



**Facultad  
de  
Ciencias**

**Existencia de soluciones periódicas  
en sistemas diferenciales  
autónomos planos**

**(Existence of periodic solutions in planar  
autonomous differential systems)**

**Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al**

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Autor: Alejandro González Ríos**

**Directora: Delfina Gómez Gandarillas**

**Junio-2025**



# Agradecimientos

Me gustaría agradecer en primer lugar a Delfina su inestimable ayuda prestada para el desarrollo de este trabajo y por todas las dudas resueltas tanto en nuestras reuniones como fuera de ellas.

En segundo lugar, gracias a toda mi familia y a Carmen el apoyo incondicional ofrecido tanto en los momentos fáciles como en los difíciles, antes incluso de empezar mi etapa universitaria. Sé que sin vosotros todo hubiese sido mucho más complicado.

Por último, no quiero olvidarme de ninguno de los amigos y amigas con los que he tenido el placer de compartir estos cinco años. A los que conocí en Manchester, a los que siguen en Santander y a los que continuaron sus estudios en otras partes del mundo, gracias por todos los momentos vividos, no hubiese sido lo mismo sin vosotros.



# Resumen/Abstract

## Resumen:

El objetivo de este trabajo es estudiar la existencia y unicidad de soluciones periódicas en sistemas diferenciales autónomos planos. En particular, la existencia de ciclos límite, es decir, trayectorias del sistema asociadas a soluciones periódicas a las cuales se aproximan otras trayectorias cuando el tiempo avanza o retrocede. Para ello, se introducen nociones y resultados sobre este tipo de sistemas diferenciales, entre los que destaca el Teorema de Poincaré-Bendixson, del cual se proporciona su demostración con todo detalle y varios ejemplos con distintos conjuntos límite que se pueden presentar. Posteriormente, se estudia una demostración autocontenida del Teorema de Liénard, el cual garantiza la existencia y unicidad de ciclos límite asintóticamente estables en el sistema asociado a un tipo de ecuación diferencial de segundo orden, la denominada ecuación de Liénard, que se utiliza para modelar sistemas físicos de carácter oscilatorio. Finalmente, se incluyen ejemplos de este tipo de sistemas y se analiza una extensión del Teorema de Liénard que garantiza la existencia pero no la unicidad de ciclos para una ecuación más general que la de Liénard.

**Palabras clave:** sistemas autónomos planos, soluciones periódicas, ciclos límite, Teorema de Poincaré-Bendixson, Teorema de Liénard.

## Abstract:

The aim of this work is to study the existence and uniqueness of periodic solutions in planar autonomous differential systems. In particular, the existence of limit cycles, this is, trajectories of the system associated with periodic solutions to which other trajectories converge as time moves forward or backward. In this context, notions and results related to this type of differential systems are introduced, with special emphasis on the Poincaré-Bendixson Theorem, whose proof is provided with detail and some examples with several limit sets that can exist. Subsequently, a self-contained proof of Liénard Theorem is studied. This theorem ensures the existence and uniqueness of asymptotically stable limit cycles in the system associated to a specific type of second-order differential equation, the so-called Liénard equation, which is used to model the behaviour of oscillatory physical systems. Finally, examples of such systems are included and an extension of Liénard Theorem is analyzed, which guarantees the existence, but not the uniqueness, of cycles for a more general equation than Liénard equation.

**Keywords:** planar autonomous systems, periodic solutions, limit cycles, Poincaré-Bendixson Theorem, Liénard Theorem.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>2. Teorema de Poincaré-Bendixson</b>	<b>11</b>
2.1. Conjuntos $\alpha$ -límite y $\omega$ -límite y sus propiedades . . . . .	12
2.2. Comportamiento cerca de puntos regulares . . . . .	16
2.3. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	21
2.4. Ciclos límite y estabilidad de ciclos . . . . .	28
<b>3. Teorema de Liénard</b>	<b>31</b>
3.1. Ejemplos de sistemas físicos . . . . .	31
3.2. Teorema de Liénard . . . . .	35
3.3. Extensión del Teorema de Liénard . . . . .	45
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Introducción

El estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó en el siglo XIX. Inicialmente, fue el francés Poincaré uno de los pioneros en desarrollar herramientas que permitieran conocer el comportamiento global de las soluciones de dichos sistemas sin necesidad de calcularlas explícitamente (ver [15]). En 1892, el mismo año que se publicó la obra de Poincaré, el matemático ruso Liapunov proporcionó una teoría para abordar la estabilidad de las soluciones, aplicable especialmente a sistemas autónomos en los que no existe una dependencia temporal explícita. En concreto, la teoría de Liapunov permite analizar la estabilidad de los puntos críticos del sistema haciendo uso de una función auxiliar, relacionada con la energía en problemas físicos, y sin necesidad de resolver el sistema (ver [10] y [6]).

Posteriormente, a lo largo del siglo XX matemáticos como el sueco Bendixson (ver [3]), los americanos Coddington y Levinson (ver [5]), el ruso Andronov (ver [1]) y el americano Perko (ver [14]) desarrollaron esta teoría cualitativa de sistemas diferenciales, estudiando conceptos como la estabilidad de sus soluciones, el comportamiento de las trayectorias en tiempos infinitos y el mapa de fases. Además, en relación con este trabajo se destaca la obra del físico e ingeniero francés Liénard (ver [11]), quien se centró en el estudio de la existencia de soluciones periódicas y su relación con determinados sistemas físicos con comportamiento oscilatorio. Algunos de estos sistemas, como se desarrolla en [2], son el latido del corazón y modelos económicos cíclicos.

El objetivo de esta memoria es proporcionar algunos resultados introducidos por varios de estos autores que permitan afirmar la existencia (y unicidad, en ocasiones) de soluciones periódicas en sistemas diferenciales autónomos planos. Los resultados más significativos que se desarrollan son el Teorema de Poincaré-Bendixson, el Teorema de Liénard y un teorema de extensión de este último, de los cuales se abordan sus demostraciones con todo detalle y se incluyen varios ejemplos que los ilustran.

En el Capítulo 1, se introducen las nociones necesarias para trabajar con sistemas autónomos. Se define el concepto de solución para estos sistemas, y se dan condiciones suficientes para asegurar la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy asociado. Además, se demuestran las principales propiedades de las soluciones de este tipo de sistemas, las cuales se utilizan a lo largo de todo el trabajo, como por ejemplo que cualquier trasladada de una solución es también solución. Usando estas características de las soluciones, posteriormente se aportan propiedades de las trayectorias, las cuales se definen como el conjunto imagen de las soluciones y son esenciales para comprender la evolución temporal del sistema. Al igual que ocurre con las propiedades de las soluciones, las de las trayectorias son consecuencia del hecho de trabajar con sistemas autónomos planos. Las características más importantes a la hora de considerar este tipo de sistemas en cuanto al carácter de las trayectorias son dos. La primera de ellas, que por un punto cualquiera del plano pasa una única trayectoria. La segunda característica, que las trayectorias solo pueden ser de tres tipos: puntos críticos asociados a soluciones constantes, curvas cerradas

simples asociadas a soluciones periódicas (el foco de interés del trabajo) o curvas abiertas.

En el Capítulo 2, se presentan los conceptos y resultados imprescindibles para proporcionar una demostración autocontenida del Teorema de Poincaré-Bendixson. Se comienza estudiando las definiciones de conjunto  $\omega$ -límite y conjunto  $\alpha$ -límite de una trayectoria, los cuales sirven para caracterizar el comportamiento de la misma en tiempos infinitos. Más adelante, se aportan propiedades de estos conjuntos que se utilizan en las demostraciones de los resultados posteriores. También se introducen resultados sobre el comportamiento de las trayectorias de sistemas autónomos en un entorno de un punto regular cualquiera (un punto que no es crítico), y solo son ciertos para sistemas autónomos planos pues en sus demostraciones se utilizan propiedades básicas de la geometría plana. Posteriormente, se enuncia y demuestra el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual aporta información sobre qué tipos de conjuntos pueden ser conjuntos límite de trayectorias acotadas. Además, este teorema se puede emplear para garantizar la existencia de al menos un ciclo contenido en una región compacta del plano que no contiene puntos críticos, lo que es utilizado en resultados posteriores del Capítulo 3. Finalmente, se presenta la definición de ciclo límite y se estudia la noción de estabilidad de ciclos de un sistema autónomo, clasificándolos en estables (y asintóticamente estables), semiestables (y asintóticamente semiestables) e inestables.

En el Capítulo 3, se comienza introduciendo la ecuación de Liénard, la cual es una ecuación diferencial autónoma de segundo orden dependiente de dos funciones continuas, y se presentan dos ejemplos de sistemas físicos de carácter oscilatorio cuyo comportamiento viene modelado por esta ecuación: el péndulo amortiguado y el oscilador de van der Pol. A continuación, se enuncia y demuestra el Teorema de Liénard, el cual establece la existencia y unicidad de un ciclo límite asintóticamente estable bajo ciertas condiciones de las funciones presentes en la ecuación de Liénard, y se estudia la aplicación de este teorema en la ecuación del péndulo amortiguado y en la ecuación de van der Pol. Por último, se enuncia y demuestra un teorema de extensión del Teorema de Liénard, el cual garantiza la existencia de un ciclo pero no su unicidad en el mapa de fases del sistema asociado a una ecuación de tipo Liénard en la que las funciones que la caracterizan cumplen hipótesis menos restrictivas que en el teorema que lleva el mismo nombre.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este primer capítulo del presente trabajo se introducen conceptos y resultados previos necesarios para comprender la teoría desarrollada en los siguientes. A lo largo de toda la memoria se van a estudiar sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias en  $\mathbb{R}^2$  (denominados planos). En concreto, se va a trabajar con un tipo determinado de sistemas planos, denominados autónomos, cuya definición se comienza recordando.

**Definición 1.1** *Se llama sistema autónomo plano a todo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma*

$$x'(t) = f(x(t))$$

donde  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $I$  un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$  es una función incógnita y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $D$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  con la topología usual es una función conocida.

Esto es, los sistemas autónomos son aquellos en los que la función  $f$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ . Normalmente se escribirán como  $x' = f(x)$ . Este tipo de sistemas es de sumo interés en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues presentan una serie de propiedades características que los diferencian de los sistemas no autónomos. Algunas de estas propiedades se resumen a continuación, por ejemplo en la Proposición 1.4, pero previamente es necesario introducir algunos conceptos y cierta notación que se va a mantener a lo largo del trabajo. Para esto, se ha seguido el libro [14] y se ha considerado la notación empleada en [12].

En primer lugar, se presenta el concepto de solución de un sistema autónomo y de un problema de Cauchy o de valores iniciales.

**Definición 1.2** *Sea  $x' = f(x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función cualquiera. Se dice solución del sistema autónomo a toda función diferenciable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  no trivial que cumple que para todo  $t \in I$ ,  $x(t) \in D$  y  $x'(t) = f(x(t))$ . Además, dado un par  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$ ,  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dice solución del problema de Cauchy o de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

si  $t_0 \in I$ ,  $x(t_0) = x_0$  y  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es solución del sistema  $x' = f(x)$  en el intervalo  $I$ .

Cabe indicar en este punto que la norma empleada a lo largo de todo el trabajo va a ser la norma euclídea en  $\mathbb{R}^2$  y se va a denotar simplemente por  $\|\cdot\|$ . Es decir, dado un vector  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , se tiene  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Además, se va a denotar por  $B(p, r)$  la bola cerrada de centro  $p \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r > 0$ , es decir,  $B(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^2 : \|q - p\| \leq r\}$ .

Ahora, se va a introducir el Teorema de Cauchy-Picard, enunciado y demostrado por ejemplo en [14], que permite asegurar la existencia y unicidad de solución local del problema de valores iniciales (1.1). Antes de presentarlo, es necesario recordar la noción de función lipschitziana. Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se dice localmente lipschitziana si para cada punto  $x_0 \in D$  existe un entorno de  $x_0$  en  $D$  y una constante  $L > 0$  tal que para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de dicho entorno se cumple  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ . Como se enuncia a continuación, que la función  $f$  sea continua y localmente lipschitziana es condición suficiente para que el problema de valores iniciales tenga una única solución local.

**Teorema 1.3** (Teorema de existencia y unicidad de solución local) *Dado un par  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times D$ , donde  $D$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ , y dada  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua y localmente lipschitziana, entonces existe  $h > 0$  tal que el problema de valores iniciales (1.1) tiene una solución única definida al menos en el intervalo  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .*

La demostración de este teorema, la cual no se expone en esta memoria, pasa por definir los iterantes de Picard y probar que éstos convergen a una función que verifica el problema de Cauchy (1.1). Posteriormente, se utiliza el lema de Gronwall para probar la unicidad de esta función.

En el Teorema 1.3 se considera una función  $f$  continua y localmente lipschitziana, lo que permite asegurar la existencia y unicidad de solución local. Sin embargo, empleando el teorema del valor medio se puede demostrar, como se hace por ejemplo en [14], que si la función  $f$  es de clase  $C^1$  en un conjunto abierto del plano entonces dicha función es localmente lipschitziana en dicho conjunto. De esta manera, para asegurar que existe una única solución local del problema de Cauchy, es condición suficiente simplemente que la función  $f$  sea de clase  $C^1$  en un conjunto abierto del plano. Esto es lo que se va a suponer de ahora en adelante en el resto del capítulo para asegurar la existencia y unicidad de solución local, que la función  $f$  es de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Se introducen ahora algunas propiedades esenciales de las soluciones de los sistemas autónomos que se utilizarán a lo largo de la memoria.

