

**Facultad
de
Ciencias**

Una generalización del problema de Basilea

A generalization of the Basel problem

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Autora: Celia Perona Cachón
Director: Daniel Lear Claveras
Junio 2025**

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, Daniel, por su ayuda, su implicación en este trabajo y todo el tiempo que me ha dedicado.

A mis amigas de siempre, mis bebis, por no dejarme sola cuando más lo he necesitado, y por entenderme cuando más difícil era. A mis compañeros de carrera que se convirtieron en amigos. A Lucho y a Carlos, gracias por compartir esto conmigo.

A L'Aquila, por darme el empujón que necesitaba para seguir y por regalarme la mejor experiencia de mi vida.

A Pablo, por confiar en mí cuando ni yo misma lo hacía, por seguir acompañándome en cada nueva etapa y no soltarme nunca. Gracias también a tu familia, por hacerme sentir una más.

A mi familia, en especial a mis yiyos, por estar siempre y quererme y cuidarme como nadie.

A mis padres, gracias. Gracias por enseñarme a no rendirme, por hacerme entender que fallar no es fracasar. Gracias por sacarme del pozo cuando no veía salida y por recordarme siempre lo orgullosos que estáis de mí. Yo también estoy orgullosa de vosotros. Os quiero.

Y, finalmente, a Naiara. Sin duda, eres lo mejor que me ha dado la carrera. Gracias por estar siempre a mi lado desde aquel primer día, y por compartir juntas cada fracaso y cada éxito. Como tú me dijiste a mí, esto también es gracias a ti.

Por fin, después de un duro recorrido, pongo fin al grado en Matemáticas. Esto no habría sido posible sin la ayuda de todos vosotros. Gracias.

Resumen

Este trabajo estudia y amplía el célebre problema de Basilea, que consiste en calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

resultado obtenido por Euler en el siglo XVIII. Se presentan diversas demostraciones de este resultado, comenzando con una aproximación histórica y formal basada en productos infinitos, seguida de una demostración completamente elemental mediante desigualdades trigonométricas. A continuación, se generaliza el método para obtener una fórmula cerrada para $\zeta(2n)$, donde ζ es la función zeta de Riemann, utilizando exclusivamente herramientas elementales y recurriendo al uso de los números de Bernoulli. Finalmente, se exploran generalizaciones del resultado de Euler para sumas más complejas mediante el uso de transformadas de Fourier y el teorema de sumación de Poisson.

Abstract

This work studies and extends the famous Basel problem, which consists in computing the sum of the reciprocals of the squares of the natural numbers, namely,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

a result discovered by Euler in the 18th century. Several proofs of this result are presented, starting with a historical and formal approach based on infinite products, followed by a completely elementary proof using trigonometric inequalities. The method is then generalized to obtain a closed-form expression for $\zeta(2n)$, where ζ denotes the Riemann zeta function, using only elementary tools and Bernoulli numbers. Finally, the work explores generalizations of Euler's theorem to more complex sums using Fourier transforms and the Poisson summation formula.

Índice general

1. Breve introducción histórica	1
2. Una demostración elemental	5
3. Otra demostración elemental para $\zeta(2n)$	13
4. Generalización del Teorema de Euler	25
Bibliografía	41

Capítulo 1

Breve introducción histórica

El objetivo de este trabajo es analizar y expandir una de las contribuciones más destacadas de Leonhard Euler: su solución al Problema de Basilea, que consiste en determinar la suma infinita de los inversos de los cuadrados de los números naturales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Este problema fue planteado por Pietro Mengoli en 1644 y permaneció sin solución durante casi un siglo. No fue hasta 1735 cuando Leonhard Euler logró determinar su valor exacto, obteniendo el sorprendente resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lo más notable de esta solución es la inesperada aparición de la constante π en una serie de números enteros, un hecho que sorprendió incluso a los matemáticos contemporáneos de Euler.

Para encontrar la solución de este problema, Euler desarrolló un método innovador basado en la extensión de resultados conocidos para polinomios finitos al caso de polinomios infinitos. Su enfoque consistía en considerar la factorización de ciertas funciones y comparar sus desarrollos en serie. En general, cualquier polinomio puede ser factorizado si conocemos todas sus raíces.

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son las raíces de un polinomio $P(x)$ de grado n , dicho polinomio se puede factorizar como

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \cdot a$$

donde a es el coeficiente de x^n .

Si se tiene que $a_k \neq 0$ para $k = 1, \dots, n$, multiplicando y dividiendo por

$$P(0) = a \cdot (-1)^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \neq 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{P(0)}{P(0)} \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \cdot a \\ &= \frac{P(0)}{a \cdot (-1)^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \cdot a, \end{aligned}$$

y dividiendo cada factor, obtenemos finalmente

$$P(x) = P(0) \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right). \quad (1.1)$$

Por otro lado, Euler sabía que la función seno se anula en los múltiplos enteros de π :

$$\sin x = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$$

Siguiendo la idea de factorización de polinomios, Euler propuso escribir $\sin x$ como un producto infinito utilizando sus raíces. Una primera idea sería intentar escribir $\sin x$ directamente en esa forma. Sin embargo, si intentáramos escribir directamente $\sin x$ como un producto infinito, aparecería un factor adicional x ,

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots,$$

lo que complica su manipulación, ya que no podemos escribir la función como un producto de términos $(1 - x/a_n)$, lo cual es clave para expandirla y comparar coeficientes.

Para evitar este problema, consideramos la función

$$P(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (1.2)$$

que comparte las mismas raíces que $\sin x$ excepto en $x = 0$ y, usando la regla de L'Hôpital, vemos que satisface

$$P(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \neq 0 \quad (1.3)$$

Utilizando (1.3) y las raíces de (1.2) al caso general (1.1) obtenemos:

$$P(x) = \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots$$

Agrupando términos de la forma $(1 - \frac{x}{n\pi})(1 + \frac{x}{n\pi})$, podemos escribir

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \quad (1.4)$$

A partir de la identidad (1.4), podemos expandir el producto infinito como una serie de potencias en x^2 . Nuestro objetivo es identificar el coeficiente de x^2 en dicha expansión y compararlo con el que aparece en el desarrollo en serie de Taylor de $\frac{\sin x}{x}$ alrededor de $x = 0$.

La expansión del producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

genera una serie $\sum_{k \geq 0} a_k x^{2k}$. El término de orden x^2 proviene de seleccionar el término que va con x^2 de un solo factor, y el término constante igual a 1 de todos los demás. Es decir, para cada n , se toma el término $-\frac{x^2}{n^2 \pi^2}$ del factor correspondiente a n , y el producto con los demás factores 1. Sumando todas estas contribuciones, el coeficiente total de x^2 en el desarrollo es

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2}.$$

En consecuencia, el desarrollo del producto hasta segundo orden es

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \right) x^2 + \dots.$$

El desarrollo en serie de Taylor de $\frac{\sin x}{x}$ en torno a $x = 0$ es bien conocido:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots.$$

Comparando el coeficiente de x^2 en ambas expresiones, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{6},$$

lo que implica finalmente el famoso resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Comentario sobre la validez del argumento

La deducción anterior, aunque ingeniosa y formalmente correcta, no constituía una demostración rigurosa en la época de Euler, ni según los estándares actuales. En particular, el uso del producto infinito para expresar $\frac{\sin x}{x}$ requiere justificar la convergencia uniforme y el intercambio entre producto y desarrollo en serie.

Hoy en día, la expresión

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

puede justificarse rigurosamente mediante el teorema de factorización de Weierstrass para funciones enteras. Este teorema permite escribir funciones con ceros conocidos como productos infinitos convergentes bajo ciertas condiciones.

Una vez aceptado este desarrollo como válido, la comparación de coeficientes entre la expansión en serie de potencias y el desarrollo como producto infinito sí permite deducir de manera correcta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Así, el argumento original de Euler, aunque no del todo riguroso según los estándares modernos, anticipa de manera brillante resultados que serían formalizados más de un siglo después.

La primera prueba rigurosa de la suma de la serie de Basilea fue realizada por Leopold Kronecker en 1870. Para ello, Kronecker utilizó herramientas más avanzadas de análisis, justificando adecuadamente la convergencia del producto infinito, lo que le permitió establecer la validez de los intercambios entre el desarrollo en serie y el producto infinito de manera rigurosa.

Es notable el largo intervalo de más de un siglo entre la ingeniosa pero no rigurosa prueba de Euler y la demostración formalmente correcta de Kronecker, quien, finalmente proporcionó una fundamentación rigurosa para el resultado de la serie de Basilea.

Capítulo 2

Una demostración elemental

Existen numerosas pruebas del resultado clásico que vamos a establecer; algunas involucran técnicas avanzadas de Análisis Matemático. Como ya dijimos, la primera demostración rigurosa es de Kronecker, que se basa en el análisis del desarrollo en serie de Taylor de ciertas funciones trigonométricas. Sin embargo, en este capítulo mostraremos una demostración completamente elemental. Esta prueba evita herramientas complejas y se basa exclusivamente en argumentos básicos de cálculo diferencial e inecuaciones. Para la elaboración de este capítulo se ha consultado fundamentalmente [3].

La demostración se basa principalmente en usar la idea de la “regla del sandwich”, es decir, acotar las sumas parciales de

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2},$$

entre dos expresiones que converjan al valor $\frac{\pi^2}{6}$ cuando m tienda a infinito.

