FACULTAD
DE
CIENCIAS

Funciones de primera clase de Baire

Functions of Baire class one

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Lucía Liaño González

Director: Jesús Araujo Gómez

Junio - 2025

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a toda mi familia y amigos, porque gracias a ellos me he convertido en la persona que soy hoy. Me han enseñado a no rendirme nunca y a luchar por mis objetivos, estando a mi lado para apoyarme e impulsarme cuando más lo he necesitado.

En segundo lugar, dar las gracias a todos los profesores y compañeros que he conocido a lo largo de estos años, por compartir conmigo sus conocimientos y por brindarme su apoyo en todo momento. Especial mención, a Jesús Araujo, quien me ha guiado en este proyecto, dedicando su tiempo y esfuerzo para conseguir que saliese adelante.

Por último, me gustaría recalcar todo lo que esta carrera me ha aportado, no solo a nivel académico, sino también personal, porque me ha enseñado el valor del esfuerzo y la constancia; y ha puesto en mi camino a personas maravillosas que han hecho de ella, una etapa inolvidable: como mi grupo "las majas", mi amigo David y mi pareja Andrés, que se ha convertido en el mejor de los regalos y un pilar fundamental de mi vida. Por lo que siempre estaré eternamente agradecida.

Resumen

En este trabajo se estudian las funciones de primera clase de Baire. Tras una introducción a los conjuntos F_σ, G_δ y a los conjuntos magros, se dedica especial atención a un caso particular dentro de esta categoría: las funciones semicontinuas. De estas, además de su definición, se presentan ejemplos y se analizan propiedades relevantes, algunas de las cuales resultan útiles para el estudio general de las funciones de primera clase de Baire.

Finalmente, se profundiza en las propiedades fundamentales de esta familia y en el conjunto que estas conforman, el cual constituye, tras el de las funciones continuas, el segundo escalón en complejidad dentro de la familia de funciones medibles.

Abstract

In this work, first-class Baire functions are studied. After an introduction to F_σ, G_δ sets, and meager sets, special attention is given to a particular case within this category: semicontinuous functions. For these, in addition to their definition, examples are presented and relevant properties are analyzed, some of which prove useful for the general study of first-class Baire functions.

Finally, the fundamental properties of this family and the set they form are examined in greater depth. This set represents, after the set of continuous functions, the second level of complexity within the class of measurable functions.

Índice general

Introducción

El objetivo principal del presente Trabajo de Fin de Grado es analizar las funciones de primera clase de Baire. Para ello, utilizamos como base principal el libro *A Second Course on Real Functions* [1].

Fue René-Louis Baire quien, en su tesis doctoral de 1899 titulada *Sur les fonctions des variables réelles*, construyó una clasificación de aquellas funciones que pueden obtenerse, mediante un proceso iterativo, como límite puntual (empezando por la familia de las funciones continuas) [2]. Con ello dio inicio al estudio de las funciones no necesariamente continuas. De ahí, surgen las siguientes clases:

- $\mathcal{B}_0$ corresponde a las funciones continuas.
- $\mathcal{B}_1$ contiene las funciones que son límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

$$\vdots$$

- $\mathcal{B}_{n+1}$ es el conjunto de funciones que se obtienen como límite puntual de sucesiones de funciones que pertenecen a $\mathcal{B}_n$,

$$\vdots$$

y así se procede por inducción transfinita hasta ω_1, siendo este el primer ordinal no numerable.

Se puede observar que

$$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \dots$$

En este trabajo, nos centramos en caracterizar las funciones de primera clase de Baire, pues, después de las funciones continuas, constituyen la familia más simple de funciones medibles. Por ello, también se introducirán las funciones semicontinuas, ya que, como se probará más adelante, son un ejemplo de este tipo de funciones y presentan un interés adicional al ser funciones reales con condiciones menos exigentes que las funciones continuas.

Capítulo 1

Algunos preliminares topológicos

Para la realización de este trabajo, primero vamos a introducir algunos conceptos de topología que se utilizarán en el capítulo sobre funciones de primera clase de Baire. A lo largo del trabajo, nuestro escenario consistirá en $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual (salvo que puntualmente se indique lo contrario).

Conjuntos F_σ y G_δ

Definición 1.1. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es F_σ si y solo si puede escribirse como unión numerable de conjuntos cerrados.*

Definición 1.2. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es G_δ si y solo si puede expresarse como intersección numerable de conjuntos abiertos.*

Teorema 1.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se cumple lo siguiente:*

i) Si A es abierto o cerrado, entonces A es un conjunto F_σ y también G_δ.

ii) A es F_σ si y solo si A^c es G_δ.

iii) Todo conjunto contable es F_σ.

Teorema 1.4. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:*

i) La unión numerable de conjuntos F_σ es F_σ.

ii) La intersección finita de conjuntos F_σ es F_σ.

iii) La intersección numerable de conjuntos G_δ es G_δ.

iv) La unión finita de conjuntos G_δ es G_δ.

La demostración de ambos teoremas puede consultarse en Teorema 6.2 de [1].

Corolario 1.5. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto G_δ, entonces $\overline{A} \setminus A$ es F_σ.*

Demostración. Dado que A es G_δ, existen conjuntos abiertos A_n con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como consecuencia, se verifica lo siguiente

$$\overline{A} \setminus A = \overline{A} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{A} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = \overline{A} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{A} \cap A_n^c \right).$$

Dado que la clausura $\overline{A}$ es cerrada y cada A_n^c también lo es, es posible escribir $\overline{A} \setminus A$ como unión numerable de cerrados. Por lo tanto, se concluye que se trata de un conjunto F_σ. $\square$

Conjuntos magros

Veamos ahora el concepto de conjunto magro (también conocido como conjunto de primera categoría) y demostremos algunas propiedades relevantes que serán necesarias posteriormente.

Definición 1.6. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice magro si está contenido en una unión numerable de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$, cada uno de los cuales tiene interior vacío.*

Por ejemplo, $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ es magro en $\mathbb{R}$, y la unión numerable de conjuntos magros es magro.

Nota 1.7. *Por definición, A^c es denso si y solo si, para todo abierto U, se tiene $U \cap A^c \neq \emptyset$. Obviamente, esto sucede si y sólo si $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$. En suma, A^c es denso si y solo si $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.*

A continuación, adaptamos a nuestro ámbito Teorema 48.2 de [3], con el fin de continuar estudiando propiedades de los conjuntos magros en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.8. *Dada una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos densos en $\mathbb{R}$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es también denso.*

Esta propiedad será útil en la demostración del siguiente corolario.

Corolario 1.9. *Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es magro, entonces su complementario es denso en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Según Nota 1.7, para probar que A^c es denso, basta con ver que el interior de A es vacío.

Por esa razón, suponemos por contradicción que $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. Por ello, existe un abierto no vacío $U \subseteq A$.

Por otro lado, por la definición de conjunto magro, existen conjuntos cerrados A_n con interior vacío, tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Es decir,

$$U \subseteq A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

A continuación, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto abierto A_n^c. Como $\operatorname{Int}(A_n) = \emptyset$, aplicando nuevamente Nota 1.7, se tiene que cada A_n^c es denso en $\mathbb{R}$.

Por Teorema 1.8, se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \quad \text{es denso en } \mathbb{R}.$$

Al ser un conjunto denso, sabemos que

$$U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \neq \emptyset,$$

luego deducimos que existe $x \in U$ tal que

$$x \in A_n^c \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, lo que contradice que $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. □

Como consecuencia inmediata de Corolario 1.9 y Nota 1.7, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.10. *Si A es magro, entonces* $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$.

El recíproco de Corolario 1.10 no es cierto en general: existen conjuntos con interior vacío que no son magros.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}^c \subseteq \mathbb{R}$ tiene interior vacío, pero no es magro. Si lo fuera, también $\mathbb{R}$ sería magro, porque $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$; es decir, podría expresarse como unión numerable de conjuntos magros. Por Corolario 1.10, esto implicaría que $\operatorname{Int}(\mathbb{R}) = \emptyset$, lo cual es absurdo, pues $\operatorname{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Sin embargo, el recíproco será cierto si A es un conjunto F_σ, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.11. *Sea A un conjunto F_σ. Si el interior de A es vacío, entonces A es magro.*

Demostración. Al ser A un conjunto F_σ existen conjuntos cerrados A_n tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Obviamente, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Int}(A_n) \subseteq \operatorname{Int}(A) = \emptyset.$$

Por lo tanto, cada A_n es un conjunto cerrado con interior vacío. Así, A es magro. □

Capítulo 2

Funciones semicontinuas

En este capítulo, I denotará un intervalo.

Para empezar, recordemos el concepto de función continua, para posteriormente poder compararlo con el de función semicontinua inferiormente y función semicontinua superiormente.

Definición 2.1. *Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **continua** si, para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces*

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Definición 2.2. *Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **semicontinua inferiormente** si, para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces*

$$f(x) - f(p) > -\epsilon.$$

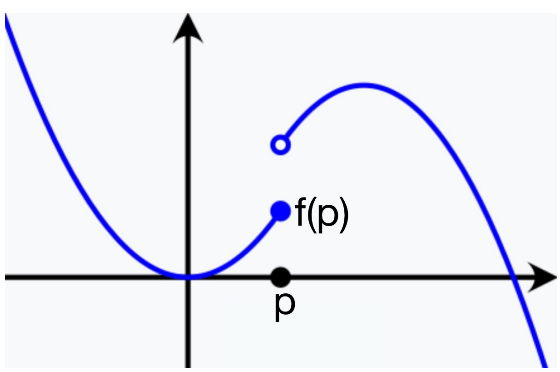

Figura 2.1: Función semicontinua inferiormente [4].

Definición 2.3. *Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **semicontinua superiormente** si, para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces*

$$f(x) - f(p) < \epsilon.$$

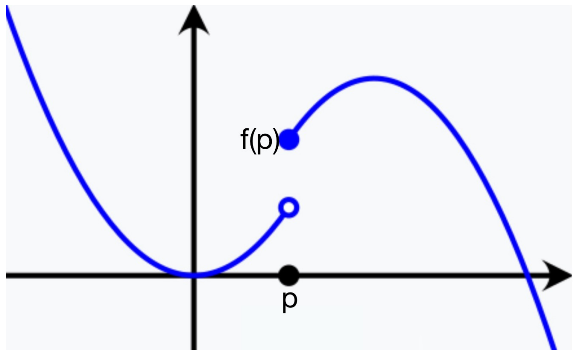

Figura 2.2: Función semicontinua superiormente [4].

El siguiente ejemplo nos ayudará a entender mejor estas definiciones. (Véase más en general en el apartado *ii*) Teorema 2.8).

Ejemplo 2.4. *Sea* $I = [0, 1]$ *y consideramos la función característica en el intervalo* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$*:*

$$f(x) := \chi_{(1/3,2/3)}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ 0 & si\ x \notin \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{cases}$$

Se trata de una función ***semicontinua inferiormente****.*

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y $p \in I$. Consideremos los siguientes casos:

- **Caso 1:** Si $p \notin \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, entonces $f(p) = 0$.

  Tomamos $\delta > 0$. Sea $x \in I$ tal que $|x - p| < \delta$. Existen dos posibilidades: $f(x) = 1$ o $f(x) = 0$. En ambos casos, se cumple que

  $$f(x) - f(p) > -\epsilon.$$

- **Caso 2:** Si $p \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, entonces $f(p) = 1$.

  En este caso, consideramos $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subset \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Si tomamos $x \in I$ tal que $|x - p| < \delta$, entonces $f(x) = 1 = f(p)$. Por lo tanto, tenemos

  $$f(x) - f(p) = 0 > -\epsilon.$$

□

Notación 2.5. *Consideremos los siguientes conjuntos:*

- $\mathcal{C}(I)$*, el conjunto de funciones continuas, con valores en* $\mathbb{R}$*, en el intervalo* I*.*
- $\mathcal{C}^+(I)$*, el conjunto de funciones semicontinuas inferiormente en el intervalo* I*.*
- $\mathcal{C}^-(I)$*, el conjunto de funciones semicontinuas superiormente en el intervalo* I*.*

Proposición 2.6. $\mathcal{C}(I) = \mathcal{C}^+(I) \cap \mathcal{C}^-(I)$.

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

$\boxed{\subseteq}$ Demostraremos que, si $f \in \mathcal{C}(I)$, entonces $f \in \mathcal{C}^+(I) \cap \mathcal{C}^-(I)$.

Fijamos $\epsilon > 0$ y $p \in I$. Como la función f es continua en el intervalo I, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ con $|x - p| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Esta última desigualdad, que afecta al valor absoluto, puede descomponerse en dos desigualdades:

- en primer lugar, $f(x) - f(p) > -\epsilon$, con lo que $f \in \mathcal{C}^+(I)$;
- por otra parte, $f(x) - f(p) < \epsilon$, luego $f \in \mathcal{C}^-(I)$.

Concluimos que $f \in \mathcal{C}^+(I) \cap \mathcal{C}^-(I)$.

$\boxed{\supseteq}$ Probemos que, si $f \in \mathcal{C}^+(I) \cap \mathcal{C}^-(I)$, entonces $f \in \mathcal{C}(I)$.

Tomamos $\epsilon > 0$, $p \in I$.

- Por una parte, como $f \in \mathcal{C}^+(I)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x \in I$ con $|x - p| < \delta_1$, entonces $f(x) - f(p) > -\epsilon$.
- Del mismo modo, como $f \in \mathcal{C}^-(I)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta_2$, entonces $f(x) - f(p) < \epsilon$.

Si ahora definimos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2) > 0$, tomamos $x \in I$ y $|x-p| < \delta$, se cumplirán simultáneamente $f(x) - f(p) > -\epsilon$ y $f(x) - f(p) < \epsilon$, es decir, $|f(x) - f(p)| < \epsilon$.

Concluimos que $f \in \mathcal{C}(I)$. □

Corolario 2.7. *Dada* $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^+(I)$ *si y solo si* $-f \in \mathcal{C}^-(I)$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Demostraremos que, si $f \in \mathcal{C}^+(I)$, entonces $-f \in \mathcal{C}^-(I)$.

Por definición de función semicontinua inferiormente, tenemos que, para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces $f(x) - f(p) > -\epsilon$.

Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por -1, obtenemos que $-(f(x) - f(p)) < -(-\epsilon)$, es decir,

$$-f(x) + f(p) < \epsilon.$$

Así, $-f \in \mathcal{C}^-(I)$ por definición de función semicontinua superiormente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Probaremos finalmente que, si $-f \in \mathcal{C}^-(I)$, entonces $f \in \mathcal{C}^+(I)$.

La función $-f$ es semicontinua superiormente, por lo que tenemos que, para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces $-f(x) - (-f(p)) < \epsilon$.

Nuevamente, al multiplicar por -1 en ambos lados de la desigualdad, llegamos a

$$f(x) - f(p) > -\epsilon$$

Con lo cual, $f \in \mathcal{C}^+(I)$. □

Teorema 2.8. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $A \subset I$. Entonces se tiene:*

i) *$f \in \mathcal{C}^+(I)$ si y solo si, para todo $s \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_s = \{x : f(x) > s\}$ es abierto en I. Esto es equivalente a decir que $f^{-1}(s, \infty)$ es abierto.*

ii) *$\chi_A \in \mathcal{C}^+(I)$ si y solo si A es abierto en I.*

iii) *Si $f, g \in \mathcal{C}^+(I)$, entonces $f + g \in \mathcal{C}^+(I)$.*

iv) *Si $f \in \mathcal{C}^+(I)$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda f \in \mathcal{C}^+(I)$.*

Demostración. *i)* $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $f \in \mathcal{C}^+(I)$.

Consideremos $s \in \mathbb{R}$ y $p \in A_s$. Para probar que A_s es abierto en I, veamos que p es un punto interior de A_s.

Por definición, $f(p) > s$, por lo que definimos $\epsilon := f(p) - s > 0$.

A continuación, dado que f es una función semicontinua inferiormente, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &> -\epsilon \\ &= -(f(p) - s) \\ &= -f(p) + s, \end{aligned}$$

con lo que $f(x) > s$.

Por lo tanto, para todo $x \in I$ tal que $|x - p| < \delta$, se tiene que $x \in A_s$. Esto implica que el intervalo abierto $(p - \delta, p + \delta) \subseteq A_s$. En consecuencia, concluimos que todo punto de A_s es punto interior y, así, A_s es abierto.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que, para todo $s \in \mathbb{R}$, el conjunto A_s es abierto en I. Veamos que f es semicontinua inferiormente.

Sean $p \in I$ y $\epsilon > 0$. Definimos $s_0 := f(p) - \epsilon$. Como $f(p) > f(p) - \epsilon = s_0$, notamos que $p \in A_{s_0}$.

Por hipótesis, A_{s_0} es un conjunto abierto en I, así que existe $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta)$ está contenido en A_{s_0}.

Con ello, para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$, se tiene que $f(x) > s_0 = f(p) - \epsilon$. Esto es igual que decir que $f(x) - f(p) > -\epsilon$.

Por lo tanto, concluimos que la función f es semicontinua inferiormente en I.

ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que $\chi_A(x)$ es semicontinua inferiormente. Se quiere demostrar que A es abierto en I. Esto se deduce del hecho de que $A = A_{1/2} = \{x \in I : \chi_A(x) > \frac{1}{2}\}$ y, por el apartado *i)* de este teorema, $A_{1/2}$ es abierto.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos ahora que A es un conjunto abierto.
Queremos demostrar que $\chi_A(x)$ es semicontinua inferiormente. Por el apartado *i)*, esto es equivalente a probar que, para todo $s \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_s = \{x \in I : \chi_A(x) > s\}$ es abierto en I.

Consideramos los siguientes casos:

- **Caso** $s \geq 1$:
  Para todo $x \in I$, su imagen por χ_A es 0 o 1, por lo que nunca es mayor que s. Por lo tanto,
  $$A_s = \{x \in I : \chi_A(x) > s\} = \emptyset.$$
- **Caso** $s < 0$:
  Obviamente $\chi_A \geq 0 > s$. Por lo tanto,
  $$A_s = \{x \in I : \chi_A(x) > s\} = I.$$
- **Caso** $0 \leq s < 1$:
  Dado que $\chi_A(x)$ solo toma los valores 0 y 1, los únicos $x \in I$ que pertenecen a A_s son aquellos para los cuales $\chi_A(x) = 1$. Por lo tanto,
  $$A_s = \{x \in I : \chi_A(x) > s\} = A.$$

En los tres casos obtenemos que A_s es abierto.

iii) Consideramos $p \in I$ y $\epsilon > 0$.

Por hipótesis, se tiene que $f, g \in \mathcal{C}^+(I)$, luego existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

- si $x \in I$ y $|x - p| < \delta_1$, entonces $f(x) - f(p) > -\frac{\epsilon}{2}$.
- si $x \in I$ y $|x - p| < \delta_2$, entonces $g(x) - g(p) > -\frac{\epsilon}{2}$.

Tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Por lo tanto, para todo $x \in I$ con $|x - p| < \delta$

- $f(x) - f(p) > -\frac{\epsilon}{2}$.
- $g(x) - g(p) > -\frac{\epsilon}{2}$.

Sumando ambas desigualdades, obtenemos $f(x) - f(p) + g(x) - g(p) > -\epsilon$, es decir, $f(x) + g(x) - f(p) - g(p) > -\epsilon$, con lo cual
$$(f + g)(x) - (f + g)(p) > -\epsilon.$$

Deducimos que $f + g \in \mathcal{C}^+(I)$.

iv) Por hipótesis, $f \in \mathcal{C}^+(I)$, lo que significa que para todo $p \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces $f(x) - f(p) > -\epsilon$.

Queremos probar que $\lambda f \in \mathcal{C}^+(I)$. Para ello, se distinguen los siguientes casos:

- **Caso** $\lambda = 0$:
  En tal caso $\lambda f = 0$; entonces, tomando cualquier $p \in I$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces $\lambda f(x) - \lambda f(p) = 0 > -\epsilon$.
- **Caso** $\lambda \neq 0$:
  Fijamos $\epsilon > 0$ y $p \in I$. Sea $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\lambda}$. Como $f \in \mathcal{C}^+(I)$ entonces, para este $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $|x - p| < \delta$, se tiene $f(x) - f(p) > -\epsilon_1 = -\frac{\epsilon}{\lambda}$, por lo tanto, $\lambda f(x) - \lambda f(p) > -\epsilon$.

Concluimos así que $\lambda f \in \mathcal{C}^+(I)$.

$\square$

El siguiente corolario es una continuación de Teorema 2.8, en el que se consideran las funciones semicontinuas superiormente.

Corolario 2.9. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y sea $A \subset I$. Entonces se tiene:*

i) *$f \in \mathcal{C}^-(I)$ si y solo si, para todo $s \in \mathbb{R}$, el conjunto $B_s = \{x : f(x) < s\}$ es abierto en I. Es decir, $f^{-1}(-\infty, s)$ es abierto.*

ii) *$\chi_A \in \mathcal{C}^-(I)$ si y solo si, A es cerrada en I.*

iii) *Si $f, g \in \mathcal{C}^-(I)$, entonces, se tiene que $f + g \in \mathcal{C}^-(I)$.*

iv) *Si $f \in \mathcal{C}^-(I)$ y $\lambda \geq 0$, entonces, se tiene que $\lambda f \in \mathcal{C}^-(I)$.*

Demostración. La prueba de los diferentes apartados se basa en el hecho de que $f \in \mathcal{C}^-(I)$ si y solo si $-f \in \mathcal{C}^+(I)$ (Corolario 2.7). Sin embargo, el apartado *ii)* se demostrará a continuación, ya que es un poco distinto.

$\boxed{\Rightarrow}$ Se quiere demostrar que A es cerrado en I.

Por hipótesis, χ_A es semicontinua superiormente, con lo que, por Corolario 2.7, $-\chi_A \in \mathcal{C}^+(I)$. Así, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ es semicontinua inferiormente (por el apartado *iii)* de Teorema 2.8). Además, por el apartado *ii)* de ese teorema, tenemos que A^c es abierto; es decir A es cerrado.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A es cerrado, entonces A^c es abierto, y, aplicando el apartado *ii)* de Teorema 2.8, se cumple que $\chi_{A^c} \in \mathcal{C}^+(I)$, es decir, $1 - \chi_A \in \mathcal{C}^+(I)$.

Por ello, $(1 - \chi_A) - 1 \in \mathcal{C}^+(I)$ y, por Corolario 2.7, $\chi_A \in \mathcal{C}^-(I)$. □

Corolario 2.10. *La diferencia entre una función semicontinua superiormente y una función semicontinua inferiormente es una semicontinua superiormente.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^-(I)$ y $g \in \mathcal{C}^+(I)$. Sabemos por Corolario 2.7, que $-g \in \mathcal{C}^-(I)$. Aplicando el apartado *iii)* de Corolario 2.9 a estas funciones se tiene que

$$f + (-g) = (f - g) \in \mathcal{C}^-(I),$$

como queríamos probar. □

Teorema 2.11. *Sea $S \subset \mathcal{C}^+(I)$.*

i) *Si $h(x) := \sup\{f(x) : f \in S\}$ existe (en $\mathbb{R}$) para todo $x \in I$, entonces $h \in \mathcal{C}^+(I)$.*

ii) *Si $f, g \in \mathcal{C}^+(I)$ entonces $f \wedge g \in \mathcal{C}^+(I)$.*

Demostración. *i)* Por el apartado *i)* de Teorema 2.8, probar que $h \in \mathcal{C}^+(I)$ es lo mismo que probar que el conjunto $\{x : h(x) > s\}$ es abierto para cada $s \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con la definición de la función h, tenemos que,

$$\{x : h(x) > s\} = \bigcup_{f \in S} \{x : f(x) > s\}.$$

Dado que cada $f \in S$ es semicontinua inferiormente, los conjuntos $\{x : f(x) > s\}$ son abiertos en I.

Por otra parte, la unión de conjuntos abiertos es abierto, por lo que deducimos que $\{x : h(x) > s\}$ es abierto (para cada $s \in \mathbb{R}$). En consecuencia, podemos afirmar que $h \in \mathcal{C}^+(I)$.

ii) Consideramos $s \in \mathbb{R}$, al igual que antes, deseamos demostrar que $\{x : (f \wedge g)(x) > s\}$ es abierto.

Por definición, $(f \wedge g)(x)$ es el mínimo de ambas funciones en ese punto. Por ello, para que sea mayor que s, es necesario que ambas funciones sean mayores que s en ese punto, es decir,

$$\{x : (f \wedge g)(x) > s\} = \{x : f(x) > s\} \cap \{x : g(x) > s\}.$$

Al tratarse tanto f como g de funciones semicontinuas inferiormente, los conjuntos $\{x : f(x) > s\}$ y $\{x : g(x) > s\}$ son abiertos y, por ello, lo es la intersección.

Concluimos así que $\{x : (f \wedge g)(x) > s\}$ es abierto para todo $s \in \mathbb{R}$. □

Proposición 2.12. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Definimos, para $x \in I$, si $x \neq \text{ínf}\, I$,*

$$g(x) := \sup\{f(y) : y < x\} = \lim_{y \to x^-} f(y)$$

y, si $x = \text{ínf}\, I \in I$, entonces $g(x) := f(x)$.

Entonces $g \in \mathcal{C}^+(I)$.

Demostración. Sea $x_0 \in I$ con $x_0 \neq \text{ínf}\, I$. Queremos demostrar que g es semicontinua inferiormente en x_0.

Por cómo hemos definido g, tenemos que

$$g(x_0) := \sup\{f(y) : y < x_0\} = \lim_{y \to x_0^-} f(y).$$

Usando la definición de límite por la izquierda, fijado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I$, se cumple que

$$|f(y) - g(x_0)| < \epsilon.$$

En particular, para y_0 en ese intervalo, se verifica que

$$-\epsilon + g(x_0) < f(y_0) < \epsilon + g(x_0).$$

Sea $\delta_0 = x_0 - y_0$. Tomamos $x \in I$ tal que $|x - x_0| < \delta_0$, entonces $y_0 < x$, y por ello, deducimos que

$$g(x) := \sup\{f(y) : y < x\} \geq f(y_0).$$

Como ya hemos probado anteriormente, $f(y_0) > g(x_0) - \epsilon$. Obtenemos así que

$$g(x) \geq f(y_0) > g(x_0) - \epsilon,$$

para cualquier $x \in I$ con $|x - x_0| < \delta_0$.

En el caso en que $x_0 = \text{ínf}\, I$ pertenezca a I, tendremos que

$$g(x_0) = f(x_0) \leq f(x) \text{ para todo } x \in I.$$

Así

$$g(x_0) \leq \sup\{f(y) : y < x\} = g(x) \text{ para todo } x \in I,$$

es decir

$$g(x) > g(x_0) - \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Esto prueba que g es semicontinua inferiormente. □

Nota 2.13. *En relación con Proposición 2.12, cuando f es decreciente, dado que $-f$ es creciente, tendremos que $g : I \to \mathbb{R}$, definida por*

$$g(x) := \sup\{-f(y) : y < x\} \quad \textit{si } x \neq \text{ínf}\, I,$$

y, si $x = \text{ínf}\, I \in I$, entonces $g(x) := -f(x)$, pertenece a $\mathcal{C}^+(I)$.

Por esta razón, la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida como $h := -g$ pertenece a $\mathcal{C}^-(I)$. En este caso, h queda definida a partir de f como

$$\begin{aligned} h(x) &:= -\sup\{-f(y) : y < x\} \\ &= -(-\text{ínf}\{f(y) : y < x\}) \\ &= \text{ínf}\{f(y) : y < x\}, \end{aligned}$$

cuando $x \neq \text{ínf}\, I$ y, en el caso de que $x = \text{ínf}\, I$, tenemos que $h(x) = f(x)$.

Teorema 2.14. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces existen dos funciones acotadas $g, h \in \mathcal{C}^+([a, b])$ tal que $f = g - h$.*

Demostración. Supongamos primero que la función f es monótona *creciente*

Gracias a Proposición 2.12, sabemos que la función definida para $x \in [a, b]$ como

$$g(x) := \sup\{f(y) : y < x\} = \lim_{y \to x^-} f(y)$$

y $g(a) := f(a)$, pertenece a $\mathcal{C}^+([a, b])$.