**Proposición 1.4** *Sea  $x' = f(x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  y  $D$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  solución de  $x' = f(x)$  con  $I$  un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$ . Se tiene:*

1. *Para cualquier  $C \in \mathbb{R}$ , la función definida por  $\phi_C(t) := \phi(t + C)$  es solución de  $x' = f(x)$ . A  $\phi_C$  se le denomina función trasladada.*
2. *Si  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $J$  un intervalo no trivial de  $\mathbb{R}$  es solución de  $x' = f(x)$  tal que  $\phi(t_1) = \psi(t_2)$  con  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $\phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ .*
3. *Si existen  $t_1 < t_2$  tales que  $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ , entonces  $\phi$  es constante o periódica.*

### Demostración.

1. Fijado un  $C \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\phi'_C(t) = \frac{d}{dt}\phi_C(t) = \frac{d}{dt}[\phi(t + C)] = \phi'(t + C) \cdot 1 = f(\phi(t + C)) = f(\phi_C(t)) \quad \forall t,$$

donde se ha utilizado la definición de función trasladada, la regla de la cadena y el hecho de que  $\phi$  es solución del sistema autónomo. Así,  $\phi_C$  es solución del sistema  $x' = f(x)$ .

2. Se define  $\phi_1(t) := \psi(t + t_2 - t_1)$ . Como  $\psi$  es solución de  $x' = f(x)$ , por el apartado 1,  $\phi_1$  es también solución del sistema. Además, verifica  $\phi_1(t_1) = \psi(t_1 + t_2 - t_1) = \psi(t_2) = \phi(t_1)$ , donde la última igualdad se tiene por hipótesis. Luego tanto  $\phi$  como  $\phi_1$  son soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_1) = \phi(t_1) \end{cases} .$$

En consecuencia, por el teorema de existencia y unicidad de solución local, Teorema 1.3, como  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$  el problema de valores iniciales tiene solución y es única y así  $\phi(t) = \phi_1(t) \forall t \in I$ . Pero  $\phi_1(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ , luego  $\phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1) \forall t \in I$ .

3. Simplemente basta considerar  $\psi = \phi$  en el apartado 2 y se tiene que  $\phi(t) = \phi(t + t_2 - t_1) = \phi(t + T) \forall t \in I$ , por lo que  $\phi$  es periódica de periodo  $T = t_2 - t_1 > 0$ . ■

De esta forma, por la Proposición 1.4 siempre se va a poder suponer a partir de ahora que  $t_0 = 0$ , ya que si  $t_0 \neq 0$ , se puede considerar la traslación  $\phi_{t_0}(t) = \phi(t + t_0)$ , que también es solución por dicha proposición y verifica  $\phi_{t_0}(0) = \phi(t_0)$ . En este punto, cabe introducir la notación  $x(t, x_0)$  que se va a seguir en el resto de la memoria como la única solución del sistema autónomo  $x' = f(x)$  que cumple  $x(0) = x_0$ , en la que como se ha indicado se puede considerar  $t_0 = 0$ .

Ahora, una vez que se ha introducido el concepto de solución de un problema de Cauchy y se han presentado las condiciones suficientes para asegurar que existe solución única, se pueden repasar los conceptos de gráfica y trayectoria de una solución.

Se denomina gráfica de la solución  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  al conjunto  $\{(t, x(t, x_0)) \in \mathbb{R}^3 : t \in I\}$ , y se define la trayectoria u órbita de la solución al conjunto  $\{x(t, x_0) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$ . Así, la trayectoria de una solución se puede entender que es el conjunto imagen de dicha solución, o la proyección de la gráfica de dicha solución dada por  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que a cada punto  $(t, x(t, x_0))$  de  $\mathbb{R}^3$  le asocia el punto  $x(t, x_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Además, se recuerda que existen dos tipos fundamentales de trayectorias: aquellas trayectorias que se reducen a un único punto, que están asociadas a soluciones constantes y se denominan puntos críticos, y aquellas trayectorias asociadas a soluciones periódicas, denominadas ciclos, las cuales como se prueba en el Corolario 1.6 son curvas cerradas simples de  $\mathbb{R}^2$ . Un ejemplo de estos tipos de trayectorias se muestra a continuación.

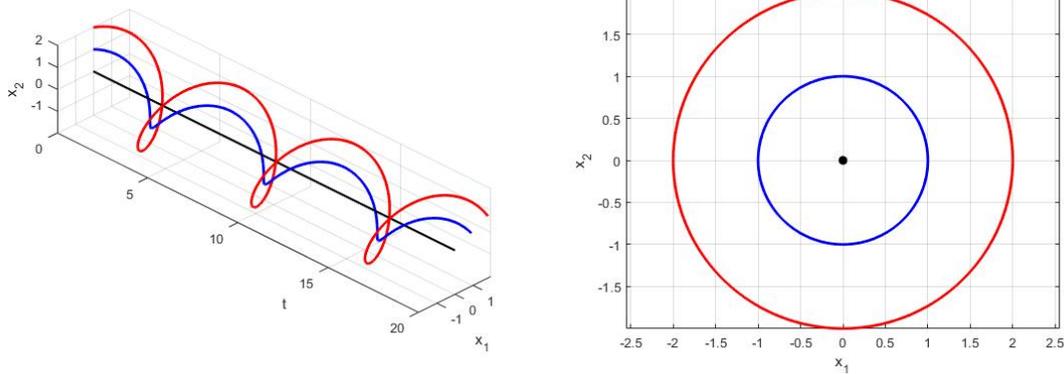
**Ejemplo 1.5** *Se considera el sistema autónomo plano*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases} , \quad (1.2)$$

asociado a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden  $x'' + x = 0$  y cuyas soluciones vienen dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ x_2(t) = C_1 \cos t - C_2 \sin t \end{cases} ,$$

donde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Tomando  $C_1 = C_2 = 0$  se obtiene la solución constante trivial, cuya trayectoria es el punto crítico  $(0, 0)$  y se corresponde con el trazo negro de la Figura 1.1. Tomando  $C_1 = 1, C_2 = 0$  se obtiene la solución periódica  $x(t) = (\sin t, \cos t)$ , cuya trayectoria es el ciclo formado por la circunferencia unidad (trazo azul). Considerando  $C_1 = 2, C_2 = 0$  se obtiene la solución periódica  $x(t) = (2 \sin t, 2 \cos t)$ , cuya trayectoria es el ciclo formado por la circunferencia de radio 2 (trazo rojo).



(a) Gráficas de varias soluciones.

(b) Trayectorias de varias soluciones.

Figura 1.1: Gráficas y trayectorias de algunas soluciones del sistema (1.2).

En este punto y a partir de la Proposición 1.4 se pueden extraer varias propiedades que poseen las trayectorias de sistemas autónomos, las cuales se dan en forma de corolario, cuya demostración se ha estudiado a partir de [12].

**Corolario 1.6** Sea  $x' = f(x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Se tiene:

1. Una solución  $\phi$  y todas sus trasladadas  $\phi_C$  tienen la misma trayectoria.
2. Si dos soluciones tienen la misma trayectoria, cada una de ellas es una trasladada de la otra.
3. Si dos trayectorias se cortan en un punto, éstas son la misma.
4. Si una trayectoria que no es un punto crítico pasa dos veces por el mismo punto, la solución correspondiente es periódica y la trayectoria es una curva cerrada simple.

### Demostración.

1. Por el apartado 1 de la Proposición 1.4, todas las trasladadas de una solución son también solución. En consecuencia, ya que la trayectoria es el conjunto imagen de la solución, se tiene que la trayectoria es la misma para una solución que para todas sus trasladadas.
2. Si dos soluciones  $\phi$  y  $\psi$  tienen la misma trayectoria, entonces existen  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $\phi(t_1) = \psi(t_2)$ , por lo que por el apartado 2 de la Proposición 1.4 se tiene que  $\phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ , lo que es equivalente a decir que cada una de las soluciones es una trasladada de la otra.
3. Si dos trayectorias asociadas a dos soluciones diferentes  $\phi$  y  $\psi$  se cortan en un punto, entonces existen  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $\phi(t_1) = \psi(t_2)$ , por lo que por el apartado 2 de la Proposición 1.4 se tiene  $\phi(t) = \psi(t + t_2 - t_1)$ . En consecuencia, la solución  $\phi$  es una trasladada de la solución  $\psi$ , y por el apartado 1 del Corolario 1.6 se concluye que ambas tienen la misma trayectoria, por tanto las dos trayectorias tomadas al inicio son la misma.

4. Si una trayectoria que no es un punto crítico asociada a una solución  $\phi$  pasa dos veces por el mismo punto, entonces existen  $t_1 < t_2$  tales que  $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ , por lo que por el apartado 3 de la Proposición 1.4  $\phi$  es periódica de periodo  $T = t_2 - t_1 > 0$ . Esto es,  $\phi(t) = \phi(t + T)$  para todo tiempo en que está definida la solución. Falta demostrar que la trayectoria asociada a dicha solución es una curva cerrada simple. Para ello, se define en primer lugar el conjunto

$$\bar{p} = \inf\{p : 0 < p \leq T, \phi(t) \text{ es } p\text{-periódica}\}.$$

Así, se tiene  $0 \leq \bar{p} \leq T$  y existe una sucesión  $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $p_m \in [\bar{p}, T]$  para todo  $m$  y con  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = \bar{p}$  tal que  $\phi$  es  $p_m$ -periódica para todo  $m$ . Se distinguen a continuación dos casos diferentes.

Si  $\bar{p} = 0$ , se supone  $t > 0$  y el caso en que  $t < 0$  es análogo. Para cada  $p_m > 0$ , existe un entero  $k_m \geq 0$  tal que  $t = k_m p_m + t_m$  con  $0 \leq t_m < p_m$  y

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} t_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} p_m = \bar{p} = 0.$$

Además, como  $\phi$  es  $p_m$ -periódica se tiene  $\phi(t) = \phi(k_m p_m + t_m) = \phi(t_m)$ . En consecuencia, por la continuidad de las soluciones se obtiene

$$\phi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(t_m) = \phi(0).$$

Esto es,  $\phi(t) = \phi(0)$  para todo  $t$  y por tanto la solución es constante y la trayectoria asociada es un punto crítico. Pero se ha supuesto que la trayectoria no es un punto crítico, así que este caso en realidad no puede ocurrir.

Si  $\bar{p} > 0$ , aplicando la continuidad y la periodicidad de la solución  $\phi$  se tiene

$$\phi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(t + p_m) = \phi(t + \bar{p}),$$

lo que implica que  $\bar{p}$  es el periodo positivo más pequeño de la solución  $\phi$ . En consecuencia, si la solución  $\phi$  empieza para  $t = 0$  en  $\phi(0)$ , para  $\bar{p}$  es la primera vez que se cumple  $\phi(0) = \phi(\bar{p})$ . Si no sucediera esto, existiría un  $p_0$  con  $0 < p_0 < \bar{p}$  tal que  $\phi(0) = \phi(p_0)$ , y por tanto por el apartado 2 de la Proposición 1.4 se tendría  $\phi(t) = \phi(t + p_0)$  para todo tiempo en que está definida la solución, por lo que  $p_0 < \bar{p}$  sería también un periodo positivo y se estaría contradiciendo el hecho de que  $\bar{p}$  es el periodo positivo más pequeño de la solución  $\phi$ . Después de  $t = \bar{p}$ ,  $\phi$  se repite porque es  $\bar{p}$ -periódica. Por tanto, la trayectoria asociada a dicha solución es una curva cerrada simple y así queda demostrado el apartado. ■

Como consecuencia directa del apartado 4 del Corolario 1.6, si una solución es periódica la trayectoria asociada es una curva cerrada simple. Por lo tanto, se puede asociar el concepto de ciclo directamente con una trayectoria que consiste en una curva cerrada simple.

Se expone ahora otro resultado obtenido del anterior que garantiza que en sistemas autónomos planos, para cada punto del plano, existe una única trayectoria que pasa por dicho punto y que permite clasificar las trayectorias de estos sistemas en únicamente tres tipos diferentes.

**Corolario 1.7** Sea  $x' = f(x)$  con  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Se tiene:

1. Por cada punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  pasa una única trayectoria.
2. Las trayectorias pueden ser puntos (puntos críticos, correspondientes a soluciones constantes), curvas cerradas simples (ciclos, correspondientes a soluciones periódicas) o curvas abiertas.

Estos dos resultados se tienen debido a las propiedades descritas en el Corolario 1.6 que cumplen las trayectorias de sistemas autónomos planos. La existencia de trayectorias, en concreto, es trivial a partir del teorema de existencia y unicidad de solución local del problema de Cauchy (Teorema 1.3). La unicidad de trayectorias viene del punto 3 del citado corolario, ya que si existiera un punto tal que por él pasaran dos trayectorias diferentes, entonces esas trayectorias se estarían cortando en dicho punto y en consecuencia serían la misma.

El segundo apartado del Corolario 1.7 expone que además de los puntos críticos (asociados a soluciones constantes) y los ciclos (curvas cerradas simples, asociados a soluciones periódicas) el único tipo de trayectorias que puede existir en sistemas autónomos planos son las curvas abiertas. Esto se debe de manera directa al punto 4 del Corolario 1.6, ya que en él se ha demostrado que en caso de que una trayectoria no sea un punto crítico y se autointerseque, entonces ésta es un ciclo, es decir, una curva cerrada simple. En consecuencia, sólo pueden existir como trayectorias de un sistema autónomo plano los puntos críticos, los ciclos y curvas que no se autointersequen, es decir, curvas abiertas.

Se puede observar un ejemplo de sistema autónomo plano en el que algunas de sus trayectorias son puntos críticos y ciclos en el Ejemplo 1.5, y se presentan en los Ejemplos 1.8 y 1.9 otros sistemas autónomos planos cuyas trayectorias son puntos críticos o curvas abiertas acotadas y no acotadas.

**Ejemplo 1.8** Se considera el sistema lineal autónomo plano dado por

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}, \quad (1.3)$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\sqrt{5}t} + C_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ x_2(t) = (\sqrt{5} - 2)C_1 e^{\sqrt{5}t} + (-\sqrt{5} - 2)C_2 e^{-\sqrt{5}t} \end{cases},$$

donde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . El único punto crítico de este sistema es el origen y el resto de las trayectorias son las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 - 2x_2},$$

es decir, las curvas abiertas con ecuación implícita

$$|-x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2| = K,$$

donde  $K$  es una constante real mayor o igual que cero. Se representan en el gráfico de la Figura 1.2 algunas de estas trayectorias, correspondientes a los trazos rojos, junto con el punto crítico, que se corresponde con el punto azul.

