

Facultad
De
Ciencias

Cota inferior para la energía logarítmica en la esfera

Lower bound for the logarithmic energy on the sphere

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: David Quinzanos Saiz

Director: Carlos Beltrán Álvarez

Junio - 2025

Agradecimientos

Quiero aprovechar esta primera hoja de la memoria para agradecer a todas las personas que, en mayor o menor medida, me han ayudado a lo largo de estos años y sin las que estoy seguro de que este camino no habría sido lo mismo.

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia todo su apoyo y sus esfuerzos, en especial a mis padres, mi abuela y mi primo. Sin ellos, nada de esto habría sido posible.

En segundo lugar, quiero agradecer a todos mis amigos por hacer que estos años hayan sido mucho más llevaderos y entretenidos, sintiéndome acompañado en todo momento por ellos. Además, quiero hacer una mención especial al grupo "Poker" y a mi amiga Lucía, por haber sido los principales culpables de todos los buenos momentos y experiencias vividas en estos años. También a María por haberme acompañado en los momentos más difíciles, motivándome para seguir siempre, y a Sonia por darme el empujón final que tanta falta me hacía.

Por último, quiero terminar agradeciendo a todo el personal docente que me ha ayudado con los estudios. En especial a mi tutor Carlos Beltrán, por todo su esfuerzo y paciencia guiándome en la realización de esta memoria.

Resumen

En esta memoria he trabajado sobre el séptimo problema propuesto por el matemático Steve Smale, centrándome en el cálculo de la cota inferior para la energía logarítmica de puntos esféricos. Para explicar detalladamente como se ha llegado a la mejor cota inferior conocida hasta el momento ampliando las ideas de [9] y escribiendo de forma que un lector promedio pueda entender el artículo sin problemas, he estudiado y presentado diversos conceptos (algunos ya vistos en el grado y otros muchos que no) que han sido útiles y necesarios a lo largo del trabajo. Finalmente, he introducido la función de Green en $\mathbb{S}^n$, la cual es de suma importancia si se quiere extender dicha cota a $\mathbb{S}^n$.

Palabras clave: Cota inferior, Energía logarítmica mínima, Esfera, Séptimo problema Smale.

Abstract

In this thesis, I have worked on the seventh problem proposed by mathematician Steve Smale, focusing on the calculation of the lower bound for the logarithmic energy of points on the sphere. In order to explain in detail how the best known lower bound has been obtained—by expanding on the ideas in [9] and writing in a way that an average reader can follow without difficulty—I have studied and presented various concepts (some already encountered during the degree, and many others new) that have been useful or necessary throughout the project. Finally, I have introduced the Green's function on $\mathbb{S}^n$, which is of great importance for extending this bound to the sphere $\mathbb{S}^n$.

Key Words: Lower bound, Minimal logarithmic energy, 2-Sphere, Smale's 7th problem.

Índice general

1. Introducción	4
2. Conocimientos previos requeridos	6
2.1. Medidas	6
2.2. Algunos teoremas de integración	9
2.3. Algunas funciones especiales	9
2.3.1. Función Gamma	10
2.3.2. Símbolos de Pochhammer	10
2.3.3. La serie hipergeométrica gaussiana	10
2.3.4. La función beta	10
2.3.5. La función beta incompleta	11
2.4. La función de Green en una Variedad Riemanniana Compacta	12
2.5. Cálculo de la función de Green en Variedades Armónicas Compactas	13
3. Enunciado del séptimo problema de Smale	15
4. Cota inferior para la energía logarítmica	16
4.1. Valores medios de la energía logarítmica en la 2-Esfera	17
4.2. Demostración de la cota inferior de C_{log}	24
5. Función de Green en $\mathbb{S}^n$	36
6. Conclusiones	40
7. Referencias	41

Capítulo 1

Introducción

En 1998, el matemático estadounidense y ganador de una medalla Fields Steve Smale propuso una lista de 18 importantes problemas sin resolver para el siglo 21 [26] a petición del vicepresidente de la Unión Matemática Internacional (I.M.U.) Vladimir Arnold, el cual se inspiró en los problemas de Hilbert publicados a principios del siglo 20. De hecho, algunos de los problemas de Smale son análogos a los de Hilbert.

En la actualidad solo 3 problemas han sido resueltos por completo (el 2º, el 14º y el 17º), mientras que en otros como el 1º se han logrado importantes avances sin llegar a estar completamente resueltos.

En este trabajo concretamente nos vamos a centrar en el séptimo problema de Smale, que fue propuesto por Michael Shub y Stephen Smale en su búsqueda de un algoritmo que genere secuencias explícitas de polinomios bien condicionados (véase [7], [8], [25]), y que trata de la distribución de N puntos en una 2-esfera.

El problema nº7 de Smale consiste en describir una serie de puntos en la esfera que cumplan buenas propiedades de distribución. Es de hecho una versión computacional de un problema cuyo enunciado en tiempos modernos se atribuye a J. J. Thomson, científico británico descubridor del electrón.

Thomson, conocido por proponer uno de los primeros modelos atómicos antes de que existiera la mecánica cuántica, imaginaba el átomo como una especie de esfera con carga positiva, dentro de la cual se encontraban incrustados pequeños “corpúsculos” con carga negativa, es decir, los electrones. Este modelo, a veces llamado “modelo del pudín de pasas”, todavía se menciona en los cursos de bachillerato. Intrigado por cómo se acomodarían estos electrones dentro del átomo, Thomson planteó una pregunta que más tarde se convertiría en un famoso problema en física y matemáticas, conocido como el problema de Thomson:

¿Cómo se distribuirían varias partículas cargadas negativamente (como los electrones), que se repelen entre sí mediante la ley de Coulomb, si estuvieran confinadas dentro de una esfera con carga positiva?

Este problema también se puede plantear de la siguiente manera más técnica:

Dado un número N de partículas que se repelen según la ley electrostática (fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas), ¿cuál es la configuración que minimiza la energía total del sistema si estas partículas están confinadas dentro (o sobre la superficie) de una esfera?

A día de hoy, se ha descubierto una cota inferior para la energía logarítmica de estos electrones, la cual vamos a estudiar en esta memoria. Ampliaremos algunos resultados y lo reescribiremos para que pueda ser entendido por un lector promedio, dado que el artículo original [9] está realizado de manera sofisticada para expertos en la materia.

Por último, estudiaremos también las funciones de Green en $\mathbb{S}^n$ y resultados relacionados con ellas, ya que estos serán de gran utilidad en determinadas partes del trabajo.



Figura 1.1: Steve Smale

Capítulo 2

Conocimientos previos requeridos

A lo largo del trabajo trabajaremos con conceptos y resultados que nos será necesario haber definido y presentado anteriormente, como lo son algunos teoremas de integración, las medidas, la función de Green y algunas funciones especiales, series y cotas relacionadas con estas.

2.1. Medidas

El contenido de esta sección procederá principalmente de [17] y [14]. Sea X un conjunto no vacío, sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X y sean A y B subconjuntos de X , definimos:

Definición 2.1. (*σ -álgebra*) Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, decimos que $\mathcal{M}$ es una σ -álgebra de conjuntos en X si:

1. $X \in \mathcal{M}$, $X \in \emptyset$.
2. $A \in \mathcal{M}$ implica $X \setminus A \in \mathcal{M}$.
3. Cualquiera que sea la sucesión $(A_k) \subset \mathcal{M}$ se tiene que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}.$$

Al par $(X, \mathcal{M})$ lo llamaremos espacio medible, y a los elementos de $\mathcal{M}$, conjuntos medibles.

Definición 2.2. (*Medida en un espacio medible*) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, diremos que una aplicación $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida positiva si cumple las dos propiedades siguientes:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, cualquiera que sea la sucesión $(A_k) \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, es decir, $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$.

Diremos que $(x, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida.

Definición 2.3. (*Función Medible*) Una función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ se dice medible cuando $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definición 2.4. (Función simple) Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice simple cuando toma un número finito de valores.

Lema 2.5. (Función simple medible) Una función simple es medible cuando el conjunto $\{x \in X : f(x) = a\}$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definición 2.6. (Integral de una función medible no negativa respecto a una medida positiva) Sea f una función medible no negativa y sea μ una medida positiva, se define la integral de f en X con respecto a la medida μ , que denotamos $\int_X f(x) d\mu(x)$, como:

1. Si $f = \chi_A$, con A medible,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \mu(A).$$

2. Si $f = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{A_k}$ (que es una función simple), con A_k medible y $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^N a_k \mu(A_k).$$

3. En otro caso,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu(x) : g \text{ simple medible y } 0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \in X \right\}.$$

Definición 2.7. (Integral de una función medible con signo arbitrario respecto a una medida positiva) Sean $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y μ una medida positiva, definimos $f^+ = \max(f, 0)$ y $f^- = \max(-f, 0)$ tal que $f = f^+ - f^-$. La integral de f en X con respecto a la medida μ se define como:

1. Si

$$\int_X f^+(x) d\mu(x) < \infty \quad \text{y} \quad \int_X f^-(x) d\mu(x) < \infty,$$

entonces se define

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x).$$

2. En caso contrario, tenemos que f no es integrable y por tanto no se define la integral.

Definición 2.8. (Medida con signo) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, diremos que una aplicación $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una medida con signo si cumple las dos propiedades siguientes:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, cualquiera que sea la sucesión $(A_k) \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, es decir, $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$.

Diremos que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida con signo.

Ayudándonos de [20] para complementar las referencias anteriores, podemos enunciar los siguientes teoremas:

Teorema 2.9. (Teorema de descomposición de Hahn) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con signo, existen dos conjuntos $\mathcal{M}$ -medibles de X , P y N , tales que:

1. $P \cup N = X$ y $P \cap N = \emptyset$.
2. Para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $E \subseteq P$, se tiene que $\mu(E) \geq 0$, es decir, P es un conjunto positivo para μ .
3. Para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $E \subseteq N$, se tiene que $\mu(E) \leq 0$, es decir, N es un conjunto negativo para μ .

