, así que $(h^{-1}h(x_n)) = (x_n)$ converge al punto $h^{-1}(y) \in X$. De esta forma, toda sucesión de Cauchy en X converge,es decir, X es completo con respecto de la métrica d_1.

Finalmente, hemos probado que X es separable y que (X, d_1) es un espacio métrico completo; por lo tanto, X es un espacio polaco. □

El siguiente resultado generaliza Proposición 1.3. De hecho, proporciona una caracterización de los subespacios polacos.

Teorema 1.1. *Sea X un espacio polaco. Entonces, un subespacio (no vacío) de X es polaco si, y solo si, es un G_δ en X.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X. Definimos el subespacio Y no vacío como la intersección de estos, es decir, $Y := \bigcap_n U_n$.
Veamos que Y es un subespacio polaco de X.

Por Proposición 1.3, cada conjunto abierto U_n es un espacio polaco, y, por Proposición 1.5, también lo es $\prod_n U_n$. Por otra parte, definimos Δ como el subconjunto de $\prod_n U_n$ dado por las sucesiones constantes, es decir,

$$\Delta := \left\{ (u_n) \in \prod_n U_n \colon u_j = u_k \text{ para todos } j, k \right\}$$

Veamos que el conjunto Δ es cerrado en $\prod_n U_n$. Para ello, mostramos que el complementario es abierto. Tenemos Δ^c de la siguiente forma:

$$\Delta^c = \{(u_n) \in \prod_n U_n : \text{existen } j, k \text{ con } u_j \neq u_k\}$$

Fijamos un punto $(u_n) \in \Delta^c$. Entonces existen $j, k \in \mathbb{N}$ con $u_j \neq u_k$. A continuación, tomamos W_j, W_k abiertos disjuntos con $u_j \in W_j \subset U_j$ y $u_k \in W_k \subset U_k$. Definimos ahora $W_n := U_n$ para $n \neq j, k$ y $W := \prod_n W_n$. W es un entorno abierto de nuestro punto (u_n) y $W \cap \Delta = \emptyset$. Así Δ^c es abierto. De esta forma, Δ es un subconjunto cerrado de $\prod_n U_n$ y, por Proposición 1.3, es polaco.

Por otra parte, Y es homeomorfo a Δ mediante la aplicación que envía un elemento y de Y a la sucesión donde cada término es y. Es decir, definimos $f : Y \longrightarrow \Delta$ dado por:

$$f(y) = (y, y, y, \dots).$$

Veamos que f es continua. Sea U un abierto básico en $\prod_n U_n$. Así existen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $U = \prod_n V_n$ donde cada V_n es abierto en U_n y $V_n = U_n$ para todo $n \neq n_1, \dots, n_k$, es decir,

$$U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times V_{n_1} \times U_{n_1+1} \times V_{n_2} \times U_{n_2+1} \times \cdots .$$

Se tiene que, como $V_{n_j} \subset U_{n_j} \subset Y$, entonces

$$\begin{aligned}
f^{-1}(U) &= \{y : y \in U_1, y \in U_2, \dots, y \in V_{n_1}, \dots, y \in V_{n_k}\} \\
&= V_{n_1} \cap V_{n_2} \dots V_{n_k} \cap \left(\bigcap_{n \neq n_j} U_n \right) \\
&= V_{n_1} \cap V_{n_2} \dots V_{n_k} \cap Y \\
&= V_{n_1} \cap V_{n_2} \cap \dots V_{n_k}
\end{aligned}$$

Es decir, $f^{-1}(U)$ es una intersección finita de conjuntos abiertos y por lo tanto es un conjunto abierto.

Además, todo elemento de Δ es de la forma $(u, u, u, \dots)$ con $u \in Y$, por lo que $f(u) = (u, u, u, \dots)$ y tenemos así que f es sobreyectiva. Finalmente, tomando $y_1, y_2 \in Y$, si $f(y_1) = f(y_2)$, entonces $(y_1, y_1, \dots) = (y_2, y_2, \dots)$ e $y_1 = y_2$, así que f también es inyectiva.

Para ver que f es un homeomorfismo, falta ver que f^{-1} es continua. Para ello, consideramos un subconjunto abierto U cualquiera de Y y probaremos que su imagen inversa por f^{-1} es un abierto en Δ. Dado que hemos probado que f es biyectiva, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$;

$$f(U) = \left(U \times \prod_{n\geq 2} U_n\right) \cap \Delta$$

Veamos ahora que se cumple la igualdad, es decir, $f(U) = \left(U \times \prod_{n\geq 2} U_n\right) \cap \Delta$. Evidentemente, si $y \in U$, $f(y) = (y, y, y, \dots) \in U \times \prod_{n\geq 2} U_n$ y, obviamente, $f(y) \in \Delta$. Así, tenemos $f(U) \subset \left(U \times \prod_{n\geq 2} U_n\right) \cap \Delta$. Reciprocamente, si $v = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \left(U \times \prod_{n\geq 2} U_n\right) \cap \Delta$ entonces $y_n = y_1$ para todo n (porque pertenece a Δ) y, por otra parte $y_1 \in U$, luego

$$v = (y_1, y_2, y_3, \dots) = f(y_1) \in f(U)$$

Ahora por definición de la topología producto, $\left(U \times \prod_{n\geq 2} U_n\right)$ es abierto en $\left(\prod_{n} U_n\right)$ y con ello concluimos que $f(U)$ es un conjunto abierto en Δ con la topología de subespacio.

Por lo tanto, hemos establecido un homeomorfismo entre Y y Δ, con Δ un subespacio polaco. Se sigue necesariamente que Y es polaco.
Así hemos probado que, si Y es G_δ, entonces es polaco.

Veamos ahora el recíproco.

Supongamos entonces que Y es un subespacio polaco de X; queremos ver que entonces es un G_δ en X.

Sea d una métrica completa asociada a la topología de X, y sea d_Y una métrica completa para la topología de Y. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos los conjuntos

$$A_n := \left\{V \subset X : V \text{ es abierto y } d(x, y) < \frac{1}{n} \text{ para todo } x, y \in V\right\}$$

$$B_n := \left\{V \in A_n : V \cap Y \neq \emptyset \text{ y } d_Y(x, y) < \frac{1}{n} \text{ para todo } x, y \in V \cap Y\right\}$$

Llamamos $V_n := \bigcup_{V\in B_n} V$. Veamos que $Y \subset V_n$. Sea $y \in Y$ fijo. Consideramos

$B_{d_Y}\left(y, \frac{1}{2n}\right)$ que es un abierto en Y. Por lo tanto, existe $W \subset X$ abierto con

$$W \cap Y = B_{d_Y}\left(y, \frac{1}{2n}\right).$$

Tenemos que W es entorno abierto de y en X. Por lo tanto, existe $\epsilon \in (0, \frac{1}{2n})$ con $B_d(y, \epsilon) \subset W$. Llamamos $V := B_d(y, \epsilon)$. Se tiene que $V \in A_n$. Además

$$y \in V \cap Y \subset W \cap Y = B_{d_Y}\left(y, \frac{1}{2n}\right).$$

Así, si $z, z' \in V \cap Y$,

$$d_Y(z, z') < \frac{1}{n},$$

con lo cual $V \in B_n$. Como $y \in V$, deducimos que $y \in V_n$ y, en consecuencia, $Y \subseteq V_n$.

Por último, mostramos la siguiente igualdad:

$$Y = \overline{Y} \bigcap \left(\bigcap_n V_n \right) \tag{1.2}$$

Acabamos de ver que $Y \subseteq V_n$ para cada n, luego se cumple que $Y \subseteq \overline{Y} \bigcap \left(\bigcap_n V_n \right)$. Para la otra inclusión, tomamos $x \in \overline{Y} \bigcap \left(\bigcap_n V_n \right)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $x \in V_n$, existe $W_n \in B_n$ con $x \in W_n$. Por definición de B_n, los conjuntos W_n y $Y \cap W_n$ tienen diámetros a lo sumo $\frac{1}{n}$ con respecto de d y d_Y, respectivamente.

Ahora, definimos los siguiente conjuntos:

$$U_1 = W_1, U_2 = W_1 \cap W_2, U_3 = W_1 \cap W_2 \cap W_3, \ldots$$

Como $x \in \overline{Y}$, sabemos que x es un punto de acumulación de Y, y por lo tanto, para cada entorno abierto de $x \in X$, la intersección con Y es no vacía. En particular, como cada U_n es un entorno abierto de x, tenemos que:

$$U_n \cap Y \neq \emptyset.$$

Además, como cada $W_n \in B_n$, los conjuntos definidos siguen cumpliendo:

- $U_n \subset U_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$,
- el diámetro de

  $$U_n \cap Y = \left(\bigcap_{k=1}^{n} W_k \right) \cap Y = \bigcap_{k=1}^{n} (W_k \cap Y)$$

  con respecto a d_Y es menor que $\frac{1}{n}$, ya que cada W_k tiene diámetro a lo sumo $\frac{1}{k}$, y

- $U_n \in B_n$, porque U_n es la intersección de elementos de B_n.

De esta forma, podemos construir la sucesión (x_n) tal que para cada n, $x_n \in U_n \cap Y$.

El hecho de que $x \in W_n$ para todo n, y W_n tiene diámetro menor que $\dfrac{1}{n}$ con respecto a d, nos garantiza que

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

con lo que (x_n) converge a x respecto a d.

Tomamos ahora $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n > m$, $x_n, x_m \in U_m$. Por lo tanto,

$$d_Y(x_n, x_m) < \frac{1}{m}, \quad \text{para todo } n > m$$

De esta forma, (x_n) es de Cauchy con respecto a d_Y.

En consecuencia, dado que Y es polaco, es decir, completo con respecto a d_Y, existe $y \in Y$ tal que (x_n) converge a y en Y con respecto a d_Y.

Como ambas métricas inducen la misma topología sobre Y, esto solo es posible si $x = y \in Y$. Así, podemos concluir que $\overline{Y} \bigcap \left(\bigcap_n V_n \right) \subseteq Y$ y tenemos la igualdad 1.2.

Finalmente, por Proposición 1.6, $\overline{Y}$ es un conjunto G_δ en X. Además $\bigcap_n V_n$ es intersección numerable de abiertos, por lo que también es G_δ. Como Y es la intersección de dos conjuntos G_δ, podemos concluir que Y es G_δ por definición de dichos conjuntos. □

Ejemplo 1.11. *Como consecuencia del teorema anterior, tenemos que el conjunto* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *es polaco (veáse Ejemplo 1.9).*

Ejemplo 1.12. *El conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$*, considerado como subespacio de* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, no es un espacio polaco. En efecto, aunque* $\mathbb{Q}$ *es un conjunto* F_σ*, no es un conjunto* G_δ *en* $\mathbb{R}$*, y por tanto, según Teorema 1.1, no puede ser subespacio polaco. La prueba de este hecho va más allá de lo estudiado en esta memoria. Para más detalles, puede consultarse la entrada correspondiente en [11].*

Una vez mostradas estas proposiciones, podemos construir los dos espacios mencionados previamente $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Estos espacios proporcionan ejemplos fundamentales y herramientas clave para explorar propiedades métricas topológicas en este ámbito.