Se observa en dicho gráfico que las trayectorias de este sistema autónomo que no están asociadas a soluciones constantes son curvas abiertas del plano, que en ningún caso se intersecan con otras ni se autointersecan.

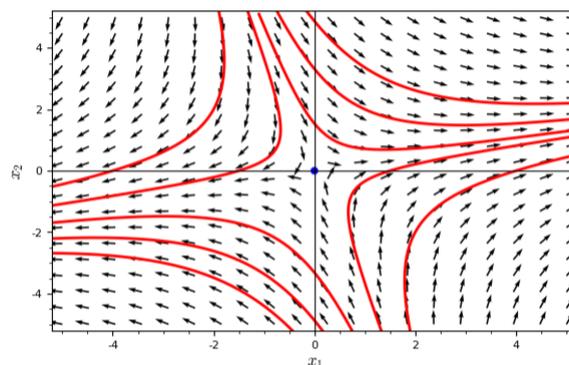


Figura 1.2: Algunas de las trayectorias del sistema lineal autónomo (1.3).

En el gráfico de la Figura 1.2 se representan, además de las trayectorias del sistema, las direcciones que éstas siguen. Este tipo de gráficos se denominan mapas de fases, en los que las direcciones se pueden determinar analizando si las trayectorias crecen o decrecen en función del signo de  $x'_1$  y  $x'_2$ .

**Ejemplo 1.9** Se considera el sistema no lineal autónomo plano dado por

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 - \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)(x_1^3 - x_1) \\ x'_2 = x_1^3 - x_1 - \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)x_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

Es fácil verificar que los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  son puntos críticos del sistema y que la curva cerrada no simple

$$\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = 0$$

verifica la ecuación de las trayectorias

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-x_2 - \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)(x_1^3 - x_1)}{x_1^3 - x_1 - \left(\frac{x_1^4}{4} - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right)x_2}$$

para  $x_1 > 0$  y  $x_1 < 0$ .

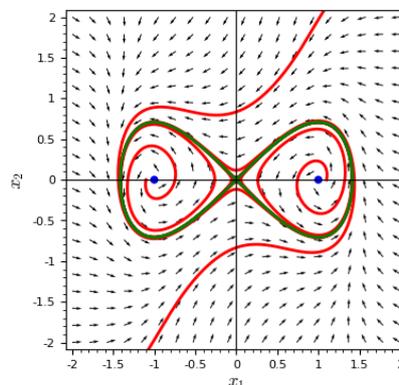


Figura 1.3: Algunas de las trayectorias del sistema no lineal autónomo (1.4).

En la Figura 1.3 se representa el mapa de fases del sistema (1.4), donde los puntos críticos se muestran en azul y la curva en verde. En él, se puede ver que la curva en verde está compuesta por tres trayectorias: dos curvas abiertas que corresponden a  $x_1 > 0$  y  $x_1 < 0$ , respectivamente, y el origen que es punto crítico. De esta manera, existen trayectorias abiertas que son acotadas (las que parten de los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  y están contenidas en el interior de la curva en verde) y trayectorias que son no acotadas (las que están en el exterior de dicha curva).

En este punto en el que ya se han introducido los conceptos de solución y trayectoria y se ha demostrado que en sistemas autónomos planos por cada punto pasa una única trayectoria, se introduce cierta notación que se va a mantener en el resto de la memoria. Así, se va a denotar por  $\Gamma_{x_0}$  o simplemente por  $\Gamma$  la trayectoria asociada a la solución  $x(t, x_0)$  o a cualquiera de sus trasladadas. Es decir,  $\Gamma_{x_0}$  es la única trayectoria del sistema autónomo plano que pasa por el punto  $x_0$  en algún  $t$  real.

## Capítulo 2

# Teorema de Poincaré-Bendixson

A lo largo de este capítulo se van a proporcionar varios resultados que dan información sobre el comportamiento de las trayectorias de sistemas autónomos planos (en  $\mathbb{R}^2$ ) cuando el tiempo tiende a infinito o a menos infinito, a través de la caracterización de los conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de estas trayectorias. El objetivo es enunciar y demostrar el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual es muy útil en el estudio de este tipo de sistemas porque permite restringir en gran medida qué tipos de conjuntos pueden ser conjuntos  $\omega$ -límite o  $\alpha$ -límite de una cierta trayectoria acotada, así como garantizar la existencia de ciclos. La referencia más utilizada a lo largo de este capítulo para llegar a la demostración de dicho teorema es [12], aunque en libros como [5] y [14] también se enuncia y demuestra el Teorema de Poincaré-Bendixson pero empleando notación diferente.

Cabe destacar que los resultados presentados en este capítulo sólo son ciertos para sistemas autónomos planos, a diferencia de los introducidos en el anterior capítulo, los cuales se han particularizado para el caso en  $\mathbb{R}^2$  aunque son ciertos para cualquier dimensión. En el plano, el Teorema de la curva de Jordan es esencial para estudiar la teoría cualitativa de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyo enunciado se repasa a continuación y cuya demostración puede consultarse en [17], entre otros.

**Teorema 2.1** (*Teorema de la curva de Jordan*) Dada  $C$  una curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\mathbb{R}^2 - C = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos no vacíos, disjuntos y conexos tales que

1. La curva  $C$  es la frontera entre  $A$  y  $B$ .
2. Uno de los conjuntos abiertos, por ejemplo  $A$ , es acotado (se denomina el interior de  $C$  y se denota por  $\text{int}(C)$ ) y el otro,  $B$ , es no acotado (denominado el exterior de  $C$  y denotado por  $\text{ext}(C)$ ).

Por otra parte, es importante señalar que a partir de ahora se necesita que las soluciones del sistema autónomo  $x' = f(x)$  sean globales y estén definidas en toda la recta real para poder hablar de conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite. En este sentido, indicar que existen teoremas de existencia y unicidad de solución global del problema de Cauchy (1.1) en los que es condición suficiente que la función  $f$  sea continua y acotada o globalmente lipschitziana, es decir, que existe una constante  $L > 0$  tal que para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  se cumple  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ . Por ejemplo ver [13], donde se consideran teoremas de existencia y unicidad de solución global para el caso general de sistemas no necesariamente autónomos. Así, a partir de este momento se supone que las soluciones de los sistemas autónomos considerados son globales y están definidas en toda la recta real.

## 2.1. Conjuntos $\alpha$ -límite y $\omega$ -límite y sus propiedades

Se introducen a continuación los conceptos de conjunto  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de una trayectoria, los cuales van a ser utilizados a lo largo de este capítulo, así como sus principales propiedades. Para esto, se ha empleado [12].

**Definición 2.2** Dada  $\Gamma = \Gamma_{x_0}$  una trayectoria del sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ , se denomina  $\omega(x_0)$  o  $\omega(\Gamma)$  al conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\Gamma$  o de su solución  $x(t, x_0)$  asociada, es decir, al conjunto de los puntos  $p$  tales que existe una sucesión  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t_m \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x(t_m, x_0) = p$ .

**Definición 2.3** Dada  $\Gamma = \Gamma_{x_0}$  una trayectoria del sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ , se denomina  $\alpha(x_0)$  o  $\alpha(\Gamma)$  al conjunto de todos los puntos  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\Gamma$  o de su solución  $x(t, x_0)$  asociada, es decir, al conjunto de los puntos  $q$  tales que existe una sucesión  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t_m \rightarrow -\infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x(t_m, x_0) = q$ .

A partir de estas definiciones, es fácil ver que los puntos críticos y los ciclos son conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de su propia trayectoria. Sin embargo, también pueden serlo de otras trayectorias, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.4** Se considera el sistema autónomo plano dado en coordenadas cartesianas por

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 1) \end{cases} . \quad (2.1)$$

Se puede pasar este sistema autónomo a coordenadas polares mediante el cambio  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ . Con esto, se tiene  $rr' = x_1 x_1' + x_2 x_2'$  y  $r^2 \theta' = x_1 x_2' - x_2 x_1'$  y se obtiene, para  $r \neq 0$ , el sistema equivalente

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - 3r + 1) \\ \theta' = -1 \end{cases} . \quad (2.2)$$

En el mapa de fases de la Figura 2.1 se muestran algunas trayectorias, correspondientes a los trazos rojos, y algunos conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite, correspondientes a los trazos azules, de este sistema.

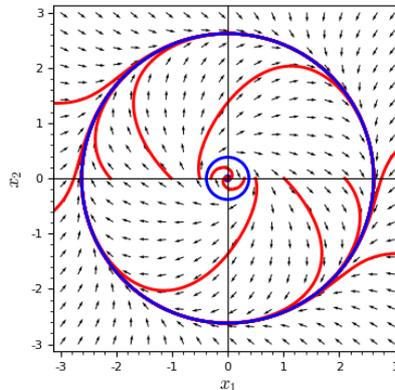


Figura 2.1: Mapa de fases del sistema autónomo plano (2.1).

Por un lado, si se consideran las trayectorias contenidas en el interior de la región delimitada por las circunferencias de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  y radio  $(3 - \sqrt{5})/2$  su conjunto  $\omega$ -límite es la circunferencia de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  y su conjunto  $\alpha$ -límite es la circunferencia de radio  $(3 - \sqrt{5})/2$ , porque todas estas trayectorias salen de la segunda circunferencia y se dirigen hacia la primera. Por otra parte, si se consideran las trayectorias que están en el exterior de la circunferencia de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  su conjunto  $\omega$ -límite es esa circunferencia y su conjunto  $\alpha$ -límite es el vacío, porque todas estas trayectorias vienen desde el infinito y se dirigen hacia dicha circunferencia. Por último, si se consideran las trayectorias contenidas en el interior de la circunferencia de radio  $(3 - \sqrt{5})/2$  su conjunto  $\omega$ -límite es el origen (un punto crítico) y su conjunto  $\alpha$ -límite es dicha circunferencia.

**Observación 2.5** Notemos que si  $x(t)$  es solución de un sistema autónomo  $x'(t) = f(x(t))$ , entonces la función  $y(t) := x(-t)$  cumple

$$y'(t) = -x'(-t) = -f(x(-t)) = -f(y(t)).$$

Por tanto, un punto  $\alpha$ -límite de  $x(t)$  puede ser considerado como un punto  $\omega$ -límite de una solución de otro sistema autónomo, y en consecuencia cualquier resultado que aporta información sobre un conjunto  $\omega$ -límite es también cierto para un conjunto  $\alpha$ -límite, y viceversa.

De esta forma, los resultados que se van a presentar a lo largo de este capítulo se van a demostrar únicamente para conjuntos  $\omega$ -límite, pero también son ciertos para conjuntos  $\alpha$ -límite.

En este punto, se definen los conceptos de semi-trayectoria positiva y semi-trayectoria negativa de un sistema autónomo plano, los cuales están directamente relacionados con los conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite, respectivamente.

**Definición 2.6** Dada  $\Gamma = \Gamma_{x_0}$  una trayectoria del sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ . Se define  $\Gamma_{x_0}^+ = \{x(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0\}$  como la semi-trayectoria positiva que pasa por  $x_0$  y  $\Gamma_{x_0}^- = \{x(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \leq 0\}$  como la semi-trayectoria negativa que pasa por  $x_0$ .

De esta manera, la semi-trayectoria positiva contiene los puntos de la trayectoria asociados a tiempos positivos, por lo que se puede hablar de conjunto  $\omega$ -límite de la semi-trayectoria positiva, y la semi-trayectoria negativa contiene los puntos de la trayectoria asociados a tiempos negativos, por lo que se puede hablar de conjunto  $\alpha$ -límite de la semi-trayectoria negativa.

Antes de pasar a enunciar y demostrar el primer resultado de esta sección, que establece algunas propiedades de los conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite de una trayectoria (Proposición 2.9), es necesario introducir el concepto de conjunto invariante (Definición 2.7) así como un teorema que establece la dependencia continua de las soluciones del problema (1.1) respecto de sus condiciones iniciales (Teorema 2.8). La demostración de este teorema no se desarrolla en este trabajo, pero se puede consultar en [13] (entre otros). En [13] el teorema que se presenta sirve para casos más generales de sistemas no necesariamente autónomos y que pueden depender de uno o varios parámetros, pero el introducido a continuación es el teorema adaptado al caso que interesa en esta memoria de sistemas autónomos.

**Definición 2.7** Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es positivamente (negativamente) invariante del sistema si para cada  $x_0 \in M$ ,  $\Gamma_{x_0}^+ \subset M$  ( $\Gamma_{x_0}^- \subset M$ ). Un conjunto  $M \subset \mathbb{R}^2$  se dice que es invariante del sistema si para cada  $x_0 \in M$ ,  $\Gamma_{x_0} \subset M$ .

**Teorema 2.8** (Teorema de dependencia continua respecto de las condiciones iniciales) Sea  $x' = f(x)$  un sistema autónomo plano con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua y globalmente lipschitziana. Sea  $p \in \mathbb{R}^2$  y  $x(t, p)$  la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = p \end{cases}$$

definida en  $[-T, T]$ , con  $T > 0$ . Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|q - p\| \leq \delta$ , la solución  $x(t, q)$  está definida en el intervalo  $[-T, T]$  y  $\|x(t, q) - x(t, p)\| \leq \varepsilon$  para cualquier  $t \in [-T, T]$ .