A continuación, definimos la función h para $x \in [a, b]$ como

$$h(x) := g(x) - f(x).$$

Seguidamente queremos probar que h es semicontinua inferiormente. Para ello, veamos que, para $s \in \mathbb{R}$ cualquiera, el conjunto

$$V_s := \{x \in I : h(x) > s\}$$

es abierto.

Dado que f es creciente y g es su límite por la izquierda, se cumple que $f \geq g$, y por lo tanto, $h \leq 0$. En consecuencia, si $s \geq 0$, entonces $V_s = \emptyset$, luego es abierto.

Veamos ahora que, para $s < 0$, el conjunto V_s es abierto. Pero antes, notemos que si existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = -t < 0,$$

entonces se cumple que $f(x_0) > g(x_0) = \lim_{y \to x^-} f(y)$, lo que significa que f es discontinua en x_0, y presenta un salto de tamaño $t > 0$ en ese punto.

Ahora, dado $r > 0$, consideramos el conjunto

$$B_{-r} := \{x \in [a, b] : h(x) \leq -r\},$$

el cual corresponde al conjunto de puntos donde la función f presenta un salto de valor mayor o igual que r.

Como f es monótona creciente, en el intervalo $[f(a), f(b)]$ solo puede haber a lo sumo $\frac{f(b)-f(a)}{r}$ saltos de tamaño r. Si algún salto es de mayor tamaño, este número de saltos disminuye. En consecuencia, el conjunto B_{-r} es finito y, por lo tanto, cerrado.

Por otra parte, para $s < 0$, el conjunto V_s es el complementario de B_s. De ello se deduce que V_s es abierto.

De este modo, podemos afirmar que $h \in \mathcal{C}^+([a, b])$.

Tanto g como h son funciones acotadas, ya que $0 \leq g \leq f$, y h es la diferencia de dos funciones acotadas.

Supongamos finalmente que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona *decreciente*. Entonces $-f$ es monótona creciente y, por lo anterior, existen $g_0, h_0 \in \mathcal{C}^+([a, b])$ con $-f = g_0 - h_0$.

Definiendo $g := h_0$ y $h := g_0$, obtenemos

$$f := h_0 - g_0. \qquad \square$$

Corolario 2.15. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $f \in \mathcal{C}^+(I)$.

ii) *Si $a, x_1, x_2, \dots \in I$ y $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $f(a) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Suponemos que f es semicontinua inferiormente en I. Esto significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) - f(a) > -\epsilon$.

Dado que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, tenemos que, para todo $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces $|x_n - a| < \delta$. Por lo tanto, para todo $n \geq N$,

$$f(x_n) - f(a) > -\epsilon, \text{ es decir, } f(x_n) > f(a) - \epsilon.$$

Esto implica que, para todo $n \geq N$,

$$f(a) - \epsilon \leq \inf_{k \geq n} f(x_k).$$

Tomando el límite nos queda

$$f(a) - \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k \geq n} f(x_k) \right) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Dado que esta desigualdad se verifica para todo $\epsilon > 0$, podemos concluir que

$$f(a) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

ii) $\Rightarrow$ *i)* Sea $a \in I$ con $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Por hipótesis, se cumple que $f(a) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$. Queremos probar que $f \in C^+(I)$. Lo haremos por reducción al absurdo suponiendo que existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe $x_n \in I$ con $|x_n - a| < \delta$ y

$$f(x_n) - f(a) \leq -\epsilon, \text{ es decir, } f(x_n) \leq f(a) - \epsilon.$$

Usando la misma idea que antes, se concluye que

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(a) - \epsilon,$$

lo cual contradice la hipótesis, demostrando así que f es semicontinua inferiormente. $\square$

Nota 2.16. *Recordamos que el grafo de la función $f : I \to \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) donde $y = f(x)$ (se puede ver en el capítulo 2 de [5]).*

Teorema 2.17. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función cuyo grafo es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. Entonces f puede expresarse como la diferencia de dos funciones semicontinuas inferiormente.*

Demostración. Podemos observar que

$$f = \frac{1}{2}(f+1)^2 - \frac{1}{2}\left(f^2+1\right).$$

Por eso, es suficiente probar que tanto f^2 como $(f+1)^2$ son semicontinuas inferiormente.

Comenzamos probando, por reducción al absurdo, que $f^2 \in \mathcal{C}^+(I)$. Suponemos así que, $f^2 \notin \mathcal{C}^+(I)$.

Por Corolario 2.15, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en I con $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in I$ tal que no se satisface

$$f^2(a) \leq \liminf_{n\to\infty} f^2(x_n).$$

Como el límite inferior siempre existe, deducimos que

$$f^2(a) > \liminf_{n\to\infty} f^2(x_n) = b.$$

Por definición de límite inferior, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ con

$$\liminf_{n\to\infty} f^2(x_n) = b = \lim_{k\to\infty} f^2(x_{n_k}),$$

en particular,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} f^2(x_{n_k}) < f^2(a).$$

Así, podemos entonces trabajar directamente con esta subsucesión, considerándola como la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mencionada al inicio.

Además, la sucesión $\{f^2(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, luego acotada. Como consecuencia, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ también está acotada.

Apoyándonos en Teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que existe una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, denotada por $\{f(x_{n_k})\}_{n=1}^{\infty}$, que converge a un cierto límite $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, tenemos que la sucesión $\{(x_{n_k}, f(x_{n_k}))\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a (a, λ). Como el grafo de f es cerrado, (a, λ) pertenece a dicho grafo. Esto implica que

$$f(a) = \lambda = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Así pues,

$$f^2(a) = \lambda^2 = \lim_{k\to\infty} f^2(x_{n_k}) = b,$$

lo que contradice que $b = \liminf_{n\to\infty} f^2(x_n) < f^2(a)$ y, con ello, la hipótesis de que $f^2 \notin \mathcal{C}^+(I)$ es falsa.

Lo anterior es válido para el cuadrado de cualquier función; en particular, para $(f+1)^2$, con lo que podemos concluir que esta función también es semicontinua inferiormente.

En conclusión, hemos probado que f^2 y $(f+1)^2$ pertenecen a $\mathcal{C}^+(I)$. Además, $\frac{1}{2}(f+1)^2$ y $\frac{1}{2}\left(f^2+1\right)$ también pertenecen a $\mathcal{C}^+(I)$. Debido a esto, f se puede escribir como la diferencia de dos funciones semicontinuas inferiormente, tal como queríamos demostrar. □

Definición 2.18. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos*

- $f^{\uparrow}(x) := \sup\{g(x) : g \in \mathcal{C}^+(I),\ g \leq f\} \qquad (x \in I)$
- $f^{\downarrow}(x) := \inf\{h(x) : h \in \mathcal{C}^-(I),\ h \geq f\} \qquad (x \in I)$

Corolario 2.19. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, se cumple que*

i) $f^{\uparrow} = -(-f)^{\downarrow}$.

ii) $f^{\downarrow} = -(-f)^{\uparrow}$.

Demostración. *i)* Fijamos $x \in I$. Por definición,

$$(-f)^{\downarrow}(x) := \inf\{h(x) : h \in \mathcal{C}^-(I),\ h \geq -f\}.$$

Por lo tanto,

$$-(-f)^{\downarrow}(x) = -\inf\{h(x) : h \in \mathcal{C}^-(I),\ h \geq -f\}.$$

Además, si $h \in \mathcal{C}^-(I)$ y $h \geq -f$, por Corolario 2.7, $-h \in \mathcal{C}^+(I)$ y $-h \leq f$.

Por ello,

$$\{h(x) : h \in \mathcal{C}^-(I),\ h \geq -f\} \subseteq \{-g(x) : g \in \mathcal{C}^+(I),\ g \leq f\}.$$

Del mismo modo, se puede probar la inclusión inversa, y así demostrar la igualdad entre ambos conjuntos.

Sustituyendo en la definición de $-(-f)^{\downarrow}(x)$, obtenemos

$$-(-f)^{\downarrow}(x) = -\inf\{-g(x) : g \in \mathcal{C}^+(I),\ g \leq f\} = \sup\{g(x) : g \in \mathcal{C}^+(I),\ g \leq f\} = f^{\uparrow}(x\}.$$

ii) Por el apartado *i*) de este teorema, tenemos que $f^{\uparrow} = -(-f)^{\downarrow}$.

Usando esta igualdad para la función $-f$ se verifica que $(-f)^{\uparrow} = -(-(-f))^{\downarrow} = -(f)^{\downarrow}$.

De este modo, obtenemos que $-(-f)^{\uparrow} = f^{\downarrow}$. □

Teorema 2.20. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces $f^{\uparrow} \in \mathcal{C}^{+}(I), f^{\downarrow} \in \mathcal{C}^{-}(I)$ y $f^{\uparrow} \leq f \leq f^{\downarrow}$.*

Demostración. Veamos en primer lugar las desigualdades: Tenemos que, para cada $x \in I$, el conjunto $A^{+} := \{g(x) : g \in \mathcal{C}^{+}(I),\ g \leq f\}$ está acotado superiormente por $f(x)$. Como $f^{\uparrow}(x)$ es el supremo puntual de este conjunto, también debe verificar que $f^{\uparrow}(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. En consecuencia, $f^{\uparrow} \leq f$.

Por otra parte, el conjunto $\{h(x) : h \in \mathcal{C}^{-}(I),\ h \geq f\}$ está acotado inferiormente por $f(x)$. Dado que $f^{\downarrow}(x)$ es el ínfimo puntual de este conjunto, se tiene que $f^{\downarrow}(x) \geq f(x)$. Como esto se cumple para todo $x \in I$, $f^{\downarrow} \geq f$.

Veamos ahora que $f^{\uparrow} \in \mathcal{C}^{+}(I)$.

Por definición, si $g \in \mathcal{C}^{+}(I)$ y $g \leq f$, entonces

$$f^{\uparrow}(x) \geq g(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Ahora, tomamos $p \in I$ y $\epsilon > 0$. Como $g \in \mathcal{C}^{+}(I)$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in I$ y $|x - p| < \delta$, entonces

$$g(x) - g(p) > -\epsilon.$$

Por lo tanto, usando ambas desigualdades, tenemos $f^{\uparrow}(x) \geq g(p) - \epsilon$ para cualquier $g \in A^{+}$. Entonces $f^{\uparrow}(x) \geq \sup_{g \in A^{+}} g(p) - \epsilon = f^{\uparrow}(p) - \epsilon$.

Un razonamiento similar nos conduce a que $f^{\downarrow} \in \mathcal{C}^{-}(I)$. □

Nota 2.21. *En la prueba de Teorema 2.20, hemos visto también*

- *si $g \in \mathcal{C}^{+}(I)$ y $g \leq f$, entonces $g \leq f^{\uparrow}$.*

Del mismo modo,

- *si $g \in \mathcal{C}^{-}(I)$ y $f \leq g$, entonces $f^{\downarrow} \leq g$.*

Teorema 2.22. *Sean f y g funciones acotadas con valores reales en el intervalo I. Se tiene:*

i) *Si $f \leq g$, entonces $f^{\uparrow} \leq g^{\uparrow}$.*

ii) $\inf_I f^{\downarrow}(x) \geq \inf_I f(x) = \inf_I f^{\uparrow}(x)$.

iii) *f es semicontinua inferiormente si y solo si $f = f^{\uparrow}$.*

Demostración. $i)$ Por Teorema 2.20, sabemos que $f^{\uparrow} \in \mathcal{C}^{+}(I)$ y $f^{\uparrow} \leq f$. Además, por hipótesis, se cumple que $f \leq g$. Por lo tanto,

$$f^{\uparrow} \leq f \leq g.$$

En consecuencia, $f^{\uparrow} \in \{h : h \in \mathcal{C}^{+}(I), h \leq g\}$. Por consiguiente, para todo $x \in I$, se satisface

$$f^{\uparrow}(x) \leq \sup\left\{h(x) : h \in \mathcal{C}^{+}(I), h \leq g\right\} = g^{\uparrow}(x).$$

Concluimos así, $f^{\uparrow} \leq g^{\uparrow}$.

$ii)$ Dado que, para todo $x \in I$, se cumple que $f^{\downarrow}(x) \geq f(x) \geq f^{\uparrow}(x)$, entonces

$$\inf_{I} f^{\downarrow}(x) \geq \inf_{I} f(x) \geq \inf_{I} f^{\uparrow}(x).$$

Sin embargo, la última desigualdad en realidad es una igualdad, como veremos a continuación.

Como f es una función acotada, entonces $M := \inf_I f(x) \in \mathbb{R}$. Consideramos la función constante $g \equiv M$. Obviamente, g es continua, luego es semicontinua inferiormente. Además $g \leq f$. Por lo tanto, $g \in \{g \in \mathcal{C}^{+}(I) : g \leq f\}$, y por definición se tiene $f^{\uparrow} \geq g$. En particular, $\inf_I f^{\uparrow}(x) \geq g(x) = M$.

$iii)$ $\boxed{\Rightarrow}$ Partimos de que f es semicontinua inferiormente. Veamos que $f = f^{\uparrow}$.

Por Teorema 2.20, sabemos que $f^{\uparrow} \leq f$. Por lo tanto, solo nos queda probar que $f^{\uparrow} \geq f$.

Por definición de $f^{\uparrow}(x)$, tenemos que es el supremo del conjunto de las imágenes de funciones semicontinuas inferiormente que son menores o iguales que f. Como f es semicontinua inferiormente, se deduce inmediatamente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tenemos que $f = f^{\uparrow}$. Por Teorema 2.20, sabemos que $f^{\uparrow} \in \mathcal{C}^{+}(I)$. Luego $f \in \mathcal{C}^{+}(I)$. $\square$

A continuación, presentamos una extensión de Teorema 2.22, enfocándonos en las propiedades de las funciones $f^{\downarrow}$.

Corolario 2.23. *Dadas f y g funciones acotadas con valores reales en el intervalo I. Se cumple lo siguiente:*

$i)$ *Si $f \leq g$, entonces $f^{\downarrow} \leq g^{\downarrow}$.*

$ii)$ $\sup_I f^{\downarrow}(x) = \sup_I f(x) \geq \sup_I f^{\uparrow}(x)$.