Ejemplo 1.13. *El espacio* $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *es, por Proposición 1.5, un espacio polaco. Sus elementos son sucesiones de números naturales y se denomina Espacio de Baire.*

Para enteros positivos k *y* $n_1, ..., n_k$ *denotaremos por* $\mathcal{N}(n_1, ..., n_k)$ *el conjunto de los elementos* (m_i) *tal que* $m_i = n_i$ *para* $i = 1, ..., k$*, es decir, los conjuntos de la forma*

$$\mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k) = \{(m_i) \in \mathcal{N} : m_i = n_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

Se puede ver que la familia de todos estos conjuntos forman una base contable para $\mathcal{N}$ y que la colección de los elementos (m_i) de $\mathcal{N}$ que son constantes a partir de un término (es decir, para los cuales existe un entero positivo k tal que $m_i = m_k$ siempre que $i > k$) forma un subconjunto denso contable de $\mathcal{N}$.

Introducimos a continuación una métrica completa que genera la topología producto del espacio y hace de $\mathcal{N}$ un espacio polaco. Esta métrica se define como:

$$d'(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{mín}\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq \beta_k\}} & \textit{si } \alpha \neq \beta, \\ 0 & \textit{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Veamos que esta distancia metriza la topología producto. Para ello, tomamos la función identidad

$$id : (\mathcal{N}, d') \longrightarrow (\mathcal{N}, \tau).$$

Fijamos $\alpha = (n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$. Un entorno básico de α con respecto a τ será de la forma

$$U = \{n_1\} \times \{n_2\} \times \cdots \times \{n_k\} \times \cdots \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots .$$

Si $\beta = (m_1, m_2, \dots) \in B_{d'}\left(\alpha, \frac{1}{k+1}\right)$, entonces se tiene que las k primeras coordenadas de β son como las de α, y por tanto $\beta \in U$. Así, $B_{d'} \subset U$. El recíproco se verifica de forma similar. De esta forma, $B_{d'} = U$ y d' genera la topología

Además, esta métrica es completa. Supongamos que (α_n) es una sucesión de Cauchy con respecto a d' en $\mathcal{N}$. Si esto sucede, hay convergencia coordenada a coordenada. Veamos que converge. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$, se cumple $d'(\alpha_n, \alpha_m) < \epsilon$. Por lo tanto, las primeras coordenadas de α_n y α_m coinciden y convergen a un α definido coordenada a coordenada. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, podemos repetir el proceso para todas las coordenadas.

Ejemplo 1.14. *El espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es polaco por Proposición 1.5. Esta formado por sucesiones de ceros y unos. Se puede ver que este espacio es homeomorfo al conjunto de Cantor. Véase [12, Th. 30.3, p. 216] para una prueba detallada.*

Estos espacios desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de los espacios polacos, así como en el estudio de los conjuntos analíticos.

Capítulo 2

Medibilidad y espacios de medida en espacios polacos

En este capítulo definimos la σ-álgebra de Borel en espacios polacos y estudiamos las medidas sobre ella. Veremos la definición de función medible, cómo se construyen las medidas de Borel y, sobre todo, por qué toda medida de Borel finita en un espacio polaco admite aproximaciones con abiertos y con compactos (o cerrados en su defecto).

2.1. Funciones medibles y la σ-álgebra de Borel

Sean $(X_1, \mathcal{M}_1), (X_2, \mathcal{M}_2), ...$ espacios medibles. El producto de estos espacios es el espacio medible $\left(\prod_n X_n, \prod_n \mathcal{M}_n\right)$ donde $\prod_n \mathcal{M}_n$ es la $\sigma-$álgebra en $\prod_n X_n$ generada por los conjuntos de la forma

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \ldots$$

para algún $N \in \mathbb{N}$ y alguna elección del conjunto A_n en $\mathcal{M}_n$, $n = 1, ..., N$.

La definición de función medible que usaremos es la siguiente:

Definición 2.1. *Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si, para cada $B \in \mathcal{N}$, el conjunto $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.*

En lugar de decir que f es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, diremos que f es una función medible de $(X, \mathcal{M})$ a $(Y, \mathcal{N})$ o simplemente que $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N})$ es medible.

Por otra parte, para cada i definimos π_i como la proyección de $\prod_n X_n$ en X_i. Por lo tanto, se tiene

$$\pi_i^{-1}(A) = X_1 \times \ldots X_{i-1} \times A \times X_{i+1} \times \ldots$$

para cada subconjunto A de X_i, y así π_i es medible respecto de $\prod_n \mathcal{M}_n$ y $\mathcal{M}_i$. Además, cualquier conjunto de la forma $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \ldots$

se puede expresar como $\bigcap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(A_i)$; de esta forma $\prod_n \mathcal{M}_n$ es la $\sigma-$álgebra más pequeña en $\prod_n X_n$ que hace que todas proyecciones π_i sean medibles.

Proposición 2.1. *Sean $(X,\mathcal{M})$ e $(Y,\mathcal{N})$ espacios medibles, y sea $\mathcal{N}_0$ una colección de subconjuntos de Y tal que $\sigma(\mathcal{N}_0) = \mathcal{N}$. Entonces, la función $f : X \longrightarrow Y$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si y solo si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para cada B en $\mathcal{N}_0$.*

Demostración. Por la definición de función medible, tenemos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para cada B en $\mathcal{N}_0$.

Para la otra implicación, supongamos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para cada B en $\mathcal{N}_0$. Definimos $\mathcal{F}$ como la colección de todos los subconjuntos B de Y tal que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$. Como, para cualesquiera $B, B_1, B_2, B_3, \ldots$ en $\mathcal{F}$,

$$f^{-1}(Y) = X, f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c, \text{ y } f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(B_n),$$

se tiene que $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$álgebra en Y.

Por otra parte, como $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ debe incluir la $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{N}_0$, es decir, a $\mathcal{N}$. Por lo tanto, f es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$. □

En este contexto, dados dos espacios topológicos X e Y, diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es medible Borel si es medible respecto a $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{B}(Y)$; es decir, si para todo conjunto $B \in \mathcal{B}(Y)$, se tiene $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.

Lema 2.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces, f es medible de Borel, es decir, medible respecto de $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{B}(Y)$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de Y. Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto y, así, un subconjunto de Borel de X. Teniendo en cuenta que la colección de subconjunto abiertos de Y genera $\mathcal{B}(Y)$, por Proposición 2.1, podemos concluir que f es medible Borel. □

Proposición 2.2. *Sean $X_1, X_2, \ldots$ una colección finita o infinita de espacios métricos separables. Entonces, $\mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right) = \prod_n \mathcal{B}(X_n)$, donde $\prod_n X_n$ está dotado de la topología producto.*

Demostración. Veamos primero que $\prod_n \mathcal{B}(X_n) \subset \mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right)$.

Como antes, para cada i, sea π_i la proyección de $\prod_n X_n$ sobre X_i. En X_i se considera la topología τ_i y, en $\prod_n X_n$, la topología producto τ_{prod}. Sabemos que

$$\pi_i : \left(\prod_n X_n, \tau_{\text{prod}}\right) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$$

es continua. Por Lema 2.1, π_i es medible Borel para todo i, es decir,

$$\pi_i : \left(\prod_n X_n, \mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right)\right) \longrightarrow (X_i, \mathcal{B}(X_i))$$

es medible para todo i. Por definición, la σ-álgebra producto $\prod_n \mathcal{B}(X_n)$ es la menor σ-álgebra contenida en $\prod_n X_n$ que hace que estas proyecciones sean medibles. Como ya hemos probado que cada π_i es medible Borel, se concluye que

$$\prod_n \mathcal{B}(X_n) \subset \mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right)$$

Veamos ahora la otra inclusión.
Ahora, para cada n, como X_n es separable, por Observación 1.1, podemos tomar una base contable $\mathcal{U}_n$ para la topología de X_n. Definimos $\mathcal{U}$ como la colección de conjuntos de la forma

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N \times X_{N+1} \times \ldots$$

para algún entero positivo N y alguna elección de conjuntos U_n en $\mathcal{U}_n, n = 1, , ..., N$. Con ello, tenemos que $\mathcal{U}$ es una base contable para $\prod_n X_n$, y

$$\mathcal{U} \subset \prod_n \mathcal{B}(X_n).$$

Como cada subconjunto abierto de $\prod_n X_n$ es la unión de una familia de $\mathcal{U}$ (necesariamente contable) y $\mathcal{U} \subset \prod_n \mathcal{B}(X_n)$, podemos concluir que $\mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right) = \sigma(\mathcal{U}) \subset \prod_n \mathcal{B}(X_n)$.

De esta forma, $\mathcal{B}\left(\prod_n X_n\right) = \prod_n \mathcal{B}(X_n)$. □

Recordemos la definición de grafo de una función.

Definición 2.2. *Sean X, Y conjuntos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se define el grafo de f, denotado como* gr(f), *como*

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y) \in X : y = f(x)\}$$

Proposición 2.3. *Sean X e Y espacios métricos separables, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función medible de Borel. Entonces el grafo de f es un subconjunto de Borel de $X \times Y$.*

Demostración. Definimos la función

$$F : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$$

de forma que $F(x, y) := (f(x), y)$. Primero probaremos que F es medible.

Dado que f es medible Borel, se cumple que, para cualquier conjunto Borel $A \subset Y$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$. En particular, para cualquier $A, B \in \mathcal{B}(Y)$, se tiene:

$$\begin{aligned} F^{-1}(A \times B) &= \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \in A, y \in B\} \\ &= f^{-1}(A) \times B, \end{aligned}$$

con lo cual pertenece a $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$. Por lo tanto, F es medible con respecto a $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$ y $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$. De esta forma, como X e Y son espacios metrizables separables, por Proposición 2.2,

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y), \text{ y } \mathcal{B}(Y \times Y) = \mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y).$$

Así, F también es medible con respecto a $\mathcal{B}(X \times Y)$ y $\mathcal{B}(Y \times Y)$.

Consideremos ahora el siguiente conjunto:

$$\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$$

Veamos que Δ^c es un conjunto abierto. Supongamos que $(y_1, y_2) \notin \Delta$, es decir, $y_1 \neq y_2$. Por tanto existen U, V abiertos con $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces, $U \times V$ es abierto en $Y \times Y$ y contiene a (y_1, y_2). Ahora,

$$\Delta \cap (U \times V) = \emptyset$$

ya que no hay ningún punto $(y, y) \in U \times V$ porque $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, para todo punto de Δ^c existe un entorno abierto contenido en el; así Δ^c es abierto y, en consecuencia, Δ es cerrado. Por tanto pertenece a $\mathcal{B}(Y \times Y)$.

De esta forma, como veremos a continuación, podemos escribir el grafo como

$$\mathrm{gr}(f) = F^{-1}(\Delta),$$

Veamos la igualdad. Supongamos que $(x, y) \in \mathrm{gr}(f)$ $(f(x) = y)$. Entonces

$$F(x, y) = (f(x), y) = (y, y) \in \Delta$$

y así, $(x, y) \in F^{-1}(\Delta)$. Supongamos ahora que $(x, y) \in F^{-1}(\Delta)$, es decir,

$$F(x, y) = (f(x), y) \in \Delta.$$

Por definición, se cumple que $f(x) = y$, y, podemos concluir que $(x, y) \in \mathrm{gr}(f)$.