**Proposición 2.9** Dada una trayectoria  $\Gamma = \Gamma_{x_0}$  del sistema autónomo plano  $x' = f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua y globalmente lipschitziana. Entonces, su conjunto  $\omega$ -límite,  $\omega(\Gamma)$ , y su conjunto  $\alpha$ -límite,  $\alpha(\Gamma)$ , son cerrados e invariantes. Además, si  $\Gamma^+$  ( $\Gamma^-$ ) es un conjunto acotado de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\omega(\Gamma)$  ( $\alpha(\Gamma)$ ) es un conjunto no vacío, compacto y conexo de  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración.** Como se ha indicado anteriormente en la Observación 2.5, solo es necesario demostrar la proposición para el conjunto  $\omega$ -límite.

En primer lugar, para probar que  $\omega(\Gamma)$  es cerrado, se toma una sucesión  $(q_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \omega(\Gamma)$  tal que  $q_m \rightarrow q$  cuando  $m \rightarrow \infty$  y es necesario demostrar que  $q \in \omega(\Gamma)$ . Como cada  $q_m$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma_{x_0}$ , se cumple que existe, para cada  $m$ , un  $t_m \geq m$  tal que  $|x(t_m, x_0) - q_m| \leq 1/m$ , y por tanto

$$\|x(t_m, x_0) - q\| \leq \|x(t_m, x_0) - q_m\| + \|q_m - q\| \leq 1/m + \|q_m - q\|,$$

que tiende a cero cuando  $m \rightarrow \infty$ . Así,  $t_m$  tiende a infinito y  $x(t_m, x_0) \rightarrow q$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , y en consecuencia  $q \in \omega(\Gamma)$ . Entonces,  $\omega(\Gamma)$  es un conjunto cerrado.

En segundo lugar, para probar que  $\omega(\Gamma)$  es invariante, se toma un punto  $q \in \omega(\Gamma)$  y se debe ver que  $\Gamma_q \subset \omega(\Gamma)$ . Como  $q$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma_{x_0}$ , existe una sucesión  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t_m \rightarrow \infty$  tal que  $x(t_m, x_0) \rightarrow q$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Ahora, se toma un punto  $x(\bar{t}, q)$  para un  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  fijo. Por las propiedades de los sistemas autónomos estudiados se cumple, cuando  $m \rightarrow \infty$ ,

$$x(\bar{t} + t_m, x_0) = x(\bar{t}, x(t_m, x_0)) \rightarrow x(\bar{t}, q). \quad (2.3)$$

En efecto, la primera igualdad es cierta por la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy. Si se consideran los problemas de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x(t_m, x_0) \end{cases}, \quad (2.4)$$

$x(\bar{t} + t_m, x_0)$  es la solución del primero evaluada en  $\bar{t} + t_m$  y  $x(\bar{t}, x(t_m, x_0))$  es la solución del segundo evaluada en  $\bar{t}$ . Ahora, se puede definir  $\phi(t) := x(t + t_m, x_0)$ , que es solución del sistema  $x' = f(x)$  por ser una función trasladada de  $x(t, x_0)$ , que es solución de dicho sistema. Además,  $\phi(0) = x(t_m, x_0)$  luego  $\phi$  verifica el segundo problema de (2.4). Por tanto, aplicando la unicidad de solución del segundo problema de (2.4), se tiene que  $x(t, x(t_m, x_0))$  y  $\phi(t) = x(t + t_m, x_0)$  son la misma solución de dicho problema y así se tiene la primera igualdad en (2.3). La convergencia de (2.3) se tiene por el Teorema 2.8 de dependencia continua con las condiciones iniciales y por el hecho de que  $x(t_m, x_0) \rightarrow q$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Por tanto,  $x(\bar{t}, q) \in \omega(\Gamma)$  y en consecuencia  $\Gamma_q \subset \omega(\Gamma)$  ya que se ha tomado un  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  arbitrario. Así,  $\omega(\Gamma)$  es invariante.

Ahora, se supone que  $\Gamma^+$  es un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^2$  y hay que demostrar que  $\omega(\Gamma)$  es no vacío, compacto y conexo. Para demostrar que es no vacío, se considera una sucesión  $(x(t_m, x_0))_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t_m \geq 0 \forall m$ . Como  $\Gamma^+$  es acotado, la sucesión es también acotada y por tanto tiene una subsucesión convergente. En consecuencia,  $\omega(\Gamma)$  es no vacío ya que contendrá al límite de dicha subsucesión convergente. Además, como  $\Gamma^+$  es acotado se tiene que  $\omega(\Gamma)$  lo es también, y por tanto  $\omega(\Gamma)$  es compacto (se ha probado anteriormente que  $\omega(\Gamma)$  es cerrado, y así como es un conjunto cerrado y acotado con la topología usual en  $\mathbb{R}^2$  se tiene que es compacto).

Falta demostrar que  $\omega(\Gamma)$  es conexo. Para ello, se razona por reducción al absurdo. Se supone en primer lugar que  $\omega(\Gamma)$  no es conexo cuando  $\Gamma^+$  es acotado en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\omega(\Gamma)$  no es conexo, existirán dos conjuntos no vacíos, abiertos y disjuntos  $L$  y  $R$  tales que  $\omega(\Gamma) = L \cup R$ . Además, los conjuntos  $L$  y  $R$  han de ser compactos ya que como son abiertos con la topología de subespacio, también han de ser cerrados con la misma topología pues cada uno de ellos es el complementario del otro en  $\omega(\Gamma)$ . Así, como ya se ha demostrado que  $\omega(\Gamma)$  es un conjunto cerrado y los cerrados de la topología de subespacio son intersecciones del subespacio con conjuntos cerrados de la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que  $L$  y  $R$  son cerrados con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ . Y puesto que  $\omega(\Gamma)$  es acotado, también  $L$  y  $R$  lo son y por tanto son compactos. Además, como los conjuntos son disjuntos se tiene que la distancia entre ellos cumple

$$d_0 := \text{dist}(L, R) = \inf_{a \in L, b \in R} \|a - b\| > 0.$$

Ahora, como  $\omega(\Gamma) = L \cup R$  con  $L$  y  $R$  no vacíos existen dos sucesiones  $(t'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(t''_m)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t'_m \rightarrow \infty$  y  $t''_m \rightarrow \infty$  cuando  $m \rightarrow \infty$  y con  $t'_m < t''_m < t'_{m+1}$  tales que

$$\text{dist}(x(t'_m, x_0), L) < \frac{d_0}{3} \quad \text{y} \quad \text{dist}(x(t''_m, x_0), R) < \frac{d_0}{3}.$$

Por otro lado, como la trayectoria  $\Gamma_{x_0}$  es conexa porque es la imagen de un intervalo por una función continua (una solución del sistema), y la función distancia es continua, existe asimismo una sucesión  $(t_m^*)_{m \in \mathbb{N}}$  con  $t'_m < t_m^* < t''_m$  tal que

$$\text{dist}(x(t_m^*, x_0), L) \geq \frac{d_0}{3} \quad \text{y} \quad \text{dist}(x(t_m^*, x_0), R) \geq \frac{d_0}{3}. \quad (2.5)$$

Así, se tiene la situación de la Figura 2.2.

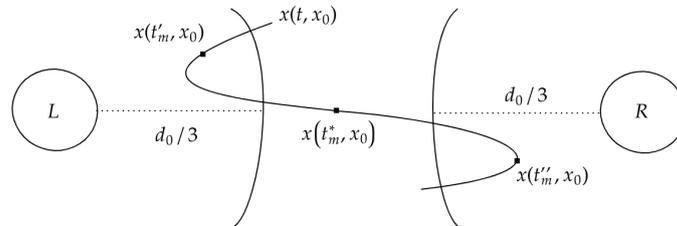


Figura 2.2:  $\omega(\Gamma) = L \cup R$ , con  $L$  y  $R$  conjuntos no vacíos, disjuntos y compactos.

Además, ya que  $\Gamma^+$  es acotado, la sucesión  $(x(t_m^*, x_0))_{m \in \mathbb{N}}$  es acotada, por lo que tiene una subsucesión convergente cuyo límite está en  $\omega(\Gamma)$ . Pero el límite de dicha subsucesión

no está en  $L \cup R$  debido a (2.5), por lo que se tiene una contradicción con que  $\omega(\Gamma) = L \cup R$ . En conclusión,  $\omega(\Gamma)$  es conexo. ■

**Observación 2.10** *En el Ejemplo 2.4, si se consideran en primer lugar las trayectorias contenidas en el interior de la región delimitada por las circunferencias de radios  $(3 + \sqrt{5})/2$  y  $(3 - \sqrt{5})/2$ , éstas son acotadas. El conjunto  $\omega$ -límite de estas trayectorias es el ciclo de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  y el conjunto  $\alpha$ -límite de las mismas es el ciclo de radio  $(3 - \sqrt{5})/2$ , por tanto se verifica la Proposición 2.9 ya que las circunferencias son conjuntos no vacíos, compactos y conexos.*

*En segundo lugar, si se consideran las trayectorias del exterior del ciclo de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  se tiene que éstas son no acotadas cuanto el tiempo tiende a menos infinito, por lo que no se puede asegurar que el conjunto  $\alpha$ -límite de estas trayectorias sea no vacío. De hecho, se tiene como se observa en la Figura 2.1 que este conjunto es el vacío. Por último, al considerar las trayectorias contenidas en el interior del ciclo de radio  $(3 - \sqrt{5})/2$ , éstas son acotadas y sus conjuntos límite claramente cumplen la Proposición 2.9.*

## 2.2. Comportamiento de trayectorias cerca de puntos regulares

En los siguientes resultados se considera un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  que no es punto crítico del sistema, denominado punto regular. Esto es,  $f(p) \neq (0, 0)$ . En este tipo de puntos, el vector de dirección viene dado por la función  $f$  evaluada en ese punto. Como en los sistemas estudiados la función  $f$  es continua, si se considera un punto muy cercano a un punto regular se tiene que el vector de dirección en ese punto va a ser muy parecido al vector de dirección en el punto regular. De esta manera las trayectorias, en las proximidades de un punto regular, van a moverse todas en la misma dirección o con pequeñas variaciones. Sin embargo, en las proximidades de un punto crítico esto no ocurre, ya que el vector de dirección en un punto crítico es el vector nulo y por tanto las trayectorias cerca de dicho punto pueden moverse en cualquier dirección (véase, por ejemplo, la Figura 2.1 donde el origen es un punto crítico). Por ello, estudiar el comportamiento de las trayectorias cerca de puntos regulares resulta muy útil en el estudio de sistemas autónomos planos ya que aporta información sobre el comportamiento global del sistema en las proximidades de este tipo de puntos.

**Proposición 2.11** *Si  $p$  es un punto regular del sistema autónomo  $x' = f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua y globalmente lipschitziana, entonces existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $q \in B(p, \delta)$  la trayectoria  $\Gamma_q$  saldrá de  $B(p, \delta)$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , esto es, existe un  $T > 0$  tal que  $x(\pm T, q) \notin B(p, \delta)$ .*

**Demostración.** Como  $p$  no es un punto crítico, existe un  $T > 0$  tal que  $p_1 := x(-T, p) \neq p$ . Con esto se tiene obligatoriamente que  $p_2 := x(T, p) \neq p$ , porque si esto no se cumpliera la función  $y(t) := x(T+t, p)$  sería también una solución del sistema con  $y(0) = x(T, p) = p_2 = p$ . Por tanto, por la existencia y unicidad de solución del problema de valores iniciales, se tendría  $x(t, p) = y(t)$ . Entonces,  $x(t, p) = x(T+t, p)$  y en consecuencia  $x(t, p)$  sería una solución periódica de periodo  $T$  y así  $x(-T, p) = p$ , lo que es una contradicción con lo establecido al principio de la demostración. Se tiene por lo tanto  $x(T, p) \neq p$  y  $x(-T, p) \neq p$ .

Se define ahora

$$d := \min\{\|p - p_1\|, \|p - p_2\|\} > 0.$$

Por la continuidad de los problemas de Cauchy asociados respecto a las condiciones iniciales, como se enuncia en el Teorema 2.8, se tiene que existe  $\delta = \delta(d) > 0$  con  $\delta \leq \frac{d}{3}$  tal que si  $\|p - q\| \leq \delta$  (esto es,  $q \in B(p, \delta)$ ) entonces  $\|x(t, p) - x(t, q)\| \leq \frac{d}{3}$  para  $t \in [-T, T]$ . Esta situación se puede observar en el dibujo de la Figura 2.3. Por tanto,  $\|p_2 - x(T, q)\| = \|x(T, p) - x(T, q)\| \leq \frac{d}{3}$  y

$$d \leq \|p - p_2\| \leq \|p - x(T, q)\| + \|x(T, q) - p_2\| \leq \|p - x(T, q)\| + \frac{d}{3}.$$

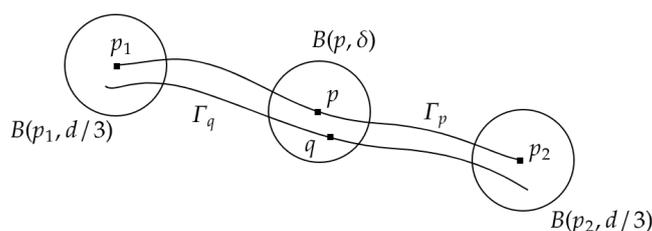


Figura 2.3: Trayectorias  $\Gamma_p$  y  $\Gamma_q$ , las cuales están a una distancia menor o igual que  $d/3$  para cualquier  $t$  en el compacto  $[-T, T]$ .

Así, finalmente se tiene

$$\|p - x(T, q)\| \geq d - \frac{d}{3} = \frac{2d}{3} > \frac{d}{3} \geq \delta,$$

y  $x(T, q) \notin B(p, \delta)$  como se pretendía demostrar. Análogamente se prueba para  $t = -T$ , y por tanto queda demostrada la proposición. ■

Se considera también en la siguiente proposición un punto regular  $p \in \mathbb{R}^2$  del sistema. De esta manera, el vector de dirección  $f(p)$  es un vector no nulo. Si se considera este vector, se puede dibujar una recta perpendicular al mismo (y que pasa por  $p$ ) denominada  $N_p$  que divide el plano en dos regiones. Se denomina lado positivo de  $N_p$  al semiplano situado en la dirección de  $f(p)$  y lado negativo al otro semiplano, como se muestra en la Figura 2.4. Esto sólo se puede hacer en sistemas autónomos planos, por lo que de nuevo se destaca la importancia de trabajar con este tipo de sistemas.