Comenzaremos la demostración partiendo de la inecuación

$$\sin(x) < x < \tan(x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.1)$$

Demostración de (2.1). Empezamos probando que $\sin(x) < x$. Para ello, definimos la función:

$$f(x) := x - \sin(x).$$

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 1 - \cos(x).$$

Como $\cos(x) < 1$ para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene que $f'(x) > 0$ en dicho intervalo. Por tanto, $f(x)$ es estrictamente creciente. Como además,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

entonces se cumple que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Esto implica que:

$$x - \sin(x) > 0 \implies \sin(x) < x.$$

Seguimos ahora probando que $x < \tan(x)$. Definimos otra función:

$$g(x) := \tan(x) - x,$$

cuya derivada es:

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x).$$

Dado que $\tan^2(x) > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, concluimos que $g(x)$ es estrictamente creciente. Como además, de nuevo tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0,$$

entonces se tiene que $g(x) > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Lo que implica que:

$$\tan(x) - x > 0 \implies x < \tan(x).$$

□

Dado que $\sin(x) < x < \tan(x)$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, se deduce inmediatamente que también se cumple la desigualdad no estricta

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (2.2)$$

Aunque la igualdad no se alcanza en ningún punto del intervalo, la versión con desigualdad no estricta resulta útil para concluir con nuestras estimaciones.

Tomando recíprocos en la inecuación (2.2) y elevando al cuadrado tenemos

$$\cot^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (2.3)$$

Por otro lado, recordamos que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \cot^2(x). \quad (2.4)$$

De este modo, uniendo (2.3) y (2.4) es claro que

$$\cot^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2(x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Tomando $x = \frac{k\pi}{2m+1} \in (0, \frac{\pi}{2})$ con $k, m \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m$ y sumando sobre k tenemos que

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) \leq \sum_{k=1}^m \frac{(2m+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq \sum_{k=1}^m \left(1 + \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) \right),$$

que extrayendo constantes fuera del sumatorio cuando es posible y desarrollando sumas término a término se convierte en:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) \leq \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq m + \sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right). \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta que $m \in \mathbb{N}$, se obtiene la siguiente igualdad, que se probará más adelante:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = \frac{m(2m-1)}{3}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, utilizando (2.5) y (2.6), la relación obtenida es:

$$\frac{m(2m-1)}{3} \leq \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq m + \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{2m(m+1)}{3}.$$

Multiplicando por $\frac{\pi^2}{4m^2}$ y tomando $m \rightarrow \infty$, tenemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi^2(2m-1)}{12m} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)^2}{4m^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2(m+1)}{12m},$$

que calculando cada límite uno de los límites que aparecen en los extremos, nos da

$$\frac{\pi^2}{6} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

Hemos logrado acotar la suma $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$ entre dos expresiones que tienden al mismo límite cuando $m \rightarrow \infty$. Esto nos permite concluir que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sin embargo, para que la demostración esté completa, falta justificar la identidad (2.6), que expresa una suma de cotangentes al cuadrado. Esta parte constituye la parte más ingeniosa del argumento. A continuación, demostraremos dicha igualdad.

Demostración de (2.6). Teniendo en cuenta la relación

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

y tomando la n -ésima potencia de e^{ix} , es decir, $e^{inx} = (e^{ix})^n$, obtenemos

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n,$$

que es la conocida fórmula de Moivre.

Entonces,

$$\begin{aligned} \cos(nx) + i \sin(nx) &= (\cos(x) + i \sin(x))^n \\ &= \sin^n(x) \left(\frac{\cos x}{\sin x} + i \right)^n = \sin^n(x) \cdot (\cot(x) + i)^n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ahora, para desarrollar potencias de la forma $(\cot x + i)^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, aplicamos el Teorema del Binomio de Newton, válido también para números complejos, véase [5], que establece que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $a, b \in \mathbb{C}$, se cumple:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (2.8)$$

donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial, definido por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Este resultado permite expresar potencias de un binomio como una suma finita de términos que combinan potencias de cada uno de los sumandos.

En nuestro caso, identificamos:

$$a = \cot x, \quad b = i.$$

Por tanto, al aplicar el teorema (2.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\cot x + i)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cot^{n-k}(x) \cdot i^k \\ &= \binom{n}{0} \cot^n(x) + \binom{n}{1} \cot^{n-1}(x) \cdot i + \cdots + \binom{n}{n-1} \cot(x) \cdot i^{n-1} + \binom{n}{n} i^n. \end{aligned}$$

Reagrupamos la expresión distinguiendo entre términos reales e imaginarios:

$$\begin{aligned} (\cot x + i)^n &= \left[\binom{n}{0} \cot^n(x) - \binom{n}{2} \cot^{n-2}(x) + \binom{n}{4} \cot^{n-4}(x) - \cdots \right] \\ &\quad + i \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1}(x) - \binom{n}{3} \cot^{n-3}(x) + \binom{n}{5} \cot^{n-5}(x) - \cdots \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.9) sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i \sin(nx) &= \sin^n(x) \cdot (\cot(x) + i)^n = \\ &= \sin^n(x) \left[\binom{n}{0} \cot^n(x) - \binom{n}{2} \cot^{n-2}(x) + \dots \right] \\ &\quad + i \sin^n(x) \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1}(x) - \binom{n}{3} \cot^{n-3}(x) + \dots \right].\end{aligned}$$

Tomando la parte imaginaria a ambos lados de la igualdad,

$$\sin(nx) = \sin^n(x) \left[\binom{n}{1} \cot^{n-1}(x) - \binom{n}{3} \cot^{n-3}(x) + \dots \right].$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $\sin^n(x)$ (siempre que $\sin(x) \neq 0$), se simplifica la expresión a:

$$\frac{\sin(nx)}{\sin^n(x)} = \binom{n}{1} \cot^{n-1}(x) - \binom{n}{3} \cot^{n-3}(x) + \dots \quad (2.10)$$

A continuación, hacemos el cambio de variable $n = 2m + 1$, con $m \in \mathbb{N}$, y tomamos

$$x = \frac{r\pi}{2m+1}, \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, m.$$

Sustituyendo en el miembro izquierdo de la expresión (2.10):

$$\frac{\sin((2m+1)x)}{\sin^{2m+1}(x)} = \frac{\sin((2m+1)\frac{r\pi}{2m+1})}{\sin^{2m+1}(x)} = \frac{\sin(\pi r)}{\sin^{2m+1}(x)} = 0,$$

ya que $\sin(r\pi) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Nótese que aunque el numerador se anula, el denominador no lo hace. En efecto, dado que $1 \leq r \leq m$ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$0 < \frac{r\pi}{2m+1} \leq \frac{m\pi}{2m+1} < \frac{(m+\frac{1}{2})\pi}{2m+1} = \frac{\pi}{2},$$

por lo que los valores de $x = \frac{r\pi}{2m+1}$ pertenecen al intervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$. Como $\sin(x) \neq 0$ en ese intervalo, la división está bien definida y el cociente se anula únicamente por el numerador.

Por otra parte, como hemos tomado $n = 2m + 1$, n se trata de un número impar, lo que garantiza que el último término del desarrollo de $(\cot(x) + i)^n$ corresponde al término

$$\binom{2m+1}{2m+1} i^{2m+1},$$

es decir, un término imaginario.

Por tanto, igualando con el miembro derecho de (2.10):

$$0 = \binom{2m+1}{1} \cot^{2m}(x) - \binom{2m+1}{3} \cot^{2m-2}(x) + \cdots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}.$$

Cada uno de estos valores de $x = \frac{r\pi}{2m+1}$, con $r = 1, 2, \dots, m$, es distinto y pertenece a $(0, \frac{\pi}{2})$, como hemos visto.

Ahora queremos demostrar que los valores de $\cot^2(x)$ correspondientes a estos x son todos distintos. Para ello, consideramos la función $f(x) := \cot^2(x)$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Como se trata de una composición de funciones, aplicamos la regla de la cadena, entonces:

$$f'(x) = 2 \cot(x) \cdot \cot'(x).$$

Calculamos la derivada de $\cot(x)$. Recordamos que

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

y derivando con la regla del cociente obtenemos

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x).$$

Sustituyendo en la expresión de $f'(x)$:

$$f'(x) = 2 \cot(x) \cdot (-\csc^2(x)) = -2 \cot(x) \csc^2(x).$$

En el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, se cumple que $-\cot(x) = -\frac{1}{\tan(x)} < 0$ y $\csc^2(x) > 0$, por lo que

$$f'(x) < 0.$$

Así, concluimos que $f(x) = \cot^2(x)$ es estrictamente decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$. Como toda función estrictamente monótona es inyectiva, esto implica que:

$$\cot^2\left(\frac{r\pi}{2m+1}\right), \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, m,$$

son todos distintos.

De este modo, hemos obtenido m valores distintos de la variable $t = \cot^2(x)$ que anulan el siguiente polinomio:

$$P(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} + \cdots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}.$$

Por tanto, conocemos m raíces distintas del polinomio $P(t)$.