Finalmente, como $\Delta \in \mathcal{B}(Y \times Y)$, se sigue que $\mathrm{gr}(f) = F^{-1}(\Delta) \in \mathcal{B}(X \times Y)$. □

Proposición 2.4. *Sean $(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$ y $(Z, \mathcal{C})$ espacios medibles, y sean $f : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$ y $g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N})$ dos funciones medibles. Entonces $f \circ g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Z, \mathcal{C})$ es medible.*

Demostración. Supongamos que el conjunto $C \in \mathcal{C}$. Entonces $f^{-1}(C) \in \mathcal{N}$, y así $g^{-1}(f^{-1}(C)) \in \mathcal{M}$. Dado que $(f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(f^{-1}(C))$, se sigue que $f \circ g$ es medible. □

Hasta ahora, hemos considerado funciones medibles con respecto a dos espacios medibles $(X,\mathcal{M})$ e $(Y,\mathcal{N})$. De forma análoga, si $A\in\mathcal{M}$, una función $f:A\longrightarrow Y$ se dice medible si

$$f^{-1}(B)\in\mathcal{M}_A \text{ para todo } B\in\mathcal{N},$$

donde $\mathcal{M}_A$ denota la $\sigma-$álgebra definida por

$$\mathcal{M}_A:=\{A\cap E : E\in\mathcal{M}\}.$$

Lema 2.2. *Sean $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible, e Y un espacio métrico. Entonces una función $f:X\longrightarrow Y$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$ si, y solo si, para cada función continua $g:Y\longrightarrow\mathbb{R}$ la función $g\circ f$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(\tau_u)$.*

Demostración. Primero supongamos que f es una función medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Por Proposición 2.1 sabemos que g es una función medible por ser continua; entonces, por Proposición 2.4, podemos concluir que $g\circ f$ es una función medible.

Ahora, supongamos que para cada función continua $g:Y\longrightarrow\mathbb{R}$, la función $g\circ f$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y τ_u. Sea d la métrica de Y. Suponemos que U es un subconjunto abierto de Y. Tenemos que la función g_U definida como

$$g_U(y)=\begin{cases}\operatorname{dist}(y,U^c), & \text{si } y\in U\\ 1, & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

es una función continua de Y en $\mathbb{R}$ que, además, satisface

$$U=\{y\in Y: g_U(y)>0\}.$$

Como g_U es continua, por hipótesis, $g_U\circ f$ es medible. Entonces, como el conjunto $(0,\infty)\subset\mathbb{R}$ es abierto, se tiene que:

$$(g_U\circ f)^{-1}(0,\infty)\in\mathcal{M}.$$

Observamos que el conjunto $f^{-1}(U)$ es

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \{x\in X: f(x)\in U\}\\ &= \{x\in X: g_U(f(x))>0\}\\ &= \{x\in X: (g_U\circ f)(x)>0\}\\ &= (g_U\circ f)^{-1}(0,\infty),\end{aligned}$$

es decir, pertenece a $\mathcal{M}$. Como $U\subset Y$ era un subconjunto arbitrario, concluimos que f es medible por Proposición 2.1. □

Para demostrar la siguiente proposición, recordemos algunas propiedades básicas de sucesiones de funciones medibles. En efecto, sean $(X,\mathcal{M})$ un espacio medible, $A\subset X$ tal que pertenezca a $\mathcal{M}$, y (f_n) una sucesión de funciones medibles definidas en A con valores en $[-\infty,\infty]$. Entonces se cumple que:

- Las funciones $\sup\limits_n f_n$ y $\inf\limits_n f_n$ son medibles,
- las funciones $\limsup\limits_n f_n$ y $\liminf\limits_n f_n$ son medibles, y

- la función $\lim_n f_n$, cuyo dominio es el conjunto

$$V := \{x \in A : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\},$$

es medible. En efecto, este conjunto puede escribirse como $V = F^{-1}(\{0\})$, donde

$$F(x) := \limsup_n f_n(x) - \liminf_n f_n(x)$$

es una función medible. Como $\{0\}$ es un conjunto de Borel, vemos que $V \in \mathcal{M}$.

Proposición 2.5. *Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible e Y un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow Y$ una función medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Si existe $\lim_n f_n$ para cada $x \in X$, entonces la función $f : X \longrightarrow Y$ dada por*

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$.

Demostración. Por Lema 2.2, basta con demostrar que para toda función continua $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.

Fijamos entonces una función continua $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. Como cada f_n es medible y g es continua, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g \circ f_n$ es medible (por Lema 2.2).

Por otro lado, como $f(x) = \lim_n f_n(x)$, tenemos que

$$g(f(x)) = \lim_n g(f_n(x)),$$

es decir,

$$g \circ f = \lim_n (g \circ f_n).$$

Dado que cada función $g \circ f_n$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(\tau_u)$, y que el límite puntual de funciones medibles reales es medible (como hemos recordado previamente), podemos concluir que $g \circ f$ es medible.

Dado que esto se cumple para cualquier función arbitraria continua $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, f es medible. □

Proposición 2.6. *Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible e Y un espacio polaco. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : X \longrightarrow Y$ una función medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Entonces, el conjunto*

$$C = \left\{x \in X : \text{ existe } \lim_n f_n(x)\right\}$$

pertenece a $\mathcal{M}$. Además, la función $f : C \longrightarrow Y$ definida por

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

es medible con respecto a $\mathcal{M}_C$ y $\mathcal{B}(Y)$.

Demostración. Sea d una métrica completa asociada a la topología de Y. Veremos primero que el conjunto C pertenece a $\mathcal{M}$.

Dado que (Y, d) es un espacio métrico completo (por ser Y polaco), el conjunto C puede reescribirse como

$$\begin{aligned} C &= \left\{x \in X : \text{ existe } \lim_n f_n(x)\right\} \\ &= \{x \in X : (f_n(x)) \text{ es de Cauchy en } Y\} \end{aligned}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$U_n := \left\{(y_1, y_2) \in Y \times Y : d(y_1, y_2) < \frac{1}{n}\right\}$$

Veamos que cada U_n es un conjunto abierto en $Y \times Y$. Sea $g : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(y_1, y_2) := d(y_1, y_2).$$

Como d es la métrica completa que induce la topología en Y, g es una función continua. Entonces, el conjunto U_n es

$$U_n = g^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{n}\right),$$

es decir, la imagen inversa de un abierto. Por tanto, U_n es un conjunto abierto en $Y \times Y$. De esta forma, cada $U_n \in \mathcal{B}(Y \times Y)$, y por Proposición 2.2, también pertenece a $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$.

Por otra parte, para cada $i, j, n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$C(i, j, n) := \left\{x \in X : d(f_i(x), f_j(x)) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Tenemos que ver que pertenece a $\mathcal{M}$. Para ello, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, definimos la función

$$F_{i,j} : X \longrightarrow Y \times Y,$$

tal que $F_{i,j}(x) := (f_i(x), f_j(x))$ para cada $x \in X$. Por hipótesis, cada f_n es una función medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Dado un abierto básico $U_1 \times U_2 \in Y \times Y$,

$$F_{i,j}^{-1}(U_1 \times U_2) = f_i^{-1}(U_1) \cap f_j^{-1}(U_2) \in \mathcal{M}$$

Entonces, $F_{i,j}$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y) \times \mathcal{B}(Y)$.

Procediendo de manera análoga al caso anterior, el conjunto $C(i, j, n)$ puede reescribirse como

$$\begin{aligned} C(i, j, n) &= \left\{x \in X : g(f_i(x), f_j(x)) < \frac{1}{n}\right\} \\ &= \left\{x \in X : g(F_{i,j}(x)) < \frac{1}{n}\right\} \\ &= (g \circ F_{i,j})^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{n}\right) \\ &= F_{i,j}^{-1}\left(g^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= F_{i,j}^{-1}(U_n) \end{aligned}$$

que pertenece a $\mathcal{M}$ ya que es la imagen inversa de un conjunto Borel por una función medible.

Por último, veamos que el conjunto C es una combinación de los conjuntos $C(i,j,n)$. Tenemos que un punto de $x \in X$ pertenece a C si la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en Y, es decir, $x \in C$ si, y solo si, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i, j \geq k$, $d(f_i(x), f_j(x)) < \dfrac{1}{n}$. De esta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir el siguiente conjunto:

$$C_n := \left\{ x \in X : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } i, j \geq k, d(f_i(x), f_j(x)) < \frac{1}{n} \right\},$$

o equivalentemente,

$$C_n = \bigcup_k \bigcap_{i \geq k} \bigcap_{j \geq k} C(i,j,n),$$

ya que para cada $x \in C_n$ debe cumplirse que todos los pares $i, j \geq k$ estén en el conjunto donde $d(f_i(x), f_j(x)) < \dfrac{1}{n}$. De esta forma, el conjunto total es

$$\begin{aligned} C &= \bigcap_n C_n \\ &= \bigcap_n \bigcup_k \bigcap_{i \geq k} \bigcap_{j \geq k} C(i,j,n). \end{aligned}$$

Como $C(i,j,n) \in \mathcal{M}$, y $\mathcal{M}$ es una $\sigma-$álgebra (cerrada bajo uniones e intersecciones contables), se sigue que C pertenece a $\mathcal{M}$.

Falta ver que la función $f : C \longrightarrow Y$ es medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow Y$ es una función medible con respecto a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{B}(Y)$. Tomando su reestricción a el conjunto C,

$$f_n|_C : (X, \mathcal{M}_C) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$$

tenemos que también es medible. Como la sucesión $(f_n(x))$ converge para todo $x \in C$, podemos definir

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \quad x \in C.$$

Por lo tanto, por Proposición 2.5, f es medible con respecto a $\mathcal{M}_C$ y $\mathcal{B}(Y)$. $\square$

Finalizamos esta sección enunciando un resultado útil acerca de las medidas definidas sobre espacios polacos. Comencemos recordando algunos conceptos relacionados con las medidas.

2.2. Medidas de Borel en espacios polacos

Recordemos la siguiente propiedad fundamental en los espacios de medida.

Observación 2.1. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.*

i) Si $\{A_k\}$ es una sucesión creciente (con respecto a la inclusión) de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{M}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k).$$

ii) Si $\{A_k\}$ es una sucesión decreciente (con respecto a la inclusión) de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{M}$, y $\mu(A_n) < +\infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_k A_k\right) = \lim_k \mu(A_k)$$

Por otra parte, sea X un espacio topológico de Hausdorff. Una medida definida en la σ-álgebra de Borel en X se llama medida de Borel. Supongamos que $\mathcal{M}$ es una $\sigma-$álgebra sobre X tal que $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}$. Una medida μ sobre $\mathcal{M}$ se dice regular si cumple las siguientes condiciones:

(a) Todo subconjunto compacto $K \subseteq X$ satisface $\mu(K) < +\infty$,

(b) para todo conjunto $A \in \mathcal{M}$, se cumple

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ es abierto}\}, \text{ y}$$

(c) para todo conjunto abierto $U \subseteq X$, se cumple

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ es compacto}\}.$$

Una medida de Borel regular sobre X es una medida regular cuyo dominio es $\mathcal{B}(X)$. Una medida que satisface la condición (b) se denomina regular exterior, y una medida que satisface (c), regular interior.

El siguiente resultado abarca todos los espacios métricos (véase Proposición 1.6). Para situarlo en contexto, presentaremos previamente un ejemplo de espacio de Hausdorff en el que todo conjunto abierto es un F_σ, es decir, puede expresarse como la unión numerable de conjuntos cerrados.