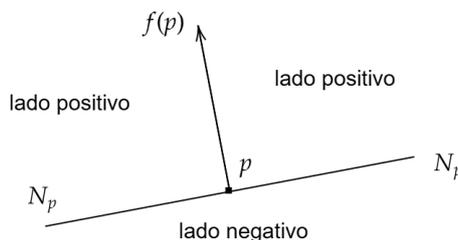


Figura 2.4: Lados positivo y negativo de la recta  $N_p$  de un punto regular  $p$  del sistema.

El resultado presentado a continuación establece que si  $p$  es un punto regular, las trayectorias solo se pueden aproximar a dicho punto por el lado negativo de  $N_p$  para después alejarse del punto por el lado positivo de  $N_p$ .

**Proposición 2.12** Si  $p$  es un punto regular de un sistema autónomo plano  $x' = f(x)$  con  $f$  continua y globalmente lipschitziana, entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que ninguna trayectoria del sistema puede entrar en la bola  $B(p, \varepsilon)$  desde el lado positivo de  $N_p$ . Si una trayectoria del sistema entra en la bola  $B(p, \varepsilon/2)$  desde el lado negativo de  $N_p$ , entonces ésta interseca a  $N_p$  y después sale de  $B(p, \varepsilon)$ .

**Demostración.** Puesto que  $f$  es continua y  $f(p) \neq 0$ , existe un entorno de  $p$  donde  $f(q) \neq 0$  para todo  $q$  de dicho entorno. Además, el ángulo  $\theta$  que forman  $f(p)$  y  $f(q)$ , es decir, el ángulo que forman las rectas tangentes a las trayectorias que pasan por  $p$  y  $q$  en los puntos  $p$  y  $q$ , respectivamente, se aproxima a 0 cuando  $q$  se aproxima a  $p$  ya que

$$\cos \theta = \frac{f(p) \cdot f(q)}{\|f(p)\| \|f(q)\|} = \frac{f(p) \cdot f(p)}{\|f(p)\| \|f(p)\|} + \frac{f(p) \cdot [f(q) - f(p)]}{\|f(p)\| \|f(q)\|} \rightarrow 1.$$

Por tanto, se puede fijar un  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $q \in B(p, 3\varepsilon)$  se tiene que  $f(q) \neq 0$  y el ángulo  $\theta$  entre  $f(p)$  y  $f(q)$  es a lo sumo  $30^\circ$ . Ahora se plantea el dibujo de la Figura 2.5, donde  $p$  es el centro, el semicírculo pequeño es de radio  $\varepsilon$ , el semicírculo mediano es de radio  $2\varepsilon$  y el semicírculo grande es de radio  $3\varepsilon$ .

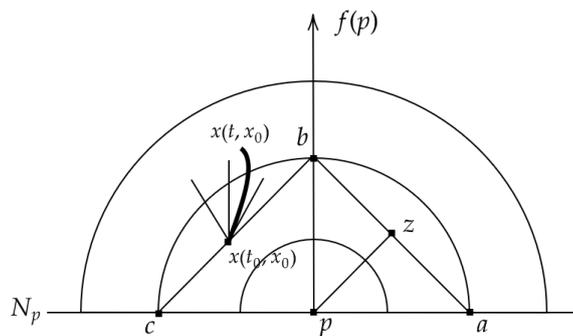


Figura 2.5: Situación existente de una trayectoria próxima al punto  $p$  (punto regular) por el lado positivo de  $N_p$ .

Se dibujan en el esquema de la Figura 2.5 los segmentos  $\overline{ab}$  y  $\overline{bc}$ . Estos segmentos, por la geometría del plano, no intersecan al semicírculo de radio  $\varepsilon$ , lo cual se prueba a continuación. Para ello, se calcula la distancia entre el punto  $p$  y el segmento  $\overline{ab}$ , y hay que demostrar que ésta es mayor que  $\varepsilon$  (con el segmento  $\overline{bc}$  se demuestra de manera análoga). La distancia citada se define como  $d := \inf_{q \in \overline{ab}} \|p - q\|$ . Así, la distancia entre  $p$  y el segmento  $\overline{ab}$  es la distancia entre  $p$  y el punto de intersección  $z$  de la recta perpendicular al segmento  $\overline{ab}$  y que pasa por  $p$  con el segmento  $\overline{ab}$ , como se muestra también en la Figura 2.5. De este modo, considerando el triángulo rectángulo  $\triangle apb$  se tiene que, como los segmentos  $\overline{pb}$  y  $\overline{pa}$  tienen una longitud de  $2\varepsilon$  cada uno, el segmento  $\overline{ab}$  tiene una longitud, por el Teorema de Pitágoras, de  $2\sqrt{2}\varepsilon$ . Ahora, el segmento  $\overline{za}$  tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del segmento  $\overline{ab}$ , es decir  $\sqrt{2}\varepsilon$ . Así, considerando finalmente el triángulo rectángulo  $\triangle apz$  se tiene, por el Teorema de Pitágoras de nuevo, que el segmento  $\overline{pz}$  tiene una longitud de  $\sqrt{2}\varepsilon$ . Por tanto, ya que la longitud del segmento  $\overline{pz}$  es justamente la distancia  $d$  buscada y  $\sqrt{2}\varepsilon > \varepsilon$ , el segmento  $\overline{ab}$  no interseca al semicírculo de centro  $p$  y radio  $\varepsilon$ . De manera simétrica, el segmento  $\overline{bc}$  tampoco interseca a dicho semicírculo.

Una vez que se ha demostrado que los segmentos  $\overline{ab}$  y  $\overline{bc}$  no intersecan al semicírculo de centro  $p$  y radio  $\varepsilon$ , se toma un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  y un  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x(t_0, x_0)$  pertenece al segmento  $\overline{ab}$  o  $\overline{bc}$ . Puesto que el ángulo  $\theta$  entre  $p$  y un punto  $q \in B(p, 3\varepsilon)$  es como mucho  $30^\circ$ , se puede dibujar una recta paralela a  $f(p)$  que pase por  $x(t_0, x_0)$  y un sector de  $60^\circ$  en la dirección de  $f(p)$  cuya bisectriz es dicha recta. Si se considera un  $t > t_0$  y cercano a  $t_0$  entonces la correspondiente trayectoria  $\Gamma_{x_0}$  tiene que permanecer dentro del sector de  $60^\circ$  descrito. De esta manera, ninguna trayectoria que se acerque al punto  $p$  desde el lado positivo de  $N_p$  puede atravesar el segmento  $\overline{ab}$  ni el  $\overline{bc}$ . Así, ninguna trayectoria del sistema puede entrar en la bola  $B(p, \varepsilon)$  desde el lado positivo de la recta  $N_p$  (ver Figura 2.5).

Se pasa ahora a demostrar la segunda parte de la proposición. Si una trayectoria  $\Gamma_s$  entra en la bola  $B(p, \varepsilon/2)$  desde el lado negativo de  $N_p$  en  $t = t_1$ , entonces se puede dibujar en el punto  $q := x(t_1, s) \in B(p, \varepsilon/2)$  un sector de  $60^\circ$  con bisectriz paralela a  $f(p)$ , de la misma manera que se ha hecho en la primera parte de la demostración (ver Figura 2.6). En los esbozos de dicha figura, el círculo pequeño es de radio  $\varepsilon/2$  y el semicírculo grande es de radio  $\varepsilon$ . Con esta construcción, las rectas que delimitan el sector intersecan a  $N_p$  en los puntos  $k$  y  $l$ , que están como máximo a una distancia  $\varepsilon$  del punto  $p$ . Se demuestra a continuación esta afirmación, para lo cual se distinguen tres casos en función de la posición de  $k$  y  $l$ .

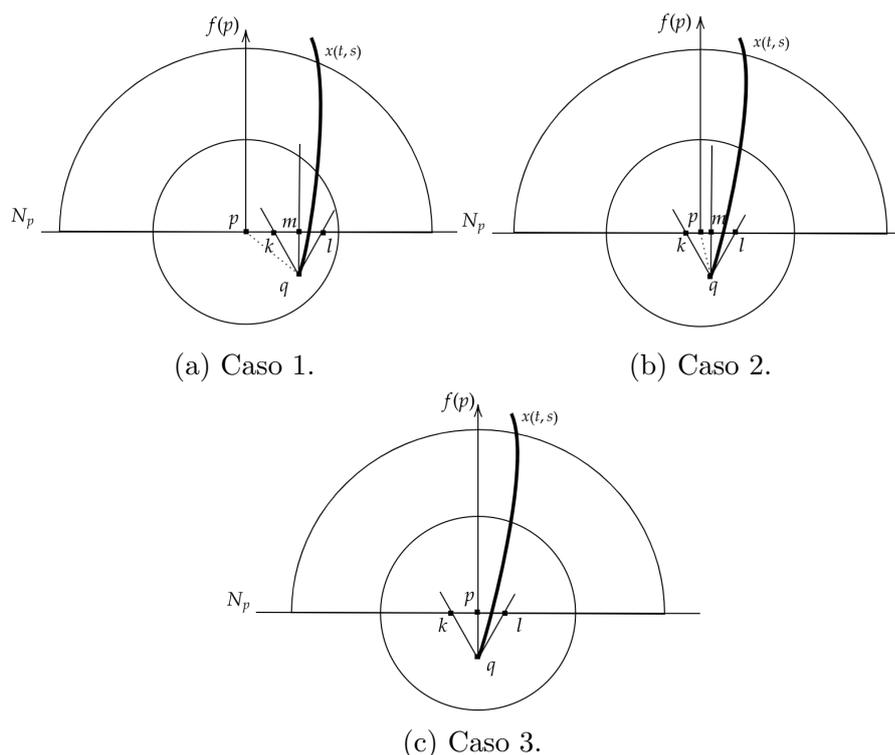


Figura 2.6: Diferentes situaciones existentes de una trayectoria próxima al punto  $p$  por el lado negativo de  $N_p$ , en función de la posición del punto  $q$ .

*Caso 1:* Si  $k$  y  $l$  están ambos en el mismo semiplano formado por la recta que pasa por  $p$  con dirección el vector  $f(p)$ .

Se supone que se sitúan en el semiplano de la derecha como en la Figura 2.6 (a), en

la que se ha denotado por  $m$  al punto de intersección de la bisectriz del sector de  $60^\circ$  con la recta  $N_p$ . Como el punto  $q$  pertenece a la bola  $B(p, \varepsilon/2)$ , se tiene por el Teorema de Pitágoras  $\|m - q\| < \varepsilon/2$  y  $\|m - p\| < \varepsilon/2$ . Ahora, atendiendo al triángulo rectángulo  $qml$  se tiene

$$\|m - l\| = \|m - q\| \tan 30^\circ < \varepsilon/2.$$

Además, como  $p$ ,  $m$  y  $l$  están alineados en  $N_p$  se cumple

$$\|p - l\| = \|p - m\| + \|m - l\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

y  $l \in B(p, \varepsilon)$ . En consecuencia, como  $k \in \overline{pl}$ , se tiene  $\|p - k\| < \varepsilon$ . Así, se ha demostrado que en este caso los puntos  $k$  y  $l$  están ambos a una distancia menor que  $\varepsilon$  del punto  $p$ . De manera análoga se tiene si  $k$  y  $l$  están ambos en el semiplano de la izquierda.

*Caso 2: Si  $k$  y  $l$  están situados en distintos semiplanos formados por la recta que pasa por  $p$  con dirección el vector  $f(p)$ , y  $q$  no pertenece a dicha recta.*

Esta es la situación de la Figura 2.6 (b). De la misma manera que en el primer caso, se tiene que  $l \in B(p, \varepsilon)$ .

Para demostrar que la distancia entre  $p$  y  $k$  es menor que  $\varepsilon$ , se considera el triángulo rectángulo  $mql$ . De esta manera se tiene

$$\|m - k\| = \|m - q\| \tan 30^\circ < \varepsilon/2,$$

y como  $p \in \overline{mk}$ , se concluye  $\|p - k\| < \varepsilon/2$ . Cabe señalar que en la Figura 2.6 (b) el punto  $q$  está en el semiplano derecho formado por la recta que pasa por  $p$  con dirección el vector  $f(p)$ , pero la situación en la que está en el semiplano izquierdo es análoga.

*Caso 3: Si  $q$  pertenece a la recta que pasa por  $p$  con dirección el vector  $f(p)$ .*

Esta es la situación de la Figura 2.6 (c). En este caso, como  $q$  pertenece a la recta que pasa por  $p$  con dirección el vector  $f(p)$ , se tiene que el punto  $m$  coincide con el punto  $p$ .

Así, se puede considerar por un lado el triángulo rectángulo  $pql$  y se obtiene

$$\|k - p\| = \|p - q\| \tan 30^\circ < \varepsilon/2,$$

y por otro lado el triángulo rectángulo  $pql$  y se obtiene

$$\|l - p\| = \|p - q\| \tan 30^\circ < \varepsilon/2.$$

Con esto, se tienen demostrados los tres casos.