Por otro lado, para calcular la suma de las raíces de un polinomio, utilizamos las conocidas relaciones entre raíces y coeficientes ya mencionadas en el capítulo anterior. En particular, si

$$P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m \quad (2.11)$$

es un polinomio de grado m , y $t_1, \dots, t_m$ son sus raíces (contando multiplicidades), entonces la suma de las raíces está dada por:

$$\sum_{j=1}^m t_j = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Esta expresión se deduce al factorizar el polinomio como

$$P(t) = a_0(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_m),$$

y observar que, al desarrollar el producto, el coeficiente de t^{m-1} es $-a_0(t_1 + t_2 + \cdots + t_m)$, que al compararlo con el coeficiente de t^{m-1} en la forma original (2.11) nos permite identificar que:

$$a_1 = -a_0 \sum_{j=1}^m t_j,$$

de donde se deduce que:

$$\sum_{j=1}^m t_j = \frac{a_1}{-a_0}.$$

En nuestro caso, los coeficientes relevantes son:

$$a_0 = \binom{2m+1}{1}, \quad a_1 = -\binom{2m+1}{3},$$

por lo que la suma de las raíces es:

$$\sum_{r=1}^m \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) = -\frac{-\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}}.$$

Calculamos explícitamente esta fracción:

$$\frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{\frac{(2m+1)!}{3!(2m-2)!}}{\frac{(2m+1)!}{1!(2m)!}} = \frac{(2m)!}{3!(2m-2)!} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

Por tanto, obtenemos finalmente que la suma de las raíces del polinomio $P(t)$, es decir,

$$\sum_{r=1}^m \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right),$$

satisface la identidad:

$$\sum_{r=1}^m \cot^2 \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) = \frac{2m(2m-1)}{6}$$

□

El problema de Basilea ha sido abordado mediante una notable diversidad de métodos, lo que refleja su profunda relevancia matemática. Además de la demostración elemental presentada aquí, basada en inecuaciones trigonométricas y sumas de cotangentes al cuadrado, existen una gran variedad de pruebas distintas. Ya hemos visto en el Capítulo 1 la solución original de Euler, que utiliza el desarrollo del seno como producto infinito y la identificación de sus raíces. Durante el grado hemos visto también una prueba más moderna que utiliza análisis complejo. El hecho de que existan tantas demostraciones distintas refleja no solo su atractivo matemático, sino también su relación con muchas ideas importantes dentro de las matemáticas.

Capítulo 3

Otra demostración elemental para $\zeta(2n)$

La función zeta de Riemann, denotada por $\zeta(s)$, se define para $s > 1$ mediante la serie:

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

En particular, al evaluar esta función en un número par $s = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}},$$

lo que representa la suma de los recíprocos de las potencias pares de los números naturales.

Euler encontró una fórmula explícita para estos valores en términos de los números de Bernoulli B_{2n} . Esta fórmula, conocida como la fórmula de Euler para $\zeta(2n)$, establece que:

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}. \quad (3.1)$$

Esta identidad relaciona de forma directa los valores de la función zeta de Riemann en los enteros positivos pares con los números de Bernoulli B_{2n} , así como con las potencias pares del número π . Se trata de un resultado importante de la teoría de series infinitas, y el objetivo de este capítulo será obtener dicha fórmula utilizando exclusivamente herramientas elementales.

Los numeros de Bernoulli

Los números de Bernoulli deben su nombre al matemático Jakob Bernoulli, quien los introdujo en el estudio de sumas de potencias de enteros, como:

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k.$$

Estos números surgen de forma natural al buscar fórmulas cerradas para dichas sumas. Aunque su definición moderna se basa en su función generatriz que veremos más adelante, históricamente aparecieron como coeficientes en el desarrollo de polinomios que expresan estas sumas. Más adelante, su utilidad se extendió notablemente, en particular en el estudio de series infinitas, teoría de números, análisis y en la famosa fórmula de Euler para los valores de $\zeta(2n)$.

Formalmente, los números de Bernoulli B_n se pueden definir de manera recursiva mediante:

$$B_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Una función generatriz es una herramienta poderosa para representar una sucesión mediante una serie de potencias. Dada una sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$, su función generatriz es la serie de potencias cuyos coeficientes sean precisamente los términos de la sucesión. Se define como:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Cada coeficiente a_n aparece multiplicando a x^n , lo que permite recuperar la sucesión original a partir de derivadas sucesivas de la función generatriz. Es decir,

$$a_0 = G(0), \quad a_1 = G'(0), \quad a_2 = \frac{G''(0)}{2!}, \quad \text{etc.}$$

y en general:

$$a_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$$

Existen distintos tipos de funciones generatrices según el contexto, siendo una de las más relevantes la función generatriz exponencial, definida como:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

En el caso de los números de Bernoulli B_n , la función generatriz exponencial asociada es:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi. \quad (3.2)$$

Una demostración de la fórmula generatriz (3.2) puede encontrarse en [2].

En particular, algunos valores notables de los números de Bernoulli son:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2n+1} = 0 \quad \text{para } n \geq 1, \quad (3.3)$$

y

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

Otra demostración elemental

En esta sección se presenta una demostración elemental de la fórmula cerrada para $\zeta(2n)$, basada en herramientas de trigonometría y álgebra básica. Este enfoque generaliza el método propuesto originalmente para $\zeta(2)$ y permite obtener directamente la expresión cerrada sin recurrir a técnicas avanzadas como el análisis complejo o los desarrollos en series de Fourier.

El capítulo está basado en el artículo [1] publicado en *The American Mathematical Monthly*. La clave del método es el uso de identidades trigonométricas elementales, como la que vimos en el capítulo anterior y que recordamos a continuación:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = \frac{m(2m-1)}{3},$$

cuya versión asintótica para valores grandes de m es

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = \frac{2}{3}m^2 + O(m),$$

donde $O(m)$ representa una cota del error de orden estrictamente inferior a m^2 .

A partir de esta observación, nuestra evaluación de $\zeta(2n)$ se basará en una generalización de esta identidad, que presentamos a continuación en forma de lema.

Lema 3.1. *Para cualesquiera enteros $m, n \geq 1$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^m \cot^{2n} \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = (-1)^{n-1} \frac{2^{4n-1} B_{2n}}{(2n)!} m^{2n} + O(m^{2n-1}),$$

donde B_{2n} es el número de Bernoulli de orden $2n$, y la constante implícita en el término $O(m^{2n-1})$ es independiente de m .

Demostración. Vamos a definir el polinomio

$$P_m(x) := \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots + (-1)^{m+1} \binom{2m+1}{2m-1} x \quad (3.4)$$

cuyas m raíces son

$$x_k = \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right), \quad \text{para cada } k = 1, 2, \dots, m.$$

Sea $s_n := x_1^n + \cdots + x_m^n$. Queremos demostrar que

$$s_n = (-1)^{n-1} \frac{2^{4n-1} B_{2n}}{(2n)!} m^{2n} + O(m^{2n-1}). \quad (3.5)$$

Procedemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: $n = 1$. Sabemos, por (2.6), que

$$s_1 = \sum_{k=1}^m \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right) = \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{2}{3}m^2 - \frac{1}{3}m.$$

Por otro lado, usando que $B_2 = 1/6$ obtenemos

$$(-1)^0 \cdot \frac{2^3 B_2}{2!} m^2 + O(m) = 4 \cdot \frac{1}{6} m^2 + O(m) = \frac{2}{3} m^2 + O(m).$$

Ambas expresiones coinciden en orden dominante, por lo que el caso base se verifica.

Paso inductivo. Supongamos que la fórmula es cierta para $n = 1, \dots, r-1$, es decir:

$$s_k = (-1)^{k-1} \frac{2^{4k-1} B_{2k}}{(2k)!} m^{2k} + O(m^{2k-1}), \quad \text{para } k = 1, \dots, r-1. \quad (3.6)$$

Queremos demostrar que también se verifica para $n = r$. Para ello, utilizaremos las “fórmulas de Newton”, que permiten expresar las sumas de potencias de las raíces de un polinomio en función de sus funciones simétricas elementales σ_j , con $j = 1, \dots, m$, donde m es el número de raíces del polinomio. Estas funciones, que son combinaciones algebraicas de las raíces, aparecen como coeficientes en el desarrollo del polinomio $P_m(x)$. Además, se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= x_1 + x_2 + \cdots + x_m, \\ \sigma_2 &:= \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j, \\ \sigma_3 &:= \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} x_i x_j x_k, \\ &\vdots \\ \sigma_m &:= x_1 x_2 \cdots x_m. \end{aligned}$$

El polinomio $P_m(x)$ se ha construido de forma que sus raíces coincidan con los valores

$$x_k = \cot^2 \left(\frac{k\pi}{2m+1} \right), \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, m,$$

y está definido por la ecuación (3.4). Este polinomio no es mónico, y su coeficiente principal es

$$A = \binom{2m+1}{1}.$$

Para poder aplicar las fórmulas de Newton, normalizamos el polinomio dividiendo entre su coeficiente principal A , de forma que quede mónico.

$$\frac{P_m(x)}{A} = x^m - \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} x^{m-1} + \dots + (-1)^j \frac{\binom{2m+1}{2j+1}}{\binom{2m+1}{1}} x^{m-j} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{\binom{2m+1}{2m-1}}{\binom{2m+1}{1}} x. \quad (3.7)$$

Por otro lado, el polinomio también puede escribirse como

$$P_m(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_j) \cdots (x - x_m),$$

Al expandir este producto, los coeficientes de los términos x^{m-j} se obtienen como sumas de productos de j raíces distintas. Estas combinaciones corresponden a las funciones simétricas elementales σ_j , que agrupan todas las posibles multiplicaciones de j raíces diferentes, independientemente del orden. Por tanto, cada coeficiente del polinomio está dado, salvo el signo, por una de estas funciones.