Ejemplo 2.1. *El siguiente es un ejemplo fundamental de un espacio de Hausdorff en que todo conjunto abierto es un F_σ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. En efecto, dado un intervalo abierto $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, existe una familia numerable de intervalos cerrados que cumple con lo buscado. Cada intervalo puede escribirse como*

$$(a, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right],$$

es decir, como unión numerable de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Ahora, como todo abierto puede expresarse como unión numerable de intervalos abiertos, concluimos que todo abierto es F_σ.

Para enunciar el resultado que motiva este capítulo, en necesario introducir el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea X un espacio de Hausdorff donde cada conjunto abierto es un F_σ, y sea μ una medida de Borel finita en X. Entonces cada subconjunto de Borel en X satisface que*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ es abierto}\} \tag{2.1}$$

y

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A, F \text{ es cerrado}\} \tag{2.2}$$

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la colección de conjuntos de Borel que satisfacen 2.1 y 2.2.

Primero probaremos que $\mathcal{F}$ contiene los abiertos de X. Sea $V \subseteq X$ un subconjunto abierto. Claramente, V satisface

$$\mu(V) = \text{ínf}\{\mu(U) : V \subseteq U, U \text{ abierto}\} \tag{2.3}$$

Por hipótesis, todo abierto es un conjunto F_σ, asi que existe una sucesión creciente $F_n \subseteq V$ de cerrados tal que $\bigcup_n F_n = V$. Por Observación 2.1 (apartado *i)*), se tiene que

$$\mu(V) = \lim_n \mu(F_n) = \sup\{\mu(F_n) : F_n \subseteq V, F_n \text{ es cerrado}\}.$$

De esta forma, $V \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ contiene todos los subconjuntos abiertos de X.

Veremos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. Claramente, $X \in \mathcal{F}$ porque es un conjunto abierto.

Como μ es finita, $\mu(U) = \mu(F) + \mu(U \setminus F)$, donde trabajamos con números reales, luego $\mu(U \setminus F) = \mu(U) - \mu(F)$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}$ es cerrada por complementarios. Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existen $F \subseteq A \subseteq U$, con F cerrado, U abierto y $\mu(U \setminus F) < \epsilon$. Tomamos complementarios:

- $U^c \subseteq A^c \subseteq F^c$,
- U^c es cerrado, F^c es abierto,
- $\mu(F^c \setminus U^c) = \mu(U \setminus F) < \epsilon$.

Por lo tanto, $A^c \in \mathcal{F}$.

Por último, falta ver que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo uniones contables. Sea $A_k \in \mathcal{F}, k = 1, 2, \ldots$. Para cada k, existen $F_k \subseteq A_k \subseteq U_k$, con F_k cerrado, U_k abierto y $\mu(U_k \setminus F_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Sean

$$F := \bigcup_k F_k, \quad U := \bigcup_k U_k.$$

Consideramos el conjunto $A := \bigcup_k A_k$, entonces $F \subseteq \bigcup_k A_k \subseteq U$ y

$$\mu(U \setminus F) \leq \mu\left(\bigcup_k (U_k \setminus F_k)\right) \leq \sum_k \mu(U_k \setminus F_k) < \sum_k \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

El conjunto U es abierto como unión contable de abiertos. Por otra parte, el conjunto F no es necesariamente cerrado. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\bigcup_{k=1}^{n} F_k$$

es cerrado. Como $\mu(U \setminus F) = \lim_n \mu\left(U \setminus \bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)$ y $\mu(U \setminus F) < \epsilon$, existe un n de forma que

$$\mu\left(U \setminus \bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) < \epsilon.$$

Esto muestra que $\bigcup_k A_k \in \mathcal{F}$, y por lo tanto, $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones numerables.

En conclusión, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los conjuntos abiertos. Por tanto, contiene a la σ-álgebra generada por los abiertos, es decir, a todos los conjuntos de Borel. En consecuencia, para todo conjunto de Borel $A \subseteq X$ se tiene

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ abierto}\}, \quad \mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A,\ F \text{ cerrado}\}.$$

□

Procederemos ahora a introducir el concepto de precompacidad, también conocido en espacios métricos como acotación total. Este concepto desempeña un papel importante en el análisis de las propiedades de compacidad, especialmente en el contexto de espacios métricos completos y separables, como son los espacios polacos.

Definición 2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es precompacto si, para cada número real $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X tal que*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon)$$

Teorema 2.2. *Todo subconjunto compacto en un espacio métrico es precompacto.*

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto compacto.

Consideramos el recubrimiento abierto de A dado por bolas abiertas de radio ϵ,

$$U := \{B(x, \epsilon) : x \in A\}.$$

Como A es compacto, este recubrimiento admite un subrecubrimiento finito

$$\{B(x_1, \epsilon), B(x_2, \epsilon), \ldots, B(x_n, \epsilon)\},$$

es decir,

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \epsilon) \quad \text{con } x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$$

De esta forma, el subconjunto A es precompacto. □

Más en general, un conjunto es precompacto si, y solo si, su clausura es compacta. En algunos textos, para referirse a que un conjunto tenga clausura compacta se le llama relativamente compacto. Aunque no entraremos en su demostración, véase [6, Th.2, Ch.4.4, p.97] .

Ejemplo 2.2. *El conjunto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ bajo la métrica usual es precompacto. Sabemos que $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$, por ser cerrado y acotado. Por lo tanto, la clausura de $(0, 1)$ es compacta y podemos concluir que es un conjunto precompacto.*

Otra forma de ver que $(0, 1)$ es precompacto es utilizando la definición. Sea $\epsilon > 0$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{1}{\epsilon}$ y definimos $x_k := \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\epsilon$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces,

$$(0, 1) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} B(x_k, \epsilon) = \left(-\tfrac{\epsilon}{2}, \tfrac{3\epsilon}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\epsilon}{2}, \tfrac{5\epsilon}{2}\right) \cup \cdots \cup \left((n - \tfrac{3}{2})\epsilon, (n + \tfrac{1}{2})\epsilon\right)$$

pues $n\epsilon > 1$ y cada bola $B(x_k, \epsilon)$ contiene el intervalo $(k\epsilon, (k+1)\epsilon)$. Por tanto, $(0,1)$ es precompacto.

Otra relación importante entre espacios compactos y precompactos es la que se establece a continuación. Se usará inmediatamente en la proposición posterior.

Teorema 2.3. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si, y solo si, es completo y precompacto.*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [7, Th. 45.1, Ch.7, p. 276].

Finalmente, procedemos a enunciar la propiedad de las medidas de Borel finitas en espacios polacos.

Teorema 2.4. *Toda medida de Borel finita en un espacio polaco es regular.*

Demostración. Sean X un espacio polaco y d la métrica completa asociada a la topología de X. Sea μ una medida de Borel finita en X.

Por Proposición 1.6, todo subconjunto abierto de X es un conjunto F_σ en X. Por lo tanto, Teorema 2.1 garantiza que cada subconjunto de Borel A de X satisface:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\} \tag{2.4}$$

y

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ y } F \text{ es cerrado}\}. \tag{2.5}$$

Probaremos una versión más fuerte de 2.5, demostrando que todo conjunto de Borel $A \subseteq X$ satisface

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ y } U \text{ es compacto}\}. \tag{2.6}$$

Primero consideramos el caso $A = X$. Como X es un espacio polaco, es separable y podemos tomar una sucesión (x_k) cuyos elementos generan un subconjunto denso en X, es decir,

$$\overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} = X.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto abierto

$$V_m := \bigcup_{k=1}^{m} B\left(x_k, \frac{1}{n}\right).$$

De esta forma, tenemos una sucesión creciente de conjuntos abiertos

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots \quad .$$

Además, dado que la sucesión (x_k) es densa en X, se cumple que

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m.$$

Por lo tanto, por Observación 2.1, se tiene

$$\mu(X) = \lim_{m\to\infty} \mu(V_m),$$

y, como por hipótesis μ es una medida de Borel finita, existe k_n tal que

$$\mu(V_{k_n}) > \mu(X) - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Entonces

$$\mu(V_{k_n}^c) = \mu(X) - \mu(V_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Definimos ahora el conjunto $K = \bigcap_n \bigcup_{k=1}^{k_n} \overline{V_k} = \bigcap_n \overline{V_{k_n}}$.

Por otra parte, todo subconjunto cerrado de un espacio completo es completo, y por tanto, K, al ser cerrado, es completo.

Además, observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\overline{V_{k_n}}$ es, por definición, la clausura de una unión finita de bolas abiertas de radio $\dfrac{1}{n}$. Fijamos $x \in \overline{V_{k_n}}$. Entonces existe $y \in V_{k_n}$ con $d(x, y) < \frac{1}{k_n}$. Por definición, existe $k \in \{1, \dots, k_n\}$ tal que $y \in B\left(x_k, \dfrac{1}{k_n}\right)$. Entonces $d(x, x_k) < \frac{2}{k_n}$. Con ello probamos que

$$x \in \bigcup_{k=1}^{k_n} B\left(x_k, \frac{2}{k_n}\right),$$

es decir,

$$\overline{V_{k_n}} \subset \bigcup_{k=1}^{k_n} B\left(x_k, \frac{2}{k_n}\right).$$

Por lo tanto, $\overline{V_{k_n}}$, y en particular $K \subseteq \overline{V_{k_n}}$, puede cubrirse mediante un número finito de bolas de radio $\dfrac{2}{k_n}$. Como esto se cumple para todo n, se deduce que K es precompacto.

De esta forma, por Teorema 2.3, K es compacto.

Además, $K^c = \bigcup_n \overline{V_{k_n}}^c \subset \bigcup_n V_{k_n}^c$, con lo cual

$$\mu(K^c) \le \sum_n \mu\left(V_{k_n}^c\right) \le \sum_n \mu\left(V_n^c\right) \le \sum_n \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

así,

$$\mu(K) > \mu(X) - \epsilon.$$

Dado que ϵ es arbitrario, podemos concluir 2.6 cuando $A = X$.

Consideremos ahora $A \subset X$ un conjunto de Borel cualquiera.

Fijamos $\epsilon > 0$. Dado que μ es finita, por el caso anterior existe un conjunto compacto $K \subseteq X$ tal que

$$\mu(K) > \mu(X) - \epsilon.$$

Aplicando 2.5 a A, existe un conjunto cerrado $F \subseteq A$ de forma que

$$\mu(F) > \mu(A) - \epsilon.$$

Por lo tanto, como K es compacto y F es cerrado, el conjunto $K \cap F$ es un subconjunto compacto de A, y satisface

$$K \cap F \subseteq A, \quad \text{y} \quad \mu(K \cap F) > \mu(A) - 2\epsilon.$$

De la misma forma que en el caso anterior, como ϵ es arbitrario, se cumple 2.6.

Por lo tanto, para toda medida de Borel finita μ sobre un espacio polaco X, y todo conjunto de Borel $A \subseteq X$, se tiene:

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ y } U \text{ es abierto}\} \text{ y } \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A \text{ y } U \text{ es compacto}\},$$

y podemos concluir que μ es regular. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos Analíticos

Los conjuntos analíticos constituyen una clase fundamental de subconjuntos en espacios polacos. Aunque su estudio en general se enmarca dentro de la teoría de conjuntos de Borel en espacios polacos, en este capítulo, nos centraremos exclusivamente en considerar únicamente su caracterización como imágenes continuas de espacios polacos. Este enfoque nos permitirá aplicar directamente construcciones topológicas introducidas anteriormente, como el espacio de Baire $\mathcal{N}$.