Además, esta descomposición es esencialmente única, lo que significa que para cualquier otro par (P', N') de subconjuntos $\mathcal{M}$ -medibles de X que cumplan las tres condiciones anteriores, las diferencias simétricas $P \Delta P'$ y $N \Delta N'$ son conjuntos nulos para μ en el sentido de que todo subconjunto $\mathcal{M}$ -medible de ellos tiene medida cero. El par (P, N) se llama entonces una descomposición de Hahn de la medida con signo μ .

Una consecuencia del teorema de descomposición de Hahn es el Teorema de descomposición de Jordan:

Teorema 2.10. (Teorema de descomposición de Jordan) Toda medida con signo μ definida en $\mathcal{M}$ tiene una descomposición única de la forma

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

siendo μ^+ y μ^- dos medidas positivas, al menos una de las cuales es finita, tal que $\mu^+(E) = 0$ para todo subconjunto $\mathcal{M}$ -medible $E \subseteq N$ y $\mu^-(E) = 0$ para todo subconjunto $\mathcal{M}$ -medible $E \subseteq P$, para cualquier descomposición de Hahn (P, N) de μ . Llamamos a μ^+ y μ^- la parte positiva y la parte negativa de μ , respectivamente. El par (μ^+, μ^-) se denomina una descomposición de Jordan (o a veces descomposición de Hahn-Jordan) de μ . Las dos medidas pueden definirse como

$$\mu^+(E) := \mu(E \cap P) \quad \text{y} \quad \mu^-(E) := -\mu(E \cap N)$$

para todo $E \in \mathcal{M}$ y para cualquier descomposición de Hahn (P, N) de μ .

Nótese que la descomposición de Jordan es única, mientras que la descomposición de Hahn es sólo esencialmente única.

Definición 2.11. (Variación Total) La medida positiva $(\mathcal{M}, |\mu|)$, definida como $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, se denomina la variación total de la medida con signo $(\mathcal{A}, \mu)$.

Definición 2.12. (Integral de una función medible con signo arbitrario respecto a una medida) Sean $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y μ una medida con signo, f es integrable respecto a μ si lo es respecto a $|\mu|$. La integral de f en X con respecto a la medida μ se define como:

1. f es integrable respecto de μ si lo es respecto de $|\mu|$, y se define

$$\begin{aligned} \int_X f(x) d\mu(x) &= \int_X f^+(x) d\mu^+(x) + \int_X f^-(x) d\mu^-(x) \\ &\quad - \int_X f^+(x) d\mu^-(x) - \int_X f^-(x) d\mu^+(x). \end{aligned}$$

2. En caso contrario, tenemos que f no es integrable y por tanto no se define la integral.

2.2. Algunos teoremas de integración

Teorema 2.13. (Teorema de Cambio de Variable entre superficies) Sean M, N dos superficies, sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $\varphi : M \rightarrow N$ una función biyectiva, C^∞ y con inversa C^∞ , tenemos que

$$\int_M \text{Jac } \varphi(x) \cdot f \circ \varphi(x) dx = \int_N f(y) dy$$

Si el espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un producto $(Y \times Y', \mathcal{M} \times \mathcal{M}', \mu \times \mu')$, la integral I de una función integrable en $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ se denota

$$I = \int_{Y \times Y'} f d(\mu \times \mu').$$

Se puede probar entonces el siguiente teorema, importante en muchas aplicaciones.

Teorema 2.14. (Teorema de Fubini en variedades) Una función medible en $Y \times Y'$ es integrable si, y solo si, una de las integrales

$$\int_Y \int_{Y'} |f| d\mu' d\mu \quad \text{y} \quad \int_{Y'} \int_Y |f| d\mu d\mu'$$

existe (es finita).

Si f es integrable, entonces

$$\int_{Y \times Y'} f d(\mu \times \mu') = \int_Y \int_{Y'} f d\mu' d\mu = \int_{Y'} \int_Y f d\mu d\mu'.$$

2.3. Algunas funciones especiales

En esta sección vamos a definir algunas funciones especiales con las que vamos a trabajar en esta memoria, con un contenido que proviene principalmente de [11], [18] y [19].

2.3.1. Función Gamma

Definición 2.15. (*Función Gamma*) Dado $z > 0$, se define la función Gamma de z como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Dado $z \in (-1, 0)$, definimos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Dado $z \in (-n-1, -n)$, con $n = 1, 2, \dots$, definimos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Dado $z \in \mathbb{R}$, con $z \neq -1, -2, -3, \dots$, podemos definir el factorial de z como

$$z! = \Gamma(z+1).$$

2.3.2. Símbolos de Pochhammer

Definición 2.16. (*Símbolos de Pochhammer*) Sea $n \in \mathbb{C}$ y sea $k \geq 0$ entero, definimos los símbolos de Pochhammer como

$$(n)_k = n(n+1) \cdots (n+k-1), \quad (n)_0 = 1. \quad (2.1)$$

Claramente, $(1)_k = k!$, y si $n, n+k$ no son enteros negativos ni cero, entonces

$$(n)_k = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}.$$

2.3.3. La serie hipergeométrica gaussiana

Definición 2.17. (*La serie hipergeométrica gaussiana*) La serie hipergeométrica gaussiana se define mediante la serie de potencias

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.2)$$

y es analítica en $|z| < 1$. Está definida salvo para $c \leq 0$ entero.

2.3.4. La función beta

Definición 2.18. (*Función Beta*) La función beta de Euler se define como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad (2.3)$$

la cual satisface que $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$.

2.3.5. La función beta incompleta

Definición 2.19. La función beta incompleta se define como

$$B_x(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{x^\alpha}{\alpha} {}_2F_1(\alpha, 1-\beta; \alpha+1; x), \quad (2.4)$$

y cumple la identidad

$$B(\alpha, \beta) = B_x(\alpha, \beta) + B_{1-x}(\beta, \alpha). \quad (2.5)$$

Lema 2.20. Para todo $r \in [0, \pi]$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^r \sin^{n-1} t \, dt &= 2^{n-1} B_{\sin^2 \frac{r}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right), \\ \int_r^\pi \sin^{n-1} t \, dt &= 2^{n-1} B_{\cos^2 \frac{r}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Denotaremos las funciones que aparecen en el lema por:

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_0^r \sin^{n-1} t \, dt, \\ g(r) &= 2^{n-1} B_{\sin^2 \frac{r}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) = 2^{n-1} \int_0^{\sin^2 \frac{r}{2}} s^{\frac{n}{2}-1} (1-s)^{\frac{n}{2}-1} ds, \\ \hat{f}(r) &= \int_r^\pi \sin^{n-1} t \, dt, \\ \hat{g}(r) &= 2^{n-1} B_{\cos^2 \frac{r}{2}} \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) = 2^{n-1} \int_0^{\cos^2 \frac{r}{2}} s^{\frac{n}{2}-1} (1-s)^{\frac{n}{2}-1} ds. \end{aligned}$$

Observamos que toman el mismo valor en $r = 0$ o $r = \pi$ respectivamente:

- Si $r = 0$, $\sin^2 \frac{r}{2} = \sin^2 0 = 0$. Entonces, tenemos que

$$f(0) = \int_0^0 \sin^{n-1} t \, dt = 0 \text{ y } g(0) = 2^{n-1} \int_0^0 s^{\frac{n}{2}-1} (1-s)^{\frac{n}{2}-1} ds = 0.$$

- Si $r = \pi$, $\cos^2 \frac{r}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$. Entonces, tenemos que

$$\hat{f}(\pi) = \int_\pi^\pi \sin^{n-1} t \, dt = 0 \text{ y } \hat{g}(\pi) = 2^{n-1} \int_0^0 s^{\frac{n}{2}-1} (1-s)^{\frac{n}{2}-1} ds = 0.$$

Además, en ambos casos, las dos funciones involucradas son infinitamente diferenciables, ya que están dadas por fórmulas sin problemas de definición.

Finalmente, tenemos que sus derivadas coinciden $\forall r \in (0, \pi)$. En efecto, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, sus derivadas son:

$$\begin{aligned}
f'(r) &= \sin^{n-1} r, \\
g'(r) &= 2^{n-1} \left(\sin^2 \frac{r}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \sin^2 \frac{r}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} (2) \left(\sin \frac{r}{2} \right) \left(\cos \frac{r}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\
&= 2^{n-1} \left(\sin \frac{r}{2} \right)^{n-2} \left(\cos \frac{r}{2} \right)^{n-2} \left(\sin \frac{r}{2} \right) \left(\cos \frac{r}{2} \right) \\
&= 2^{n-1} \left(\sin \frac{r}{2} \right)^{n-1} \left(\cos \frac{r}{2} \right)^{n-1} \\
&= \left(2 \sin \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \right)^{n-1} \\
&= \sin^{n-1} r, \\
\hat{f}'(r) &= -\sin^{n-1} r, \\
\hat{g}'(r) &= 2^{n-1} \left(\cos^2 \frac{r}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \cos^2 \frac{r}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} (2) \left(\cos \frac{r}{2} \right) \left(-\sin \frac{r}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\
&= 2^{n-1} \left(\cos \frac{r}{2} \right)^{n-2} \left(\sin \frac{r}{2} \right)^{n-2} \left(\cos \frac{r}{2} \right) \left(\sin \frac{r}{2} \right) \\
&= -2^{n-1} \left(\sin \frac{r}{2} \right)^{n-1} \left(\cos \frac{r}{2} \right)^{n-1} \\
&= -\left(2 \sin \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2} \right)^{n-1} \\
&= -\sin^{n-1} r.
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos concluir que en ambos casos las funciones son iguales. $\square$

Lema 2.21. Para $0 < s < 1$ y $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ se tiene

$$\frac{(1-s)^{\beta-1} s^\alpha}{\alpha} = (1-s)^{\beta-1} \int_0^s t^{\alpha-1} dt \leq B_s(\alpha, \beta) \leq \int_0^s t^{\alpha-1} dt = \frac{s^\alpha}{\alpha}.$$

Demostración. Inmediato. $\square$

2.4. La función de Green en una Variedad Riemanniana Compacta

Hablar de una norma euclídea en una variedad abstracta es un problema, por lo que hace falta un potencial "intrínseco".

En [5] se empezó a hablar de que la función de Green es un potencial natural en cualquier variedad compacta.