En consecuencia, el desarrollo completo del polinomio puede escribirse como:

$$\frac{P_m(x)}{A} = x^m - \sigma_1 x^{m-1} + \sigma_2 x^{m-2} - \dots + (-1)^j \sigma_j x^{m-j} + \dots + (-1)^m \sigma_m, \quad (3.8)$$

Al comparar el polinomio en (3.7) y en (3.8), notamos que

- El coeficiente de x^{m-j} en (3.7) es $(-1)^j \frac{\binom{2m+1}{2j+1}}{\binom{2m+1}{1}}$.
- El coeficiente de x^{m-j} en (3.8) es $(-1)^j \sigma_j$.

Por tanto, igualando ambos y despejando σ_j , se obtiene

$$\sigma_j = \frac{\binom{2m+1}{2j+1}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{(2m)!}{(2j+1)!(2m-2j)!} = \frac{(2m)(2m-1)(2m-2) \cdots (2m-2j+1)}{(2j+1)!}.$$

Para estimar asintóticamente σ_j cuando $m \rightarrow \infty$, se observa que todos los factores del numerador son del orden de $2m$, por lo que:

$$2m(2m-1)(2m-2) \cdots (2m-2j+1) = (2m)^{2j} + O(m^{2j-1}).$$

Finalmente, obtenemos la expansión asintótica:

$$\sigma_j = \frac{2^{2j}}{(2j+1)!} m^{2j} + O(m^{2j-1}) \quad (3.9)$$

Las fórmulas de Newton permiten expresar las sumas de potencias de las raíces de un polinomio, es decir,

$$s_r = x_1^r + x_2^r + \cdots + x_m^r, \quad (3.10)$$

en función de sus funciones simétricas elementales σ_j .

Para simplificar la notación en el siguiente párrafo, denotaremos $P(x) := P_m(x)/A$, de modo que

$$P(x) = x^m - \sigma_1 x^{m-1} + \sigma_2 x^{m-2} - \cdots + (-1)^m \sigma_m,$$

y su derivada es:

$$P'(x) = mx^{m-1} - (m-1)\sigma_1 x^{m-2} + (m-2)\sigma_2 x^{m-3} - \cdots + (-1)^{m-1} \sigma_{m-1}. \quad (3.11)$$

Por otro lado, si escribimos $P(x)$ como producto de factores lineales:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

podemos aplicar la propiedad del logaritmo al producto y obtener

$$\ln P(x) = \ln(x - x_1) + \ln(x - x_2) + \cdots + \ln(x - x_m).$$

Derivando ambos lados respecto de x , usamos la regla de la derivada de un logaritmo:

$$\frac{d}{dx} \ln P(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_m}.$$

Esto demuestra que

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{x - x_i},$$

de modo que

$$P'(x) = \sum_{i=1}^m \frac{P(x)}{x - x_i} = \frac{P(x)}{x - x_1} + \frac{P(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{P(x)}{x - x_m}.$$

Para calcular explícitamente cada uno de estos cocientes $\frac{P(x)}{x - x_i}$, podemos aplicar la división del polinomio $P(x)$ por $x - x_i$.

Veamos antes cómo se aplica este método en un caso particular, por ejemplo con $m = 3$. Si consideramos $P_3(x) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$, se tiene que

$$\frac{P_3(x)}{x - x_1} = x^2 + (-\sigma_1 + x_1)x + (\sigma_2 - \sigma_1 x_1 + x_1^2). \quad (3.12)$$

Demostración de (3.12). Para comprobarlo, multiplicaremos el término de la derecha por el divisor $x - x_1$ y veremos que volvemos a obtener el polinomio P_3 .

Distribuyendo término a término y agrupando:

$$\begin{aligned}
& (x - x_1) \cdot [x^2 + (-\sigma_1 + x_1)x + (\sigma_2 - \sigma_1 x_1 + x_1^2)] \\
&= x^3 + (x_1 - \sigma_1)x^2 + (\sigma_2 + x_1^2 - x_1\sigma_1)x - x_1x^2 - x_1(x_1 - \sigma_1)x - x_1(\sigma_2 + x_1^2 - x_1\sigma_1) \\
&= x^3 + [(x_1 - \sigma_1) - x_1]x^2 + [\sigma_2 + x_1^2 - x_1\sigma_1 - x_1(x_1 - \sigma_1)]x - x_1(\sigma_2 + x_1^2 - x_1\sigma_1).
\end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
&= x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - (x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1) \\
&= x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 \\
&= P_3(x).
\end{aligned}$$

Esto se debe a que si x_1 es raíz del polinomio $P_3(x) = x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$, entonces por definición:

$$P_3(x_1) = x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1 - \sigma_3 = 0 \implies \sigma_3 = x_1^3 - \sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_1.$$

Por tanto, al multiplicar el cociente por el divisor $x - x_1$, se recupera el polinomio original $P_3(x)$, verificando que la división es correcta. $\square$

Generalizando esto al polinomio $P(x)$ y las m raíces, este proceso da lugar a las siguientes m ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{x - x_1} &= x^{m-1} + (-\sigma_1 + x_1)x^{m-2} + (\sigma_2 - \sigma_1 x_1 + x_1^2)x^{m-3} + \cdots + \\
&\quad + ((-1)^{m-1}\sigma_{m-1} + (-1)^{m-2}\sigma_{m-2}x_1 + (-1)^{m-3}\sigma_{m-3}x_1^2 + \cdots + x_1^{m-1}), \\
&\vdots \\
\frac{P(x)}{x - x_m} &= x^{m-1} + (-\sigma_1 + x_m)x^{m-2} + (\sigma_2 - \sigma_1 x_m + x_m^2)x^{m-3} + \cdots + \\
&\quad + ((-1)^{m-1}\sigma_{m-1} + (-1)^{m-2}\sigma_{m-2}x_m + (-1)^{m-3}\sigma_{m-3}x_m^2 + \cdots + x_m^{m-1}).
\end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y recordando (3.10) llegamos a:

$$\begin{aligned}
P'(x) &= m \cdot x^{m-1} + (-m\sigma_1 + s_1) \cdot x^{m-2} + (m\sigma_2 - \sigma_1 s_1 + s_2) \cdot x^{m-3} + \cdots + \\
&\quad + ((-1)^{m-1}m\sigma_{m-1} + (-1)^{m-2}\sigma_{m-2}s_1 + (-1)^{m-3}\sigma_{m-3}s_2 + \cdots + s_{m-1}) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Ahora bien, de las ecuaciones (3.11) y (3.13) tenemos dos expresiones diferentes para la

misma función $P'(x)$. Igualando los coeficientes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} s_1 - m\sigma_1 &= -(m-1)\sigma_1, \\ s_2 - \sigma_1 s_1 + m\sigma_2 &= (m-2)\sigma_2, \\ &\vdots \\ s_{m-2} - \sigma_1 s_{m-3} + \sigma_2 s_{m-4} + \cdots + (-1)^{m-3} \sigma_{m-3} s_1 + (-1)^{m-2} m\sigma_{m-2} &= (-1)^{m-2} 2\sigma_{m-2}, \\ s_{m-1} - \sigma_1 s_{m-2} + \sigma_2 s_{m-3} + \cdots + (-1)^{m-2} \sigma_{m-2} s_1 + (-1)^{m-1} m\sigma_{m-1} &= (-1)^{m-1} \sigma_{m-1}. \end{aligned}$$

A partir de la última ecuación, despejamos s_{m-1} para obtener

$$s_{m-1} = (-1)^{m-1} \sigma_{m-1} + \sigma_1 s_{m-2} - \sigma_2 s_{m-3} - \cdots - (-1)^{m-2} \sigma_{m-2} s_1 - (-1)^{m-1} m\sigma_{m-1},$$

y agrupando términos, obtenemos

$$s_{m-1} = (1-m)(-1)^{m-1} \sigma_{m-1} - \sum_{k=1}^{m-2} (-1)^{m-1-k} \sigma_k s_{m-1-k}.$$

Tomando $r = m-1$ se tiene que

$$s_r = (-r)(-1)^r \sigma_r - \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k} \sigma_k s_{r-k},$$

y multiplicando a ambos lados por -1 llegamos finalmente a la expresión deseada:

$$-s_r = (-1)^r r \sigma_r + \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k} \sigma_k s_{r-k}. \quad (3.14)$$

Con la expresión recursiva obtenida en (3.14), ya disponemos de todos los ingredientes necesarios para calcular las sumas de potencias $s_r = \sum_{j=1}^m x_j^r$ a partir de las funciones simétricas elementales σ_k . A continuación, aplicamos esta fórmula para obtener s_r en los casos que nos interesan.