$iii)$ *f es semicontinua superiormente si y solo si $f = f^{\downarrow}$.*

Demostración. $i)$ Si $f \leq g$, entonces $-g \leq -f$. Empleando el apartado $i)$ de Teorema 2.22, se deduce que $(-g)^{\uparrow} \leq (-f)^{\uparrow}$. En consecuencia, $-(-f)^{\uparrow} \leq -(-g)^{\uparrow}$. Finalmente, por apartado $ii)$ de Corolario 2.19 se concluye que $f^{\downarrow} \leq g^{\downarrow}$.

Para las demostraciones de los apartados $ii), iii)$ se siguen ideas similares. $\square$

A partir de Teorema 2.22 y de Corolario 2.23, podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 2.24. *Si f es una función acotada con valores reales en el intervalo I, f es continua si y solo si $f^{\uparrow} = f^{\downarrow}$.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Suponemos que f es continua. Entonces, f es semicontinua tanto superiormente como inferiormente. Por lo tanto, por el punto *iii*) de Teorema 2.22, junto con Corolario 2.23, tenemos que $f = f^{\downarrow}$ y $f = f^{\uparrow}$. En consecuencia, $f^{\downarrow} = f^{\uparrow}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por hipótesis, ahora tenemos que $f^{\downarrow} = f^{\uparrow}$. Según Teorema 2.20, se cumple que $f^{\uparrow} \leq f \leq f^{\downarrow}$. Por lo tanto, tenemos

- $f^{\uparrow} = f$, luego por el apartado *iii*) de Teorema 2.22, f es semicontinua inferiormente.
- $f^{\downarrow} = f$, luego por el apartado *iii*) de Corolario 2.23, f es semicontinua superiormente.

Así, hemos demostrado que f es continua. □

El siguiente teorema nos permite relacionar los valores de $f^{\uparrow}$ y $f^{\downarrow}$ en cada punto con los valores de f alrededor de ese punto.

Teorema 2.25. *Dada una función acotada f, con valores reales en el intervalo I, se tiene:*

i) *Para todo $t \in I$, $f^{\uparrow}(t) = \lim_{n\to\infty} \inf_{(t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n})} f(x)$.*

ii) *Para todo $t \in I$, $f^{\downarrow}(t) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n})} f(x)$.*

Demostración. *i*) En primer lugar, estudiemos el límite a la derecha de la igualdad.

Empezamos definiendo, para todo $t \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(t) := \inf_{(t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n})} f(x),$$

que es número real porque f es acotada.

- A continuación, veremos que el límite

$$h(t) := \lim_{n\to\infty} a_n(t),$$

existe para todo $t \in I$.

Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left(t - \frac{1}{n+1}, t + \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}\right).$$

Por ello,

$$a_{n+1}(t) = \inf_{(t-\frac{1}{n+1},t+\frac{1}{n+1})} f(x) \geq \inf_{(t-\frac{1}{n},t+\frac{1}{n})} f(x) = a_n(t).$$

Así, la sucesión $\{a_n(t)\}$ es creciente para cada $t \in I$, con lo cual existe el límite por ser acotada. De este modo, tenemos definida una función $h : I \to \mathbb{R}$.

En segundo lugar, veamos que $h \in \{g \in \mathcal{C}^+(I) : \; g \leq f\}$

- Probemos que $h \in \mathcal{C}^+(I)$.

  Para ello, veamos que, dados $t \in I$ y $\epsilon > 0$, si $y \in I$ está "muy cerca de t", entonces $h(y) > h(t) - \epsilon$.

  Fijamos $t \in I$ y $\epsilon > 0$. Por la definición de límite, existe n_0 tal que, si $n \geq n_0$, entonces

  $$|a_n(t) - h(t)| < \epsilon.$$

  Esto implica
  $$a_n(t) > h(t) - \epsilon$$
  si $n \geq n_0$. Tomamos ahora $y \in I$ que satisfaga que $|y - t| < \frac{1}{2n_0}$.
  Para cualquier $x \in I$ con $|x - y| < \frac{1}{2n_0}$, tenemos que

  $$|x - t| \leq |x - y| + |y - t| < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0}.$$

  Así, $|x - t| < \frac{1}{n_0}$, lo que significa que

  $$\left\{ f(x) : x \in I,\ |x - y| \leq \frac{1}{2n_0} \right\} \subseteq \left\{ f(x) : x \in I,\ |x - t| \leq \frac{1}{n_0} \right\}$$

  y, con ello, tenemos que
  $$a_{2n_0}(y) \geq a_{n_0}(t) > h(t) - \epsilon.$$

  Ahora, como $\{a_n(y)\}$ es creciente,

  $$h(y) \geq a_{2n_0}(y) > h(t) - \epsilon,$$

  para todo $y \in I$ tal que $|y - t| < \frac{1}{2n_0}$.
  De este modo, concluimos que $h \in \mathcal{C}^+(I)$.

- Para que h pertenezca a dicho conjunto, también tiene que cumplir que $h \leq f$.
  Esta parte es inmediata. A partir de la definición, si $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_n(t) \leq f(t)$. Con ello, $h(t) = \lim_{n\to\infty} a_n(t) \leq f(t)$.

Finalmente, para concluir que $h = f^{\uparrow}$, necesitamos demostrar que h es el supremo del conjunto mencionado anteriormente.

- Para ello, veamos que si $g \in \mathcal{C}^+(I)$ y $g \leq f$, entonces, $g \leq h$.
  Por ser g una función semicontinua inferiormente, para todo $t \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, si $x \in I$ y $|x - t| < \frac{1}{n}$, entonces tenemos que $f(x) \geq g(x) \geq g(t) - \epsilon$.

  Considerando el ínfimo, nos queda

  $$a_n(t) = \inf_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} f(x) \geq g(t) - \epsilon.$$

  Tomamos el límite cuando $n \to \infty$ y obtenemos que $h(t) \geq g(t) - \epsilon$.
  Lo anterior se cumple para todo $\epsilon > 0$. Concluimos así, que $h(t) \geq g(t)$.

ii) A continuación, definimos, para todo $t \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n(t) := \sup_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} f(x).$$

Dada la relación existente entre supremo e ínfimo, tenemos

$$b_n(t) = \sup_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} f(x) = -\inf_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} (-f(x)).$$

Usando el mismo argumento que en el apartado *i)*, la sucesión $\{b_n(t)\}$ es decreciente para cada $t \in I$, y como está acotada, existe su límite. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(t) = \lim_{n\to\infty} (-\inf_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} (-f(x))) = -\lim_{n\to\text{ínf}} \inf_{(t-\frac{1}{n}, t+\frac{1}{n})} (-f(x)) \overset{i)}{=} -(-f)^{\uparrow}(t).$$

Por el apartado *ii)* de Corolario 2.19, sabemos que $-(-f)^{\uparrow}(t) = f^{\downarrow}(t)$. □

Lema 2.26. *Toda función semicontinua inferiormente y no negativa $f : I \to \mathbb{R}$ puede extenderse a una función semicontinua inferiormente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa en $\mathbb{R}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que $a, b \in [-\infty, \infty]$ son los extremos de I, donde $a < b$.

Para extender f fuera del intervalo I, definimos la siguiente función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) Si $x \leq a$:

- Si $a \in I$, entonces $\tilde{f}(x) := f(a)$.
- Si $a \notin I$, entonces $\tilde{f}(x) := 0$.

ii) Si $x \in I$, entonces $\tilde{f}(x) := f(x)$.

iii) Si $x \geq b$:

- Si $b \in I$, entonces $\tilde{f}(x) := f(b)$.
- Si $b \notin I$, entonces $\tilde{f}(x) := 0$.

A continuación, veremos que se trata de una función semicontinua inferiormente.

Sea $p \in \mathbb{R}$. Tenemos los siguientes casos:

- **Caso $p \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$:**

  En ambos casos, independientemente de si a, b pertenecen a I o no, $\tilde{f}$ es una función constante en estos intervalos. Por lo tanto, al tratarse de intervalos abiertos, $\tilde{f}$ es semicontinua inferiormente.

- **Caso $p = a$:**

  - Si $a \in I$:
    En este caso, $\tilde{f}(a) = f(a)$. Ahora, tomamos un x "cercano" a ese p. Analizamos sus posibles valores:

- Si $x < a$, tenemos $\tilde{f}(x) = f(a)$. Luego
$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = f(a) - f(a) = 0 > -\epsilon.$$
- Si $x > a$, en este caso, $x \in I$ y con ello $\tilde{f}(x) = f(x)$, obteniendo así
$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = f(x) - f(a) > -\epsilon.$$

- Si $a \notin I$:
Tenemos que $\tilde{f}(a) = 0$. Dependiendo del x que tomemos, nos encontraremos en una de las siguientes situaciones:
  - $x < a$, por lo tanto, $\tilde{f}(x) = 0$. Por lo tanto.
$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = 0 - 0 = 0 > -\epsilon.$$
  - $x > a$. En este caso, $x \in I$ y $\tilde{f}(x) = f(x)$. Como f es no negativa, nos queda
$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = f(x) - 0 > -\epsilon$$

- **Caso $p = b$:**

  Sigue el mismo razonamiento que el caso $p = a$.

- **Caso $p \in I \setminus \{a, b\}$:**

  Dado que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, y f en este intervalo es semicontinua inferiormente, se pueden deducir directamente las desigualdades asociadas a $\tilde{f}$. □

Antes de enunciar el siguiente teorema, recordemos una propiedad que será utilizada en su demostración.

Nota 2.27. *Recordemos que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos (a_n, b_n). Por completitud, veamos a continuación una breve prueba.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Definimos el siguiente conjunto:
$$I := \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ con } p < q \text{ y } (p, q) \subseteq A\}.$$
Este conjunto es numerable, por ser un subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

A continuación, probaremos que
$$A = \bigcup (p, q) \quad \text{con } (p, q) \in I.$$
Obviamente, por definición de los elementos de I, cada (p, q) está contenido en A y, así, la unión de estos intervalos está contenida en A.

En cuanto al otro contenido, veamos que cada punto de A pertenece a un elemento de I.
Sea $x \in A$. Dado que A es un conjunto abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que
$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq A.$$
Recordemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Como resultado, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que
$$x - \epsilon < p < x < q < x + \epsilon.$$
Por este motivo, tenemos que $x \in (p, q) \subseteq A$. Por ello, x pertenece a la unión (numerable) de estos intervalos. □

Teorema 2.28. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada inferiormente. Entonces, $f \in \mathcal{C}^+(I)$ si y solo si existe una sucesión de funciones continuas $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ que converge puntualmente a f.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Podemos suponer que $f \geq 0$ (ya que, si no lo fuese, podríamos sumarle una constante sin modificar la semicontinuidad). Además, según Lema 2.26, podemos considerar que $I = \mathbb{R}$.

A continuación, aproximaremos f mediante una sucesión de supremos de funciones continuas. Por ello, para cada $q \in \mathbb{Q}^+$, definimos el siguiente conjunto

$$A_q := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > q\}.$$

De acuerdo con el apartado i) de Teorema 2.8, se trata de un conjunto abierto en I. Veamos que, además, podemos expresar f en términos de la función característica de los conjuntos A_q de la siguiente manera

$$f(x) = \sup\left\{q\chi_{A_q}(x) : q \in \mathbb{Q}^+\right\} \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Esta igualdad se debe a

$\boxed{\geq}$ Fijamos $x \in \mathbb{R}$. Existe una sucesión estrictamente creciente de números racionales positivos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} q_n.$$

Asi, se tiene que $f(x) > q_n$ y por ello, $x \in A_{q_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} q_n\chi_{A_{q_n}}(x) = f(x).$$

Por ello, $\sup\left\{q\chi_{A_q}(x) : q \in \mathbb{Q}^+\right\} \geq f(x)$.

$\boxed{\leq}$ Dado $x \in \mathbb{R}$, si $x \in A_q$, entonces $q < f(x)$, y así $q\chi_{A_q}(x) < f(x)$. Con ello, se concluye que

$$\sup\left\{q\chi_{A_q}(x) : q \in \mathbb{Q}^+\right\} \leq f(x),$$

como queríamos ver.

El objetivo de esta demostración es encontrar una sucesión creciente de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntualmente.

Supongamos que hemos probado que existe una sucesión de funciones continuas $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) \quad \text{(puntualmente)}.$$

Definimos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente manera: para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) := g_1(x),$$
$$f_2(x) := g_1(x) \vee g_2(x),$$
$$f_3(x) := g_1(x) \vee g_2(x) \vee g_3(x),$$
$$\vdots$$

es decir,

$$f_n(x) := \bigvee_{k=1}^{n} g_k(x) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se puede observar que

- $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \ldots$ Es decir, es una sucesión creciente de funciones. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

- f_n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que está definida como el máximo de un número finito de funciones continuas. Además, dado que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $g_k \leq f$, se sigue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

- Se cumple que

$$f(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = f(x).$$

  Así,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Por ello, basta con probar que existe una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ continuas con $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$.

Sabemos que $f(x) = \sup_{q\in\mathbb{Q}^+} q\chi_{A_q}(x)$.

Ordenamos los elementos de $\mathbb{Q}^+$, como una sucesión $\mathbb{Q}^+ = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Así, podemos reescribir $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} q_n\chi_{A_{q_n}}(x).$$

Sabemos que $\chi_{A_{q_n}}$ no es una función continua. Entonces, necesitamos aproximar $\chi_{A_{q_n}}$ por funciones continuas. Esto se reduce a aproximar χ_U, donde U es un conjunto abierto. Si podemos aproximar estas funciones mediante funciones continuas, podemos aproximar $q_n\chi_{A_{q_n}}$ de la misma manera.

Como vimos en Nota 2.27, al ser U un conjunto abierto, puede expresarse como una unión numerable de intervalos abiertos:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n).$$

Tenemos así que,

$$\chi_U = \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{(a_n,b_n)}.$$

Así, basta con aproximar $\chi_{(a,b)}$ para $a < b$.

Definimos la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$h_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|x-c|}{L/2}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{si } x \in (a,b), \\ 0 & \text{si } x \notin (a,b). \end{cases}$$

donde:

- c es el punto medio del intervalo, $c = \frac{a+b}{2}$,
- L es la longitud del intervalo, definida por $L = b - a$.