3.1. Definición y caracterizaciones básicas

A continuación, presentamos la definición de conjunto analítico que vamos a utilizar en este contexto. Existen otras definiciones, como se puede ver en [3, Ch.6, p.222], [10, Ch.0, p.17] y [2, Ch.6, p.19].

Definición 3.1. *Sea X un espacio polaco. Un subconjunto A de X es analítico si existe un espacio polaco Z y una función continua $f : Z \longrightarrow X$ tal que $f(Z) = A$. En otras palabras, A es la imagen de un espacio polaco bajo una función continua.*

La siguiente proposición establece que la clase de subconjuntos analíticos de un espacio polaco es estable bajo operaciones básicas como la unión y la intersección contable.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio polaco, y sean $A_1, A_2, \dots$ subconjuntos analíticos de X. Se tiene que $\bigcup_k A_k$ y $\bigcap_k A_k$ son analíticos.*

Demostración. Primer probaremos que $\bigcup\limits_k A_k$ es una conjunto analítico. Como cada A_k es un subconjunto analítico de X, existen un espacio polaco Z_k y una función continua

$$f_k : Z_k \longrightarrow X, \quad \text{tal que } f_k(Z_k) = A_k.$$

Consideramos la unión disjunta $Z := \sum\limits_k Z_k$ que, por Proposición 1.4, es un espacio polaco. Definimos ahora la aplicación

$$f : Z \longrightarrow X$$

dada por $f(z) := f_k(z)$ si $z \in Z_k$, es decir, f coincide con f_k sobre cada Z_k. Recordemos que, en la topología de la unión disjunta, un subconjunto $U \subset Z$ es abierto si, y solo si, $U \cap Z_k$ es abierto en Z_k para todo k. Veamos que f es continua. Dado un abierto $U \subset X$, tenemos

$$f^{-1}(U) = \bigcup_k f_k^{-1}(U),$$

donde cada $f_k^{-1}(U)$ es abierto en Z_k, ya que cada f_k es continua. De esta forma, $f^{-1}(U)$ es unión de conjuntos abiertos $f_k^{-1}(U) \subset Z_k$. Así, $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto con la topología disjunta y f es una función continua. Adicionalmente, se cumple que

$$f(Z) = \bigcup_k f_k(Z_k) = \bigcup_k A_k.$$

Por lo tanto, $\bigcup\limits_k A_k$ es la imagen de una función continua definida sobre un espacio polaco y, por definición, es analítico.

Veamos ahora que $\bigcap\limits_k A_k$ es un conjunto analítico. Consideramos el espacio producto $\prod\limits_k Z_k$ (por Proposición 1.5 es espacio polaco). Definimos el subconjunto

$$\Delta := \left\{ (z_k) \in \prod_k Z_k : f_i(z_i) = f_j(z_j) \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Veamos que Δ es cerrado. Para ello, mostraremos que Δ^c es abierto. Fijamos un punto $(z_k) \in \Delta^c$, entonces existen j, k distintos tales que $f_j(z_j) \neq f_k(z_k)$. Como X es polaco, existen abiertos disjuntos $U_j, U_k \subset X$ tales que

$$f_j(u_j) \in U_j, f_k(z_k) \in U_k \text{ y } U_j \cap U_k = \emptyset.$$

Dado que f_j, f_k son funciones continuas, existen conjuntos abiertos $W_j \subset Z_j$ y $W_k \subset Z_k$ tales que

$$z_j \in W_j,\ z_k \in W_k,\ f_j(W_j) \subset U_j \text{ y } f_k(W_k) \subset U_k.$$

Definimos el abierto básico $W := \prod\limits_n V_n$ donde $V := Z_n$ para $n \neq j, k$, y $V_j := W_j$, $V_k := W_k$. Entonces, W es un entorno abierto de (z_k) en $W := \prod\limits_k Z_k$. Si tomamos $(z'_k) \in W$, $f_j(z'_j) \in U_j$ y $f_k(z'_k) \in U_k$, entonces $f_j(z'_j) \neq f_k(z'_k)$. Así, $W \cap \Delta = \emptyset$ y Δ^c es abierto. De esta forma, Δ es un subconjunto cerrado de $\prod\limits_k Z_k$. Así, por Proposición 1.3, Δ es un espacio polaco.

Finalmente, definimos la aplicación $f : \Delta \longrightarrow X$ como $f((z_k)) := f_1(z_1)$. Por definición de Δ, todos los valores $f_k(z_k)$ coinciden y, así, la función esta bien definida. Además, f es continua por ser composición de proyección continua y f_1 continua. Veamos ahora que $f(\Delta) = \bigcap\limits_k A_k$. Por una parte, se cumple que, si $(z_k) \in \Delta$, entonces $f((z_k)) = f_1(z_1) = f_2(z_2) = \cdots \in f(Z_1) \cap f(Z_2) \cap \cdots = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$. De este modo,

$$f(\Delta) \subset \bigcap_k A_k.$$

Por otra parte, si $x \in \bigcap_k A_k$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $z_k \in Z_k$ con $f_k(z_k) = x$, con lo que (z_n) pertenece a Δ. Además, claramente, $f((z_n)) = x$. Con ello $x \in f(\Delta)$ y deducimos la otra inclusión.

Por tanto, $\bigcap_k A_k$ es analítico, como imagen de un espacio polaco bajo una función continua. $\square$

Antes de presentar resultados más generales, la siguiente proposición proporciona una familia amplia de conjuntos analíticos.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio polaco. Entonces, cada subconjunto G_δ es analítico.*

Demostración. Sea A un subconjunto G_δ de X. Por Teorema 1.1, A es un espacio polaco con la topología de subespacio. Consideramos la aplicación

$$f : A \longrightarrow X, \quad f(x) = x.$$

Como es la aplicación identidad, es continua, y $A = f(A)$. Por lo tanto, A es la imagen continua de un espacio polaco y por definición es analítico. $\square$

Por otra parte, podemos dar un resultado similar para conjuntos F_σ.

Corolario 3.1. *Sea X un espacio polaco. Entonces, cada subconjunto F_σ es analítico.*

Demostración. Sea A un subconjunto F_σ de X. Entonces, existen cerrados $F_n \subset X$ tales que

$$A = \bigcup_n F_n.$$

Por Proposición 1.3, cada F_n es un espacio polaco (con la topología de subespacio). De forma análoga a la prueba de Proposición 3.2, aplicando la identidad se tiene que $F_n = f(F_n)$ y, por definición, para cada n, F_n es un conjunto analítico. Por lo tanto, por Proposición 3.1, podemos concluir que A es un conjunto analítico. $\square$

En la prueba de Corolario 3.1, hemos visto que todo subconjunto cerrado de un espacio polaco es analítico. Para el caso de los subconjuntos abiertos, como todo abierto es un conjunto G_δ, por Proposición 3.2, todo subconjunto abierto de un espacio polaco es analítico.

3.2. Relación con el espacio de Baire

En el capítulo anterior, presentamos el espacio de Baire, denotado como $\mathcal{N}$, un concepto fundamental en nuestro estudio de conjuntos analíticos y espacios polacos. A continuación, examinaremos su relación con estos conjuntos a través de diversos resultados que establecen importantes relaciones entre ambos.

Teorema 3.1 (Teorema de la intersección de Cantor). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea (F_n) una sucesión decreciente (con respecto a la inclusión) de conjuntos cerrados no vacíos de X tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Entonces, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contiene exactamente un solo punto, es decir,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\} \text{ para algún } x \in X$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un punto $x_n \in F_n$, y consideramos (x_n) como la sucesión de estos. Dado que (F_n) es una sucesión decreciente de conjuntos, $F_{n+1} \subseteq F_n$, y se tiene que $x_n, x_{n+1} \in F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este proceso se puede generalizar para $m > n$, y así, si tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m$, entonces $x_m \in F_n$. De esta forma,

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(F_n).$$

Como por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se sigue que, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

es decir, (x_n) es una sucesión de Cauchy en X.

Como X es completo, la sucesión converge a un punto $x \in X$. Además, el conjunto F_n es cerrado y contiene todos los términos x_k con $k \geq n$. Así, $x \in F_n$ para todo n y

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Veamos ahora que este punto es único. Supongamos que existe $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ distinto de x. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) = \delta$. Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, existe M tal que $\operatorname{diam}(F_M) < \delta$. Sin embargo, $x, y \in F_M$, lo que implica que

$$d(x, y) \leq \operatorname{diam}(F_M) < \delta,$$

lo cual contradice que $d(x, y) = \delta$. En consecuencia, la intersección contiene exactamente un punto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$$

□

Teorema 3.2. *Todo espacio polaco no vacío es la imagen de $\mathcal{N}$ por una función continua.*

Demostración. Sea X un espacio polaco no vacío, y sea d una métrica completa asociada. Para naturales $n_1, \dots n_k$ consideramos la sucesión finita $(n_1, \dots n_k)$ y el conjunto S de todas estas sucesiones finitas. Ahora, para cada $(n_1, \dots n_k) \in S$ construiremos los subconjuntos $C(n_1, \dots n_k)$ de X de modo que

(a) $C(n_1, ...n_k)$ es cerrado y no vacio,

(b) el diámetro de $C(n_1, ..., n_k)$ es a lo sumo $\frac{1}{k}$,

(c) $C(n_1, ..., n_{k-1}) = \bigcup_{n_k} C(n_1, ..., n_k)$, y

(d) $X = \bigcup_{n_1} C(n_1)$

Procederemos a construirlos por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$.

Primero, supongamos que $k = 1$. Como X es separable, podemos considerar $(x_{n_1})_{n_1}$ una sucesión cuyos elementos forman un subconjunto denso de X:

$$\overline{\{x_{n_1} : n_1 \in \mathbb{N}\}} = X$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$ se define $C(n_1)$ como la bola cerrada de centro x_{n_1} y radio 1, es decir,

$$C(n_1) := \overline{B}\left(x_{n_1}, 1\right).$$

Cada $C(n_1)$ es cerrado y no vacío, y $\operatorname{diam}(C(n_1)) \leq 1$. Como $(x_{n_1})_{n_1}$ es una sucesión densa en X, para todo $x \in X$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_{n_1}) < 1.$$

Por tanto, $x \in \overline{B}(x_{n_1}, 1) = C(n_1)$ y

$$X = \bigcup_{n_1} C(n_1).$$

Supongamos ahora que $k > 1$ y que ya hemos construido los conjuntos cerrados y no vacíos $C(n_1, ..., n_{k-1}) \subseteq X$ que cumplen las propiedades establecidas anteriormente:

- $\operatorname{diam}(C(n_1, \dots n_{k-1})) \leq \dfrac{1}{k-1}$ y
- $C(n_1, \dots n_{k-2}) = \bigcup_{n_{k-1}} C(n_1, \dots n_{k-1})$, $k > 2$

Como $C(n_1, \dots n_{k-1})$ es un subconjunto no vacío y cerrado, por Proposición 1.3, es polaco, y así es separable. De este modo, para cada sucesión $(n_1, \dots, n_k)$, podemos considerar una sucesión densa $(x_{n_k}^{(n_1,\dots,n_k)})_{n_k}$ en el conjunto $C(n_1, \dots, n_{k-1})$. Para cada $n_k \in \mathbb{N}$, definimos

$$C(n_1, \dots, n_k) := \overline{B}\left(x_{n_k}^{(n_1,\dots,n_k)}, \frac{1}{k}\right) \cap C(n_1, \dots n_{k-1}).$$

Se cumple que $C(n_1, \dots, n_k)$ es cerrado como intersección de dos conjuntos cerrados. Es no vacío porque $x_{n_k}^{(n_1,\dots,n_k)} \in C(n_1, \dots, n_k)$. Como $C(n_1, \dots, n_k) \subset \overline{B}\left(x_{n_k}^{(n_1,\dots,n_k)}, \frac{1}{k}\right)$, su diámetro es a lo sumo $\frac{1}{k}$. Además, como $(x_{n_k}^{(n_1,\dots,n_k)})_{n_k}$ es densa en $C(n_1, \dots, n_{k-1})$,

$$C(n_1, \dots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k} C(n_1, \dots, n_k)$$

De este modo, por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$, hemos construido una familia de conjuntos $C(n_1, \ldots n_k)$, con $(n_1, \ldots n_k) \in S$ que satisfacen (a), (b) (c) y (d).