Como asumimos que la hipótesis es cierta para $n = 1, 2, \dots, r-1$ y $k \leq r-1 < r$, podemos utilizar las expresiones de s_k dadas por (3.6). Con esto y sabiendo la expresión asintótica de σ_j , dada por (3.9), se obtiene:

$$\begin{aligned} &(-1)^{r-k} \cdot s_k \sigma_{r-k} \\ &= (-1)^{r-k} \left((-1)^{k-1} \frac{2^{4k-1} B_{2k}}{(2k)!} m^{2k} + O(m^{2k-1}) \right) \left(\frac{2^{2r-2k}}{(2(r-k)+1)!} m^{2r-2k} + O(m^{2r-2k-1}) \right) \\ &= (-1)^{r-1} \cdot \frac{2^{2k+2r-1} B_{2k}}{(2k)!(2(r-k)+1)!} m^{2r} + O(m^{2r-1}). \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en (3.14):

$$\begin{aligned} -s_r &= (-1)^r r \cdot \frac{2^{2r}}{(2r+1)!} m^{2r} + \sum_{k=1}^{r-1} \left[(-1)^{r-1} \cdot \frac{2^{2k+2r-1} B_{2k}}{(2k)!(2(r-k)+1)!} m^{2r} \right] + O(m^{2r-1}) = \\ &= (-1)^r \cdot 2^{2r-1} \left[\frac{2r}{(2r+1)!} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} \right] m^{2r} + O(m^{2r-1}). \end{aligned}$$

Ahora queremos evaluar la expresión entre corchetes. Notamos que

$$\begin{aligned} \frac{2r}{(2r+1)!} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} &= \frac{1}{(2r)!} + \left(\frac{2r}{(2r+1)!} - \frac{1}{(2r)!} \right) - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} \\ &= \frac{1}{(2r)!} - \frac{1}{(2r+1)!} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} \\ &= \frac{1}{(2r)!} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que, si $k = 0$, tenemos

$$\frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{B_0}{(2r+1)!} = \frac{1}{(2r+1)!}.$$

Por el Lema 3.2 descrito al final del capítulo, conocemos que:

$$\sum_{k=0}^r \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{1}{(2r)!}.$$

Como en nuestra expresión el sumatorio llega solo hasta $k = r - 1$, necesitamos adaptar la identidad restando el término correspondiente a $k = r$. De esta manera obtenemos:

$$\frac{1}{(2r)!} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{1}{(2r)!} - \frac{1}{(2r)!} + \frac{2^{2r} B_{2r}}{(2r)!(2r-2r+1)!} = \frac{2^{2r} B_{2r}}{(2r)!}.$$

Volvemos de nuevo a la expresión de $-s_r$, tenemos que

$$\begin{aligned} -s_r &= (-1)^r 2^{2r-1} \left[\frac{1}{(2r)!} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} \right] m^{2r} + O(m^{2r-1}) \\ &= (-1)^r 2^{2r-1} \frac{2^{2r} B_{2r}}{(2r)!} m^{2r} + O(m^{2r-1}) \\ &= (-1)^r \frac{2^{4r-1} B_{2r}}{(2r)!} m^{2r} + O(m^{2r-1}). \end{aligned}$$

Y multiplicando por -1 a ambos lados de la igualdad tenemos que

$$s_r = (-1)^{r-1} \frac{2^{4r-1} B_{2r}}{(2r)!} m^{2r} + O(m^{2r-1}),$$

lo que completa el paso inductivo y nos da (3.5). Por tanto, el lema queda demostrado. $\square$

Lema 3.2. Sea $r \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{k=0}^r \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{1}{(2r)!}. \quad (3.15)$$

Demostración. Dividiremos la prueba en varias partes. Comenzamos con el polinomio de Bernoulli definido como

$$B_n(x) := \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} B_s x^{n-s}. \quad (3.16)$$

O de manera equivalente, mediante la expansión en serie de potencias:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi \quad (3.17)$$

Demostración de (3.17). Esta igualdad se obtiene multiplicando la función generadora de los números de Bernoulli (3.2) con la serie de la exponencial. Sabemos que la serie de Taylor de e^{xz} es:

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xz)^n}{n!}.$$

Multiplicando ambas series, usando el producto de Cauchy también conocido como convolución discreta, ver [5], tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^{xz} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(xz)^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que (3.17) se cumple. $\square$

Vamos a demostrar la siguiente identidad fundamental

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x). \quad (3.18)$$

Demostración de (3.18). Para ello, partimos de la función generatriz (3.17), evaluada en $1-x$.

Manipulamos el lado izquierdo de esta expresión algebraicamente:

$$\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z - 1} = \frac{ze^{z-xz}}{e^z - 1} = \frac{ze^ze^{-xz}}{e^z - 1} = \frac{1}{e^{-z}} \cdot \frac{ze^{-xz}}{e^z - 1}.$$

Además, multiplicando numerador y denominador por e^{-z} , obtenemos:

$$\frac{ze^{-xz}}{e^{-z}(e^z - 1)} = \frac{ze^{-xz}}{1 - e^{-z}} = \frac{-ze^{-xz}}{e^{-z} - 1}.$$

Por tanto, el lado izquierdo puede escribirse como

$$\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z - 1} = \frac{-ze^{-xz}}{e^{-z} - 1}. \quad (3.19)$$

Ahora usamos de nuevo (3.17). Se tiene que

$$\frac{-ze^{-xz}}{e^{-z} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_n(x)}{n!} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{B}_n(x)}{n!} z^n,$$

y

$$\frac{ze^{(1-x)z}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_n(1-x)}{n!} z^n.$$

Como se cumple (3.19), comparando ambas expresiones, se deduce que:

$$\frac{\mathbf{B}_n(1-x)}{n!} = \frac{(-1)^n \mathbf{B}_n(x)}{n!},$$

y por tanto se prueba la expresión (3.18). □

Utilizando la ecuación (3.18) vemos que

$$\mathbf{B}_{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{B}_{2r+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = (-1)^{2r+1} \mathbf{B}_{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Lo que es posible solamente si

$$\mathbf{B}_{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.20)$$

Utilizando la definición explícita de $\mathbf{B}_{2r+1}(x)$ como polinomio (3.16) y evaluando en $x = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\mathbf{B}_{2r+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{s} B_s \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1-s},$$

y usando (3.20) obtenemos que:

$$\sum_{s=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{s} B_s \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1-s} = 0.$$

Ahora multiplicamos la expresión por 2^{2r+1}

$$\sum_{s=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{s} B_s \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1-s} 2^{2r+1} = 0,$$

que nos da

$$\sum_{s=0}^{2r+1} \binom{2r+1}{s} B_s 2^s = 0.$$

Teniendo en cuenta (3.3) vemos que $B_s = 0$ para todo s impar con $s > 1$, por lo que esta suma se reduce a $s = 1$ y los índices pares:

$$\binom{2r+1}{1} 2B_1 + \sum_{k=0}^r \binom{2r+1}{2k} 2^{2k} B_{2k} = 0,$$

que usando la definición del coeficiente binomial y el valor de B_1 , se reescribe como:

$$\frac{(2r+1)!}{(2r)!} 2 \left(\frac{-1}{2}\right) + \sum_{k=0}^r \frac{(2r+1)!}{(2k)!(2r-2k+1)!} B_{2k} 2^{2k} = 0.$$

Simplificando y reordenando los términos queda:

$$\sum_{k=0}^r \frac{(2r+1)!}{(2k)!(2r-2k+1)!} B_{2k} 2^{2k} = 2r+1.$$

Ahora, dividiendo ambos lados por $(2r+1)!$, se obtiene

$$\sum_{k=0}^r \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{2r+1}{(2r+1)!},$$

de donde concluimos que

$$\sum_{k=0}^r \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!(2r-2k+1)!} = \frac{1}{(2r)!}, \quad (3.21)$$

lo cual completa la demostración del lema. $\square$

Capítulo 4

Generalización del Teorema de Euler

En este capítulo, ampliamos el famoso teorema de Euler que calcula $\zeta(2k)$. En lugar de los términos n^{-2k} en la suma infinita para $\zeta(2k)$, utilizamos $(n^2 + Bn + C)^{-k}$, donde B y C son números reales y k es un entero positivo. Calculamos estas sumas de manera explícita y analizamos brevemente su importancia. El enfoque adoptado está inspirado en [4], que ofrece una generalización clara del teorema de Euler.

La historia de cómo Euler probó que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

y de manera más general, que

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

donde B_k denota el k -ésimo número de Bernoulli, es fascinante y ha sido recordada y estudiada anteriormente en esta memoria. Nuestro objetivo en este último capítulo es estudiar la suma

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C}. \quad (4.1)$$

y más en general, las series convergentes

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^k} \quad (4.2)$$

para $B, C \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

El análisis de Fourier será una herramienta fundamental en la prueba. Más concretamente, usaremos la transformada y las series de Fourier para evaluar sumas infinitas complejas de la

forma (4.2).

El siguiente teorema conecta la suma de una función evaluada en enteros con la suma de su transformada de Fourier.

Teorema 4.1 (Teorema de la sumación de Poisson). *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ es una función continua y suavemente por partes, cumpliendo:*

- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + v)$ converge absolutamente y uniformemente en v ,
- $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

Entonces se cumple la igualdad:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n v}.$$

Demostración. Fijado $v \in \mathbb{R}$, comenzamos definiendo la función

$$F(v) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + v).$$

La función $F(v)$ es continua en $\mathbb{R}$, ya que se define como una suma infinita de funciones continuas que converge uniformemente en v . Este hecho se justifica mediante un teorema clásico del análisis real, véase, por ejemplo [5, 2].

Además, sabemos que F es periódica de periodo 1, ya que:

$$F(v + 1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m + (v + 1)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f((m + 1) + v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + v) = F(v).$$

Según la hipótesis del teorema, esta suma converge absoluta y uniformemente en v . Esto nos permite calcular sus coeficientes de Fourier. Calculamos el n -ésimo coeficiente de Fourier de $F(v)$, que denotaremos por F_n :

$$F_n = \int_0^1 F(v) e^{-2\pi i n v} dv = \int_0^1 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m + v) \right) e^{-2\pi i n v} dv.$$

Usando la convergencia absoluta y uniforme de la suma, podemos intercambiar la suma y la integral:

$$F_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(m + v) e^{-2\pi i n v} dv = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi i n (x-m)} dx,$$

donde hemos usado el cambio de variable $x = m + v$, lo que implica que $dx = dv$.