Se tiene que h_1 es continua y que $h_n = (h_1)^{\frac{1}{n}}$. Por ello, cada h_n es continua y, como h_1 toma valores en $(0,1)$, $h_1 \leq h_2 \leq \ldots$. A continuación, veamos que estas funciones tienden a $\chi_{(a,b)}$.

- Tomamos $x \notin (a,b)$. En este caso, $h_n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego $h_n(x)$ tiende a $\chi_{(a,b)}(x) = 0$.
- Si $x \in (a,b)$, entonces $h_n(x) = (1 - \frac{|x-c|}{\frac{L}{2}})^{\frac{1}{n}}$. Como $1 - \frac{|x-c|}{\frac{L}{2}}$ es un número fijo perteneciente al intervalo $(0,1)$, la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $1 = \chi_{(a,b)}(x)$ cuando $n \to \infty$.

Luego tenemos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi_{(a_k,b_k)} = \lim_{n\to\infty} h_n^k = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n^k \quad \text{(por ser creciente)}.$$

De ahí que,

$$\chi_U = \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{(a_k,b_k)} = \sup\left\{h_n^k : n,k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aplicando esto a cada conjunto A_{q_m}, que es abierto, podemos escribir

$$\chi_{A_{q_m}} = \sup\left\{h_{n,m}^k : n,k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Con ello,

$$q_m\chi_{A_{q_m}} = \sup\left\{q_m h_{n,m}^k : n,k \in \mathbb{N}\right\} \quad (q_m h_{n,m}^k \text{ son continuas}).$$

Concluimos que

$$f = \sup_{m\in\mathbb{N}} q_m\chi_{A_{q_m}} = \sup\left\{q_m h_{n,m}^k : n,k,m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Es decir, los términos $q_m h_{n,m}^k$ con $n,k,m \in \mathbb{N}$, forman la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ buscada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por hipótesis, tenemos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, donde cada f_n es continua en I para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $f_n \in \mathcal{C}^+(I)$.

Si ahora definimos $S := \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}^+(I)$ y, teniendo en cuenta que $f(x) = \sup S$, en virtud del apartado *i*) de Teorema 2.11, concluimos que $f \in \mathcal{C}^+(I)$. □

Veamos cómo se modifica el teorema anterior cuando consideramos una función semicontinua superiormente.

Corolario 2.29. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada superiormente. Entonces, $f \in \mathcal{C}^-(I)$ si y solo si existe una sucesión de funciones continuas $f_1 \geq f_2 \geq ...$ que converge puntualmente a f.*

Demostración. Por Corolario 2.7, sabemos que, si f es semicontinua superiormente, entonces $-f$ es una función semicontinua inferiormente, luego, aplicando Teorema 2.28 a $-f$ y considerando la sucesión $\{-f_n\}_{n=1}^{\infty}$que aparece en dicho teorema, se prueba directamente. El recíproco se demuestra fácilmente. □

Capítulo 3

Funciones de primera clase de Baire

Al igual que en el capítulo anterior, I denotará un intervalo.

Teorema 2.28 y Corolario 2.29 establecen que una función semicontinua es el límite puntual de una sucesión monótona de funciones continuas.

Definición 3.1. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice* ***de primera clase de Baire*** *si f es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas definidas en I.*

Esta definición se puede extender a cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}$.

A continuación, veremos un ejemplo de este tipo de funciones para que quede más claro el concepto.

Ejemplo 3.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en I. Su derivada es una función de primera clase de Baire.*

Demostración. Definimos la sucesión de funciones continuas como

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ para todo } x \in I \text{ y con } n \in \mathbb{N}.$$

Así, vemos que estas funciones convergen puntualmente a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x).$$

Por tanto, f' es una función de primera clase de Baire. □

Notación 3.3. *Denotamos por $\mathcal{B}_1$ ó $\mathcal{B}_1(X)$ al conjunto de funciones de primera clase de Baire en X.*

De Teorema 2.28 y Corolario 2.29, sabemos que toda función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, o semicontinua superiormente y acotada superiormente, es de primera clase de Baire. La siguiente proposición extiende este resultado.

Teorema 3.4. *Toda función semicontinua en un intervalo, sin necesidad de estar acotada, es de primera clase de Baire.*

Demostración. Veamos en primer lugar que, si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función semicontinua inferiormente, entonces es de primera clase de Baire.

Empezamos definiendo la siguiente función

$$g := \arctan \circ f : I \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Para ver que g es una función semicontinua inferiormente, usaremos el apartado $i)$ de Teorema 2.8; es decir, probaremos que el siguiente conjunto es abierto para cada $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A_s &= \{x : g(x) > s\} \\ &= \{x : \arctan(f(x)) > s\} \\ &= \{x : f(x) > \tan(s)\}. \end{aligned}$$

Notemos que, dado que f es semicontinua inferiormente, el conjunto $B_r = \{x : f(x) > r\}$ es abierto para todo $r \in \mathbb{R}$. Ahora bien, $A_s = B_{\tan s}$, es decir, A_s es abierto, como queríamos ver. Por lo tanto, g es semicontinua inferiormente.

Por otra parte, g es una función acotada, luego por Teorema 2.28, existe una sucesión creciente de funciones continuas $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a g ($g_n : I \to \mathbb{R}$).

Vemos que puede existir $x \in I$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0}(x) = -\frac{\pi}{2}$. Es por ello por lo que definimos la siguiente sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$h_n(x) := \max\left(g_n(x), \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

Estas funciones son continuas por ser el máximo de funciones continuas. Además, tienden puntualmente a g ya que $g(x) > \frac{-\pi}{2}$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces

$$g_n(x) > \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{n_0} > \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{n},$$

luego $h_n(x) = g_n(x) \to g$.

Por otro lado, dado que cada h_n toma valores en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos definir las funciones

$$f_n = \tan(h_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Obviamente, como $\tan : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ es continua, también lo es cada función $f_n : I \to \mathbb{R}$.

Finalmente, veamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f. Dado $x \in I$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \tan(h_n(x)) \\ &= \tan(\lim_{n\to\infty} h_n(x)) \\ &= \tan g(x) \\ &= \tan\arctan(f(x)) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Hemos probado que f es una función de primera clase de Baire, como pretendíamos.

El caso en que f sea semicontinua superiormente se deduce fácilmente del hecho de que, si f es semicontinua superiormente, entonces $-f$ es semicontinua inferiormente. □

Gracias a este resultado, si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cuyo grafo es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$, entonces f es de primera clase de Baire, ya que, por Teorema 2.17, puede expresarse como la diferencia de dos funciones semicontinuas inferiores.

En el siguiente resultado, es necesario que el intervalo I sea abierto.

Corolario 3.5. *Sea $h : I \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es de primera clase de Baire si y solo si $g := h^{-1} \circ f : I \to I$ es de primera clase de Baire.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Como partimos de que $f \in \mathcal{B}_1(I)$, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f.

Podemos definir, para cada $x \in \mathbb{R}$, la siguiente sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$g_n(x) := h^{-1} \circ f_n(x).$$

Cada función g_n es continua, ya que es la composición de dos funciones continuas. Además,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} h^{-1} \circ f_n(x) = h^{-1}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = h^{-1}(f(x)) = g(x).$$

Así, hemos probado que $g \in \mathcal{B}_1(I)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $g \in \mathcal{B}_1(I)$, existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada g_n es una función continua. Esta sucesión converge puntualmente a g.

Definimos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$f_n := h \circ g_n.$$

Podemos observar que cada una de ellas es continua.

Por otro lado, se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} h \circ g_n(x) = h(\lim_{n\to\infty} g_n(x)) = h(g(x)) = f(x).$$

Lo que implica que $f \in \mathcal{B}_1(I)$. □

Teorema 3.6. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones de primera clase de Baire. Tenemos:*

i) $f + g \in \mathcal{B}_1(I)$.

ii) $\lambda f \in \mathcal{B}_1(I)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $fg \in \mathcal{B}_1(I)$.

Demostración. En primer lugar, como $f, g \in \mathcal{B}_1(I)$, existen dos sucesiones de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

i) Podemos definir la sucesión $h_n(x) := f_n(x) + g_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$. Obviamente cada h_n es continua y, además, para todo $x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) + g_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) + g(x) = h(x).$$

Concluimos que $f + g \in \mathcal{B}_1(I)$.

ii) Fijamos $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante $h_n := \lambda f_n$, con lo que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda f_n(x)\big) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda f(x) = h(x)$$

para todo $x \in I$.

Hemos probado así que $\lambda f \in \mathcal{B}_1(I)$.

iii) Consideramos la sucesión de funciones continuas $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $h_n(x) := f_n(x)g_n(x)$, para todo $x \in I$.

Usando las propiedades de los límites tenemos

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x)g_n(x)\big) = \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\big(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\big) = f(x)g(x) = h(x).$$

De este modo, $fg \in \mathcal{B}_1(I)$. □

El siguiente teorema demuestra que $\mathcal{B}_1(I)$ es además un retículo.

Teorema 3.7. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones de primera clase de Baire. Tenemos:*

i) $f \wedge g \in \mathcal{B}_1(I)$.

ii) $f \vee g \in \mathcal{B}_1(I)$.

Demostración. Por hipótesis, sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de funciones continuas en I que convergen puntualmente a f y g, respectivamente.

i) Sea $h_n := f_n \wedge g_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que cada h_n es una función continua, por ser mínimo de dos funciones continuas.

Veamos ahora que la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a h. Para ello, aplicamos propiedades de los límites y, para cada $x \in I$, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \min\{f_n(x), g_n(x)\} \\ &= \min\{\lim_{n\to\infty} f_n(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x)\} \\ &= \min\{f(x), g(x)\} \\ &= h(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, h es de primera clase de Baire.

ii) Esta demostración sigue la misma idea que la anterior, pero utilizando la función máximo.

□

Teorema 3.8. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de primera clase de Baire. Se cumple:*

i) Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, entonces $h \circ f \in \mathcal{B}_1(I)$.

ii) Si J es un intervalo y $g : J \to I$ es continua, entonces $f \circ g \in \mathcal{B}_1(I)$.

Demostración. *i)* Como $f \in \mathcal{B}_1(I)$, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende puntualmente a f.

Definimos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $h_n := h \circ f_n$, la cual es continua por ser la composición de dos funciones continuas. Además, la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $h \circ f$ ya que, para todo $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} h\big(f_n(x)\big) = h\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = h\big(f(x)\big).$$

Luego pertenece a $\mathcal{B}_1(I)$.

ii) Este razonamiento es similar al del apartado anterior, donde ahora trabajamos con la sucesión de funciones continuas definidas como $h_n := f_n \circ g$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Observación 3.9. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

Entonces, $f \in \mathcal{B}_1(I)$ si y solo si $g \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$.

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$ Partimos de que $g \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$. Luego, existe una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ continuas en $\mathbb{R}$, cuyo límite puntual es g.

Definimos f_n como la restricción de g_n en I. Es decir, $f_n(x) = g_n(x)$ para todo $x \in I$. Estas funciones son continuas, y además, para todo $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = f(x).$$

Esto demuestra que f es el límite puntual de esta sucesión de funciones continuas, lo que implica que $f \in \mathcal{B}_1(I)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Lo probaremos únicamente para el caso en el que I es un intervalo cerrado y acotado, es decir, $I = [a, b]$.

Como partimos de que $f \in \mathcal{B}_1(I)$, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f.

A continuación, definimos una sucesión de funciones $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$,

$$k_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, a - \frac{1}{n}] \\ nx - na + 1 & \text{si } x \in (a - \frac{1}{n}, a) \\ 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ -nx + nb + 1 & \text{si } x \in (b, b + \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{si } x \in [b + \frac{1}{n}, \infty) \end{cases}$$

Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_n'(x) := \begin{cases} f_n(a) & \text{si } x < a \\ f_n(x) & \text{si } x \in [a,b] \\ f_n(b) & \text{si } x > b \end{cases}$$

Por último, consideramos la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde cada elemento tiene la siguiente forma

$$g_n(x) := f_n'(x)k_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, g_n es continua, ya que es el producto de dos funciones continuas. Además, g_n converge puntualmente a g

- Si $x \in [a,b]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = g(x).$$

- Si $x \notin [a,b]$, suponemos que $x < a$. Como $a - x > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, se cumple que $x \leq a - \frac{1}{n}$, es decir, $k_n(x) = 0$. Por ello,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$$

  Para el caso de $x > b$ se sigue el mismo razonamiento.

Así, llegamos a la conclusión de que $g \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$. □

Esta extensión de f puede ser muy útil en algunos casos en los que queramos demostrar que ciertos tipos de funciones son de primera clase de Baire, ya que nos permite trabajar con funciones definidas en $\mathbb{R}$. El siguiente teorema es un ejemplo de esto.

Pero antes de introducir dicho teorema, recordemos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua si y solo si, para todo abierto $U \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ es abierto en I. En el siguiente teorema, vemos una caracterización similar en el caso de funciones de primera clase de Baire.

Teorema 3.10. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de primera clase de Baire. Entonces, para todo conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto preimagen $f^{-1}(U)$ es un conjunto F_σ en I.*

Demostración. Gracias a Observación 3.9, podemos reducir la demostración al caso $I = \mathbb{R}$, ya que, si usamos la g definida en dicha observación, tenemos que para todo conjunto A,

$$f^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cap I.$$

Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Como indicamos en Nota 2.27, podemos expresar U como

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Nuestro objetivo es probar que

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n)$$

es un conjunto F_σ. Es decir, necesitamos ver que es la unión numerable de conjuntos cerrados. Por ello, basta con fijar $n \in \mathbb{N}$ y probar que $f^{-1}(a_n, b_n)$ es F_σ. Con este fin, escribimos

$$f^{-1}(a_n, b_n) = \{x : f(x) > a_n\} \cap \{x : f(x) < b_n\}.$$

Sabemos que $f \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})$, por lo tanto, existe una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f. Por eso, podemos definir estos conjuntos usando estas funciones f_n.