Una vez que se ha probado que en cualquier caso los puntos  $k$  y  $l$  están a una distancia menor que  $\varepsilon$  del punto  $p$ , de una manera similar a la primera parte de la demostración, si se considera la trayectoria  $\Gamma_s$  con  $t > t_1$ , ésta va a permanecer dentro del sector de  $60^\circ$  siempre y cuando  $x(t, s)$  pertenezca a la bola  $B(p, 3\varepsilon)$ . Por último, por la Proposición 2.11 si  $\varepsilon$  es pequeño (se puede tomar  $\varepsilon \leq \delta$  donde  $\delta$  es el valor que verifica dicha proposición) la trayectoria  $\Gamma_s$  saldrá de  $B(p, \varepsilon)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $\Gamma_s$  intersecará a la recta  $N_p$  y después saldrá de  $B(p, \varepsilon)$ . Con esto, la proposición queda demostrada. ■

Así, el comportamiento de las trayectorias de un sistema autónomo plano cerca de un punto regular está condicionado a lo establecido en la Proposición 2.11 y en la Proposición 2.12. En la siguiente sección se presentan dos teoremas, previos al Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15, para cuya demostración es esencial el uso de estas dos proposiciones.

### 2.3. Teorema de Poincaré-Bendixson

En esta sección se enuncia y demuestra el Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15, el cual va a permitir caracterizar parcialmente qué tipos de conjuntos límite existen en sistemas autónomos planos y puede aplicarse para garantizar la existencia de ciclos en una región compacta del plano. Antes de presentarlo, se introducen dos teoremas necesarios que se emplean en su demostración. El primero de ellos establece que si una semi-trayectoria es acotada y su respectivo conjunto límite contiene un ciclo, entonces dicho conjunto límite es el propio ciclo.

**Teorema 2.13** *Si  $\Gamma^+$  ( $\Gamma^-$ ) es acotado en  $\mathbb{R}^2$  y  $\omega(\Gamma)$  ( $\alpha(\Gamma)$ ) contiene un ciclo, entonces  $\omega(\Gamma)$  ( $\alpha(\Gamma)$ ) coincide con dicho ciclo.*

**Demostración.** Se realiza la demostración en el caso en que  $\Gamma^+$  es acotado y  $\omega(\Gamma)$  contiene un ciclo, y es análogo para el otro caso. Se razona por reducción al absurdo. Se supone que la semi-trayectoria  $\Gamma^+$  es acotada y que  $\omega(\Gamma)$  contiene un ciclo  $\Gamma_0$ , pero  $\omega(\Gamma) \neq \Gamma_0$ . Como  $\Gamma^+$  es acotada, por la Proposición 2.9 se tiene que  $\omega(\Gamma)$  es conexo y así el ciclo  $\Gamma_0$  debe contener un punto de acumulación  $y_0$  del conjunto  $\omega(\Gamma) - \Gamma_0$ . Si no, se podría separar  $\omega(\Gamma)$  en dos conjuntos abiertos y entonces no sería conexo.

Se considera ahora el vector  $f(y_0)$  y la recta  $N_{y_0}$  perpendicular a dicho vector y que pasa por  $y_0$ . Esto se puede hacer puesto que  $y_0$  es un punto regular al pertenecer a  $\Gamma_0$ . Como  $y_0$  es punto de acumulación de  $\omega(\Gamma) - \Gamma_0$ , si se considera  $\varepsilon > 0$  tal que se cumple la Proposición 2.12 entonces la bola  $B(y_0, \varepsilon/2)$  contiene un punto  $y$  que pertenece a  $\omega(\Gamma) - \Gamma_0$  y la trayectoria  $\Gamma_y$  entra en  $B(y_0, \varepsilon/2)$  por el lado negativo de  $N_{y_0}$ , corta a  $N_{y_0}$  en un punto  $y_1$  y después sale de  $B(y_0, \varepsilon/2)$ . Se tienen las dos situaciones de la Figura 2.7, en función de si  $y$  pertenece al interior o al exterior de  $\Gamma_0$ . Cabe señalar que debido a que por un punto pasa una única trayectoria se tiene que  $\Gamma_y$  está contenida completamente en el interior o en el exterior de  $\Gamma_0$ .

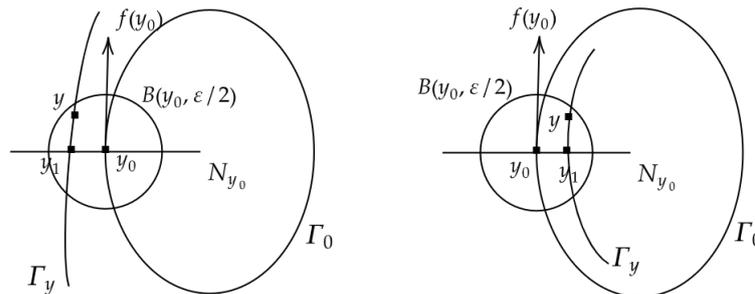


Figura 2.7: Situaciones existentes si  $\omega(\Gamma) \neq \Gamma_0$ .

Ahora, se tiene  $y_0 \in \Gamma_0 \subset \omega(\Gamma)$  y puesto que  $\omega(\Gamma)$  es invariante por la Proposición 2.9 se tiene también  $y_1 \in \Gamma_y \subset \omega(\Gamma)$ . De esta forma, tanto  $y_0$  como  $y_1$  pertenecen a  $N_{y_0}$  y a  $\omega(\Gamma)$ . Se considera la trayectoria  $\Gamma$ , la cual ha de ser una curva abierta (no puede ser un punto crítico porque entonces su conjunto  $\omega$ -límite sería dicho punto y no puede ser un ciclo porque entonces su conjunto  $\omega$ -límite sería el propio ciclo y no podría contener un punto que no perteneciera al ciclo). Atendiendo a las dos situaciones de la Figura 2.7 la trayectoria  $\Gamma$ , al ser una curva abierta y su conjunto  $\omega$ -límite contener al ciclo  $\Gamma_0$ , en

cualquiera de las situaciones cuando el tiempo crece  $\Gamma$  se va alejando del punto  $y_1$ , lo que entra en contradicción con que  $y_1 \in \omega(\Gamma)$  y se concluye que  $\omega(\Gamma) = \Gamma_0$ . ■

El último resultado previo al Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15 establece que si un punto  $\omega$ -límite o un punto  $\alpha$ -límite de una trayectoria pertenece a la trayectoria, ésta no puede ser una curva abierta. Para su demostración, se emplea la Proposición 2.12.

**Teorema 2.14** *Si un punto  $\omega$ -límite o un punto  $\alpha$ -límite de una trayectoria  $\Gamma_p$  pertenece a la propia trayectoria, entonces  $\Gamma_p$  es un punto crítico o un ciclo.*

**Demostración.** Se demuestra el resultado para el caso del punto  $\omega$ -límite, ya que para el caso del punto  $\alpha$ -límite es similar. Se supone entonces que la trayectoria  $\Gamma_p$  contiene un punto  $\omega$ -límite  $q$  de la propia trayectoria, y se razona por reducción al absurdo. Si  $\Gamma_p$  no es ni un punto crítico ni un ciclo, entonces en un sistema autónomo es una curva abierta (que no puede autointersecarse). Así,  $q$  es un punto regular (porque de otra forma  $\Gamma_p$  sería un punto crítico) y entonces por la Proposición 2.12 existe un  $\varepsilon > 0$  tal que la trayectoria  $\Gamma_q$  sale de  $B(q, \varepsilon)$  por el lado positivo de la recta  $N_q$  cuanto  $t$  crece. Como  $\Gamma_p$  y  $\Gamma_q$  son la misma trayectoria (ya que en sistemas autónomos por un punto pasa una única trayectoria y ambas trayectorias pasan por el punto  $q$ ) y  $q$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma_p$ ,  $\Gamma_q$  se acercará al punto  $q$  para un  $t$  grande. A partir de la Proposición 2.12,  $\Gamma_q$  ha de entrar a la bola  $B(q, \varepsilon/2)$  por el lado negativo de  $N_q$ , e intersectar a la recta  $N_q$  en un punto denominado  $z$  antes de salir de  $B(q, \varepsilon)$  y con  $\|q - z\| \leq \varepsilon$ . Como  $\Gamma_p$  no se autointerseca, se tiene  $q \neq z$ . Entonces, como por la Proposición 2.12  $\Gamma_q$  no puede entrar en la bola  $B(q, \varepsilon)$  por el lado positivo de  $N_q$ , solo existen dos situaciones que se recogen en los dos dibujos de la Figura 2.8.

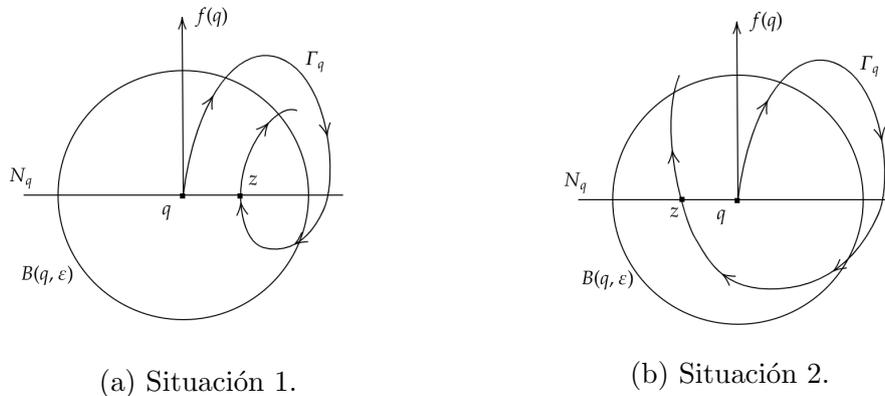


Figura 2.8: Situaciones existentes debido a que  $q \neq z$  y  $\Gamma_q$  no puede entrar en  $B(q, \varepsilon)$  por el lado positivo de  $N_q$ .

En ninguno de los dos casos  $\Gamma_q$  puede acercarse al punto  $q$  cuando  $t \rightarrow \infty$  porque  $\Gamma_q$  no puede autointersecarse y no puede entrar en la bola  $B(q, \varepsilon)$  desde el lado positivo de la recta  $N_q$ . En consecuencia,  $q$  no puede ser un punto  $\omega$ -límite de  $\Gamma_q$  y se llega a una contradicción. Así, se concluye que  $\Gamma_p$  es un punto crítico o un ciclo y el resultado queda demostrado. ■

Con el Teorema 2.13 y el Teorema 2.14 ya se tienen todas las herramientas necesarias para introducir el último resultado de este capítulo, el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual se enuncia y demuestra a continuación.

**Teorema 2.15** (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Si una trayectoria  $\Gamma_p$  de un sistema autónomo plano es acotada para  $t \geq 0$  (análogo para el caso  $t \leq 0$ ), entonces se da una de estas tres situaciones:*

- a) el conjunto  $\omega$ -límite ( $\alpha$ -límite) de  $\Gamma_p$ ,  $\omega(p)$  ( $\alpha(p)$ ), contiene un punto crítico,
- b)  $\Gamma_p$  es un ciclo,
- c)  $\omega(p)$  ( $\alpha(p)$ ) es un ciclo, y  $\Gamma_p$  se acerca a  $\omega(p)$  ( $\alpha(p)$ ) siguiendo una espiral cuando  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ).

**Demostración.** Se desarrolla la demostración para el caso  $t$  mayor o igual que cero, y el caso en que  $t$  es menor o igual que cero es análogo. Claramente las dos primeras situaciones no son la misma, ya que si  $\Gamma_p$  es un ciclo, entonces  $\omega(p)$  es el propio ciclo, que trivialmente no contiene ningún punto crítico. Por tanto, se supone que  $\omega(p)$  no contiene ningún punto crítico y que  $\Gamma_p$  no es un ciclo, y se demuestra que  $\omega(p)$  es un ciclo y que  $\Gamma_p$  se acerca a  $\omega(p)$  siguiendo una espiral cuando  $t \rightarrow \infty$ .

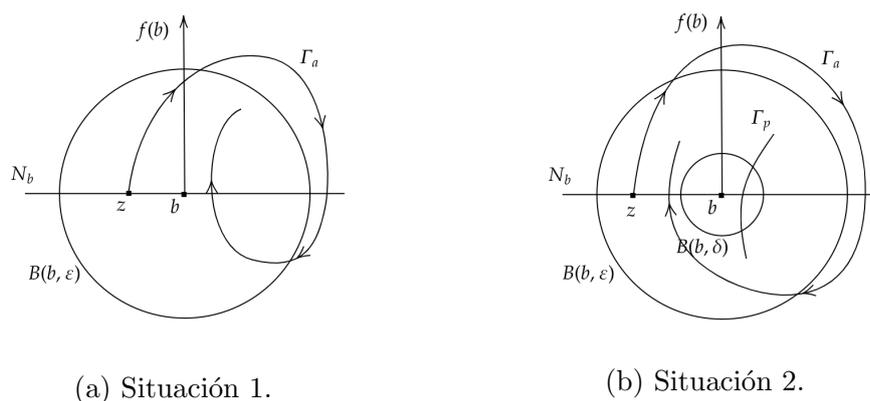
Por la Proposición 2.9, como la semi-trayectoria  $\Gamma_p^+$  es acotada,  $\omega(p)$  es un conjunto no vacío. Dado un punto  $a \in \omega(p)$ , se prueba que  $\Gamma_a$  es un ciclo verificando  $\Gamma_a \subset \omega(p)$ , para concluir que por el Teorema 2.13  $\omega(p)$  es el mismo ciclo que  $\Gamma_a$ . El punto  $a$  es un punto regular ya que se ha supuesto que el conjunto  $\omega$ -límite no contiene ningún punto crítico. Como  $\omega(p)$  es invariante por la misma proposición, se tiene que  $x(t, a) \in \omega(p)$  para todo  $t$  real. Puesto que  $\Gamma_p^+$  es acotado,  $\omega(p)$  es también acotado y por tanto la trayectoria  $\Gamma_a \subset \omega(p)$  es acotada. Así,  $\omega(a)$  es no vacío. Se toma un punto  $b \in \omega(a)$ . Como  $\Gamma_a \subset \omega(p)$  y  $\omega(p)$  es cerrado por la Proposición 2.9,  $b \in \omega(p)$  y por tanto  $b$  es un punto regular.