Finalmente, una vez definida esta familia de conjuntos $C(n_1, \ldots, n_k)$, procederemos a definir una función continua cuya imagen sea todo el espacio X.

Sea $\mathcal{N}$ el espacio de Baire, tal como se introdujo en Ejemplo 1.13. Sea $\alpha = (n_1, n_2, \ldots) \in \mathcal{N}$. Consideramos la sucesión de conjuntos

$$C(n_1), C(n_1, n_2), C(n_1, n_2, n_3), \ldots$$

Cada uno de estos conjuntos cumple las condiciones (a),(b),(c) y (d) establecidas previamente. En particular, tenemos una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de X que cumplen que $\operatorname{diam}(C(n_1, \ldots, n_k)) \leq \frac{1}{k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam}(C(n_1, \ldots, n_k)) = 0.$$

Teorema 3.1 garantiza que la intersección

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_k)$$

contiene exactamente un punto. Definimos entonces la función $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f(\alpha)$ sea el único punto de $\bigcap_{k=1}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_k)$.

Primero comprobemos la continuidad de la función. Dotamos al espacio $\mathcal{N}$ de la métrica

$$d'(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq \beta_k\}} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

que metriza la topología producto discreta y hace de $\mathcal{N}$ un espacio polaco.

Fijamos $\epsilon > 0$. Como

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam}(C(n_1, \ldots, n_k)) = 0,$$

existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{diam}(C(n_1, \ldots, n_k)) < \epsilon.$$

Sea $\delta := \frac{1}{k}$. Fijamos $\alpha \in \mathcal{N}$. Consideremos cualquier $\beta = (m_1, m_2, \ldots) \in \mathcal{N}$ tal que $d(\alpha, \beta) < \delta$. Esto implica que $m_i = n_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Por la construcción, entonces $f(\alpha), f(\beta) \in C(n_1, \ldots, n_k)$, y por tanto,

$$d(f(\alpha), f(\beta)) < \epsilon.$$

Esto prueba que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(\alpha, \beta) < \delta$, entonces $d(f(\alpha), f(\beta)) < \epsilon$. Es decir, f es una función continua (por serlo en cada punto).

Falta comprobar que f es sobreyectiva. Queremos ver que, para todo punto de $x \in X$, existe $\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $f(\alpha) = x$. Sea $x \in X$. Por la propiedad (d) de los conjuntos, existe n_1 tal que $x \in C(n_1)$; por Propiedad (c), existe n_2 tal que

$C(n_1) = \bigcup_{n_2} C(n_1, n_2)$, es decir, $x \in C(n_1, n_2)$, y asi sucesivamente. Repetimos el proceso inductivo y construimos una sucesión $(n_k)_k$ tal que $x \in C(n_1, \ldots, n_k)$ para todo k. Entonces

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_k) = \{f(\alpha)\},$$

y $x = f(\alpha)$. Podemos concluir que f es sobreyectiva.

En conclusión, hemos construido una función

$$f : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

que es continua y sobreyectiva para un espacio polaco X cualquiera. Con lo cual, se concluye que todo espacio polaco no vacío es la imagen continua del espacio de Baire. □

Podemos concluir que todo subconjunto G_δ de un espacio polaco no vacío es imagen continua de $\mathcal{N}$ (véase Teorema 1.1). Se trata de un tipo particular de conjuntos analíticos que son imagen continua de $\mathcal{N}$ (veáse Proposición 3.2). Ahora generalizamos esta propiedad a cualquier conjunto analítico.

Corolario 3.2. *Todo subconjunto analítico de un espacio polaco no vacío es la imagen de $\mathcal{N}$ por una función continua.*

Demostración. Sea X un espacio polaco, y sea A un subconjunto analítico de X. Por definición de estos conjuntos, existe un espacio polaco Z y una función continua

$$f : Z \longrightarrow X \quad \text{tal que } A = f(Z).$$

Por Teorema 3.2, existe una función continua

$$g : \mathcal{N} \longrightarrow Z \quad \text{tal que } Z = f(\mathcal{N}).$$

Por lo tanto,

$$A = f(Z) = f(g(\mathcal{N})) = (f \circ g)(\mathcal{N}),$$

es decir, A es la imagen de $\mathcal{N}$ bajo una función continua. □

A continuación, presentamos un resultado que relaciona (indirectamente) $\mathcal{N}$ con los conjuntos analíticos y sirve como caracterización.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio polaco. Un subconjunto A de X es analítico si, y solo si, existe un subconjunto cerrado de $\mathcal{N} \times X$ cuya proyección sobre X sea A.*

Demostración. Sea $A \subset X$. Supongamos que existe un subconjunto cerrado $F \subseteq \mathcal{N} \times X$ cuya proyección es A. Veremos que A es analítico. Dado que $\mathcal{N}$ es un espacio polaco (ver Ejemplo 1.13), por Proposición 1.5, el producto $\mathcal{N} \times X$ es un espacio polaco. Además, los subconjuntos cerrados de un espacio polaco son polacos con la topología de subespacio (por Proposición 1.3).

Por otra parte, la proyección sobre X es una función continua, por lo que la imagen de F bajo esta proyección es, por definición, un subconjunto analítico. Esto prueba que A es analítico.

Recíprocamente, supongamos que $A \subseteq X$ es un conjunto analítico.

Si $A = \emptyset$, se tiene que A es la proyección del subconjunto vacío de $\mathcal{N} \times X$, que es cerrado.

De lo contrario, si $A \neq \emptyset$, por Corolario 3.2, existe una función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f(\mathcal{N}) = A$. A continuación, consideramos el grafo de f

$$\operatorname{gr}(f) = \{(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{N} \times X.$$

y estudiamos si es un conjunto cerrado. Supongamos que $(\alpha_n, x_n) \in \operatorname{gr}(f)$ es una sucesión convergente en $\mathcal{N} \times X$ a un punto (α, x). Es decir,

- α_n converge a α en $\mathcal{N}$,
- x_n converge a x en X,
- y para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(\alpha_n)$.

Dado que f es continua, y α_n converge a α, $f(\alpha_n)$ converge a $f(\alpha)$. Asimismo, al cumplirse también que x_n converge a x, y ser único el límite, necesariamente $x = f(\alpha)$. Por lo tanto,

$$(\alpha, x) = (\alpha, f(\alpha)) \in \operatorname{gr}(f),$$

y se sigue que es un conjunto cerrado. Además, la proyección de $\operatorname{gr}(f)$ sobre la segunda coordenada es precisamente A, ya que $f(\mathcal{N}) = A$.

Por lo tanto, podemos concluir que A es la proyección de un conjunto cerrado de $\mathcal{N} \times X$. □

3.3. Relación con el espacio de Cantor

Para establecer una relación entre nuestro estudio de espacios polacos y el espacio de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ introducido anteriormente en Ejemplo 1.14, necesitaremos una noción fundamental de dimensión cero en la topología de un espacio.

Definición 3.2. *Un espacio topológico (X, τ) se dice de dimensión cero si admite una base formada por conjuntos que son tanto abiertos como cerrados.*

Ejemplo 3.1. *En general, cualquier espacio con la topología discreta es de dimensión cero: todos los subconjuntos son simultáneamente abiertos y cerrados.*

Por otra parte, si consideramos $\mathbb{Q}$ dotado de la topología heredada de $\mathbb{R}$, es de dimensión cero. Los conjuntos de la forma

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} = [a, b] \cap \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ a < b,$$

constituyen una base para la topología y todos son abiertos y cerrados en dicha topología. Por tanto, $\mathbb{Q}$ también es de dimensión cero.

Los espacios de dimensión cero forman una clase particularmente útil: son estables bajo productos, subespacios y uniones disjuntas numerables. Cabe destacar que el espacio de Baire $\mathcal{N}$ y el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ son el producto de espacios de dimensión cero, y así, son de dimensión cero.

La siguiente proposición se usará de forma inmediata. Para ello, es necesario presentar otro ejemplo bastante relevante de espacio polaco.

Ejemplo 3.2. *En Ejemplo 1.3 vimos que todo espacio compacto metrizable era un espacio polaco. El intervalo cerrado* $[0,1]$ *es compacto con la métrica usual. Por lo tanto,* $[0,1]$ *es un espacio polaco con la topología usual.*

De esta forma, el conjunto $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *junto con la topología producto es, por Proposición 1.5, un espacio polaco. Este espacio topológico se conoce normalmente como el cubo de Hilbert y puede verse como el espacio de todas las sucesiones* (x_n) *tales que*

$$0 \leq x_n \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 3.4. *Sea* X *un espacio separable y metrizable. Entonces es homeomorfo a un subespacio de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$. *Si* X *es polaco, es homeomorfo a un subconjunto* G_δ *de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *.*

Demostración. Primero veamos que, si X es un espacio separable y metrizable, entonces es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Como X es metrizable, existe una métrica d que metriza la topología de X. Además, como es separable contiene un conjunto denso y numerable. Sea (x_n) una sucesión cuyos elementos forman el conjunto denso y numerable en X.

Para cada punto $x \in X$, definimos una función

$$h : X \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}},\ h(x) = (\text{mín}\{1, d(x, x_n)\}),$$

es decir, la imagen de cada punto de $x \in X$ es una sucesión donde el n-ésimo término es el mínimo entre 1 y $d(x, x_n)$. Esta función esta bien definida porque para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(x, x_n) \geq 0$ y $h(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Supongamos que $h(x) = h(y)$. Entonces, para cada n,

$$\text{mín}\{1, d(x, x_n)\} = \text{mín}\{1, d(y, x_n)\}.$$

Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso, existe una sucesión (x_{n_k}) con $d(x, x_{n_k}) < 1$ para todo n_k y $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x$. Con ello, $d(y, x_{n_k}) = d(x, x_{n_k}) < 1$ y $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = y$. Por lo tanto, $x = y$. De esta forma, la función es inyectiva.

Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como la métrica d es continua y $\text{mín}(1, t)$ también, la función h es continua coordenada a coordenada. Como en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ tenemos la topología producto, la continuidad coordenada a coordenada garantiza que h es continua.