Nótese que la integral en cada subintervalo $[m, m + 1]$ es idéntica debido a que f es periódica de período 1. Por esto, podemos reescribir la suma como una única integral en la recta real.

Por lo tanto, usando que $e^{-2\pi in(x-m)} = e^{-2\pi inx} e^{2\pi inm}$, teniendo en cuenta que $e^{2\pi inm}$ es una constante en función de x y simplificando:

$$F_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi inx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi inx} dx = \hat{f}(n).$$

Hemos demostrado que $F_n = \hat{f}(n)$. Por lo tanto, la serie de Fourier de $F(v)$ está dada por

$$F(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n e^{2\pi inv} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi inv},$$

que es la fórmula de sumación de Poisson.

□

Como se ha mencionado, queremos estudiar la suma (4.1). Veremos ahora cómo podemos relacionar esta expresión con la función zeta de Riemann

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Aquí se quiere generalizar este resultado cambiando el denominador por $n^2 + Bn + C$, donde $B, C \in \mathbb{R}$. A continuación, se explicará cómo abordar esta suma utilizando transformadas de Fourier y el teorema de la sumación de Poisson.

Lema 4.1. *Consideramos la función $g(x) = e^{-c|x|}$, donde c es un número real positivo. Entonces, se tiene que:*

$$\hat{g}(u) = \frac{2c}{c^2 + 4\pi^2 u^2}.$$

Demostración. Como $g \in L^1(\mathbb{R})$, calculamos su transformada de Fourier. La cual, viene dada por

$$\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi iux} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|} e^{-2\pi iux} dx.$$

Dividiremos la última integral en dos trozos. Para $x \in (-\infty, 0)$ tenemos

$$e^{-c|x|} e^{-2\pi iux} = e^{cx} e^{-2\pi iux} = e^{(c-2\pi iu)x},$$

que nos da

$$\int_{-\infty}^0 e^{(c-2\pi iu)x} dx = \left[\frac{e^{(c-2\pi iu)x}}{c-2\pi iu} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{c-2\pi iu}. \quad (4.3)$$

Por otro lado, para $x \in (0, +\infty)$ tenemos

$$e^{-c|x|} e^{-2\pi iux} = e^{-cx} e^{-2\pi iux} = e^{-(c+2\pi iu)x},$$

que nos da

$$\int_0^{+\infty} e^{-(c+2\pi iu)x} dx = \left[\frac{e^{-(c+2\pi iu)x}}{-c-2\pi iu} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{c+2\pi iu}. \quad (4.4)$$

Por lo tanto, combinando (4.3) y (4.4) tenemos

$$\hat{g}(u) = \frac{1}{c+2\pi iu} + \frac{1}{c-2\pi iu} = \frac{2c}{c^2 + 4\pi^2 u^2}.$$

□

Este resultado es útil porque nos da una forma explícita de la transformada de Fourier de una función exponencial, la cual se explicará más adelante. Recordamos también el enunciado del Criterio M de Weierstrass, el cual será de gran utilidad más adelante.

Teorema 4.2 (Teorema de Weierstrass (M-Test)). *Sea $\{f_n(x)\}_n$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto S . Si existe una sucesión de números positivos M_n tal que:*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in S,$$

y la serie numérica $\sum_n M_n$ converge, entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en S .

El teorema de Weierstrass es un criterio fundamental para garantizar la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Teorema 4.3. *Dados $B, C \in \mathbb{R}$ con $D = 4C - B^2$ tal que $n^2 + Bn + C \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, se cumple que:*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left(\frac{e^{2\pi\sqrt{D}} - 1}{e^{2\pi\sqrt{D}} - 2\cos(B\pi)e^{\pi\sqrt{D}} + 1} \right).$$

Demostración. Reescribimos el denominador para que sea más manejable:

$$\left(n + \frac{B}{2}\right)^2 = n^2 + Bn + \frac{B^2}{4} \quad \Rightarrow \quad n^2 + Bn + C = \left(n + \frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C.$$

Además, usando la notación $D = 4C - B^2$, tenemos que

$$n^2 + Bn + C = \left(n + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{4C - B^2}{4} = \left(n + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{D}{4}.$$

De esta manera, la suma original se reescribe como:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(n + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{D}{4}}.$$

Vamos a empezar demostrando que $D > 0$.

Sabemos que $n^2 + Bn + C \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si lo escribimos como

$$n^2 + Bn + C = \left(n + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{D}{4},$$

vemos que el cuadrado es siempre no negativo, y si $D \leq 0$, el término

$$\left(n + \frac{B}{2}\right)^2 + \frac{D}{4}$$

podría anularse para algún valor de n . Por tanto, la condición $D > 0$ es necesaria y equivalente a que el denominador nunca se anule en $\mathbb{Z}$.

Recordamos ahora el Lema (4.1), el cual nos dice que para $c > 0$ tenemos que

$$g(x) = e^{-c|x|}$$

implica

$$\hat{g}(u) = \frac{2c}{c^2 + 4\pi^2 u^2}.$$

Tomando $g(x) = e^{-\pi\sqrt{D}|x|}$ con $c = \pi\sqrt{D} > 0$ tenemos aplicando el resultado del lema que

$$\hat{g}(u) = \frac{\sqrt{D}}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{u^2 + D/4} \right).$$

Por lo que, si $u = n + B/2$, entonces

$$\hat{g}(n + B/2) = \frac{\sqrt{D}}{2\pi} \left(\frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} \right),$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{n^2 + Bn + C} = \frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \hat{g}(n + B/2).$$

Por lo tanto, podemos reescribir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n + B/2).$$

Para poder aplicar la sumación de Poisson hay que asegurar que esta suma converge absoluta y uniformemente. Para esto, usamos el Criterio M de Weierstrass, ver Teorema (4.2). La constante $\frac{\sqrt{D}}{2\pi}$ no afecta a la convergencia, por lo que basta analizar la serie con término general

$$\hat{g}(n + B/2).$$

Para poder aplicar el teorema de Weierstrass necesitamos encontrar una sucesión M_n tal que

$$|\hat{g}(n + B/2)| \leq M_n \quad \text{y} \quad \sum_n M_n < \infty.$$

Definimos la función

$$f(n) := \frac{1 + n^2}{(n + B/2)^2 + D/4}.$$

Cuando $|n| \rightarrow \infty$, tanto el numerador como el denominador crecen como n^2 , por lo que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} f(n) = 1.$$

Esto implica que, para valores grandes de $|n|$, $f(n)$ se mantiene acotada. Por otro lado, como la función está definida solamente sobre $\mathbb{Z}$, un conjunto discreto, basta observar que existen únicamente un número finito de enteros n para los cuales $f(n)$ puede superar el valor 1, en concreto aquellos cercanos a $-B/2$, donde el denominador es más pequeño.

Entonces, como se tiene que:

- $f(n) \rightarrow 1$ cuando $|n| \rightarrow \infty$,
- sólo hay un número finito de valores enteros donde $f(n)$ podría ser mayor que 1,

se concluye que $f(n)$ alcanza un máximo en $\mathbb{Z}$. Definimos por tanto

$$C := \max_{n \in \mathbb{Z}} f(n),$$

el cual existe y es finito. Con esto, se tiene:

$$\frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} \leq \frac{C}{1 + n^2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Notamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$$

converge, ya que

$$\frac{1}{1 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{para } n \geq 1,$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por el criterio de comparación, esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ también converge. Como los términos para $n < 0$ son iguales por simetría, es decir, $\frac{1}{1+(-n)^2} = \frac{1}{1+n^2}$, y el término $n = 0$ también es finito, la serie total

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + n^2},$$

es absolutamente convergente.

Finalmente, como

$$|\hat{g}(n + B/2)| \leq \frac{C}{1 + n^2},$$

se deduce que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n + B/2)$ converge absolutamente. Por el criterio M de Weierstrass, concluimos que la suma de Poisson converge absoluta y uniformemente.

Ahora utilizamos la sumación de Poisson que vimos en el Teorema (4.1). Tomando $v = B/2$, tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n + B/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{2\pi i n \frac{B}{2}},$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} &= \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{2\pi i n \frac{B}{2}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{\pi i n B}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando la definición de la transformada de Fourier y la fórmula de inversión de Fourier, vemos que

$$\hat{g}(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i u x} dx,$$

y por lo tanto

$$\hat{g}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(u) e^{-2\pi i n u} du,$$

y también que

$$g(-n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(u) e^{-2\pi i n u} du,$$

por lo que $\hat{g}(n) = g(-n)$. Además recordamos que $g(x) = e^{-\pi\sqrt{D}|x|}$, lo que implica que $g(x) = g(-x)$. Volviendo a (4.5), se tiene

$$\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{\pi i n B} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(-n) e^{\pi i n B} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi|n|\sqrt{D}} e^{\pi i n B}.$$

Teniendo en cuenta el valor absoluto, reescribimos ambos términos como series geométricas:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi|n|\sqrt{D}} e^{\pi i n B} &= \left[\sum_{n \geq 0} e^{-n\pi\sqrt{D}} e^{\pi i n B} + \sum_{n < 0} e^{n\pi\sqrt{D}} e^{\pi i n B} \right] \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(e^{\pi i B - \pi\sqrt{D}} \right)^n + \sum_{n < 0} \left(e^{\pi i B + \pi\sqrt{D}} \right)^n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Además, haciendo el cambio $n = -k$, podemos escribir la última serie como

$$\sum_{n < 0} \left(e^{\pi i B + \pi \sqrt{D}} \right)^n = \sum_{k > 0} \left(e^{\pi i B + \pi \sqrt{D}} \right)^{-k} = \sum_{n \geq 0} \left(e^{-\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right)^n - 1. \quad (4.7)$$