Definición 2.22. (*Energía de Green de N puntos en una variedad Riemanniana compacta*) La energía de Green de N puntos $p_1, \dots, p_N$ en una variedad Riemanniana

compacta M está dada por

$$E_M(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i \neq j} G(M; p_i, p_j),$$

donde $G : M \times M \setminus \{(p, p) : p \in M\} \rightarrow \mathbb{R}$ es la única función, conocida como función de Green (potencial), con las siguientes propiedades:

1. $\Delta_q G = S_p(q) - \text{vol}(M)^{-1}$, con S_p la función delta de Dirac, en el sentido de distribuciones.
2. Simetría: $G(M; p, q) = G(M; q, p)$.
3. $G(M; p, \cdot)$ tiene media cero para todo $p \in M$, es decir, $\int_{q \in M} G(M; p, q) dq = 0$.

Seguimos la convención de que el Laplaciano Riemanniano está dado por $\Delta = -\text{div} \nabla$.

Tenemos que $\lim_{p \rightarrow q} G(M; p, q) = \infty \forall q \in M$, por lo que hace "las veces" de "potencial electrostático".

Resulta que la función de Green en $\mathbb{S}^2$ es

$$G(\mathbb{S}^2; p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| - \frac{1}{4\pi} + \frac{\ln 2}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Proposición 2.23. Sea $G(M; p, q)$ la función de Green de una variedad M y μ cualquier medida con signo finita tal que $\mu(M) = 0$, es decir, $\int_M d\mu = 0$. Entonces,

$$\int_{p, q \in M} G(M; p, q) d\mu(p) d\mu(q) \geq 0,$$

dándose la igualdad si y solo si $\mu = 0$.

Demostración. Es una demostración demasiado larga para esta memoria, por ello véase [5, p. 166, Definition 3.2] y [5, p. 175, Proposition 3.14]. $\square$

2.5. Cálculo de la función de Green en Variedades Armónicas Compactas

La función de Green de una variedad Riemanniana general puede ser muy difícil de calcular. Sin embargo, en [5] se presenta un método para calcularla en variedades armónicas compactas, es decir, en esferas y espacios proyectivos (ver [1] para un método alternativo, pero equivalente). Hemos utilizado este método para obtener la expresión explícita de $G(\mathbb{S}^n; p, q)$ en la Proposición 5.1.

Dada una variedad armónica compacta M , su función de Green $G(M; p, q)$ está dada por

$$G(M; p, q) = \phi(M; d_R(p, q)) = \phi(M; r) \quad \text{para todo } p, q \in M,$$

donde $\phi(M; r)$ satisface que

$$\phi'(M; r) = -\frac{\int_r^D t^{n-1} \Omega(t) dt}{V r^{n-1} \Omega(r)}.$$

Aquí, V es el volumen de M , D su diámetro, $r = d_R(p, q)$ es la distancia Riemanniana, y $\Omega(t)$ es la función de densidad volumétrica, la cual, en el caso de la esfera $\mathbb{S}^n$, satisface que

$$r^{n-1} \Omega(r) = \sin^{n-1} r.$$

(Véase [5] para las funciones de densidad de los espacios proyectivos, y nótese que existen algunas ambigüedades en la elección de la normalización que producen factores constantes como potencias de 2, pero estas constantes no afectan al cálculo de la función de Green).

Capítulo 3

Enunciado del séptimo problema de Smale

El enunciado original del séptimo problema de Smale (procedente de [26]) dice lo siguiente:

Problema 7: Distribución de puntos en una 2-esfera

Sea $V_N(x) := \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log \|x_i - x_j\|$ donde $x = (x_1, \dots, x_N)$, los x_i son puntos distintos en la 2-esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, y $\|x_i - x_j\|$ es la distancia en $\mathbb{R}^3$. Denotemos a V_N por $\min_x V_N(x)$. ¿Puede encontrarse una N-tupla $(x_1, \dots, x_N)$ tal que

$$V_N(x) - V_N \leq c \log N,$$

donde c es una constante universal?

Sin embargo, vamos a cambiar un poco la notación, transformando este problema en otro equivalente:

Problema equivalente

¿Se pueden encontrar N puntos $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2$ tales que

$$\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) \leq m_N + c \ln N$$

para una constante c ?

Donde $\mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) := \sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{\|p_i - p_j\|}$ es la energía logarítmica y $m_N := \min_{p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2} \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N)$.

Capítulo 4

Cota inferior para la energía logarítmica

Este capítulo constituye la parte más difícil y que más trabajo y esfuerzo ha requerido de la memoria, la cual ha requerido un alto nivel de entendimiento del tema para expandir correctamente y a gran medida su contenido.

A pesar de que a simple vista el enunciado puede parecer sencillo, a día de hoy se considera un problema muy complicado de resolver, en gran parte debido a que no conocemos el mínimo de la energía logarítmica en la esfera. Tras muchos intentos y años de estudio, gracias a [10, 12, 15, 24, 28, 29] se ha llegado a la siguiente aproximación asintótica:

$$m_N = \kappa N^2 - \frac{1}{2} N \ln N + C_{\log} N + o(N),$$

donde κ es la energía continua

$$\kappa = \frac{1}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p,q \in \mathbb{S}^2} \ln \frac{1}{\|p - q\|} dp dq = \frac{1}{2} - \ln 2,$$

y $C_{\log}$ es una constante desconocida, pero que gracias a [10] y [21] podemos acotar de la siguiente manera:

$$-0,0568 \dots = \ln 2 - \frac{3}{4} \leq C_{\log} \leq 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} + 3 \ln \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0,0556 \dots$$

Se ha conjeturado que la cota superior es una igualdad, siendo el cálculo de esta constante uno de los problemas abiertos más importantes en este área; véase [10, 11, 13, 28].

La cota inferior $\ln 2 - \frac{3}{4} \leq C_{\log}$ demostrada por Lauritsen en [21, Apéndice B] se deduce a partir de un argumento en el plano real y luego invoca un resultado sofisticado de Bétermin y Sandier [10, p. 3, Teorema 1.5], que relaciona la energía en la 2-esfera con una cierta energía renormalizada en el plano. Este es un argumento puramente bidimensional que no parece fácil de traducir a dimensiones superiores.

En estas páginas reproduciremos las ideas de [9], viendo cómo el argumento de Lauritsen puede adaptarse directamente para trabajar en la esfera $\mathbb{S}^2$ sin recurrir a [10, p. 3, Teorema 1.5].

4.1. Valores medios de la energía logarítmica en la 2-Esfera

Sea $B(p_0, a)$ la bola geodésica centrada en $p_0 \in \mathbb{S}^2$ con radio $a < \pi$, es decir, $B(p_0, a) = \{p \in \mathbb{S}^2 : d_R(p_0, p) < a\} \subseteq \mathbb{S}^2$ donde $d_R(\cdot, \cdot) = \arccos \langle \cdot, \cdot \rangle$ es la distancia Riemanniana en la esfera unidad $\mathbb{S}^2$.

La distancia Riemanniana es la distancia natural en una variedad de Riemann (M, g) , que es un espacio curvo donde se define un tensor métrico g . Esta métrica permite medir longitudes de curvas y definir una noción de distancia entre puntos en el espacio. En el caso de la esfera $\mathbb{S}^2$, es la longitud del menor trozo de círculo máximo que une dos puntos.

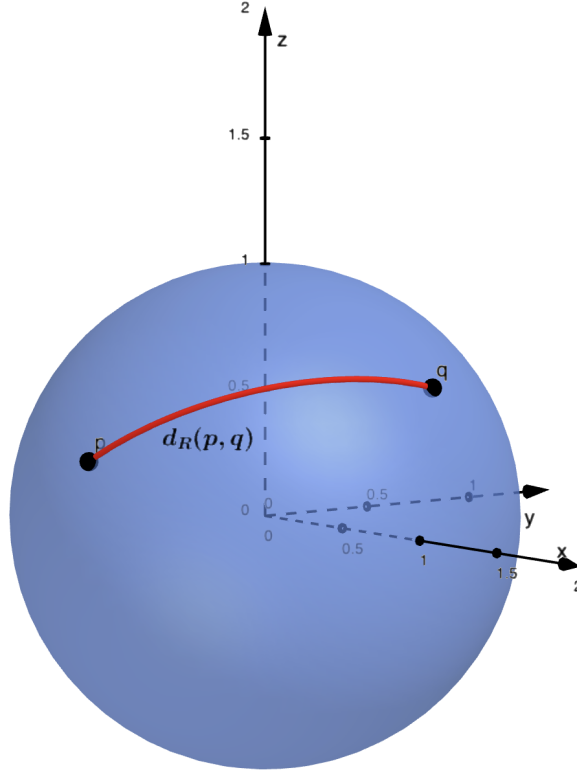


Figura 4.1: Distancia Riemanniana en la esfera $\mathbb{S}^2$

Sea $|B_a|$ el volumen de la bola anterior, son conocidos los siguientes resultados:

Proposición 4.1. Sean $p_0, p \in \mathbb{S}^2$ y $a \in (0, \pi)$, entonces $|B_a| = 4\pi \sin^2 \frac{a}{2}$ y

(i) Si $p \notin B(p_0, a)$, entonces

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq = \ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}.$$

(ii) Si $p \in B(p_0, a)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq &= \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\cot^2 \frac{a}{2}}{2} \\ &\quad \times \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

Demostración. Variando un poco la notación para que sea congruente con la nuestra, vamos a aplicar el Teorema de Cambio de Variable (Teorema 2.13) entre superficies en [3, Proposition 3.2.], ya que esta proposición es similar a la Proposición 4.1, pero usa la Esfera de Riemann $\mathbb{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 + (c - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ en vez de $\mathbb{S}^2$.

Definimos la aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(q) = \ln \|p - q\|$ y el difeomorfismo $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ definido por $\varphi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z - 1)$. Calculemos $Jac(\varphi)$:

En nuestro caso (entre variedades), $Jac(\varphi)$ es el volumen (área) del paralelepípedo que forman $\{D\varphi(\hat{p})(v_1), D\varphi(\hat{p})(v_2)\}$, donde $\hat{p} \in \mathbb{S}$ y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal del espacio tangente a $\mathbb{S}$ en x .