Por un lado, tenemos que

- $\{x : f(x) > a\} = \bigcup\limits_{\substack{\epsilon \in \mathbb{Q} \\ \epsilon > 0}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \{y : f_n(y) \geq a + \epsilon\}.$

Veamos esta igualdad.
$\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $f(x) > a$, existe $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que

$$f(x) > a + \epsilon.$$

Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$,

$$f_n(x) \geq a + \epsilon;$$

entonces $x \in A_\epsilon^n = \{y \in \mathbb{R} : f_n(y) \geq a + \epsilon\}$ para todo $n \geq m$. Esto implica que

$$x \in \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} A_\epsilon^n.$$

Así concluimos que

$$x \in \bigcup_{\substack{\epsilon \in \mathbb{Q} \\ \epsilon > 0}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} A_\epsilon^n.$$

$\boxed{\supseteq}$ Suponemos que $x \in \bigcup\limits_{\substack{\epsilon \in \mathbb{Q} \\ \epsilon > 0}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \{y : f_n(y) \geq a + \epsilon\}.$
Entonces, existe $\epsilon > 0$ con $\epsilon \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $n \geq m$,

$$f_n(x) \geq a + \epsilon$$

Como el límite también debe cumplir esta cota

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq a + \epsilon > a.$$

De esta manera hemos demostrado que $x \in \{y : f(y) > a\}$, como queríamos ver.

De manera análoga, aplicando la misma idea que en la primera igualdad, se obtiene

- $\{x : f(x) < b\} = \bigcup\limits_{\substack{\epsilon \in \mathbb{Q} \\ \epsilon > 0}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} \{y : f_n(y) \leq b - \epsilon\}.$

Los conjuntos $\{y : f_n(y) \geq a + \varepsilon\}$ y $\{y : f_n(y) \leq b - \varepsilon\}$ son cerrados por ser las preimágenes de conjuntos cerrados a través de funciones continuas. Además, la intersección de conjuntos cerrados es cerrada. Por ello, $\bigcap_{n>m}\{y : f_n(y) \geq a + \varepsilon\}$ y $\bigcap_{n>m}\{y : f_n(y) \leq b - \varepsilon\}$ son cerrados. Así, por el apartado *i*) de Teorema 1.3, son conjuntos de tipo F_σ.

Finalmente, la unión numerable de conjuntos F_σ es también un conjunto de tipo F_σ (por el apartado *i*) de Teorema 1.4). Así, podemos concluir que $f^{-1}(a, b)$ es un conjunto F_σ. □

El recíproco del resultado anterior también se satisface, y se verá más adelante (Teorema 3.25).

Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es de primera clase de Baire, aplicando Teorema 3.10, $f^{-1}(F^c)$ es F_σ, es decir, $(f^{-1}(F))^c$ es F_σ. Ahora, por el apartado *ii*) de Teorema 1.3, concluimos que $f^{-1}(F)$ es G_δ.

De este modo, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.11. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de primera clase de Baire. Entonces, para todo conjunto cerrado $F \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto $f^{-1}(F)$ es un conjunto G_δ.*

Como consecuencia inmediata de la definición, obtenemos que toda función continua $f : I \to \mathbb{R}$ es de primera clase de Baire. Sin embargo, hay funciones de primera clase de Baire que no son continuas, como es el caso de $f := \chi_{\{1\}}$, que es semicontinua superiormente pero no es continua.

No obstante, el siguiente teorema muestra que, en particular, una función de primera clase de Baire no puede ser discontinua en todos sus puntos. Antes de enunciarlo, veamos un lema que necesitaremos en la demostración.

Lema 3.12. *Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces $\overline{A} \setminus A$ tiene interior vacío.*

Demostración. Suponemos, por reducción al absurdo, que el interior no es vacio. Es decir, existen $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ con $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \overline{A} \setminus A$.

Como $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x, con lo cual existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Sin embargo, por hipótesis, todos los puntos de ese intervalo pertenecen a $\overline{A} \setminus A$; es decir, $x_n \notin A$ para todo $n \geq n_0$. Esto es una contradicción, ya que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. □

Teorema 3.13. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función de primera clase de Baire. El conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto magro y F_σ. Concretamente, f es continua en un conjunto denso.*

Demostración. Por Observación 3.9, consideramos el caso en que $I = \mathbb{R}$.
Sean $p, q \in \mathbb{R}$ con $p < q$. Definimos

$$A_{pq} := \mathbb{R} \setminus (p, q).$$

A continuación, tomamos un punto de discontinuidad $a \in \mathbb{R}$ de f. Sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in \mathbb{R}$ con

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad f(a_n) \notin (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Como $f(a) \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$p \in (f(a) - \epsilon,\, f(a)) \quad \text{y} \quad q \in (f(a),\, f(a) + \epsilon).$$

Así,

$$f(a) \in (p, q) \subset (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Por lo tanto, podemos concluir que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{y} \quad f(a_n) \notin (p, q) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Lo que significa que

$$a_n \in f^{-1}(A_{pq}) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seguidamente, definimos el conjunto

$$S := \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}, p<q} \overline{f^{-1}(A_{pq})} \setminus f^{-1}(A_{pq}).$$

Veamos que S contiene a los puntos de discontinuidad de f.

Como

$$\overline{f^{-1}(A_{pq})} = f^{-1}(A_{pq}) \cup \{\text{puntos límite de } f^{-1}(A_{pq})\},$$

S es el conjunto de puntos que son los límites de sucesiones de elementos de los $f^{-1}(A_{pq})$, pero no pertenecen al correspondiente $f^{-1}(A_{pq})$.

Como hemos mencionado anteriormente, para cada punto de discontinuidad a, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ y una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $f^{-1}(A_{pq})$ que converge a a. Sin embargo, como $f(a) \in (p, q)$, se tiene que $a \notin f^{-1}(A_{pq})$. De este modo, $a \in S$ para todo a punto de discontinuidad de f.

Veamos ahora que S es F_σ.

Por una parte, el conjunto A_{pq} es cerrado y, por lo tanto, por Corolario 3.11, deducimos que $f^{-1}(A_{pq})$ es un conjunto G_δ. A continuación, aplicamos Corolario 1.5 para concluir que $\overline{f^{-1}(A_{pq})} \setminus f^{-1}(A_{pq})$ es un conjunto F_σ, y en consecuencia, S también lo es (apartado i) de Teorema 1.4).

Finalmente, probemos que S es magro.

Como Lema 3.12 garantiza que el interior de cada $\overline{f^{-1}(A_{pq})} \setminus f^{-1}(A_{pq})$ es vacio, podemos aplicar Proposición 1.11 y establecer que cada uno de estos conjuntos es magro. En consecuencia, S también lo es, por ser la unión numerable de magros.

Así, por Corolario 1.9, podemos concluir que el conjunto de puntos de continuidad de f es denso. □

Corolario 3.14. $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *no es una función de primera clase de Baire.*

Demostración. Suponemos, por reducción al absurdo, que se trata de una función de primera clase de Baire.

Por Teorema 3.13, sabemos que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función de primera clase de Baire es un conjunto magro y F_σ. Calculemos dicho conjunto para la función característica de los racionales.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, existen:

- Una sucesión de números racionales $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende a x_0. Como $r_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de ahí que $\chi_{\mathbb{Q}}(r_n) = 1$.
- Una sucesión de números irracionales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x_0. Tenemos que $s_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por consiguiente $\chi_{\mathbb{Q}}(s_n) = 0$.

Ambas sucesiones convergen a x_0, pero $\chi_{\mathbb{Q}}(r_n) \to 1$ y $\chi_{\mathbb{Q}}(s_n) \to 0$ y así, concluimos que

$$\lim_{x \to x_0} \chi_{\mathbb{Q}}(x) \quad \text{no existe.}$$

Por lo tanto, el conjunto de discontinuidad de $\chi_{\mathbb{Q}}$ es todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\mathbb{R}$ no es magro, ya que, si lo fuese, por Corolario 1.10 tendríamos que su interior es vacio, lo cual es imposible porque $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Concluimos así, que $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es una función de primera clase de Baire. □

Nota 3.15. *Sin embargo,* $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función de segunda clase de Baire (es decir, se puede obtener como límite puntual de una sucesión de funciones de primera clase de Baire).*

Demostración. Sea $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el siguiente conjunto

$$A_n := \bigcup_{k=1}^{n} \{q_k\}.$$

Cada A_n es cerrado en $\mathbb{R}$, ya que es unión finita de cerrados. Por ello, aplicando el apartado *ii*) de Corolario 2.9, concluimos que χ_{A_n} es una función semicontinua superiormente para todo $n \in \mathbb{N}$. Debido a esto, y utilizando Teorema 3.4, cada χ_{A_n} es una función de primera clase de Baire.

Veamos ahora que la sucesión $\{\chi_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\chi_{\mathbb{Q}}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces existe $q_k \in \mathbb{Q}$ tal que $x = q_k$. Así, $x \in A_n$ para todo $n \geq k$. Por esta razón, $\lim_{n \to \infty} \chi_{A_n}(x) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $x \notin A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $\chi_{A_n}(x) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

Conseguimos así demostrar que es una función de segunda clase de Baire. □

Teorema 3.16. *Sea* $X \subset \mathbb{R}$. *La función* $\chi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es de primera clase de Baire si y solo si* X *es* F_σ *y* G_δ.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Por hipótesis, tenemos que χ_X es una función de primera clase de Baire. Por ello, existe una sucesión de funciones continuas $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a χ_X.

En primer lugar, veamos que X se puede escribir de la siguiente manera

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2} \right\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in \mathbb{R} : g_m(x) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Demostremos estas igualdades:

- Probemos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$.

  Sea $x \in X$. Sabemos que $\chi_X(x) = 1$, luego $g_m(x) \to 1$. Usando la definición de límite, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$|g_m(x) - 1| < \epsilon \quad (\text{con lo cual } g_m(x) > 1 - \epsilon) \quad \text{para todo } m \geq n_0.$$

  Consideramos $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

  $$g_m(x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{para todo } m \geq n.$$

  Concluimos así que $x \in \bigcap_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$ y, en consecuencia,
  $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$.

  Por otro lado, si $x \notin X$, entonces $\chi_X(x) = 0$. Esto implica que $g_m(x) \to 0$. Al igual que antes, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ que verifica que

  $$|g_m(x)| < \epsilon \quad (\text{ y así, } g_m(x) < \epsilon) \quad \text{para todo } m \geq n_0.$$

  Tomamos $\epsilon = \frac{1}{2}$; podemos afirmar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

  $$g_m(x) < \frac{1}{2} \quad \text{para todo } m \geq n.$$

  Por lo tanto, $x \notin \bigcap_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.
  Así $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) \geq \frac{1}{2}\right\}$.

  Gracias a esta igualdad, podemos observar que X es un conjunto F_σ, ya que, como cada función g_m es continua, el conjunto $g_m^{-1}([\frac{1}{2}, \infty))$ es cerrado, así como la intersección de todos estos conjuntos. Por lo tanto, X se puede escribir como unión numerable de conjuntos cerrados, lo que implica que es un conjunto F_σ, según Teoremas 1.3 y 1.4.

- El caso de $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq n} \left\{x \in \mathbb{R} : g_m(x) > \frac{1}{2}\right\}$ se prueba de forma análoga.

  Dada esta igualdad, concluimos que X también es G_δ, como se deduce de Teoremas 1.3 y 1.4. Esto se debe a que cada conjunto $g_m^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ es abierto y, por ello, X es la intersección numerable de conjuntos abiertos.

$\boxed{\Leftarrow}$ Partimos de que X es un conjunto F_σ y G_δ. Luego, sabemos que

- Como X es un F_σ, se puede escribir como

  $$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con } A_n \text{ cerrados y } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

- X es un G_δ. Por lo tanto, se representa de la siguiente manera

  $$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{con } U_n \text{ abiertos y } U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$$

Es decir, tenemos las siguientes igualdades:

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = U_1 \cap U_2 \cap \ldots,$$

de lo que deducimos que $A_n \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Queremos construir una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja puntualmente a χ_X. Para ello, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la siguiente función

$$f_n(x) := \frac{d_{U_n^c}(x)}{d_{U_n^c}(x) + d_{A_n}(x)},$$

donde $d_{A_n}(x) := \text{ínf}\,\{|x-a| : a \in A_n\}$ y $d_{U_n^c}(x) := \text{ínf}\,\{|x-b| : b \in U_n^c\}$.

A continuación, probaremos que cada f_n es continua. Fijamos $n \in \mathbb{N}$.

La función distancia es continua. Por ello, f_n es cociente de funciones continuas. Además, como $A_n \subseteq U_n$, los conjuntos A_n y U_n^c son disjuntos y cerrados. En consecuencia, no puede haber un punto en ambas clausuras. De este modo, el denominador en la definición de f_n no se anula (ya que $d_A(x) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$). Lo que garantiza que f_n es continua.

Por otro lado, probemos que cada f_n vale 1 en A_n y 0 en U_n^c:

- Sea $x \in A_n$; entonces $d_{A_n}(x) = 0$ y $d_{U_n^c}(x) > 0$. Por lo tanto,

$$f_n(x) = \frac{d_{U_n^c}(x)}{d_{U_n^c}(x) + 0} = 1.$$

- Sea $x \notin U_n$; entonces $d_{U_n^c}(x) = 0$, de modo que,

$$f_n(x) := \frac{0}{0 + d_{A_n}(x)} = 0.$$

Por último, veamos que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a χ_X.

- Sea $x \in X$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n_0}$. Además, dado que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, tenemos que $x \in A_n$ para todo $n \geq n_0$. Por definición de f_n, esto implica que $f_n(x) = 1$ para todo $n \geq n_0$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = \chi_X(x).$$

- Para cualquier $x \notin X$, sabemos que existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_0}$. Puesto que $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$, tenemos que $x \notin U_n$ para todo $n \geq n_0$,. Por ello, $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

De este modo, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_X(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Así, queda demostrado que χ_X es una función de primera clase de Baire. □

Lema 3.17. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada de primera clase de Baire, distinta de la función constante cero. Entonces, existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas que converge puntualmente a f, y tal que*

$$|f_n(t)| < \sup\{|f(x)| : x \in I\} \qquad \textit{para todo } t \in I \textit{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Comenzamos escribiendo la función f como la diferencia entre sus partes positiva y negativa

$$f = f^+ - f^-,$$

donde

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \quad \text{ y } \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}.$$

Empezamos enfocándonos en la parte correspondiente a f^+, ya que el caso de f^- sigue la misma idea.