De este modo, combinando (4.6) y (4.7), tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi |n| \sqrt{D}} e^{\pi i n B} = \sum_{n \geq 0} \left(e^{\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right)^n + \sum_{n \geq 0} \left(e^{-\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right)^n - 1.$$

Recordamos que la fórmula para una serie geométrica es:

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1 - r}, \quad \text{para } |r| < 1.$$

Aplicando la expresión anterior con $r = e^{\pi i B - \pi \sqrt{D}}$ y $r = e^{-\pi i B - \pi \sqrt{D}}$, tenemos que

$$\sum_{n \geq 0} \left(e^{\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{\pi i B - \pi \sqrt{D}}}, \quad \sum_{n \geq 0} \left(e^{-\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right)^n - 1 = \frac{1}{1 - e^{-\pi i B - \pi \sqrt{D}}} - 1.$$

Tenemos que comprobar que en ambos casos $|r| < 1$. Para ello, usamos que el módulo de un número complejo se obtiene como $|e^{A+iB}| = e^A$. Por ejemplo, aplicando esto al primer caso:

$$|r| = \left| e^{\pi i B - \pi \sqrt{D}} \right| = e^{-\pi \sqrt{D}} < 1,$$

ya que $\pi \sqrt{D} > 0$, luego $-\pi \sqrt{D} < 0$, y la exponencial de un número negativo es menor que 1.

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C} &= \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left[\frac{1}{1 - e^{B\pi i - \pi \sqrt{D}}} + \frac{1}{1 - e^{-B\pi i - \pi \sqrt{D}}} - 1 \right] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left[\frac{1}{e^{B\pi i + \pi \sqrt{D}} - 1} - \frac{1}{e^{B\pi i - \pi \sqrt{D}} - 1} \right]. \end{aligned}$$

El objetivo ahora es expresar esta suma en términos de $e^{\pi \sqrt{D}}$ y cosenos. Para ello, utilizamos la identidad

$$e^{i\Theta} + e^{-i\Theta} = 2 \cos(\Theta).$$

Reagrupando, tenemos

$$\frac{1}{e^{B\pi i + n\sqrt{D}} - 1} - \frac{1}{e^{B\pi i - n\sqrt{D}} - 1} = \frac{e^{B\pi i - n\sqrt{D}} - 1 - e^{B\pi i + n\sqrt{D}} + 1}{(e^{B\pi i + n\sqrt{D}} - 1)(e^{B\pi i - n\sqrt{D}} - 1)},$$

y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{e^{B\pi i - n\sqrt{D}} - e^{B\pi i + n\sqrt{D}}}{e^{2B\pi i} - e^{B\pi i + n\sqrt{D}} - e^{B\pi i - n\sqrt{D}} + 1} = \frac{e^{B\pi i - n\sqrt{D}} - e^{B\pi i + n\sqrt{D}}}{e^{B\pi i}(e^{B\pi i} - e^{n\sqrt{D}} - e^{-n\sqrt{D}} + e^{-B\pi i})} \\ &= \frac{e^{B\pi i}(e^{-n\sqrt{D}} - e^{n\sqrt{D}})}{e^{B\pi i}(2\cos(B\pi) - e^{n\sqrt{D}} - e^{-n\sqrt{D}})} = \frac{e^{-n\sqrt{D}} - e^{n\sqrt{D}}}{2\cos(B\pi) - e^{n\sqrt{D}} - e^{-n\sqrt{D}}}. \end{aligned}$$

Recordando la definición de las funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned} \frac{e^{\Theta} - e^{-\Theta}}{2} &= \sinh(\Theta), \\ \frac{e^{\Theta} + e^{-\Theta}}{2} &= \cosh(\Theta), \end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$= \frac{-2\sinh(n\sqrt{D})}{2\cos(B\pi) - 2\cosh(n\sqrt{D})}.$$

Otra forma equivalente de expresar el resultado surge de multiplicar y dividir por $e^{n\pi\sqrt{D}}$, obtenemos finalmente

$$= \frac{1 - e^{2\pi\sqrt{D}}}{2\cos(B\pi)e^{2\pi\sqrt{D}} - e^{2\pi\sqrt{D}} - 1} = \frac{e^{2\pi\sqrt{D}} - 1}{e^{2\pi\sqrt{D}} - 2\cos(B\pi)e^{2\pi\sqrt{D}} + 1}$$

□

Comentario: El método nos da un camino para intentar encontrar formas cerradas de sumas infinitas. La idea clave es que, si podemos reconocer los términos de una serie como la transformada de Fourier de una función particular, entonces podemos aplicar el teorema de la sumación de Poisson para simplificar y evaluar esta serie.

Anteriormente, la fórmula de sumación de Poisson se aplicó a la suma (4.1)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + Bn + C},$$

lo que llevó a una serie geométrica. Podemos extender los resultados del Teorema (4.3) a sumas más generales como (4.2):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En general, el resultado suele ser más complicado. Por ello, comenzamos con $k = 2$.

Reescribimos de nuevo la suma usando $D = B^2 - 4C$. De este modo, tenemos que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^2}.$$

El truco será darse cuenta de que

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} \right) = -\frac{1/4}{((n + B/2)^2 + D/4)^2},$$

de donde deducimos, utilizando el teorema (4.3), que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^2} &= -4 \frac{d}{dD} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n + B/2)^2 + D/4} \right) \\ &= -4 \frac{d}{dD} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \left(\frac{e^{2\pi\sqrt{D}} - 1}{e^{2\pi\sqrt{D}} - 2\cos(B\pi)e^{\pi\sqrt{D}} + 1} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nuestro objetivo ahora es derivar explícitamente la expresión obtenida en la línea anterior con respecto al parámetro D , con el fin de obtener una fórmula cerrada para el caso $k = 2$.

Sea

$$f(D) := \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \cdot \frac{-\sinh(n\sqrt{D})}{\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})}.$$

Queremos calcular la derivada de $f(D)$ con respecto a D . Definimos

$$A(D) := \frac{2\pi}{\sqrt{D}}, \quad N(D) := -\sinh(n\sqrt{D}), \quad H(D) := \cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}).$$

Calculamos sus derivadas:

$$A'(D) = -\frac{\pi}{D^{3/2}}, \quad N'(D) = -\frac{n}{2\sqrt{D}} \cosh(n\sqrt{D}), \quad H'(D) = -\frac{n}{2\sqrt{D}} \sinh(n\sqrt{D}).$$

Entonces, usando la regla del cociente y del producto tenemos que

$$f'(D) = A'(D) \cdot \frac{N(D)}{H(D)} + A(D) \cdot \frac{N'(D)H(D) - N(D)H'(D)}{H(D)^2}.$$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned} f'(D) &= -\frac{\pi}{D^{3/2}} \cdot \frac{-\sinh(n\sqrt{D})}{\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})} \\ &\quad + \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \cdot \frac{-\frac{n}{2\sqrt{D}} \cosh(n\sqrt{D})(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})) - \sinh(n\sqrt{D}) \cdot \left(-\frac{n}{2\sqrt{D}} \sinh(n\sqrt{D})\right)}{(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2}. \end{aligned}$$

Simplificando con identidades hiperbólicas y agrupando términos obtenemos que

$$\begin{aligned}
f'(D) &= \frac{\pi}{D^{3/2}} \cdot \frac{\sinh(n\sqrt{D})}{\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})} \\
&\quad + \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \cdot \frac{\frac{-n}{2\sqrt{D}} \left[\cosh(n\sqrt{D})(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})) + \sinh^2(n\sqrt{D}) \right]}{\left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2} \\
&= \frac{\pi}{D^{3/2}} \cdot \frac{\sinh(n\sqrt{D})}{\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})} \\
&\quad - \frac{n\pi}{D} \cdot \frac{\cosh(n\sqrt{D}) \cos(B\pi) - \cosh^2(n\sqrt{D}) + \sinh^2(n\sqrt{D})}{\left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2}.
\end{aligned}$$

De la identidad $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, usamos que $\sinh^2(x) = \cosh^2(x) - 1$ para simplificar el numerador:

$$\cosh(n\sqrt{D}) \cos(B\pi) - \cosh^2(n\sqrt{D}) + \cosh^2(n\sqrt{D}) - 1 = \cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1.$$

Y de esta manera podemos concluir que

$$f'(D) = \frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))} - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en la expresión (4.8), llegamos a que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^2} \\
&= -4 \left[\frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))} - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2} \right].
\end{aligned}$$

Tras haber deducido la expresión para $k = 2$, analizamos ahora el caso $k = 3$ siguiendo una estrategia similar basada en derivar con respecto a D . Se tiene que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^3} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^3}.$$

Esta vez podemos ver que

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^3}.$$

Por lo que siguiendo el razonamiento del caso $k = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^3} = \\
& = -2 \frac{d}{dD} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{((n + B/2)^2 + D/4)^2} \right) = \\
& = -2 \frac{d}{dD} \left(-4 \left[\frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))} - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2} \right] \right) = \\
& = 8 \frac{d}{dD} \left(\frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))} - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2} \right).
\end{aligned}$$

Definimos

$$g(D) := \frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))} - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2},$$

y estudiamos su derivada respecto a D . Para facilitar los cálculos, llamamos

$$g_1(D) := \frac{\pi \sinh(n\sqrt{D})}{D^{3/2}(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))}, \quad g_2(D) := \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)}{D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2},$$

de manera que $g(D) = g_1(D) - g_2(D)$ y por lo tanto $g'(D) = g'_1(D) - g'_2(D)$.