Tenemos que $\{D\varphi(\hat{p})(v_1), D\varphi(\hat{p})(v_2)\} = \{2v_1, 2v_2\}$, ya que

$$\begin{aligned} D\varphi(\hat{p})(v) &= D\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \varphi \begin{pmatrix} x + tv_1 \\ y + tv_2 \\ z + tv_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 2x + 2tv_1 \\ 2y + 2tv_2 \\ 2z + 2tv_3 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix} \\ &= 2v. \end{aligned}$$

Sabemos que, por ser base ortonormal, sus vectores cumplen que

- $\|v_1\|^2 = 1$,
- $\|v_2\|^2 = 1$,
- $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Por tanto, sean $w_1 = D\varphi(\hat{p})(v_1)$ y $w_2 = D\varphi(\hat{p})(v_2)$, tenemos que

- $\|w_1\|^2 = \|2v_1\|^2 = 4\|v_1\|^2 = 4$,
- $\|w_2\|^2 = \|2v_2\|^2 = 4\|v_2\|^2 = 4$,
- $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle 2v_1, 2v_2 \rangle = 4 \langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Llegamos así a que

$$Jac(\varphi) = \begin{vmatrix} \|w_1\| & \langle w_1, w_2 \rangle \\ \langle w_1, w_2 \rangle & \|w_2\| \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4.$$

Sean $\hat{p}_0, \hat{p} \in \mathbb{S}$ y $\varepsilon = \frac{a}{2}$, vamos a demostrar primero el apartado (i), es decir, si $p \notin B(p_0, a)$.

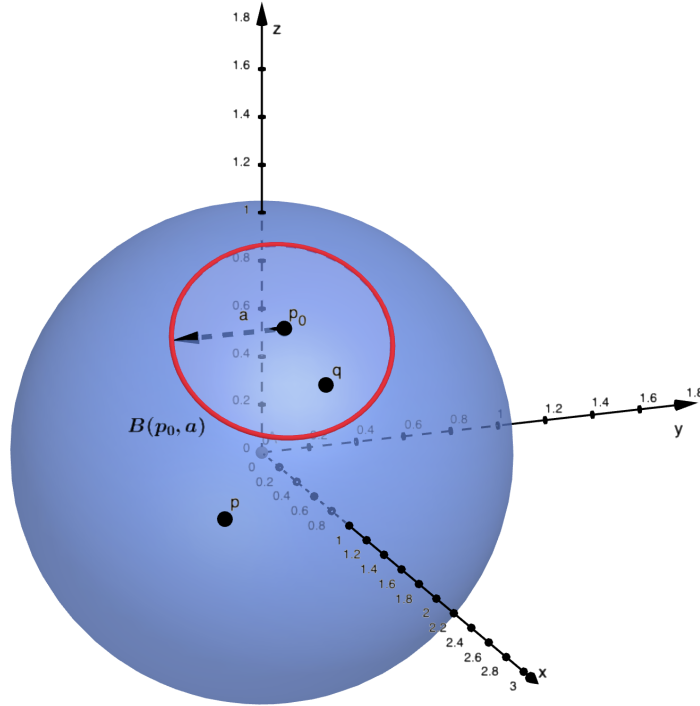


Figura 4.2: Caso (i) de la Proposición 4.1

Aplicando el Teorema de Cambio de Variable (Teorema 2.13), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq &= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} f \circ \varphi(\hat{q}) \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|p - \varphi(\hat{q})\| \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\varphi(\hat{p}) - \varphi(\hat{q})\| \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|2\hat{p} - 2\hat{q}\| \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln(2\|\hat{p} - \hat{q}\|) \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln 2 + \ln \|\hat{p} - \hat{q}\| \, d\hat{q} \\
&= 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln 2 \, d\hat{q} + 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\| \, d\hat{q} \\
&= 4 \ln 2 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} 1 \, d\hat{q} - 4 \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q} \\
&= 4 \ln 2 \, \text{vol}(B(\hat{p}_0, \varepsilon)) - 4 \text{vol}(B(\hat{p}_0, \varepsilon)) \\
&\quad \times \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q}.
\end{aligned}$$

Por [3, Proposition 3.2.], sabemos que $\text{vol}(B(\hat{p}_0, \varepsilon)) = \pi \sin^2 \varepsilon$ y que

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q} &= \frac{1}{|B(\hat{p}_0, \varepsilon)|} \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q} \\
&= \ln \|\hat{p} - \hat{p}_0\|^{-1} + \frac{1}{2} + \cot^2 \varepsilon \ln(\cos \varepsilon).
\end{aligned}$$

Llegamos así a que

$$\begin{aligned}
\int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq &= 4 \ln 2 \pi \sin^2 \varepsilon - 4 \pi \sin^2 \varepsilon \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q} \\
&= 4 \pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \left(\ln \|\hat{p} - \hat{p}_0\|^{-1} + \frac{1}{2} + \cot^2 \varepsilon \ln \cos \varepsilon \right) \right] \\
&= 4 \pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \ln \|\hat{p} - \hat{p}_0\|^{-1} - \frac{1}{2} - \cot^2 \varepsilon \ln \cos \varepsilon \right] \\
&= 4 \pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 + \ln \|\hat{p} - \hat{p}_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \varepsilon \ln \cos \varepsilon \right] \\
&= 4 \pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln(2\|\hat{p} - \hat{p}_0\|) - \frac{1}{2} - \cot^2 \varepsilon \ln \cos \varepsilon \right] \\
&= 4 \pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln \|2\hat{p} - 2\hat{p}_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \varepsilon \ln \cos \varepsilon \right] \\
&= 4 \pi \sin^2 \frac{a}{2} \left[\ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right].
\end{aligned}$$

Por tanto, como $\frac{1}{|B_a|} = \frac{1}{4\pi \sin^2 \frac{a}{2}}$, queda demostrado que

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq = \ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}.$$

Demostraremos ahora de forma similar el apartado (ii):

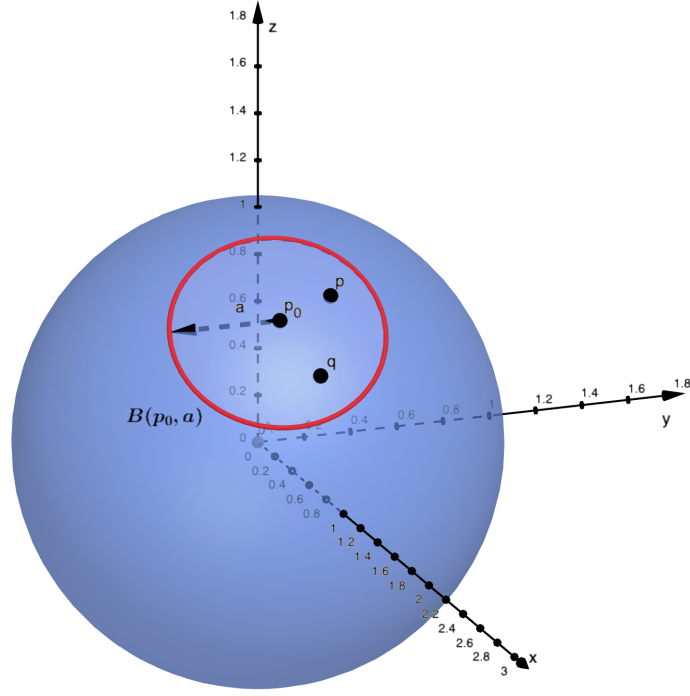


Figura 4.3: Caso (ii) de la Proposición 4.1

Sea ahora $p \in B(p_0, a)$, volvemos a llegar a que

$$\int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq = 4 \ln 2\pi \sin^2 \varepsilon - 4\pi \sin^2 \varepsilon \int_{\hat{q} \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|\hat{p} - \hat{q}\|^{-1} \, d\hat{q}.$$

Sabemos por [3, Proposition 3.2.] que

$$\int_{p \in B(\hat{p}_0, \varepsilon)} \ln \|p - q\|^{-1} \, dp = \frac{1}{2 \sin^2 \varepsilon} + \frac{\cot^2 \varepsilon}{2} (\ln(1 - \|\hat{p} - \hat{p}_0\|^2) - 1) - \ln(\sin \varepsilon),$$

y por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq &= 4\pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \left(\frac{1}{2 \sin^2 \varepsilon} + \frac{\cot^2 \varepsilon}{2} (\ln(1 - \|\hat{p} - \hat{p}_0\|^2) - 1) \right) \right. \\
&\quad \left. - \ln(\sin \varepsilon) \right] \\
&= 4\pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \frac{1}{2 \sin^2 \varepsilon} - \frac{\cot^2 \varepsilon}{2} \left(\ln \left(1 - \left\| \frac{p}{2} - \frac{p_0}{2} \right\|^2 \right) - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln(\sin \varepsilon) \right] \\
&= 4\pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \frac{1 - \cot^2 \varepsilon \sin^2 \varepsilon}{2 \sin^2 \varepsilon} - \cot^2 \varepsilon \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln(\sin \varepsilon) \right] \\
&= 4\pi \sin^2 \varepsilon \left[\ln 2 - \frac{1 - \cos^2 \varepsilon}{2 \sin^2 \varepsilon} - \cot^2 \varepsilon \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln(\sin \varepsilon) \right] \\
&= 4\pi \sin^2 \frac{a}{2} \left[\ln 2 - \frac{\sin^2 \frac{a}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2}} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) \right] \\
&= 4\pi \sin^2 \frac{a}{2} \left[\ln 2 - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Como $|B_a| = 4\pi \sin^2 \frac{a}{2}$, llegamos así a que

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| \, dq = \ln 2 - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \times \ln \left(1 - \frac{\|p - p_0\|^2}{4} \right) + \ln \left(\sin \frac{a}{2} \right).$$

□

Lema 4.2. *La función $F : (0, 2) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(t, \alpha) = \ln 2 + \ln \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2}}{2} (2 \ln(\cos \frac{\alpha}{2}) - \ln(1 - \frac{t^2}{4})) - \ln t,$$

es no-negativa.

Demostración. Sea $\alpha \in (0, \pi)$ fijo, vamos a calcular el mínimo de $F(t, \alpha)$.