En primer lugar, se demuestra que la trayectoria  $\Gamma_p$  no interseca a la trayectoria  $\Gamma_a$ . Si intersecara, ambas trayectorias coincidirían ya que en sistemas autónomos por un punto pasa una única trayectoria, y en consecuencia  $\Gamma_p$  contendría a uno de sus puntos  $\omega$ -límite  $a$ . Con esto, por el Teorema 2.14,  $\Gamma_p$  sería un punto crítico o un ciclo, lo que es una contradicción con lo que se ha supuesto al principio de esta demostración.

En segundo lugar, se prueba que la trayectoria  $\Gamma_a$  es un ciclo. Para esto, se demuestra que el punto  $b \in \Gamma_a$ , lo que implica que  $\Gamma_a$  contiene uno de sus puntos  $\omega$ -límite  $b$  y por tanto, por el Teorema 2.14,  $\Gamma_a$  es un ciclo (no puede ser un punto crítico ya que  $\Gamma_a \subset \omega(p)$  y  $\omega(p)$  no contiene puntos críticos).

Ya que  $b \in \omega(a)$ ,  $\Gamma_a$  se acercará a  $b$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por la Proposición 2.12,  $\Gamma_a$  tiene que entrar en la bola  $B(b, \varepsilon/2)$  por el lado negativo de la recta  $N_b$  y después intersecar a la recta  $N_b$  en un punto denominado  $z$  antes de salir de  $B(b, \varepsilon)$ . Si  $b$  no perteneciera a la trayectoria  $\Gamma_a$ , entonces  $b \neq z$  y existirían dos situaciones diferentes como se muestra en los dibujos de la Figura 2.9. En ambas figuras  $z$  está en el semiplano izquierdo formado por la recta que pasa por  $b$  con dirección  $f(b)$ , pero los casos en los que está en el semiplano derecho son análogos.

En la primera situación se tiene que  $b \notin \omega(a)$  porque  $\Gamma_a$  no se puede autointersecar y no puede entrar en la bola  $B(b, \varepsilon)$  por el lado positivo de  $N_b$ , por lo que este caso se descarta ya que se ha tomado  $b \in \omega(a)$ . En la segunda situación, para una bola  $B(b, \delta)$  con  $\delta > 0$  lo suficientemente pequeño,  $x(t_*, p) \in B(b, \delta)$  para algún  $t_* > 0$  porque  $b \in \omega(p)$ . Ahora,  $\Gamma_p$  no puede acercarse a  $z$  entrando en la bola  $B(b, \varepsilon)$  por el lado positivo de  $N_b$  y no puede intersecar con  $\Gamma_a$ , por tanto  $\Gamma_p$  no puede acercarse a  $z$  entrando en  $B(b, \varepsilon)$  por la parte negativa de  $N_b$ , tampoco. Entonces,  $z \notin \omega(p)$ , una contradicción con el hecho de que  $z \in \Gamma_a \subset \omega(p)$ . Por tanto,  $b \in \Gamma_a$  y en consecuencia, por el Teorema 2.14,  $\Gamma_a$  es un ciclo ya que como se ha indicado antes  $b$  es un punto regular (y así  $\Gamma_a$  no puede ser un punto crítico). Como  $\Gamma_a \subset \omega(p)$ ,  $\omega(p)$  ha de ser el mismo ciclo que  $\Gamma_a$  por el Teorema 2.13.

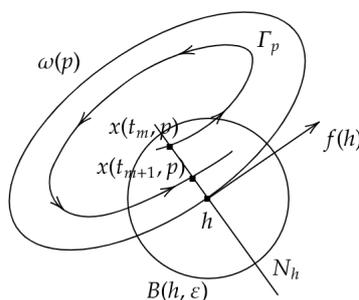


(a) Situación 1.

(b) Situación 2.

Figura 2.9: Situaciones existentes si  $b \neq z$ , que determinan la contradicción  $z \notin \omega(p)$ .

Ahora, se prueba que  $\Gamma_p$  se acerca al ciclo  $\omega(p)$  siguiendo una espiral. Por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1), el ciclo  $\omega(p)$  divide el plano en dos componentes conexas disjuntas: el interior y el exterior del ciclo. Se supone que  $\Gamma_p$  está en el interior del ciclo  $\omega(p)$  (el caso en que se considera que  $\Gamma_p$  está en el exterior es análogo). Dado  $h$  un punto de  $\omega(p)$ ,  $h$  es un punto regular. Entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que se verifica la Proposición 2.12. Se plantea un dibujo como el de la Figura 2.10.

Figura 2.10: La trayectoria  $\Gamma_p$  se acerca al ciclo  $\omega(p)$  siguiendo una espiral.

Como  $h \in \omega(p)$ , existe una sucesión  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $t_m \rightarrow \infty$  y  $x(t_m, p) \rightarrow h$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Por esto, para algún  $t_* > 0$ ,  $x(t_*, p) \in B(h, \varepsilon/2)$  y en consecuencia la trayectoria  $\Gamma_p$  entra en  $B(h, \varepsilon/2)$  por el lado negativo de  $N_h$ , y se cumple que existen  $t_m < t_{m+1}$  tales que  $x(t_m, p)$  pertenece a la recta  $N_h$  y  $x(t_{m+1}, p)$  está en el segmento formado por  $x(t_m, p)$  y  $h$ . En conclusión, como  $h$  es un punto arbitrario de  $\omega(p)$ ,  $\Gamma_p$  se acerca al ciclo  $\omega(p)$  siguiendo una espiral y el teorema queda demostrado. ■

El Teorema de Poincaré-Bendixson es muy útil en el estudio cualitativo de sistemas autónomos planos, pues como se ha enunciado establece que si una semi-trayectoria positiva o una semi-trayectoria negativa es acotada, sólo existen tres situaciones diferentes sobre el comportamiento de dicha trayectoria cuando el tiempo avanza o retrocede. Además, este teorema aporta información acerca de qué tipos de conjuntos  $\omega$ -límite o  $\alpha$ -límite pueden existir en sistemas autónomos planos (ver [7]). Cabe destacar que estas tres situaciones solo se tienen en sistemas autónomos planos, ya que si se consideran sistemas en dimensión superior (en el espacio tridimensional, por ejemplo), los conjuntos límite pueden ser tipos muy diferentes de conjuntos. El ejemplo más conocido de este hecho es el sistema de Lo-

renz, un sistema autónomo en tres dimensiones cuyas trayectorias, en ciertos casos, tienen forma de mariposa como se muestra en la Figura 2.11. En este caso, se puede observar por el comportamiento de la trayectoria que ésta es acotada pero su conjunto  $\omega$ -límite ni contiene un punto crítico ni es un ciclo, ya que dicha trayectoria oscila moviéndose entre las regiones  $x > 0$  y  $x < 0$  de manera caótica indefinidamente.

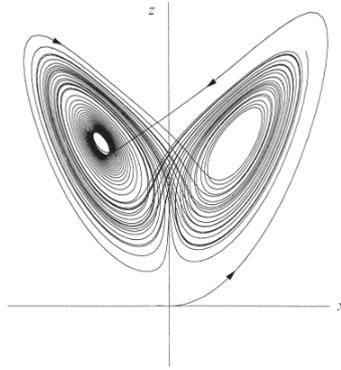


Figura 2.11: Ejemplo de trayectoria en el sistema de Lorenz. Figura extraída de [16].

Sin embargo, en sistemas autónomos planos también existen casos en los que los conjuntos límite de trayectorias acotadas no solo son puntos críticos o ciclos como se ha visto por ejemplo en el Ejemplo 2.4, si no que también pueden ser conjuntos formados por uniones de puntos críticos y trayectorias abiertas, entre otros (como se pone de manifiesto en el Ejemplo 1.9). En este contexto, se introducen dos ejemplos que permiten clarificar esto visualmente mediante el mapa de fases. El primero de ellos, en concreto, se ha tomado de [8].

**Ejemplo 2.16** *Se considera el sistema autónomo dado en coordenadas cartesianas por*

$$\begin{cases} x_1' = \operatorname{sen}(x_1)(-0.1 \cos(x_1) - \cos(x_2)) \\ x_2' = \operatorname{sen}(x_2)(\cos(x_1) - 0.1 \cos(x_2)) \end{cases} \quad (2.6)$$

*Es sencillo verificar que los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, \pi)$  y  $(\pi, 0)$  son puntos críticos del sistema, además del punto  $(\pi/2, \pi/2)$ . El mapa de fases de este sistema, en el cuadrado de vértices los cuatro primeros puntos críticos citados, se representa en la Figura 2.12.*

*En este mapa de fases se puede observar que los segmentos (en rojo) que unen los cuatro primeros puntos críticos citados (en el orden citado) son trayectorias del sistema y que, si se considera una trayectoria que empieza en el interior del cuadrado de vértices estos cuatro puntos, ésta permanece contenida en el interior de dicho cuadrado para cualquier tiempo posterior. De esta manera, esta trayectoria es acotada y además se puede observar que gira en forma de espiral acercándose al cuadrado. Por lo tanto, se puede concluir que el conjunto  $\omega$ -límite de esta trayectoria es este cuadrado, el cual está formado por la unión de cuatro trayectorias abiertas y cuatro puntos críticos del sistema, formando un conjunto compacto y conexo.*

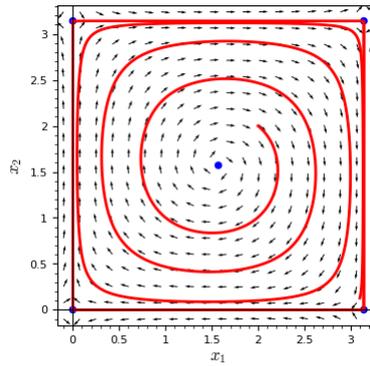


Figura 2.12: Mapa de fases del sistema (2.6).

**Ejemplo 2.17** Se considera el sistema autónomo dado en coordenadas cartesianas por

$$\begin{cases} x_1' = (-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2))(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 \\ x_2' = (x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2))(1 - x_1^2 - x_2^2)^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Es trivial comprobar que, además del origen, todos los puntos de la circunferencia de centro el origen y radio uno son puntos críticos del sistema. El mapa de fases de este sistema se representa en la Figura 2.13, donde estos puntos se dibujan en azul. En él, se puede observar que si se considera una trayectoria (en rojo) que empieza en el interior de la citada circunferencia, esta trayectoria permanece en dicha región para cualquier tiempo posterior y se acerca en espiral a la circunferencia. De esta manera, el conjunto  $\omega$ -límite de esta trayectoria es la circunferencia formada por infinitos puntos críticos.

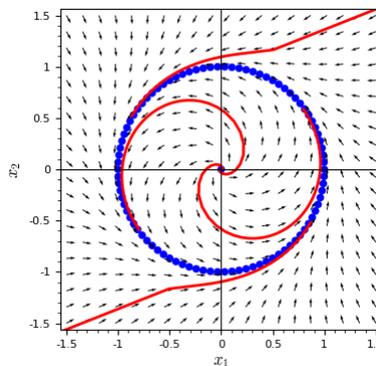


Figura 2.13: Mapa de fases del sistema (2.7).

Se introducen por último dos ejemplos que muestran la utilidad del Teorema de Poincaré-Bendixson en el estudio de sistemas autónomos planos para garantizar la existencia de al menos un ciclo en sus mapas de fases. Para el segundo de ellos, en concreto, se ha empleado [9].

**Ejemplo 2.18** Se considera el sistema autónomo dado por

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) \\ x_2' = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) \end{cases} \quad ,$$

cuyo único punto crítico es el origen. Si  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ , se puede escribir este sistema en coordenadas polares mediante el mismo cambio que en el Ejemplo 2.4 y se obtiene

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - 4) \\ \theta' = -1 \end{cases} .$$

Se va a demostrar que existe un ciclo contenido en el interior del conjunto compacto  $R := \{r \in \mathbb{R} : 1 \leq r \leq 3\}$ . Para ello, se considera una trayectoria  $\Gamma$  del sistema tal que  $\Gamma$  está en el interior de  $R$  para un cierto  $t_1$ . Esta trayectoria existe por el Corolario 1.7. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que  $t_1 = 0$  y  $\Gamma = \Gamma_p$  con  $p \in R$ . Si se toma un  $t_2 > t_1$  tal que  $x(t_2, p)$  está próximo a la circunferencia de radio tres, entonces en ese punto el radio  $r$  es cercano a tres y por tanto  $r' < 0$ , de forma que el radio de la trayectoria es decreciente y para valores mayores del tiempo la trayectoria no atraviesa dicha circunferencia. De forma análoga, si se toma un  $t_3 > t_1$  tal que  $x(t_3, p)$  está próximo a la circunferencia unidad, entonces en ese punto el radio  $r$  es cercano a uno y por tanto  $r' > 0$ , de forma que el radio de la trayectoria es creciente y para valores mayores del tiempo la trayectoria no atraviesa dicha circunferencia. Así, la semi-trayectoria  $\Gamma_p^+$  no atraviesa ninguno de los conjuntos que componen la frontera de  $R$ , de manera que está contenida en  $R$ , y por tanto  $\Gamma_p^+$  está acotada. En consecuencia, se puede aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson.

El conjunto  $R$  no contiene ningún punto crítico ya que el único punto crítico del sistema es el origen, y por tanto el conjunto  $\omega$ -límite de la trayectoria tomada no puede contener un punto crítico, por lo que solo quedan las situaciones b) y c) del Teorema 2.15. Así, se tiene o que la trayectoria considerada es un ciclo, o que el conjunto  $\omega$ -límite de esta trayectoria es un ciclo y la trayectoria se acerca a éste siguiendo una espiral. En cualquier caso, como la semi-trayectoria está contenida en el conjunto  $R$ , existe un ciclo en el interior del conjunto  $R$ .