Empezamos calculando $g'_1(D)$. Usando las reglas de derivación, tenemos que

$$g'_1(D) = \frac{N'_1(D)A_1(D) - N_1(D)A'_1(D)}{(A_1(D))^2},$$

donde

$$\begin{aligned}
N_1(D) &= \pi \sinh(n\sqrt{D}), \\
N'_1(D) &= \frac{1}{2\sqrt{D}} \pi n \cosh(n\sqrt{D}),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_1(D) &= D^{3/2} (\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})), \\
A'_1(D) &= \frac{3}{2} D^{1/2} \cdot (\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})) + D^{3/2} \cdot \left(-\frac{n \sinh(n\sqrt{D})}{2\sqrt{D}} \right) = \\
&= \frac{3}{2} D^{1/2} \cdot (\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})) - \frac{1}{2} n D \sinh(n\sqrt{D}).
\end{aligned}$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned}
N'_1(D)A_1(D) &= \frac{1}{2}\pi n D^{-\frac{1}{2}} \cosh(n\sqrt{D}) \cdot D^{3/2} \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) = \\
&= \frac{1}{2}\pi n D \cosh(n\sqrt{D}) \cdot \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) = \\
&= \frac{1}{2}\pi n D \cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\pi n D \cosh^2(n\sqrt{D}) = \\
&= \frac{1}{2}\pi n D \cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\pi n D - \frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1(D)A'_1(D) &= \pi \sinh(n\sqrt{D}) \cdot \left[\frac{3}{2}D^{1/2} \cdot \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) - \frac{1}{2}nD \sinh(n\sqrt{D}) \right] = \\
&= \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \sinh(n\sqrt{D}) \cdot \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) - \frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D}) = \\
&= \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) - \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cosh(n\sqrt{D}) \sinh(n\sqrt{D}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D}) = \\
&= \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) - \frac{3}{4}\pi D^{1/2} \sinh(2n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
g'_1(D) &= \frac{\frac{1}{2}\pi n D \cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\pi n D - \frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D})}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2} + \\
&\quad + \frac{-\frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) + \frac{3}{4}\pi D^{1/2} \sinh(2n\sqrt{D})}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2} + \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D})}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2},
\end{aligned}$$

que simplificando es:

$$\begin{aligned}
g'_1(D) &= \frac{\frac{1}{2}\pi n D \cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}\pi n D}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2} \\
&\quad + \frac{-\frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) + \frac{3}{4}\pi D^{1/2} \sinh(2n\sqrt{D})}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2} \\
&\quad + \frac{\frac{1}{2}\pi n D \sinh^2(n\sqrt{D})}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2}.
\end{aligned}$$

Vamos ahora a calcular la derivada de $g_2(D)$. Recordamos que

$$g_2(D) = \frac{n\pi \left(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1 \right)}{D \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2}.$$

Aplicamos la regla del cociente:

$$g'_2(D) = \frac{N'_2(D)A_2(D) - N_2(D)A'_2(D)}{(A_2(D))^2},$$

donde:

$$N_2(D) = n\pi \left(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1 \right), \quad N'_2(D) = \frac{1}{2}\pi n^2 D^{-1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}),$$

y

$$\begin{aligned} A_2(D) &= D \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2, \\ A'_2(D) &= \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^2 - nD^{1/2} \sinh(n\sqrt{D}) \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos que

$$\begin{aligned} N'_2(D)A_2(D) &= \frac{1}{2}n^2\pi D^{-1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) \cdot D(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2 \\ &= \frac{1}{2}n^2\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D})(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N_2(D)A'_2(D) &= n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1) \cdot \\ &\quad \left[(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^2 - nD^{1/2} \sinh(n\sqrt{D})(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D})) \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} g'_2(D) &= \frac{\frac{1}{2}n^2\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D})(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3} \\ &\quad - \frac{n\pi(\cos(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - 1)(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) - nD^{1/2} \sinh(n\sqrt{D}))}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3}. \end{aligned}$$

Desarrollando los productos del numerador y usando de nuevo la identidad hiperbólica

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
g'_2(D) = & \frac{\frac{1}{2}n^2\pi D^{1/2} \cos^2(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{4}n^2\pi D^{1/2} \cos^2(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D})}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3} \\
& + \frac{-n\pi \cos^2(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) + n\pi \cos(B\pi) \sinh^2(n\sqrt{D})}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3} + \frac{\frac{1}{2}n^2\pi D^{\frac{1}{2}} \cos(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D})}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3} \\
& + \frac{2n\pi \cos(B\pi) - n\pi \cosh(n\sqrt{D}) - n^2\pi D^{\frac{1}{2}} \sinh(n\sqrt{D})}{D^2(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3}.
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular $g'(D) = g'_1(D) - g'_2(D)$. Para restar $g'_1(D) - g'_2(D)$, usamos como denominador común:

$$D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^3.$$

Entonces:

$$g'(D) = \frac{Num_1(D) \cdot \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) - D \cdot Num_2(D)}{D^3 \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right)^3}. \quad (4.10)$$

donde $Num_1(D)$ y $Num_2(D)$ son los numeradores de las expresiones finales de $g'_1(D)$ y $g'_2(D)$. Se tiene, tras algunas simplificaciones, que

$$\begin{aligned}
Num_1(D) \cdot \left(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}) \right) = & \frac{1}{2}n\pi D \cos^2(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - n\pi D \cos(B\pi) \\
& + \frac{1}{2}n\pi D \cosh(n\sqrt{D}) - \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos^2(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) \\
& + \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D}) - \frac{3}{4}\pi D^{1/2} \cosh(n\sqrt{D}) \sinh(2n\sqrt{D}) \\
& - \frac{1}{2}\pi n D \cosh(n\sqrt{D}) \sinh^2(n\sqrt{D}),
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
-D \cdot Num_2(D) = & -\frac{1}{2}n^2\pi D^{3/2} \cos^2(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) + \frac{1}{4}n^2\pi D^{3/2} \cos^2(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D}) \\
& + n\pi D \cos^2(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) - n\pi D \cos(B\pi) \sinh^2(n\sqrt{D}) \\
& - \frac{1}{2}n^2\pi D^{3/2} \cos(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D}) \\
& - 2n\pi D \cos(B\pi) + n\pi D \cosh(n\sqrt{D}) + n^2\pi D^{3/2} \sinh(n\sqrt{D}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned}
g'(D) = & \frac{1}{D^3(\cos(B\pi) - \cosh(n\sqrt{D}))^3} \\
& \times \left[\frac{3}{2}n\pi D \cos^2(B\pi) \cosh(n\sqrt{D}) + \frac{3}{2}n\pi D \cosh(n\sqrt{D}) \right. \\
& - 2n\pi D \cos(B\pi) \\
& - \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos^2(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) - \frac{1}{2}n^2\pi D^{3/2} \cos(B\pi) \sinh(n\sqrt{D}) \\
& + \frac{3}{2}\pi D^{1/2} \cos(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D}) + \frac{1}{4}n^2\pi D^{3/2} \cos^2(B\pi) \sinh(2n\sqrt{D}) \\
& - \frac{3}{4}\pi D^{1/2} \cosh(n\sqrt{D}) \sinh(2n\sqrt{D}) \\
& - \frac{1}{2}n\pi D \cosh(n\sqrt{D}) \sinh^2(n\sqrt{D}) - n\pi D \cos(B\pi) \sinh^2(n\sqrt{D}) \\
& \left. + n^2\pi D^{3/2} \sinh(n\sqrt{D}) \right].
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión simplificada para $g'(D)$, resultado de restar g'_1 y g'_2 .

Con esto concluimos el análisis del caso $k = 3$, en el que hemos obtenido una expresión explícita para $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^3}$ mediante derivadas sucesivas con respecto al parámetro D .

Aunque no desarrollamos aquí el caso general, cabe señalar que el método utilizado es completamente extensible a cualquier valor natural de k . La clave consiste en aplicar derivadas sucesivas, lo que permite obtener expresiones cerradas para (4.2). Este proceso requiere el uso de reglas generales de derivación, como la fórmula de Faà di Bruno, pero excede el objetivo del presente TFG. La siguiente fórmula resume esta generalización:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n^2 + Bn + C)^k} = \frac{2\pi(-4)^{k-1}}{(k-1)!} \left[\frac{1}{\sqrt{D}} \left(\frac{1}{e^{B\pi i + \pi\sqrt{D}} - 1} - \frac{1}{e^{B\pi i - \pi\sqrt{D}} - 1} \right) \right]^{(k-1)}.$$

Bibliografía

- [1] Tom M. Apostol, *Another Elementary Proof of Euler's Formula for $\zeta(2n)$* , *The American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 4 (1973), pp. 425–431.
- [2] Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.
- [3] Ioannis Papadimitriou, *A Simple Proof of the Formula $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$* , *The American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 4 (1973), pp. 424–425.
- [4] M. Ram Murty y Chester Weatherby, *A Generalization of Euler's Theorem for $\zeta(2k)$* , *The American Mathematical Monthly*, Vol. 123, No. 1 (2016), pp. 53–65.
- [5] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.