Tenemos que $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, \alpha) = \lim_{t \rightarrow 2} F(t, \alpha) = \infty$, y derivando la función respecto de t nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) = \frac{-\cot^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{1 - \frac{t^2}{4}} - \frac{1}{t} = \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 - 4 + t^2}{(4 - t^2) \cdot t} = \frac{t^2 (\cot^2 \frac{\alpha}{2} + 1) - 4}{t(4 - t^2)}.$$

Igualando a 0, llegamos a que

$$t^2 (\cot^2 \frac{\alpha}{2} + 1) - 4 = 0$$

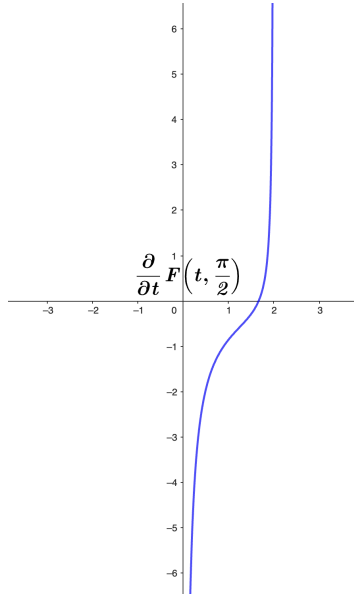


Figura 4.4: Gráfica de $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha)$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Resolvemos la ecuación:

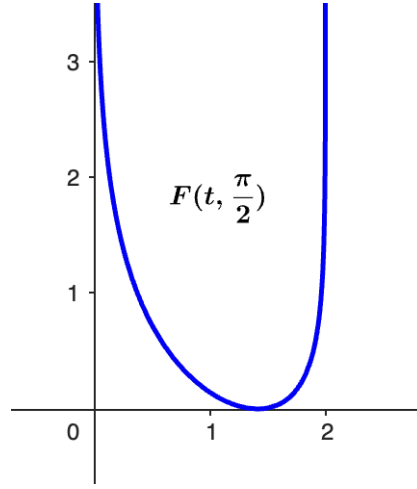
$$\begin{aligned}
 t^2(\cot^2 \frac{\alpha}{2} + 1) - 4 &= 0 \\
 t^2(\cot^2 \frac{\alpha}{2} + 1) &= 4 \\
 t^2 &= \frac{4}{\cot^2 \frac{\alpha}{2} + 1} \\
 t^2 &= \frac{4}{\csc^2 \frac{\alpha}{2}} \\
 t^2 &= 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
 t &= \pm 2 \sin \frac{\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

Como $t = -2 \sin \frac{\alpha}{2}$ no pertenece al dominio de $F(t, \alpha)$, que es $(0, 2)$, el único candidato a mínimo de la función será $t = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Veamos si es mínimo:

Analizamos el signo de la derivada:

- Si $t \in (0, 2 \sin \frac{\alpha}{2})$, $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) \leq 0$.
- Si $t \in (2 \sin \frac{\alpha}{2}, 2)$, $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \alpha) \geq 0$.

Hemos comprobado así que $t = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ es un mínimo de $F(t, \alpha)$ para cualquier $\alpha \in (0, \pi)$ fijo.

Figura 4.5: Gráfica de $F(t, \alpha)$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Finalmente, $F(2 \sin \frac{\alpha}{2}, \alpha) \equiv 0$ y por ser el mínimo tenemos que la función es no-negativa (lo cual concuerda con las gráficas) como queríamos comprobar. $\square$

Corolario 4.3. Sean $p_0, p \in \mathbb{S}^2$ y $a > 0$. Entonces,

$$\frac{1}{|B_a|} \int_{q \in B(p_0, a)} \ln \|p - q\| dq \geq \ln \|p - p_0\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2},$$

dándose la igualdad si $p \notin B(p_0, a)$.

Demostración. Directa por la Proposición 4.1 y el Lema 4.2. $\square$

4.2. Demostración de la cota inferior de C_{log}

Sean $(p_1, \dots, p_N \in \mathbb{S}^2)$, y sean

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_N) &= \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) \\ &+ \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \sum_{i=1}^N \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| dq \\ &- \frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp dq. \end{aligned}$$

Tomando $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$ y aplicando el Teorema 2.13, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq &= \frac{1}{2} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\|^2 dq \\ &= \frac{1}{2} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln(2 - 2q_3) dq. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variable (Teorema 2.13) a coordenadas esféricas, llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dq &= \frac{1}{2} \int_{\theta \in [0, \pi]} \int_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sin \theta \ln(2 - 2 \cos \theta) \, d\varphi d\theta \\ &= \pi \int_{\theta \in [0, \pi]} \sin \theta \ln(2 - 2 \cos \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

y aplicando ahora el cambio de variable $t = \cos \theta$, con $dt = -\sin \theta \, d\theta$, obtenemos que

$$\int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dq = -\pi \int_{-1}^1 \ln(2 - 2t) \, dt$$

Derivando por partes tomando $u = \ln(2 - 2\cos\theta)$ y $dv = dt$, con $du = -\frac{2}{2-2t} \, dt$ y $v = t$, quedándonos así

$$\begin{aligned} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dq &= -\pi \int_{-1}^1 \ln(2 - 2t) \, dt = -\pi \left[t \ln(2 - 2t) + \int_{-1}^1 \frac{2t}{2 - 2t} \right]_{-1}^1 \\ &= -\pi \left[t \ln(2 - 2t) + \int_{-1}^1 -1 + \frac{2}{2 - 2t} \right]_{-1}^1 \\ &= -\pi [t \ln(2 - 2t) - t - \ln(2 - 2t)]_{-1}^1 \\ &= -\pi [(t - 1) \ln(2 - 2t) - t]_{-1}^1, \end{aligned}$$

y como $\lim_{t \rightarrow 1} (t - 1) \ln(2 - 2t) - t = -1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dq &= -\pi [-1 - (-\ln(4) + 1 - \ln(4))] \\ &= -\pi(-2 + 4 \ln(2)) = -4\pi(-\frac{1}{2} + \ln(2)) \\ &= -4\pi\kappa, \end{aligned}$$

donde $\kappa = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

Por tanto, sea $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$, llegamos a que

$$\frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dq = -\kappa. \quad (4.1)$$

Demostremos ahora que (4.1) no depende del punto $p \in \mathbb{S}^2$ elegido:

Sean $p, q \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{O}$ una matriz ortonormal 3x3 cualquiera y f una aplicación integrable de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}$, definimos la aplicación $\varphi_{\mathcal{O}} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\varphi_{\mathcal{O}}(p) = \mathcal{O}p$.

y aplicando el Teorema de Cambio de Variable (Teorema 2.13), nos queda

$$\int_{p \in \mathbb{S}^2} f(p) \, dp = \int_{p \in \mathbb{S}^2} \text{Jac}(\varphi_{\mathcal{O}})(p) \cdot f \circ \varphi_{\mathcal{O}}(p) \, dp.$$

Calculemos $Jac(\varphi_{\mathcal{O}})(p)$:

Sea $\dot{p}_1, \dot{p}_2$ una base ortonormal del plano tangente a $\mathbb{S}^2$ en p , denotado por $T_p\mathbb{S}^2$, hay que calcular el área del paralelepípedo que forman $D\varphi_{\mathcal{O}}(p)(\dot{p}_1), D\varphi_{\mathcal{O}}(p)(\dot{p}_2)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} D\varphi_{\mathcal{O}}(p)(\dot{p}) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \varphi_{\mathcal{O}}(p + t\dot{p}) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\mathcal{O}\dot{p} + t\mathcal{O}\dot{p}) \\ &= \mathcal{O}\dot{p}. \end{aligned}$$

Por tanto, $D\varphi_{\mathcal{O}}(p)(\dot{p}_1) = \mathcal{O}\dot{p}_1$ y $D\varphi_{\mathcal{O}}(p)(\dot{p}_2) = \mathcal{O}\dot{p}_2$, y el jacobiano será el área del paralelepípedo formado por $\{\mathcal{O}\dot{p}_1, \mathcal{O}\dot{p}_2\}$.

Por ser $\mathcal{O}$ ortonormal, tenemos que

- $\|\mathcal{O}\dot{p}_1\| = \|\dot{p}_1\|$,
- $\|\mathcal{O}\dot{p}_2\| = \|\dot{p}_2\|$,
- $\langle \mathcal{O}\dot{p}_1, \mathcal{O}\dot{p}_2 \rangle = \langle \mathcal{O}^T \mathcal{O}\dot{p}_1, \dot{p}_2 \rangle = \langle \dot{p}_1, \dot{p}_2 \rangle$.

Calculamos así el jacobiano:

$$Jac(\varphi_{\mathcal{O}}) = \left| \begin{array}{cc} \|\mathcal{O}\dot{p}_1\| & \langle \mathcal{O}\dot{p}_1, \mathcal{O}\dot{p}_2 \rangle \\ \langle \mathcal{O}\dot{p}_1, \mathcal{O}\dot{p}_2 \rangle & \|\mathcal{O}\dot{p}_2\| \end{array} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{array}{cc} \|\dot{p}_1\| & \langle \dot{p}_1, \dot{p}_2 \rangle \\ \langle \dot{p}_1, \dot{p}_2 \rangle & \|\dot{p}_2\| \end{array} \right|^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|^{\frac{1}{2}} = 1,$$

y entonces, llegamos a que

$$\int_{p \in \mathbb{S}^2} f(p) \, dp = \int_{p \in \mathbb{S}^2} f \circ \varphi_{\mathcal{O}}(p) \, dp.$$

Tomando $f(q) = \ln \|p - q\|$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{q \in \mathbb{S}^2} f(q) \, dq &= \int_{q \in \mathbb{S}^2} f \circ \varphi_{\mathcal{O}}(q) \, dq \\ &= \int_{q \in \mathbb{S}^2} f(\varphi_{\mathcal{O}}(q)) \, dq \\ &= \int_{q \in \mathbb{S}^2} f(\mathcal{O}q) \, dq \\ &= \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - \mathcal{O}q\| \, dq, \end{aligned}$$

y de nuevo por ser $\mathcal{O}$ una matriz ortogonal, concluimos que

$$\int_{q \in \mathbb{S}^2} f(q) dq = \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|\mathcal{O}^T p - q\| dq.$$

Elegimos ahora $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}^T p = e_3$, con e_3 la tercera fila de I_3 (la matriz identidad de dimensión 3), quedándonos

$$\int_{q \in \mathbb{S}^2} f(q) dq = \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|e_3 - q\| dq.$$

Hemos terminado así la demostración, a falta de comprobar que siempre existe $\mathcal{O}$.