Como, por hipótesis, f es acotada, lo es también f^+. Por ello,

$$N_1 := \sup\left\{f^+(x) : x \in I\right\} \in \mathbb{R}; \text{ es decir, } f^+ \leq N_1.$$

Como, por Teorema 3.7, f^+ es de primera clase de Baire, existe una sucesión de funciones continuas $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f^+. A partir de esta sucesión, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una nueva función

$$g'_n(x) := \text{mín}\{g_n(x), N_1\} \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Cada g'_n es continua y satisface $g'_n \leq N_1$. Además, teniendo en cuenta que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ y la sucesión constante $\{N_1\}$ converge, se tiene que, para todo $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} g'_n(x) = \text{mín}\left\{\lim_{n\to\infty} g_n(x), N_1\right\} = \text{mín}\left\{f^+(x), N_1\right\} = f^+(x).$$

En consecuencia, hemos construido una sucesión de funciones continuas $\{g'_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende a f^+ y que está acotada superiormente por N_1.

Como necesitamos que la sucesión también esté acotada inferiormente por $-N_1$, definimos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) := \text{máx}\left\{g'_n(x), 0\right\} \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Dado que $f^+ \geq 0$, se cumple que, para todo $x \in I$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \text{máx}\left\{\lim_{n\to\infty} g'_n(x), 0\right\} = \text{máx}\left\{f^+(x), 0\right\} = f^+(x).$$

Además, esta sucesión satisface

$$0 \leq f_n \leq N_1 \quad (\text{y por lo tanto, } |f_n| \leq N_1) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Usando la misma idea, existe una sucesión de funciones continuas $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a f^- y que verifica

$$|h_n| \leq N_2 := \sup\left\{f^-(x) : x \in I\right\}.$$

Finalmente, definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$k_n(x) := f_n(x) - h_n(x) \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Podemos observar que $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que tiende a $f^+ - f^- = f$, y satisface

$$|k_n| \leq \text{máx}\{N_1, N_2\} = \sup\{|f(x)| : x \in I\} \qquad \text{para todo } x \in I \text{ y todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, hemos encontrado la sucesión que estábamos buscando. □

Teorema 3.18. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{B}_1(X)$ es uniformemente cerrado, es decir, si existe una sucesión de funciones $f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{B}_1(X)$ y $f = \text{lím}_{n\to\infty} f_n$ uniformemente, entonces $f \in \mathcal{B}_1(X)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de primera clase de Baire que converge uniformemente a f. Debido a esto, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$ y todo $x \in X$, se cumple que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Consideramos ahora una subsucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que se verifique la desigualdad anterior tomando $\epsilon = 2^{-n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$|g_n(x) - f(x)| < \epsilon = 2^{-n-1} \qquad \text{para todo } x \in X.$$

A continuación, definimos una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma

$$h_n(x) := g_{n+1}(x) - g_n(x) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos ver

- Cada h_n pertenece a $\mathcal{B}_1(X)$ por ser la diferencia de dos funciones de primera clase de Baire.
- Para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &= |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \\ &= |g_{n+1}(x) - f(x) + f(x) - g_n(x)| \\ &\leq |g_{n+1}(x) - f(x)| + |f(x) - g_n(x)| \\ &\leq 2^{-n-2} + 2^{-n-1} < 2^{-n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, vamos a ver que podemos expresar $f(x)$ como

$$f(x) = g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Esto se debe a que

$$\sum_{n=1}^{N} h_n = (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + ... + (g_{N+1} - g_N) = -g_1 + g_{N+1},$$

ya que, al tomar el límite cuando N tiende a infinito, como $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, se verifica que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} h_n = -g_1 + \lim_{N\to\infty} g_{N+1} = -g_1 + f,$$

y deducimos inmediatamente la igualdad anunciada.

Dado que el objetivo de la demostración es probar que $f \in \mathcal{B}_1(X)$, en base a la igualdad anterior, basta con verificar que $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \in \mathcal{B}_1(X)$.

Partimos de que cada $h_n \in \mathcal{B}_1(X)$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de funciones continuas $\{s_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ que converge puntualmente a h_n.

Definimos, para cada $i \in \mathbb{N}$, la función

$$t_i(x) := \sum_{n=1}^{\infty} s_i^n(x), \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Queremos probar que cada t_i es continua. Para ello, podemos suponer, por Lema 3.17, que

$$|s_i^n(x)| \leq 2^{-n} \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ y todo } x \in X.$$

Gracias a esta acotación, podemos aplicar Criterio M de Weierstrass con $M_n = 2^{-n}$ y, concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_i^n \qquad \text{converge uniformemente para cada } i \in \mathbb{N},$$

ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ es geométrica con razón $|r| = \frac{1}{2} < 1$, y por lo tanto es convergente.

Finalmente, por Teorema de la continuidad del límite uniforme, t_i es continua para cada $i \in \mathbb{N}$.

Por último, queremos probar que la sucesión de funciones $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$. Para ello, hay que probar que, para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq i_0$, se tiene que

$$|t_i(x) - \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)| < \epsilon.$$

Con este objetivo, tomamos $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos

- Como $\sum_{n=1}^{\infty} s_i^n$ converge, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} s_i^n(x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

- Al igual que antes, aplicando Criterio M de Weierstrass y teniendo en cuenta que $|h_n| \leq M_n = 2^{-n}$, concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ es convergente. Por lo tanto, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ con

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty} h_n(x) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Tomamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, nos queda

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} s_i^n(x) \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{y} \quad \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} h_n(x) \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

luego

$$\begin{aligned}\left|t_i(x) - \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{N}(s_i^n(x) - h_n(x))\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} s_i^n(x)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} h_n(x)\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=1}^{N}(s_i^n(x) - h_n(x))\right| + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\end{aligned}$$

Falta acotar el primer término. Sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{s_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ converge puntualmente a h_n. Tomando $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3N}$, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que, para todo $i \geq i_1$, resulta que

$$|s_i^n(x) - h_n(x)| < \frac{\epsilon}{3N} \qquad \text{para } n = 1, \ldots, N.$$

Por lo tanto, si $i \geq i_1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(s_i^n(x) - h_n(x))\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |s_i^n(x) - h_n(x)| < \sum_{n=1}^{N} \frac{\epsilon}{3N} = N \cdot \frac{\epsilon}{3N} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Concluimos así que

$$|t_i(x) - \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)| < \epsilon.$$

Es decir, existe una sucesión de funciones continuas $\{t_i\}_{n=1}^{\infty}$ que tienden puntualmente a $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$. Por lo tanto, ese sumatorio pertenece a $\mathcal{B}_1(X)$, lo que implica que $f \in \mathcal{B}_1(X)$ por el apartado $i)$ de Teorema 3.6. □

Corolario 3.19. *Las funciones monótonas son de primera clase de Baire.*

Demostración. Estudiaremos primero el caso de las funciones monótonas en un intervalo acotado $[a, b]$. El hecho de que sean de primera clase de Baire se deriva de Teorema 2.14, que establece que tales funciones pueden expresarse como la diferencia de dos funciones semicontinuas acotadas. Como se deduce de Teorema 3.4, tales funciones pertenecen a $\mathcal{B}_1([a, b])$. Por lo tanto, podemos concluir que las funciones monótonas también deben ser funciones de primera clase de Baire.

A continuación, consideramos el caso en que $f : I \to \mathbb{R}$ sea una función monótona, pero no acotada.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función

$$f_n(x) := \text{mín}\,\{\text{máx}\,\{f(x), -n\}\,, n\} \qquad \text{para todo } x \in I.$$

De manera equivalente, para todo $x \in I$, cada función f_n tiene la siguiente forma

$$f_n(x) := \begin{cases} -n & \text{si } f(x) \leq -n \\ f(x) & \text{si } f(x) \in (-n, n) \\ n, & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Podemos observar que cada f_n es monótona y acotada, ya que toma valores entre $-n$ y n. Por lo comentado anteriormente, cada f_n es de primera clase de Baire.

Por otro lado, para cada $x \in I$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Así, Teorema 3.18 nos permite concluir que $f \in \mathcal{B}_1(I)$. □

El siguiente resultado guarda una estrecha relación con Teorema 3.13.

Teorema 3.20. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que tiene solo un número contable de puntos de discontinuidad. Entonces es de primera clase de Baire.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, por Corolario 3.5, podemos suponer que f es acotada. Debido a esto, Teorema 2.20 nos garantiza que $f^{\uparrow} \in \mathcal{C}^{+}(I)$ y $f^{\downarrow} \in \mathcal{C}^{-}(I)$. En consecuencia, por Teorema 3.4, estas funciones son de primera clase de Baire.

A continuación, definimos

$$w := f^{\downarrow} - f^{\uparrow}.$$

Tenemos que

i) $0 \leq f - f^{\uparrow} \leq w$, ya que, por Teorema 2.20, se cumple que $f^{\uparrow} \leq f \leq f^{\downarrow}$.

ii) El conjunto $\{x : w(x) > 0\}$ es contable, ya que es el conjunto de puntos donde f es discontinua. En efecto, aplicando Corolario 2.24, sabemos que f es discontinua en aquellos puntos donde $f^{\uparrow} \neq f^{\downarrow}$, es decir, $f^{\uparrow} < f^{\downarrow}$. Esto equivale a aquellos en los que $w > 0$.

iii) Por Corolario 2.10, w es semicontinua superiormente y, además, es acotada (por serlo f).

Nuestro objetivo es probar que $f \in \mathcal{B}_1(I)$. Dado que

$$f = f^{\uparrow} + (f - f^{\uparrow})$$

y $f^{\uparrow} \in \mathcal{B}_1(I)$, basta con probar que $f - f^{\uparrow}$ es de primera clase de Baire.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por Teorema 3.18, basta con construir una función $g_n \in \mathcal{B}_1(I)$ tal que

$$g_n \leq f - f^{\uparrow} \leq g_n + \frac{1}{n},$$

ya que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiende a $f - f^{\uparrow}$.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Por *ii)*, el conjunto $A := \left\{x \in I : w(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ es contable. Además, dado que w es semicontinua superiormente, A es cerrado y, por el apartado *i)* de Teorema 1.3, es un conjunto G_δ.

Sea $A' \subseteq A$. Por el apartado *iii)* de Teorema 1.3, todo conjunto contable es un conjunto F_σ; en particular, A' es F_σ.

Según el apartado *ii)* de Teorema 1.3, el complementario $(A')^c$ es un conjunto G_δ. Esto implica que $A \setminus A' = A \cap (A')^c$, es decir, la intersección de dos conjuntos G_δ, y por el apartado *iii)* de Teorema 1.4, también es G_δ. Concluimos así que $A \setminus A'$ es un conjunto contable, F_σ y G_δ.

Aplicando Teorema 3.16, sabemos que $\chi_{A\setminus A'} \in \mathcal{B}_1(I)$. Como consecuencia, podemos concluir que

$$\text{si } B \subset A, \text{ entonces } \chi_B \in \mathcal{B}_1(I).$$

A continuación, para $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$B_m := \left\{ x \in I : \frac{m}{n} \leq (f - f^{\uparrow})(x) < \frac{m+1}{n} \right\}.$$

Sea

$$g_n(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{n} \chi_{B_m}(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Como $f - f^{\uparrow}$ es acotado, existe $M \geq 0$ tal que, para todo $x \in I$, $|(f - f^{\uparrow})(x)| \leq M$. Obviamente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{N}{n} > M$. Esto implica que, para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq N$

$$\frac{m}{n} > M \geq (f - f^{\uparrow})(x) \quad \text{para todo } x \in I,$$

luego, el conjunto B_m es vacío, y por lo tanto,

$$\chi_{B_m}(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in I \text{ y todo } m \geq N,$$

con lo cual g_n consiste en una suma finita de funciones $\frac{m}{n}\chi_{B_m}$.

Además, cada B_m es un subconjunto de A. Esto se debe a que si $x \in B_m$, sabemos que

$$\frac{m}{n} \leq (f - f^{\uparrow})(x) \leq w(x) \quad \text{(apartado } i)).$$

Así concluimos que $w(x) \geq \frac{1}{n}$, y por ello, $x \in A$.

Como probamos anteriormente, al tratarse de un subconjunto de A, tenemos que

$$\chi_{B_m} \in \mathcal{B}_1(I) \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Gracias a esto, sabemos que $g_n \in \mathcal{B}_1(I)$, ya que es la suma finita de funciones de primera clase de Baire.

Por último, veamos que $g_n \leq f - f^{\uparrow} \leq g_n + \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

- Sea $x \in I$ tal que $(f - f^{\uparrow})(x) = 0$.

  En este caso, tenemos que no existe ningún $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{m_0}$. En consecuencia, $g_n(x) = 0$. Por ende, se cumple la desigualdad

$$0 = g_n(x) \leq (f - f^{\uparrow})(x) = 0 \leq g_n(x) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

- Tomamos $x \in I$ tal que $(f - f^{\uparrow})(x) \neq 0$.

  Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{m_0}$, por definición de este conjunto, se cumple que $\frac{m_0}{n} \leq (f - f^{\uparrow})(x)$. Además, tenemos que $g_n(x) = \frac{m_0}{n}$. Por lo tanto,

$$\frac{m_0}{n} = g(x) \leq (f - f^{\uparrow})(x).$$

  Por otro lado, dado que $x \in B_{m_0}$,

$$(f - f^{\uparrow})(x) < \frac{m_0 + 1}{n} = \frac{m_0}{n} + \frac{1}{n} = g_n(x) + \frac{1}{n}.$$

En resumen, se cumple la desigualdad que queríamos probar para todo $x \in I$. $\square$

Gracias al teorema anterior, podemos concluir que las funciones continuas por la derecha o por la izquierda son de primera clase de Baire. Esto se debe a que existe un teorema (cuya demostración se encuentra como Teorema 7.7 en [1]) que dice lo siguiente:

Teorema 3.21. *Sea f una función en $\mathbb{R}$. Entonces, el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ en los que existe al menos uno de los límites laterales $f(x+)$ o $f(x-)$, pero f no es continua en x, es contable.*

En particular, si f es continua por la derecha, entonces el límite lateral derecho $f(x+)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el conjunto de puntos donde f es discontinua es contable. Por lo tanto, aplicando Teorema 3.20, concluimos que $f \in \mathcal{B}_1(I)$. El caso en que f es continua por la izquierda es análogo.