Veamos que $h^{-1} : h(X) \longrightarrow X$ es continua. Consideramos un abierto básico $B(x_0, r)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(h^{-1})^{-1}(B(x_0, r)) = h(B(x_0, r)) &= \\ \{h(x) : d(x_0, x) < r\} &= \\ \{(\text{mín}\{1, d(x_0, x_n)\})\}.\end{aligned}$$

Veamos que este conjunto $h(B(x_0, r))$ es abierto. Fijamos $h(x)$ con $x \in B(x_0, r)$. Definimos $s = d(x_0, r)$ y sea $\delta := \dfrac{r - s}{3} > 0$. Como (x_n) es denso, existe x_{n_1} con $d(x_{n_1}, x) < \delta$. Consideramos entonces el abierto básico de $[0,1]^{\mathbb{N}}$

$$U := B(d(x_{n_1}, x), \delta) \times \prod_{n \neq n_1} [0,1]$$

que contiene a $h(x)$. Queremos ver que $U \subset h(B(x_0, r))$, es decir, probamos que $h(x)$ es punto interior de $h(B(x_0, r))$.

Consideramos ahora $y \in X$ y supongamos que $h(y) = (t_n) \in U$. Entonces

$$|t_{n_1} - d(x, x_{n_1})| < \delta,$$

y por la definición de h, se tiene

$$|d(y, x_{n_1}) - d(x, x_{n_1})| < \delta,$$

y $d(x_{n_1}, y) < d(x_{n_1}, x) + \delta < 2\delta$. Usando la desigualdad triangular tenemos

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x) + d(x_0, x) < 3\delta + \delta + s = 3\delta + s < r,$$

por la elección de δ. Por tanto, $y \in B(x_0, r)$, y así $h(y) \in h(B(x_0, r))$. En la definición de δ, suponemos que $\delta < \frac{1}{3}$(podemos suponer sin pérdida de generalidad). Por ello,

$$d(x_{n_1}, x) < \delta < \frac{1}{3}.$$

Así, $|t_{n_1} - d(x_{n_1}, x)| < \delta$, luego $t_{n_1} < \delta + d(x_{n_1}, x) < 2\delta < 1$. De esta forma, $t_{n_1} < 1$, es decir, $t_{n_1} = \text{mín}\{1, d(y, x_{n_1})\} \neq 1$ y $\text{mín}\{1, d(y, x_{n_1})\} = d(y, x_{n_1})$. Queda justificado entonces que $t \in B(x_0, r)$ y podemos concluir que h^{-1} es continua.

La topología inducida de h sobre su imagen coincide con la de X, porque h es una función continua e inyectiva de un espacio metrizable a otro espacio metrizable, y las funciones continuas inyectivas entre espacios métricos son homeomorfismos sobre su imagen si la imagen hereda la métrica adecuada (aquí inducida desde el producto). Por tanto,

$$h : X \longrightarrow h(X) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$$

es un homeomorfismo sobre su imagen.

Probemos ahora que, si además X es polaco, entonces $h(x)$ es un conjunto G_δ en $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Dado que X es polaco y $h : X \longrightarrow h(X)$ es un homeomorfismo, por Proposición 1.7, $h(X)$ es un espacio polaco. En consecuencia, $h(X)$ es un subespacio polaco de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ y, por Teorema 1.1, necesariamente $h(X)$ es un subconjunto G_δ de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. □

Los siguientes resultados describen cómo se pueden obtener los conjuntos de Borel en espacios polacos. Será fundamental para establecer la relación, comentada previamente, entre el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y los cojuntos de Borel.

Proposición 3.5. *Todo espacio polaco es la imagen de un espacio polaco de dimensión cero por una función inyectiva continua.*

Demostración. Consideramos primero el intervalo $[0, 1]$. Definimos la función

$$F : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, 1], \quad F((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k},$$

que asocia a cada sucesión $(x_k) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ su desarrollo binario correspondiente en $[0, 1]$.

Esta claro que todo $x \in [0,1]$ admite un desarrollo en binario, por lo tanto existe una sucesión $(x_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $F((x_k)) = x$ y la función es sobreyectiva.

Veamos que la función es continua con respecto a la topología producto en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y la topología usual en $[0,1]$. Recordemos que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es el producto infinito de espacios finitos $\{0,1\}$ cada uno con la topología discreta. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos la siguientes funciones:

- La proyección canónica $\pi_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}$, dada por $\pi_k((x_n)) = x_k$. Esta función es continua por la definición de topología producto.
- La función $\phi_k : \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $\phi_k(x) = \dfrac{x}{2^k}$. Dado que $\{0,1\}$ está dotado de la topología discreta, esta función es continua.

Ahora, para cada k, definimos $f_k := \phi_k \circ \pi_k$ de forma que

$$f_k((x_n)) = \frac{x_k}{2^k}.$$

Cada función $f_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua como composición de funciones continuas, de modo que podemos reescribir F como

$$F((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k((x_k)).$$

Tenemos que probar entonces que esta suma define una función continua. Para ello, notamos que la serie converge uniformemente en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. En efecto, para todo $x = (x_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, se cumple que

$$|f_k(x)| = \left|\frac{x_k}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^k}$$

y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Por lo tanto, la función F, definida como suma de las funciones f_k, es continua.

Los únicos puntos en $[0,1]$ que tienen dos desarrollos binarios distintos son aquellos de la forma $\dfrac{m}{2^n}$ con $0 < m < 2^n$, es decir, son la imagen de dos elementos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ bajo la función F. Los demás puntos son imágenes de un solo elemento de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Por lo tanto, si eliminamos un subconjunto contable infinito adecuado de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, los puntos restantes forman un espacio tal que la función F se restrinja a una biyección sobre su imagen.

Sea Z el subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ resultante al eliminar estos puntos. Entonces

$$F|_Z : Z \longrightarrow [0,1]$$

es una biyección continua. Por otra parte, tenemos que Z es un subespacio de un un espacio de dimensión cero, por lo que es de dimensión cero. Además, como el complementario de Z es un subconjunto contable, Z^c es un conjunto F_σ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e implica que Z es G_δ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Por Teorema 1.1, Z es un espacio polaco. En definitiva, hemos probado que $[0,1]$ es la imagen de un espacio polaco de dimensión cero bajo una función continua e inyectiva.

En Ejemplo 3.2 vimos que el espacio $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es un espacio polaco. En consecuencia, por lo anterior, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es la imagen del espacio polaco de dimensión cero $Z^{\mathbb{N}}$ (ver Proposición 1.5) mediante una función continua e inyectiva.

Supongamos ahora que X es un espacio polaco cualquiera. Por Proposición 3.4, existe un homemomorfismo

$$G : X \longrightarrow G(X)$$

donde $G(X)$ es un conjunto G_δ en $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Además, como hemos visto, existe una función continua e inyectiva

$$H : Z^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{N}}$$

con $Z^{\mathbb{N}}$ un espacio polaco de dimensión cero. Como $G(X)$ es un G_δ, su imagen inversa $H^{-1}(G(X))$ en $Z^{\mathbb{N}}$, también lo es, y por tanto, por Teorema 1.1, es polaco.

Sea H_0 la restricción de H sobre este conjunto, es decir,

$$H_0 := H|_{H^{-1}(G(X))};$$

entonces H_0 es continua e inyectiva. Además,

$$G^{-1} \circ H : H^{-1}(G(X)) \longrightarrow X$$

es continua e inyectiva. Por lo tanto, X es la imagen de un espacio polaco de dimensión cero $H^{-1}(G(X))$ bajo una función continua e inyectiva. $\square$

Proposición 3.6. *Todo subconjunto de Borel de un espacio polaco es la imagen de un espacio polaco de dimensión cero por una función inyectiva continua.*

Aunque no presentaremos la demostración de esta proposición, cabe señalar que se deduce de Proposición 3.5. Para una demostración detallada, puede consultarse [4, Prop. 8.2.10, p. 268].

Antes de abordar el teorema principal, necesitamos establecer algunos conceptos y resultados fundamentales sobre los espacios métricos y separables e introducir la definición de los puntos de condensación. Estos elementos nos permiten construir funciones que preservan la estructura topológica de los espacios de dimensión cero y la deseada al trabajar con los conjuntos de Borel no contables.

Definición 3.3. *Sea X un espacio métrico. Decimos que p es un punto de condensación si cada entorno de p contiene una cantidad no contable de puntos.*

Lema 3.1. *Sean X un espacio metrizable separable y C el conjunto de puntos de condensación de X. Entonces C es cerrado y C^c es contable.*

Demostración. Comencemos probando que C^c es contable. Según Observación 1.1, si X un espacio metrizable separable, entonces también es segundo contable. En efecto, si d metriza la topología de X, y $D \subseteq X$ es un subconjunto denso contable entonces, la colección de bolas abiertas $B(x,r)$ con $x \in D$ y $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ forman una base contable para la topología. De esta forma, podemos tomar $\mathcal{U}$ una base contable para X.

Recordemos ahora que un punto $x \in X$ no es de condensación si existe un entorno abierto $U_x \in \mathcal{U}$ que contiene a x y es a lo sumo contable (su cardinal es finito o contable). Además, ningún punto de U_x es de condensación, es decir, $U_x \subset C^c$. En consecuencia, podemos escribir

$$C^c = \bigcup_{\substack{U_x \in \mathcal{U} \\ x \in C^c}} U_x.$$

Dado que $\mathcal{U}$ es una colección contable, y cada conjunto U_x es contable, C^c es contable.

Además, $C = X \setminus C^c$, así C es el complementario de un conjunto abierto (pues C^c es unión de abiertos de la base), y por tanto, C es cerrado. □

Proposición 3.7. *Sea X un espacio topológico segundo contable. Si $\mathcal{V}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces existe $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ contable tal que*

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V$$

Demostración. Como X es segundo contable, existe una base contable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos para su topología. Consideramos todos los elementos de la base que están contenidos en algún conjunto de $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{B}' := \{B_n \in \mathcal{B} : \text{ existe } U \in \mathcal{V}, B_n \subset U\}.$$

Dado que la base es contable, $\mathcal{B}'$ es contable. Para cada $B_n \in \mathcal{B}'$ tomamos un conjunto $U_n \in \mathcal{V}$ tal que $B_n \subset U_n$. Sea entonces

$$\mathcal{V}_0 := \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{V}.$$

Veamos ahora que se cumple la igualdad

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V.$$

Primero, como $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$, necesariamente se tiene

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Para la otra inclusión, sea $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V$. Entonces, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe algún conjunto $B_n \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_n \subset V.$$

Luego, $B_n \in \mathcal{B}'$ y, por construcción, $B_n \subset V_n$ con $V_n \in \mathcal{V}_0$. Por lo tanto, $x \in V_n$ y hemos probado que

$$x \in \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V,$$

es decir,

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V.$$

Podemos concluir que

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V.$$

□

Lema 3.2. *Sea X un espacio métrico separable de dimensión cero. Y sean U un subconjunto de X abierto y no compacto, y $\epsilon > 0$. Entonces, U es la unión contable de una familia infinita contable de conjuntos disjuntos, no vacíos, cerrados, abiertos y de diámetro a lo sumo ϵ.*

Demostración. Como U es un conjunto abierto y no compacto, por definición de no compacidad (existe un recubrimiento abierto de U que no admite subrecubrimiento finito), existe una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos de X cuya unión es U, pero tal que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre U. Es decir, para toda subfamilia finita propia $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, se tiene que $U \subsetneq \bigcup_{V \in \mathcal{U}_0}$.