Para ello, distinguimos 3 casos dependiendo de p :

- Si $p = e_3$, tomamos $\mathcal{O} = I_3$.
- Si $p = -e_3$, tomamos $\mathcal{O} = (e_1 \ e_2 \ -e_3)$.
- Si $p \neq \pm e_3$, tomamos $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{p \times e_3}{\|p \times e_3\|} & p \times \frac{p \times e_3}{\|p \times e_3\|} & p \end{pmatrix}$.

Hemos visto por tanto que $\int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq$ no depende del $p \in \mathbb{S}^2$ elegido.

Tenemos entonces por (4.1) que

$$\begin{aligned} \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \sum_{i=1}^N \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| dq &= 2N \sum_{i=1}^N \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| dq \\ &= 2N^2 \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq \\ &= -2\kappa N^2. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Fubini (2.14) y por (4.1), tenemos también que

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq dp &= N^2 \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{p \in \mathbb{S}^2} \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq dp \\ &= N^2 \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{p \in \mathbb{S}^2} -\kappa dp \\ &= -\kappa N^2, \end{aligned}$$

Hemos llegado así a la expresión

$$\frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dq dp = -\kappa N^2, \quad (4.2)$$

y por tanto deducimos inmediatamente que

$$\begin{aligned}
I(p_1, \dots, p_N) &= \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) \\
&\quad + \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \sum_{i=1}^N \int_{q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| \, dq \\
&\quad - \frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \\
&= \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) - 2\kappa N^2 + \kappa N^2 \\
&= \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) - \kappa N^2.
\end{aligned}$$

Definimos ahora

$$\begin{aligned}
U_{BB} &= -\frac{N^2}{(\text{vol}(\mathbb{S}^2))^2} \int_{p, q \in \mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \stackrel{(4,2)}{=} \kappa N^2, \\
U_i &= \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p_i - q\| \, dq \stackrel{(4,1)}{=} -2\kappa N, \\
U_{ij} &= -\ln \|p_i - p_j\|, \\
\widehat{U}_i &= \frac{2N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \\
&\stackrel{(4,1)}{=} 2N \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} -\kappa \, dq \\
&= -2\kappa N, \\
\widehat{U}_{ij} &= -\frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| \, dp \, dq.
\end{aligned}$$

Claramente,

$$I(p_1, \dots, p_N) = \underbrace{U_{BB} + \sum_{i=1}^N \widehat{U}_i}_{\alpha} + \underbrace{\sum_{i,j} \widehat{U}_{ij}}_{\beta} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (U_i - \widehat{U}_i)}_{\gamma} - \underbrace{\sum_{i=1}^N \widehat{U}_{ii} + \sum_{i \neq j} (U_{ij} - \widehat{U}_{ij})}_{\delta}.$$

A continuación acotaremos inferiormente y, cuando sea posible, calcularemos exactamente los términos α , β , γ y δ :

Desarrollando α nos queda que

$$\begin{aligned}
\alpha &= U_{BB} + \sum_{i=1}^N \widehat{U}_i + \sum_{i,j} \widehat{U}_{ij} \\
&= \kappa N^2 - 2\kappa N^2 - \sum_{i,j} \frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \\
&= -\kappa N^2 - \sum_{i,j} \frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| \, dp \, dq.
\end{aligned}$$

Observamos que por este camino no llegamos a nada de valor, ya que no hay una forma clara de calcular esta expresión. Por ello, utilizaremos medidas y resultados conocidos sobre ellas del Capítulo 2 para acotar α .

Sea χ_A la función característica de un subconjunto $A \subset \mathbb{S}^2$, utilizando lo visto en la sección 2.1 de medidas del Capítulo 2, podemos definir la medida de un conjunto en una esfera como:

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{S}^2} \chi_A(p) \cdot \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\chi_{B(p_i,a)}(p)}{|B_a|} \right) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)^2} \right] dp$$

Por ello, sabemos que la expresión

$$d\mu(p) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{|B_a|} \chi_{B(p_i,a)}(p) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)} \right) dp,$$

se trata de una medida.

Con estas notaciones, sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tenemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(p) d\mu(p) = \int_{\mathbb{S}^2} f(p) \cdot \mu(p) dp.$$

Comprobemos ahora que $\int_{\mathbb{S}^2} d\mu(p) = \int_{\mathbb{S}^2} \mu(p) = 0$:

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{S}^2) &= \int_{\mathbb{S}^2} \chi_{\mathbb{S}^2}(p) \cdot \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\chi_{B(p_i,a)}(p)}{|B_a|} \right) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)^2} \right] dp \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\chi_{B(p_i,a)}(p)}{|B_a|} \right) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)^2} \right] dp \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\chi_{B(p_i,a)}(p)}{|B_a|} \right) dp - \int_{\mathbb{S}^2} \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)^2} dp \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\chi_{B(p_i,a)}(p)}{|B_a|} dp \right) - \frac{N}{\text{vol}(\mathbb{S}^2)^2} \cdot \text{vol}(\mathbb{S}^2)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\int_{B(p_i,a)} \frac{1}{|B_a|} dp \right) - N \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i,a)} dp \right) - N \\ &= \sum_{i=1}^N (1) - N \\ &= N - N \\ &= 0 \end{aligned}$$

Recordamos que, por (2.6), la función de Green en $\mathbb{S}^2$ es

$$G(\mathbb{S}^2; p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| - \frac{1}{4\pi} + \frac{\ln 2}{2\pi},$$

y podemos aplicar por tanto la Proposición 2.23 en $\mathbb{S}^2$, obteniendo que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| - \frac{1}{4\pi} + \frac{\ln 2}{2\pi} \right) d\mu(p) d\mu(q) \geq 0.$$

Deducimos así que

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| + \frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 2}{2\pi} \right) d\mu(p) d\mu(q) \geq 0 \\ & - \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| d\mu(p) d\mu(q) - \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 2}{2\pi} \right) d\mu(p) d\mu(q) \geq 0 \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| d\mu(p) d\mu(q) - \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{\ln 2}{2\pi} \right) \int_{\mathbb{S}^2} d\mu(p) d\mu(q) \geq 0. \end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{S}^2} d\mu(p) = \int_{\mathbb{S}^2} \mu(p) = 0$, tenemos que

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| d\mu(p) d\mu(q) \geq 0,$$

y por tanto llegamos a que

$$\alpha = - \int_{\mathbb{S}^2} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| d\mu(p) d\mu(q) \geq 0$$

Además, observamos que

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{i=1}^N (U_i - \hat{U}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N (-2\kappa N - (-2\kappa N)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Respecto a γ , como hemos visto anteriormente, el valor de $\hat{U}_{ii}$ no depende del punto p_i , y entonces

$$\gamma = \sum_{i=1}^N \hat{U}_{ii} = N\hat{U}_{ii}.$$

Desarrollando la expresión tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(p_1, a)} \ln \|p - q\| dp dq \\ &= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp - \int_{B(-p_1, \pi-a)} \ln \|p - q\| dp \right) dq \\ &= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{\mathbb{S}^2} \ln \|p - q\| dp + \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \int_{B(-p_1, \pi-a)} \ln \|p - q\| dp dq, \end{aligned}$$

y aplicando (4.1) y la Proposición 4.1 (el caso (i), ya que $p_1 \notin B(-p_1, \pi - a)$), llegamos a que

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} -\kappa \cdot \text{vol}(\mathbb{S}^2) \, dq + \frac{N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\ln \| -p_1 - q \| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \right. \\
&\quad \left. \times \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) \cdot |B_{\pi-a}| \, dq \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \kappa \, dq + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\ln \| -p_1 - q \| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \right. \\
&\quad \left. \times \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) \, dq \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|^2} \int_{B(p_1, a)} \left(\ln \| -p_1 - q \| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) dq.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora de nuevo el caso (i) de la Proposición 4.1 (ya que $-p_1 \in B(p_1, a)$), tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[\ln \| -p_1 - p_1 \| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} - \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right] \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[\ln \| -2p_1 \| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} - \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right] \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[\ln (2\|p_1\|) - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} - \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

y como $\|p_1\| = 1$ (porque $p_1 \in \mathbb{S}^2$), llegamos a que

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[\ln 2 - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} - \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} + \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[-\kappa - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} - \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}^2)N\kappa}{|B_a|} - \frac{|B_{\pi-a}|N}{|B_a|} \left[\kappa + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi - a}{2} \ln \cos \frac{\pi - a}{2} \right].
\end{aligned}$$

Como sabemos que:

- $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$,
- $|B_a| = 4\pi \sin^2 \frac{a}{2}$,
- $|B_{\pi-a}| = \text{vol}(\mathbb{S}^2) - |B_a| = 4\pi - 4\pi \sin^2 \frac{a}{2} = 4\pi (1 - \sin^2 \frac{a}{2}) = 4\pi \cos^2 \frac{a}{2}$,

observamos ahora que

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{4\pi N\kappa}{4\pi \sin^2 \frac{a}{2}} - \frac{4\pi \cos^2 \frac{a}{2} N}{4\pi \sin^2 \frac{a}{2}} \left[\kappa + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi-a}{2} \ln \cos \frac{\pi-a}{2} \right] \\ &= \frac{N\kappa}{\sin^2 \frac{a}{2}} - N \cot^2 \frac{a}{2} \left[\kappa + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \cot^2 \frac{\pi-a}{2} \ln \cos \frac{\pi-a}{2} \right].\end{aligned}$$

Utilizando fórmulas trigonométricas, sabemos que

$$\cos \frac{\pi-a}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{a}{2} = \sin \frac{a}{2}.$$

En consecuencia, tenemos también que:

- $\sin \frac{\pi-a}{2} = \cos \frac{a}{2},$
- $\tan \frac{\pi-a}{2} = \frac{\sin \frac{\pi-a}{2}}{\cos \frac{\pi-a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \cot \frac{a}{2},$
- $\cot \frac{\pi-a}{2} = \frac{\cos \frac{\pi-a}{2}}{\sin \frac{\pi-a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \tan \frac{a}{2},$

y sustituyendo en la expresión tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{N\kappa}{\sin^2 \frac{a}{2}} - N \cot^2 \frac{a}{2} \left[\kappa + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \tan^2 \frac{a}{2} \ln \sin \frac{a}{2} \right] \\ &= \frac{N\kappa}{\sin^2 \frac{a}{2}} - \frac{N\kappa \cos^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}} - N \cot^2 \frac{a}{2} \left[\cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \tan^2 \frac{a}{2} \ln \sin \frac{a}{2} \right] \\ &= \frac{N\kappa}{\sin^2 \frac{a}{2}} \left[1 - \cos^2 \frac{a}{2} \right] - N \left[\cot^4 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{\cot^2 \frac{a}{2}}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \tan^2 \frac{a}{2} \ln \sin \frac{a}{2} \right] \\ &= \frac{N\kappa}{\sin^2 \frac{a}{2}} \sin^2 \frac{a}{2} - N \left[\cot^4 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{\cot^2 \frac{a}{2}}{2} + \ln \sin \frac{a}{2} \right] \\ &= N\kappa - N \left[\cot^2 \frac{a}{2} \left(\cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right) + \ln \sin \frac{a}{2} \right] \\ &= N \left[\kappa - \left(\cot^2 \frac{a}{2} \left(\cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right) + \ln \sin \frac{a}{2} \right) \right].\end{aligned}$$

Reordenando la expresión, llegamos a que

$$\gamma = -N \left[-\kappa + \ln \sin \frac{a}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \right].$$

Finalmente, acotamos δ . Tenemos que

$$\delta = \sum_{i \neq j} (U_{ij} - \hat{U}_{ij}),$$

y aplicando el Corolario 4.3 dos veces obtenemos para todo i, j :

$$\begin{aligned}
U_{ij} - \hat{U}_{ij} &= -\ln \|p_i - p_j\| + \frac{1}{|B_a|^2} \int_{B(p_i, a)} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \\
&= -\ln \|p_i - p_j\| + \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_j, a)} \ln \|p - q\| \, dp \, dq \\
&\geq -\ln \|p_i - p_j\| + \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \left(\ln \|p_j - q\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \, dq \\
&\geq -\ln \|p_i - p_j\| + \frac{1}{|B_a|} \int_{B(p_i, a)} \ln \|p_j - q\| \, dq - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \\
&\geq -\ln \|p_i - p_j\| + \left(\ln \|p_j - p_i\| - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) - \frac{1}{2} - \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \\
&\geq -1 - 2 \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

(Recientemente se ha llegado a una desigualdad similar con constantes menos explícitas en [23, Lemma 3.1])

Por tanto, hemos llegado a que

$$\begin{aligned}
I(p_1, \dots, p_N) &\geq N(N-1) \left(-1 - 2 \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \\
&\quad + N \left[\ln 2 - \frac{1}{2} + \ln \sin \frac{a}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} + \cot^2 \frac{a}{2} \ln \cos \frac{a}{2} \right) \right],
\end{aligned}$$

que se trata de una cota inferior que es válida para cualquier a .

Tomando $\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{C}{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
I(p_1, \dots, p_N) &\geq N(N-1) \left(-1 - \frac{N-C}{C} \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \right) - \frac{1}{2} N \ln N \\
&\quad + N \left[\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln C + \frac{N-C}{C} \left(\frac{1}{2} + \frac{N-C}{2C} \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \right) \right] \\
&\geq -\frac{1}{2} N \ln N + N \frac{2 \ln C - 2C + 4 \ln 2 - 1}{4} - \frac{C^2}{2} + o\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

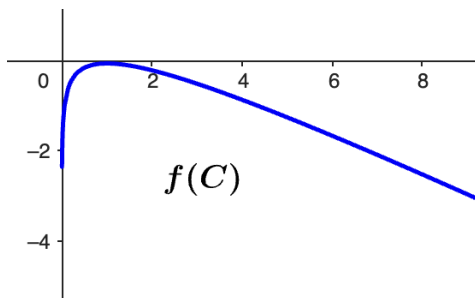
donde hemos usado la desigualdad elemental

$$-\frac{C}{N} - \frac{C^2}{2N^2} - \frac{C^3}{N^3} \leq \ln \left(1 - \frac{C}{N} \right) \leq -\frac{C}{N} - \frac{C^2}{2N^2}, \quad \forall N \geq 2C.$$

Optimicemos la expresión anterior para ver cuál es el valor óptimo de C :

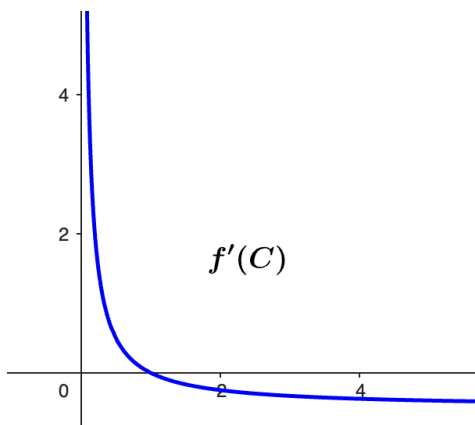
Sea

$$f(C) = N \frac{2 \ln C - 2C + 4 \ln 2 - 1}{4},$$

Figura 4.6: Gráfica de $f(C)$ tomando $N = 1$

su derivada será

$$f'(C) = N \frac{\frac{2}{C} - 2}{4} = N \frac{2 - 2C}{4C}.$$

Figura 4.7: Gráfica de $f'(C)$ tomando $N = 1$

Igualando la derivada a 0 para obtener los candidatos a puntos críticos, llegamos a que hay que resolver la ecuación

$$2 - 2C = 0,$$

cuya única solución es $C = 1$.

Teniendo en cuenta que el dominio de $f(C)$ es $(0, \infty)$, analizamos el signo de la derivada para comprobar si $C = 1$ el máximo de la función:

- Si $C \in (0, 1)$, $f'(C) > 0$
- Si $C \in (1, \infty)$, $f'(C) < 0$

Por tanto, hemos visto que $C = 1$ es el máximo de $f(C)$, lo cual coincide con lo observado en las gráficas.

Tomando entonces $C = 1$ por ser el valor óptimo, tenemos que

$$\begin{aligned} f(1) &= N \frac{2 \ln 1 - 2 + 4 \ln 2 - 1}{4} \\ &= N \frac{-2 + 4 \ln 2 - 1}{4} \\ &= N \frac{4 \ln 2 - 3}{4} \\ &= N \left(\ln 2 - \frac{3}{4} \right), \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_N) &\geq -\frac{1}{2} N \ln N + N \left(\ln 2 - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{N}\right) \\ &\geq -\frac{1}{2} N \ln N + N \left(\ln 2 - \frac{3}{4} \right) + o(N). \end{aligned}$$

Concluimos por tanto que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p_1, \dots, p_N) &= \kappa N^2 + I(p_1, \dots, p_N) \\ &\geq \kappa N^2 - \frac{1}{2} N \ln N + N \left(\ln 2 - \frac{3}{4} \right) + o(N), \end{aligned}$$

probando así que

$$C_{\log} \geq \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Capítulo 5

Función de Green en $\mathbb{S}^n$

¿Cómo deberíamos extender la energía logarítmica a la esfera unitaria $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$? En la literatura es bastante común estudiar los potenciales de Riesz y también usar el mismo potencial logarítmico en este contexto. Sin embargo, en una variedad Riemanniana general M , la energía de Green

$$E_M(p_1, \dots, p_N) = \sum_{i \neq j} G(M; p_i, p_j),$$

donde $G(M; \cdot, \cdot)$ es la función de Green en M asociada al operador de Laplace–Beltrami, es una opción más natural, ya que no depende de cantidades extrínsecas (como hemos explicado en la sección 2.4).

Hemos visto anteriormente que la función de Green en $\mathbb{S}^2$ es

$$G(\mathbb{S}^2; p, q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|p - q\| - \frac{1}{4\pi} + \frac{\ln 2}{2\pi},$$

por lo que sabemos que se trata del potencial logarítmico a excepción de las constantes multiplicativas y aditivas, lo cual es la verdadera razón por la que el argumento de Lauritsen puede ser aplicado directamente en $\mathbb{S}^2$ (como hemos hecho en la sección 4.2).

Por ello, es posible extender la energía de Green y el cálculo de la cota inferior de la energía logarítmica a $\mathbb{S}^n$.

En el artículo [9] se calcula una cota inferior para la energía de Green en $\mathbb{S}^n$. Aunque esta extensión se sale del trabajo por su complejidad, hemos intentado al menos entender qué es la función de Green en $\mathbb{S}^n$, a lo que dedicaremos el resto de este capítulo.

Sea

$$V_n = \text{vol}(\mathbb{S}^n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

vamos a calcular una fórmula explícita para la energía de Green en $\mathbb{S}^n$.

Proposición 5.1. La función de Green para $\mathbb{S}^n$ es $G(\mathbb{S}^n; p, q) = g(\|p - q\|)$, donde

$$g(t) = \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left[\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^{k+1} - \frac{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + k + 1\right)}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \right].$$

(Véase (2.1) para la definición del símbolo de Pochhammer $(n)_k$. Aquí, $B(\cdot, \cdot)$ es la función beta (2.3)).

Una expresión alternativa y equivalente de la función de Green para $\mathbb{S}^n$ se da en [1], aunque con una normalización diferente.