A continuación, para completar la caracterización iniciada en Teorema 3.10, vamos a probar su recíproco. Antes de eso, necesitamos introducir los conjuntos splitting, que nos ayudarán en dicha demostración.

Definición 3.22. *Sean $A_1, A_2, \ldots, A_N$ conjuntos F_σ cuya unión es $\mathbb{R}$. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se dice splitting si existen conjuntos F_σ disjuntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{N} Q_i = X, \quad Q_i \subseteq A_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Veamos unas propiedades útiles de estos conjuntos.

Proposición 3.23. *Sea X un conjunto splitting. Tenemos que*

i) *X es un conjunto F_σ.*

ii) *Si $Z \subseteq X$ es un conjunto F_σ, entonces Z también es splitting.*

iii) *Si $X_1, X_2, \ldots$ son conjuntos splitting y G_δ, su unión numerable también es splitting.*

Demostración. Sea X un conjunto splitting. Por definición, existen conjuntos F_σ disjuntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{N} Q_i = X, \quad Q_i \subseteq A_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

i) Dado que cada Q_i es un conjunto F_σ, y que X es unión finita de estos conjuntos, según el apartado *i)* de Teorema 1.4, se concluye que X también es F_σ.

ii) Queremos probar que existen conjuntos F_σ disjuntos $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_N$ tales que

$$Z = \bigcup_{i=1}^{N} Q'_i, \quad Q'_i \subseteq A_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Para ello, definimos, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, el siguiente conjunto

$$Q'_i = Q_i \cap Z.$$

Estos conjuntos cumplen:

- $Q'_i \subseteq Q_i \subseteq A_i$.
- Son disjuntos entre sí, ya que los Q_i lo son.
- Son conjuntos F_σ por ser la intersección de dos F_σ (apartado *ii*) de Teorema 1.4).
- Su unión es Z (ya que la unión numerable de Q_i es todo X, y $Z \subseteq X$).

Por lo tanto, Z es splitting.

iii) Queremos probar que la unión de los conjuntos X_n con $n \in \mathbb{N}$ es splitting. Para ello, necesitamos construir conjuntos F_σ disjuntos $Q'_1, Q'_2, \ldots Q'_N$ tales que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{i=1}^{N} Q'_i, \quad Q'_i \subseteq A_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Para poder encontrar estos Q'_i, primero necesitamos reescribir los conjuntos X_n, con $n \in \mathbb{N}$, de manera que los conjuntos resultantes sean disjuntos, pero sin alterar su unión. Por ello, consideramos

$$X'_n := X_n \setminus \bigcup_{k<n} X_k \quad \text{con } n, k \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como, por hipótesis, X_n es splitting, existen conjuntos Q_{ni} disjuntos y F_σ tales que

$$X_n = \bigcup_{i=1}^{N} Q_{ni}, \quad Q_{ni} \subseteq A_i \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Al igual que antes, tenemos que expresar estos conjuntos Q_{ni} de manera que sean disjuntos entre sí. Con este objetivo, definimos los siguientes conjuntos

$$Q'_{ni} := Q_{ni} \cap X'_n \quad \text{con } i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

Veamos que tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{N} Q'_{ni} = \bigcup_{i=1}^{N} (Q_{ni} \cap X'_n) = (\bigcup_{i=1}^{N} Q_{ni}) \cap X'_n = X_n \cap X'_n = X'_n.$$

Finalmente, podemos construir los nuevos conjuntos disjuntos cuya unión numerable sea la unión de los X_n con $n \in \mathbb{N}$. Establecemos

$$Q'_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q'_{ni} \quad \text{con } i \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

Veamos que cumplen las condiciones necesarias:

- Los conjuntos Q'_i y Q'_j son disjuntos para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ con $i \neq j$:
  Por ello, basta con probar que Q'_{ni} y Q'_{mj} son disjuntos para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Veamos los siguientes casos:
  - Si $n \neq m$, entonces $Q'_{ni} \subseteq X'_n$ y $Q'_{mi} \subseteq X'_m$ y como he mencionado anteriormente, X'_n y X'_m son disjuntos por definición.

- Si $n = m$, tenemos que $Q'_{ni} \subseteq Q_{ni}$ y $Q'_{nj} \subseteq Q_{nj}$. Dado que el conjunto X_n es splitting, se cumple que Q'_{ni} y Q'_{nj} son disjuntos, por serlo Q_{ni} y Q_{nj}.

En ambos casos, se concluye que $Q'_i \cap Q'_j = \emptyset$.

- Cubren todo el conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$:
Sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X'_n$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in X'_n$. Como $X'_n = \bigcup_{i=1}^{N} Q'_{ni}$, tenemos que existe $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. con $x \in Q'_{ni}$. De este modo $x \in Q'_i$ y, por lo tanto,
$$x \in \bigcup_{i=1}^{N} Q'_i.$$

- Cada $Q'_i \subseteq A_i$:
Por construcción, $Q'_{ni} \subseteq Q_{ni} \subseteq A_i$.

- Cada Q'_i es un conjunto F_σ:
Sea $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Por el apartado $i)$ de Teorema 1.4, vale con probar que cada Q'_{ni} es un conjunto F_σ. Para ello, recordemos que, fijado $n \in \mathbb{N}$,
$$Q'_{ni} := Q_{ni} \cap X'_n,$$
donde Q_{ni} es F_σ por ser X_n splitting y X'_n es también un conjunto F_σ, ya que
$$X'_n = X_n \setminus \bigcup_{k<n} X_k = X_n \cap \left(\bigcup_{k<n} X_k\right)^c.$$
Asimismo, X_n es un conjunto F_σ y G_δ. Por ello, aplicando Teorema 1.3 y Teorema 1.4, queda justificado que X'_n es un conjunto F_σ. □

Lema 3.24. *Sean $A_1, A_2, \dots, A_N$ conjuntos F_σ cuya unión es $\mathbb{R}$. Entonces existen conjuntos F_σ disjuntos $P_1, P_2, \dots, P_N$ tales que $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_N = \mathbb{R}$ y $P_i \subseteq A_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.*

Demostración. Como se puede observar en Definición 3.22, este lema consiste en demostrar que $\mathbb{R}$ es splitting.

Comenzamos definiendo la familia $F = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ (a, b) \text{ es splitting}\}$.

Sea el conjunto
$$Y := \bigcup_{(a,b)\in F} (a, b).$$

Se puede observar que Y es abierto y, debido al apartado $i)$ de Teorema 1.3, también es un conjunto G_δ. Además, como es unión numerable de conjuntos splitting, apoyándonos en el apartado $iii)$ de Proposición 3.23, Y es splitting.

A continuación, probemos que $Y = \mathbb{R}$. Para ello, suponemos que esta afirmación es falsa. Como consecuencia, Y^c es un conjunto cerrado no vacío. Además,
$$Y^c \subseteq \mathbb{R} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N,$$

donde cada A_i con $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ es un conjunto F_σ. Por consiguiente, cada A_i es unión numerable de conjuntos cerrados A_{ij}, con $j \in \mathbb{N}$.

En conclusión, Y^c está contenido en unión numerable de conjuntos cerrados. Por ello, aplicando Ejercicio 5.J del libro [1], existen $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \in \mathbb{N}$ y un intervalo abierto $J \subseteq \mathbb{R}$ (que, por densidad, puede tomarse con extremos racionales) tal que

$$\emptyset \neq (J \cap Y^c) \subseteq A_{ij} \subseteq A_i.$$

Además, por el apartado *i*) de Teorema 1.3, tanto J, por ser abierto, como Y^c, por ser cerrado, son conjuntos F_σ y G_δ. Por lo tanto, $J \cap Y^c$ también lo es, ya que es la intersección de dos conjuntos de ese tipo (apartado *ii*) y *iii*) Teorema 1.4).

Por otro lado, $J \cap Y^c$ es splitting porque definimos $Q_i = (J \cap Y^c) \subseteq A_i$, y $Q_k = \emptyset$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, $k \neq i$.

Luego, por el apartado *iii*) de Proposición 3.23, el conjunto $(J \cap Y^c) \cup Y$ es splitting, ya que los conjuntos involucrados son G_δ y splitting. Además, como $J \subseteq ((J \cap Y^c) \cup Y)$ es F_σ, aplicando el apartado *ii*) de la misma proposición, se tiene que J es splitting.

Pero, entonces, J está contenido en Y, por ser la unión de todos los intervalos abiertos con extremos en $\mathbb{Q}$ que son splitting. Esto contradice que $J \cap Y^c \neq \emptyset$, y por ello, la suposición de que $Y \neq \mathbb{R}$.

Así queda demostrado que $Y = \mathbb{R}$. Con lo que concluimos que $\mathbb{R}$ es splitting. □

Teorema 3.25. *Una funcíon $f : I \to \mathbb{R}$ es de primera clase de Baire si y solo si, para todo conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un F_σ.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Ya está probado en Teorema 3.10.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por Observación 3.9, asumimos sin pérdida de generalidad que $I = \mathbb{R}$. Además, gracias a Corolario 3.5, podemos suponer que f está acotada. Al estar acotada, podemos normalizarla para que $0 \leq f \leq 1$.

Necesitamos probar que f es de primera clase de Baire. Sea $M \in \mathbb{N}$. Usando Teorema 3.18, es suficiente con probar que existe una función $g_M \in \mathcal{B}_1(I)$ con

$$|f(x) - g_M(x)| \leq \frac{1}{M} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definimos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, M\}$, el siguiente conjunto

$$A_i^M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{i-1}{M} < f(x) < \frac{i+1}{M} \right\}.$$

Observamos que cada A_i^M es la contraimagen por f de un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Es decir,

$$A_i^M = f^{-1}\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i+1}{M}\right),$$

luego, por hipótesis, cada A_i^M es un conjunto F_σ.

Por otro lado, como $0 \leq f \leq 1$, tenemos que

$$\mathbb{R} = f^{-1}\left(\frac{-1}{M}, 1 + \frac{1}{M}\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{M}\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i+1}{M}\right)\right) = \bigcup_{i=0}^{M} f^{-1}\left(\frac{i-1}{M}, \frac{i+1}{M}\right) = \bigcup_{i=0}^{M} A_i^M.$$

De esta manera, hemos probado que los conjuntos $A_0^M, A_1^M, \ldots, A_M^M$ son F_σ y cubren $\mathbb{R}$. Por ello, podemos aplicar Lema 3.24 y afirmar que existen conjuntos F_σ disjuntos $P_0, P_1, \ldots, P_M$, que cubren $\mathbb{R}$, y tales que, para cada i, se satisface que $P_i \subseteq A_i^M$.

Asimismo, el complementario de cada P_i es la unión de P_j con $j \in \{0, 1, \ldots, M\}$, $j \neq i$ (ya que los P_i son disjuntos). Por lo tanto, según el apartado $i)$ de Teorema 1.4, cada P_i^c es F_σ, ya que es la unión finita de conjuntos F_σ. Aplicando el apartado $ii)$ de Teorema 1.3, concluimos que cada P_i es un F_σ y G_δ.

A continuación, definimos la función

$$g_M(x) := \sum_{i=0}^{M} \frac{i}{M} \chi_{P_i}(x) \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Como cada P_i es un F_σ y un G_σ, aplicando Teorema 3.16, podemos concluir que $g_M \in \mathcal{B}_1(I)$.

Por último, probemos que esta g_M verifica que

$$|f(x) - g_M(x)| \leq \frac{1}{M}, \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\bigcup_{i=0}^{M} P_i = \mathbb{R}$, entonces tiene que existir $k \in \{0, \ldots, M\}$ tal que $x \in P_k$ y $x \notin P_j$ con $j \in \{0, \ldots, M\}$ y $j \neq k$. De ahí que, $g_M(x) = \frac{k}{M}$.

Además, puesto que $P_k \subseteq A_k^M$, deducimos que $x \in A_k^M$ y por ello,

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{M} &< f(x) < \frac{k+1}{M} \\
\frac{k-1}{M} - \frac{1}{M} &< f(x) - \frac{1}{M} < \frac{k+1}{M} - \frac{1}{M} \\
\frac{k}{M} - \frac{2}{M} &< f(x) - \frac{1}{M} < \frac{k}{M} \\
g(x) - \frac{2}{M} &< f(x) - \frac{1}{M} < g(x) \\
g(x) - \frac{1}{M} &< f(x) < g(x) + \frac{1}{M},
\end{aligned}$$

Como queríamos ver.

Así, queda probado que $f \in \mathcal{B}_1(I)$. $\square$

Capítulo 4

Glosario de términos y resultados básicos

- Dado un conjunto A, $\chi_A(x)$ denota la función característica en A, es decir

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

- Sean f y g funciones. Denotamos

  $(f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$.

  $(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$.

- Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión convergente (Teorema 16 de [6]).

- Un retículo es un conjunto A parcialmente ordenado en el cual, para cada par de elementos a y b, existe un único supremo $(a \vee b) \in A$ y un único ínfimo $(a \wedge b) \in A$ (véase el capítulo 2 de [7]).

- Criterio M de Weierstrass: Sea X un conjunto, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$.

  Si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en X (véase Teorema 5.2.3 de [8]).

- Teorema de la continuidad del límite uniforme: Sea X un espacio topológico, sea Y un espacio métrico. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a una función f, emtonces f es continua (Véase Teorema 21.6 en [3]).

Bibliografía

[1] Arnoud C. M. van Rooij and Wilhelmus H. Schikhof. *A Second Course on Real Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] Luis C. Recalde. *La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático*. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia, 2010.

[3] James R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2000.

[4] Wikipedia contributors. Semicontinuidad — wikipedia, la enciclopedia libre, 2024.

[5] Charles C. Pinter. *A Book of Set Theory*. Dover Publications, Mineola, NY, 2014.

[6] Halsey L. Royden and Patrick M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 4th edition, 2010.

[7] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*, volume 25 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, New York, revised edition, 1948.

[8] Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman, New York, 2nd edition, 1993.