Sea $\mathcal{V}$ la colección de conjuntos de X definda por

$$\mathcal{V} := \{V \subset X : V \text{ es abierto, cerrado}, \operatorname{diam}(V) \leq \epsilon, \text{ y } V \subset W \text{ para algún } W \in \mathcal{U}\}.$$

Como X es un espacio métrico de dimensión cero, para todo punto $x \in X$ y para todo ϵ, existe un conjunto abierto y cerrado $V \subset X$que contiene a x y está contenido en una bola de radio ϵ. En particular, si $x \in U$, podemos tomar dicho conjunto de forma que esta contenido en U. Por tanto, para todo $u \in U$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $u \in V$. Se sigue que podemos cubrir U con elementos de $\mathcal{V}$:

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Además, como X es separable, por Observación 1.1, también es segundo contable.

Entonces, por Proposición 3.7, existe una subfamilia contable $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ tal que

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}_0} V.$$

Sean ahora $V_1, V_2, \ldots$ conjuntos de $\mathcal{V}_0$. Construimos una subfamilia de subconjuntos disjuntos no vacíos de la siguiente forma:

$$W_1 := V_1, W_2 := V_2 \setminus V_1, W_3 := V_3 \setminus (V_2 \cup V_1), \ldots, W_n := V_n \setminus (V_{n-1} \cup \cdots \cup V_1)$$

Estos conjuntos son disjuntos dos a dos, abiertos cerrados, contenidos en $\mathcal{V}_0$, de diámetros a lo sumo ϵ, y su unión también cubre U. Además, hay infinitos de ellos, porque si hubiera solo una cantidad finita no vacía, entonces una subfamilia fintia de $\mathcal{U}$ cubriría U, contradiciendo que U no es compacto.

En conclusión, tenemos U como unión de una familia infinita contable de conjuntos disjuntos, no vacíos, abiertos, cerrados, y de diámetro a los sumo ϵ. $\square$

El siguiente teorema se basa en los resultados anteriores, y será utlizado para establecer el corolario posterior.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio polaco, y sea B un subconjunto no contable de X. Entonces, existe una función continua inyectiva $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f(\mathcal{N}) \subseteq B$ y $B \setminus f(\mathcal{N})$ es contable.*

Demostración. Estamos bajo las condiciones de la Proposición 3.6 tenemos un subconjunto de Borel de un espacio polaco. Por lo tanto, existen un espacio polaco de dimensión cero Z y una función continua e inyectiva $g : Z \longrightarrow X$ tal que $g(Z) = B$. De esta forma, bastará construir una función continua e inyectiva $h : \mathcal{N} \longrightarrow Z$ tal que $Z \setminus h(\mathcal{N})$ sea contable, ya que la función

$$f := g \circ h$$

cumple lo requerido: es continua, inyectiva y su imagen está contenida en B, salvo un conjunto numerable.

Primero construimos h. Sea $Z_0 \subseteq Z$ el conjunto de puntos de condensación de Z: aquellos en los que todo entorno contiene un número no contable de puntos de Z. Por Lema 3.1, $Z_0 \subset Z$ es cerrado y Z_0^c es contable. Entonces, por Proposición 1.3, es un espacio polaco. En particular, es un espacio polaco de dimensión cero por ser Z de dimensión cero. Además, dado que Z_0^c es contable, todo punto de Z_0 es un punto de condensación de Z_0 (y no solo de Z). Por lo tanto, construir

$$h : \mathcal{N} \longrightarrow Z_0 \subseteq Z$$

tal que $Z_0 \setminus h(\mathcal{N})$ sea contable bastará para que $Z \setminus h(\mathcal{N})$ también lo sea.

Sea d una métrica completa que metriza Z_0. Para cada $k \in \mathbb{N}$, construimos una familia de conjuntos parametrizada por $\mathbb{N}^k$ de la siguiente forma. Por inducción, comenzamos con el caso $k = 1$: aplicamos Lema 3.2 con $\epsilon = 1$ y siendo U el conjunto de puntos restantes al eliminar un punto de Z_0 (para garantizar que U no es compacto) al espacio Z_0. Obtenemos un conjunto $A(n_1)$ para cada $n_1 = 1, 2, \ldots$ tal que

- Los conjuntos $A(n_1)$ son disjuntos, no vacíos, cerrados,
- cada $A(n_1)$ tiene diámetro a lo sumo 1,
- cada $A(n_1)$ consiste en puntos de condensación de Z_0, y
- la unión $\bigcup_{n_1} A(n_1)$ cubre Z_0 menos un punto.

Repetimos este procedimiento para cada $A(n_1)$ subdividiéndolo en subconjuntos $A(n_1, n_2)$ con $\operatorname{diam}(A(n_1, n_2)) \leq \frac{1}{2}$ y que cumplen las demás condiciones mencionadas. De esta forma, repitiendo para cada k y $n_1, \ldots n_{k-1}$ obtenemos una colección de conjuntos

$$A(n_1, \ldots, n_k), \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}, (n_1, \ldots, n_{k-1}) \in \mathbb{N}^k$$

tales que

- son disjuntos, cerrados, no vacíos,
- de diámetro a lo sumo $\dfrac{1}{k}$, y
- $\bigcup_{n_k} A(n_1, \ldots, n_k) = A(n_1, \ldots, n_{k-1}) - \{x\}$ (donde x es un punto de $A(n_1, \ldots, n_k)$ garantizando así que trabajamos con un conjunto no compacto, para poder aplicar Lema 3.2).

Finalmente, podemos definir la función

$$h : \mathcal{N} \longrightarrow Z$$

tal que para cada sucesión $(n) = (n_1, n_2, \dots) \in \mathcal{N}$, $h((n))$ sea el único punto en la intersección $\bigcap_k A(n_1, \dots, n_k)$. Esta intersección es no vacía por construcción y se cumplen las siguientes condiciones:

- la métrica es completa,
- son conjuntos cerrados, no vacíos, decrecientes (respecto a la inclusión), y
- $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(A(n_1, \dots, n_k)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$

Por lo tanto, por Teorema 3.1, $\bigcap_k A(n_1, \dots, n_k)$ contiene exactamente un punto.

Es fácil de ver que h es una función continua e inyectiva y que $Z_0 \setminus h(\mathcal{N})$ es el conjunto contable infinito formado por lo puntos eliminados de Z_0 durante la construcción de los conjuntos $A(n_1, \dots, n_k)$. Se sigue que $Z \setminus h(\mathcal{N})$ es contable.

En conclusión, la función $f := g \circ h : \mathcal{N} \longrightarrow X$ es continua, inyectiva, y su imagen está contenida en B salvo un conjunto numerable. Es decir,

$$f(\mathcal{N}) \subseteq B \ \text{ y } \ B \setminus f(\mathcal{N}) \text{ es numerable.}$$

□

Observación 3.1. *Sabemos que todo subconjunto cerrado de un espacio compacto, es también compacto. Además, un subconjunto compacto de un espacio topólogico es cerrado si el espacio es de Hausdorff.*

Por otra parte, dados X, Y dos espacios topológicos, si

$$f : X \longrightarrow Y$$

es continua y K es un subconjunto compacto de X; entonces $f(K)$ es un subconjunto compacto de Y.

Sean ahora X un espacio compacto e Y un espacio de Hausdorff. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y biyectiva.

- *Como X es compacto y f es continua, $f(X)$ es compacto.*
- *Por otra parte, en un espacio de Hausdorff, todo subconjunto compacto es cerrado. Por tanto, $f(X)$, además de ser compacto, es cerrado en Y.*

Dado que hemos supuesto que f es biyectiva y su imagen $f(X)$ es un conjunto cerrado, se puede concluir que

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

está bien definida y es continua. Se sigue que f es un homeomorfismo entre X e Y.

Corolario 3.3. *Todo subconjunto de Borel no contable de un espacio polaco contiene un subconjunto que es homeomorfo a* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean X un espacio polaco y $B \subseteq X$ un subconjunto de Borel no contable.

Por Teorema 3.3, existe una función continua e inyectiva

$$f : \mathcal{N} \longrightarrow X$$

tal que $f(\mathcal{N}) \subseteq B$ y, en particular, $B \setminus f(\mathcal{N})$ es contable.

Observemos que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es un subespacio compacto y así cerrado (por ser producto de compactos) del espacio de Baire $\mathcal{N}$ con la topología producto. Consideramos la restricción de f al subespacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$:

$$f|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow f(\{0,1\}^{\mathbb{N}}).$$

Esta función es continua (por ser restricción de una función continua), inyectiva y su dominio es compacto. Por Observación 3.1, $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ es un subconjunto compacto de X, ya que es la imagen continua de un compacto.

Además, como X es un espacio polaco, en particular es un espacio de Hausdorff. Entonces, de nuevo, por Observación 3.1, el subconjunto $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ también es cerrado.

Finalmente, como $f|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ es una biyección continua de un compacto sobre un espacio de Hausdorff, una vez más Observación 3.1 implica que la función es un homeomorfismo. Por tanto, la imagen $f|_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ es homeomorfa a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Además, dicha imagen está contenida en B. Esto demuestra que B contiene un subconjunto homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\square$

Glosario

- Si $A \subset X$, $\overline{A}^{\tau}$ denotará la clausura de A con respecto a la topología τ (si τ viene dada por una métrica, podremos escribir $\overline{A}^{d}$ en vez de $\overline{A}^{\tau}$).

- Denotamos por $B_d(x,r)$ a la bola abierta de radio $r > 0$ centrada en el punto x con respecto a la distancia d. Es decir,

$$B_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

  donde X es el espacio considerado y d es la distancia que induce la topología en ese espacio. Y denotamos $\overline{B_d}(x,r)$ a la bola cerrada de radio $r > 0$ centrada en el punto x.

  Cuando el contexto sea claro, omitiremos el subíndice y escribiremos simplemente $B(x,r)$ para referirnos a la bola abierta respecto a la distancia correspondiente en el espacio métrico en el que estemos tratanto.

- Se utiliza la notación $\sigma(\mathcal{M})$ para referirnos a la σ-álgebra generada por la familia de conjuntos $\mathcal{M}$, es decir, la menor σ-álgebra que contiene a todos los elementos de $\mathcal{M}$. Asimismo, $\mathcal{B}(X)$ denota la σ-álgebra de Borel en el espacio topológico (X,τ), generada por su topología.

- Sea A un conjunto no vacío cualquiera en un espacio métrico (X,d). Para referirnos al diámetro del conjunto A se utiliza $\operatorname{diam}(A)$, y se define de la siguiente forma:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}.$$

Bibliografía

[1] J. Araujo Gómez. Measure theory, parts 1–3, 2023/2024. Lecture notes, Universidad de Cantabria.

[2] V.I. Bogachev. *Measure Theory, Volume II.* Springer, 2006.

[3] L. Bukovský. *The Structure of the Real Line*. Birkhäuser, 2011.

[4] D.L. Cohn. *Measure Theory: Second Edition*. Birkhäuser New York, NY, 2013.

[5] D.J.H. Garling. *Analysis On Polish Spaces and an Introduction to Optimal Transportation*. Cambridge University press, 2018.

[6] I.L. Iribarren. *Topología de Espacios Métricos*. Limusa-Wiley, 1973.

[7] J.R. Munkres. *Topology. Second edition*. Pearson, 2002.

[8] W. Rudin. *Principles os Mathematical Analysis: Third edition*. McGraw-Hill, 1976.

[9] S.M. Srivastava. *A Course on Borel Sets*. Springer, 1998.

[10] W.W. Wadge. *Reducibility and determinateness on the Baire Space*. Tesis doctoral, University of California, 1983.

[11] Wikipedia contributors. Gδ sets. `https://en.wikipedia.org/wiki/G%CE%B4_set`, 2024. Consultado en Junio de 2025.

[12] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.