Demostración. Siguiendo el método que hemos presentado en la sección 2.5 para calcular la función de Green en variedades armónicas compactas, tenemos que

$$G(\mathbb{S}^n; p, q) = \phi(\mathbb{S}^n; d_R(p, q)),$$

con

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \int_r^\pi \frac{2^{n-1} B_{\cos^2 \frac{s}{2}}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)}{V_n \sin^{n-1} s} ds + C, \quad C \text{ constante.}$$

(También hemos usado el Lema 2.20). Por (2.4) y [19, (9.131.1)] tenemos que

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \frac{1}{nV_n} \int_r^\pi \sin s {}_2F_1\left(1, n; \frac{n}{2} + 1; \cos^2 \frac{s}{2}\right) ds + C.$$

Usando (2.2), las identidades del medio ángulo y el cambio de variable $t = \frac{1+\cos r}{2}$ obtenemos

$$\phi(\mathbb{S}^n; r) = \frac{1}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \frac{1}{2^k (k+1)} (1 + \cos r)^{k+1} + C.$$

Veamos que $\|p - q\|^2 = 2(1 - \langle p, q \rangle)$ y $r = \arccos(\langle p, q \rangle)$:

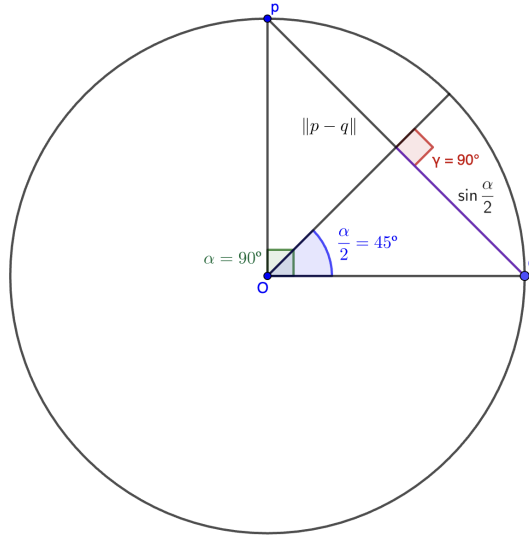


Figura 5.1: Distancia euclidiana en $\mathbb{S}^2$ tomando el círculo máximo que pasa por p y q

Sean $p, q \in \mathbb{S}^2$ y sea α el ángulo formado por p y q , tomando el círculo máximo centrado en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que los une, vemos ayudándonos de la Figura 5.1 que

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\alpha}{2} &= \|p - q\| \\ 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} &= \|p - q\| \\ \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} &= \frac{\|p - q\|}{2} \\ \frac{1 - \cos \alpha}{2} &= \left(\frac{\|p - q\|}{2} \right)^2 \\ \frac{1 - \cos \alpha}{2} &= \frac{\|p - q\|^2}{4} \\ \frac{4(1 - \cos \alpha)}{2} &= \|p - q\|^2 \\ 2(1 - \cos \alpha) &= \|p - q\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, llegamos a que

$$\|p - q\|^2 = 2 - 2 \cos \alpha.$$

Otra forma de comprobar esto, utilizando que $p, q \in \mathbb{S}^2$, sería la siguiente:

$$\begin{aligned} \|p - q\|^2 &= \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\langle p, q \rangle \\ &= 1 + 1 - 2 \cos \alpha, \end{aligned}$$

llegando de nuevo a que

$$\|p - q\|^2 = 2 - 2 \cos \alpha.$$

Por lo tanto,

$$(1 + \cos r)^{k+1} = 2^{k+1} \left(1 - \frac{\|p - q\|^2}{4} \right)^{k+1}, \quad p, q \in \mathbb{S}^n,$$

y así obtenemos

$$G(\mathbb{S}^n; p, q) = \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)_k} \left(1 - \frac{\|p - q\|^2}{4} \right)^{k+1} + C.$$

Nos falta calcular C tal que $G(\mathbb{S}^n; p, \cdot)$ tenga media cero en $\mathbb{S}^n$. Sin pérdida de generalidad, tomamos $p = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^n$. Sea $\varphi_{\mathbb{S}^n \setminus \{N\}}$ la parametrización de $\mathbb{S}^n$ dada por la proyección estereográfica inversa:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \quad z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\frac{2z_1}{1 + \|z\|^2}, \dots, \frac{2z_n}{1 + \|z\|^2}, \frac{\|z\|^2 - 1}{1 + \|z\|^2} \right),$$

cuyo jacobiano es $2^n / (1 + \|z\|^2)^n$. Entonces

$$\|\varphi(0) - \varphi(z)\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{1 + \|z\|^2},$$

y por tanto tenemos que

$$\frac{1}{V_n} \int_{\mathbb{S}^n} G(\mathbb{S}^n; p, q) dq = C + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2}{nV_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left(\frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{k+1} \frac{2^n}{(1 + \|z\|^2)^n} dz,$$

lo cual es cero si, y sólo si

$$C = -\frac{2^{n+1}}{nV_n^2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n)_k}{(k+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)_k} \left(\frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{n+k+1} dz.$$

Es suficiente intercambiar la suma con la integral y pasar a coordenadas polares, recordando la definición de la función beta y el hecho de que

$$V_n = 2^{n-1} V_{n-1} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right),$$

para concluir el resultado. □

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado el séptimo problema propuesto por el matemático estadounidense Steve Smale.

Para ello, hemos visto que era necesario conocer y entender varios conceptos y técnicas que no han sido estudiados en el grado, combinándolos con otros ya conocidos. Por eso, se ha dedicado el segundo capítulo de la memoria a presentar todos estos resultados que nos han sido de utilidad a lo largo del trabajo.

El mayor esfuerzo lo hemos dedicado a obtener la cota inferior de la energía logarítmica presentada en el enunciado de dicho problema. En el capítulo que hemos dedicado a ello, se han tenido que aplicar la mayor parte de las técnicas mencionadas anteriormente con el fin de posibilitar y facilitar la obtención de la cota inferior.

Hemos conseguido entender y explicar detalladamente las ideas presentadas en [9] para llegar a la cota inferior de Lauritsen adaptándolo directamente a la esfera $\mathbb{S}^2$.

Aunque no hemos extendido esta cota inferior a $\mathbb{S}^n$, sí que hemos concluido la memoria haciendo una introducción a la función de Green en $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^n$, la cual es de suma importancia para este problema como se ha visto a lo largo de la memoria.

Capítulo 7

Referencias

1. Anderson, A., Dostert, M., Grabner, P.J., Matzke, R.W., Stepaniuk, T.A. (2022). Riesz and Green energy on projective spaces. *arXiv:2204.04015 [math.CA]*.
2. Baker, M. (2006). A lower bound for average values of dynamical Green's functions. *Math. Res. Lett.*, **13**(2), 245–257.
3. Beltrán, C. (2013). Harmonic properties of the logarithmic potential and the computability of elliptic Fekete points. *Constr. Approx.*, **37**, 135–165.
4. Beltrán, C. (2020). Sobre el problema número 7 de Smale. *La Gaceta de la RSME*, **23**(3), 507–534.
5. Beltrán, C., Corral, N., Criado del Rey, J.G. (2019). Discrete and continuous green energy on compact manifolds. *J. Approx. Theory*, **237**, 160–185.
6. Beltrán, C., Etayo, U., López-Gómez, P.R. (2023). Low-energy points on the sphere and the real projective plane. *J. Complex* (aceptado).
7. Beltrán, C., Etayo, U., Marzo, J., Ortega-Cerdà, J. (2021). A sequence of polynomials with optimal condition number. *J. Am. Math. Soc.*, **34**, 219–244.
8. Beltrán, C., Lizarte, F. (2022). On the minimum value of the condition number of polynomials. *IMA J. Numer. Anal.* <https://doi.org/10.1093/imanum/drab070>.
9. Beltrán, C., Lizarte, F. (2023). A lower bound for the logarithmic energy on $\mathbb{S}^2$ and for the green energy on $\mathbb{S}^n$. (English summary) *Constr. Approx.* **58**(3), 565–587.
10. Bétermin, L., Sandier, E. (2018). Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere. *Constr. Approx.*, **47**, 39–74.
11. Borodachov, S.V., Hardin, D.P., Saff, E.B. (2019). Discrete energy on rectifiable sets. *Springer*, New York.
12. Brauchart, J.S. (2008). Optimal logarithmic energy points on the unit sphere. *Math. Comput.*, **77**(263), 1599–1613.

13. Brauchart, J.S., Hardin, D.P., Saff, E.B. (2012). The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere. In: Providence, R.I. (ed.) *Recent Advances in Orthogonal Polynomials, Special Functions, and Their Applications*, pp. 31–61. American Mathematical Society, New York.
14. Choquet-Bruhat, Y. (2000). *Analysis, Manifolds and Physics, Part I: Basics* (Revised ed.). North-Holland, Amsterdam.
15. Criado del Rey, J.G. (2018). Métricas de condicionamiento y puntos bien distribuidos en variedades. *Tesis doctoral, Universidad de Cantabria*.
16. Dubickas, A. (1996). On the maximal product of distances between points on a sphere. *Liet. Mat. Rink.*, **36**(3), 303–312.
17. Facenda Aguirre, J.A., Freniche Ibáñez, F.J. (2004). *Integración de funciones de varias variables*. Universidad de Sevilla.
18. Fernández, L.A. (2022). *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria. Febrero.
19. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (2015). Table of Integrals, Series, and Products, 8th ed. *Elsevier*, Amsterdam.
20. https://en.wikipedia.org/wiki/Hahn_decomposition_theorem
21. Lauritsen, A.B. (2021). Floating Wigner crystal and periodic jellium configurations. *J. Math. Phys.*, **62**, 083305. <https://doi.org/10.1063/5.0053494>.
22. Lang, S. (1988). Introduction to Arakelov Theory. *Springer*, New York.
23. Marzo, J., Mas, A. (2021). Discrepancy of minimal Riesz energy points. *Constr. Approx.*, **54**, 473–506.
24. Rakhmanov, E.A., Saff, E.B., Zhou, Y.M. (1994). Minimal discrete energy on the sphere. *Math. Res. Lett.*, **1**(6), 647–662.
25. Shub, M., Smale, S. (1993). Complexity of Bezout’s theorem. III. Condition number and packing. *J. Complex.*, **9**, 4–14.
26. Smale, S. (2000). Mathematical problems for the next century. In: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, pp. 271–294.
27. Steinerberger, S. (2021). A Wasserstein inequality and minimal Green energy on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, **281**, 109076.
28. Steinerberger, S. (2022). On the logarithmic energy of points on $\mathbb{S}^2$. *JAMA*, **148**, 187–211.
29. Wagner, G. (1989). On the product of distances to a point set on a sphere. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **47**(3), 466–482.