**Ejemplo 2.19** Se considera ahora el sistema autónomo dado en coordenadas cartesianas por

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - (x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2)x_1 \\ x_2' = x_1 + x_2 - (x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2)x_2 \end{cases} ,$$

cuyo único punto crítico es el origen. Si  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ , se puede escribir este sistema en coordenadas polares mediante el mismo cambio que en el Ejemplo 2.4 para obtener

$$\begin{cases} r' = r - r^3(1 + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos^2 2\theta) \\ \theta' = 1 + r^2 \cos \theta \sin^3 \theta \end{cases} . \quad (2.8)$$

Atendiendo a la expresión de  $r'$ , se pretende encontrar los máximos y mínimos de la función  $g(\theta) = 1 + \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos^2 2\theta$  para saber para qué valores del radio  $r'$  es positivo o negativo. Esta función es periódica de periodo  $\pi$ . Derivando  $g(\theta)$  e igualando a cero, se obtiene que en la región  $[0, \pi)$  sus máximos son  $g(\pi/6) = 1.0625$  y  $g(5\pi/6) = 1.0625$  y su mínimo es  $g(\pi/2) = 0.5$ . De esta manera, si se considera por ejemplo la circunferencia de radio  $r = 1/2$  se obtiene, debido a estos valores máximo y mínimo de la función  $g(\theta)$ , que  $r' > 0$  para cualquier valor de  $\theta$ . Por otra parte, si se considera la circunferencia de radio  $r = 2$  se obtiene que  $r' < 0$  para cualquier valor de  $\theta$ . En consecuencia, siguiendo el mismo razonamiento que en el Ejemplo 2.18 y aplicando de nuevo el Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15 se concluye que existe un ciclo del sistema contenido en el interior del conjunto compacto  $F := \{r \in \mathbb{R} : 1/2 \leq r \leq 2\}$ .

Cabe señalar que a diferencia del Ejemplo 2.4, en el que los ciclos del sistema presentado se pueden determinar de forma precisa siendo circunferencias, en este ejemplo las expresiones de  $r'$  y de  $\theta'$  dependen explícitamente de  $\theta$  y por tanto el ciclo existente en la región  $F$  no es una circunferencia. Por esta razón, no se puede determinar este ciclo de forma analítica y se necesita el Teorema de Poincaré-Bendixson para garantizar su existencia. Esto se puede observar en el mapa de fases de la Figura 2.14, en el que se muestra el ciclo existente en color verde y se marca con las circunferencias azules (que no son trayectorias del sistema) la frontera de la región  $F$  en la que está contenido dicho ciclo. Además, se muestran algunas otras trayectorias del sistema en color rojo.

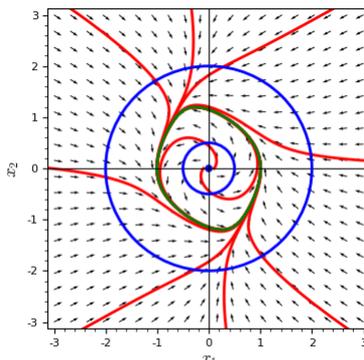


Figura 2.14: Mapa de fases del sistema autónomo plano (2.8).

## 2.4. Ciclos límite y estabilidad de ciclos

En la última sección de este capítulo, se introduce la noción de ciclo límite y se trata la noción de estabilidad orbital o de ciclos en un sistema autónomo plano, junto con varios ejemplos. Estudiar la existencia de ciclos límite es de gran importancia en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, pues ayudan a comprender el comportamiento global de las trayectorias del sistema asociado y no solo su evolución en entornos cercanos a puntos regulares del sistema, como se ha estudiado en la segunda sección de este capítulo. Para esta sección se ha consultado [6].

En primer lugar, se define el concepto de ciclo límite, el cual puede entenderse como un ciclo al cual se aproximan otras trayectorias cuando el tiempo avanza o retrocede.

**Definición 2.20** Dado un ciclo  $\Gamma$  de un sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ ,  $\Gamma$  se dice ciclo límite si además de ser un ciclo es conjunto  $\omega$ -límite ó  $\alpha$ -límite de alguna trayectoria distinta del propio ciclo.

Ahora, se introduce la noción de estabilidad de ciclos junto con las distintas clases de estabilidad que existen y algunos ejemplos.

**Definición 2.21** Dado un ciclo  $\Gamma$  de un sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ ,  $\Gamma$  se dice ciclo estable si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier  $p \in \mathbb{R}^2$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta(\varepsilon)$  se tiene que  $x(t, p)$  está definido para todo  $t > 0$  y  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma) < \varepsilon$  para todo  $t > 0$ .

Además,  $\Gamma$  se dice ciclo asintóticamente estable si es estable y existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier  $p \in \mathbb{R}^2$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  se tiene que  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma)$  tiende a 0 cuando  $t$  tiende a infinito.

Un ejemplo con ciclos estables se tiene en la Figura 1.1 del Ejemplo 1.5. Tomando por ejemplo  $C_2 = 0$ , para cualquier  $C_1 \in \mathbb{R}^*$  se tiene que la trayectoria  $\Gamma$  asociada a la solución  $x(t) = (C_1 \sin t, C_1 \cos t)$  es un ciclo que se corresponde con la circunferencia de centro el origen y radio  $|C_1|$ . Además, todos estos ciclos son estables porque dado un  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si se considera un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  cumpliendo  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  y tal que  $\Gamma_p$  es un ciclo, entonces  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma) < \varepsilon$  para todo  $t > 0$  ya que ese ciclo  $\Gamma_p$  puede estar tan próximo como se desee del ciclo  $\Gamma$  tomando un  $C_1$  muy cercano al  $C_1$  de la trayectoria  $\Gamma$ . Sin embargo, estos ciclos no son asintóticamente estables porque para cualquier  $\delta > 0$  existe un  $p \in \mathbb{R}^2$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  y cumpliendo que  $\Gamma_p$  es un ciclo del sistema, pero no se tiene que  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito porque los puntos  $x(t, p)$  pertenecen al ciclo  $\Gamma_p$  para cualquier  $t$ .

Los ciclos límite estables son muy importantes en varios campos científicos, ya que modelan sistemas que oscilan de manera autosuficiente, es decir, que oscilan en ausencia de fuerzas externas periódicas. Entre los ejemplos que pueden darse están el latido del corazón, ritmos diarios en la temperatura corporal humana, reacciones químicas que oscilan espontáneamente, modelos económicos cíclicos, etc.

Por otro lado, un ejemplo de ciclo límite asintóticamente estable se puede observar en la Figura 2.1 del Ejemplo 2.4. Aquí, la circunferencia de radio  $(3 + \sqrt{5})/2$  es un ciclo del sistema al cual se aproximan todas las trayectorias próximas a él tanto de su interior como de su exterior cuando el tiempo tiende a infinito.

**Definición 2.22** Dado un ciclo  $\Gamma$  de un sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ ,  $\Gamma$  se dice ciclo semiestable si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que para cualquier  $p \in \text{int}(\Gamma)$  ó para cualquier  $p \in \text{ext}(\Gamma)$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  se tiene que  $x(t, p)$  está definido para todo  $t > 0$  y  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma) < \varepsilon$  para todo  $t > 0$ .

Además,  $\Gamma$  se dice ciclo asintóticamente semiestable si es semiestable y existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier  $p \in \text{int}(\Gamma)$  ó para cualquier  $p \in \text{ext}(\Gamma)$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  se tiene que  $\text{dist}(x(t, p), \Gamma)$  tiende a 0 cuando  $t$  tiende a infinito.

**Definición 2.23** Dado un ciclo  $\Gamma$  de un sistema autónomo plano  $x' = f(x)$ ,  $\Gamma$  se dice ciclo inestable si existe  $\varepsilon > 0$  tal que para cualquier  $\delta > 0$  existe  $p \in \text{int}(\Gamma)$  y existe  $q \in \text{ext}(\Gamma)$  verificando  $\text{dist}(p, \Gamma) < \delta$  y  $\text{dist}(q, \Gamma) < \delta$  pero  $\text{dist}(x(t_1, p), \Gamma) > \varepsilon$  y  $\text{dist}(x(t_2, q), \Gamma) > \varepsilon$  para algún  $t_1, t_2 > 0$ .

A continuación, se introduce un ejemplo de sistema autónomo plano en el que existe tanto un ciclo límite asintóticamente semiestable como un ciclo límite inestable.

**Ejemplo 2.24** Se considera el sistema autónomo plano dado por

$$\begin{cases} x'_1 = -3x_2 + x_1(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2) \\ x'_2 = 3x_1 + x_2(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2) \end{cases},$$

el cual (si  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ) se puede expresar también en coordenadas polares haciendo el mismo cambio que en el Ejemplo 2.4 como

$$\begin{cases} r' = r(1 - r)^2(r - 2) \\ \theta' = 3 \end{cases}. \quad (2.9)$$

El mapa de fases de este sistema se representa en la Figura 2.15. En él, las trayectorias que no son ciclos se corresponden con los trazos rojos y los ciclos y el punto crítico con los trazos azules. El ciclo  $r = 1$  y el ciclo  $r = 2$  son además ciclos límite de este sistema, porque el ciclo  $r = 1$  es conjunto  $\omega$ -límite de las trayectorias contenidas entre el ciclo  $r = 1$  y el ciclo  $r = 2$  y el ciclo  $r = 2$  es conjunto  $\alpha$ -límite de estas mismas trayectorias. Se puede observar en el mapa de fases del sistema, también, que el ciclo  $r = 1$  es un ciclo

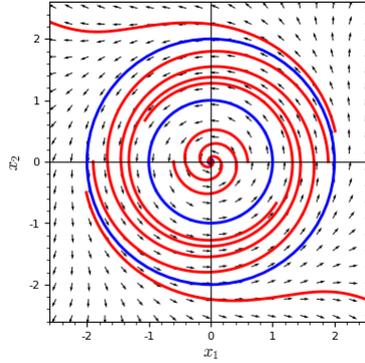


Figura 2.15: Mapa de fases del sistema autónomo plano (2.9).

*límite asintóticamente semiestable porque las trayectorias de su exterior se aproximan a él a medida que el tiempo crece, pero las trayectorias de su interior se van alejando de él. Por otra parte, se observa que el ciclo  $r = 2$  es un ciclo límite inestable porque tanto las trayectorias contenidas en su interior como las contenidas en su exterior se van alejando del ciclo cuando el tiempo tiende a infinito. Así, en este sistema se tiene un ejemplo de ciclo límite asintóticamente semiestable y otro de un ciclo límite inestable.*

Antes de dar por finalizado el capítulo, es interesante señalar la información que aporta el Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15 en cuanto a la existencia de ciclos límite. Se considera el caso  $t \geq 0$  (siendo análogo el caso  $t \leq 0$ ). Como se enuncia en el teorema, si una semi-trayectoria  $\Gamma_p^+$  de un sistema autónomo plano es acotada solo existen tres situaciones diferentes. La primera de ellas no tiene relación con ningún ciclo, pero las dos últimas sí. Ambas garantizan la existencia de al menos un ciclo en el sistema, pero la tercera asegura además que ese ciclo es  $\omega(p)$  y que  $\Gamma_p$  se acerca a dicho ciclo siguiendo una espiral. Esto significa que  $\omega(p)$  es un ciclo límite, ya que es un ciclo al cual se aproxima la trayectoria  $\Gamma_p$ , que es distinta del propio ciclo. Además, en el caso de que no solo  $\Gamma_p$  se acerque a  $\omega(p)$ , si no todas las trayectorias tanto de su interior como de su exterior, entonces se tiene que  $\omega(p)$  es un ciclo límite asintóticamente estable. Si solo se acercaran las trayectorias contenidas en su interior o en su exterior, se tendría análogamente que  $\omega(p)$  es un ciclo límite asintóticamente semiestable. Así, indirectamente el Teorema de Poincaré-Bendixson añade información sobre la posible existencia de ciclos límite en sistemas autónomos planos.

## Capítulo 3

# Teorema de Liénard

En este tercer capítulo del presente trabajo se va a tratar un caso particular de ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la denominada ecuación de Liénard. Esta ecuación viene dada por

$$x'' + g(x)x' + h(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde ahora  $x$  es una función escalar la cual al igual que en el Capítulo 2 es necesario imponer que esté definida en toda la recta real para poder analizar sus conjuntos  $\omega$ -límite y  $\alpha$ -límite, y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones cualesquiera.

La ecuación de Liénard modela varios casos de sistemas oscilatorios, lo cual tiene mucha utilidad en aplicaciones físicas. Mecánicamente, como se expresa en [16], puede entenderse como la ecuación de movimiento de una unidad de masa sometida a una fuerza de amortiguamiento no lineal  $-g(x)x'$  y a una fuerza restauradora  $-h(x)$ . De esta manera, estudiar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación mediante teoría cualitativa permite conocer el comportamiento global de este tipo de sistemas. Como es habitual, esta ecuación diferencial de segundo orden puede expresarse mediante un sistema diferencial autónomo plano, de la forma

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x)y - h(x) \end{cases}, \quad (3.2)$$

donde, a diferencia de los ejemplos presentados hasta este punto en la memoria (véase por ejemplo el Ejemplo 1.5), se ha renombrado  $x := x_1$  e  $y := x_2$  para evitar sobrecargar la notación.

El Teorema de Liénard establece que, bajo ciertas condiciones de las funciones  $g$  y  $h$  de la ecuación (3.1), el sistema diferencial autónomo asociado a dicha ecuación tiene un único ciclo al cual se aproximan otras trayectorias del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, un ciclo límite asintóticamente estable.

### 3.1. Ejemplos de sistemas físicos

Para comprender mejor el tipo de sistemas oscilatorios cuyo comportamiento se rige por la ecuación de Liénard, se introducen a continuación dos ejemplos básicos de sistemas físicos: la ecuación del péndulo amortiguado y la ecuación de van der Pol, la cual se emplea en circuitos eléctricos que usan válvulas de vacío.

**Ejemplo 3.1** Se considera un péndulo simple bajo la influencia del potencial gravitatorio, formado por una masa puntual en el extremo de una ligadura, la cual está unida a un punto fijo y se supone sin masa. Un esquema del sistema se representa en la Figura 3.1.

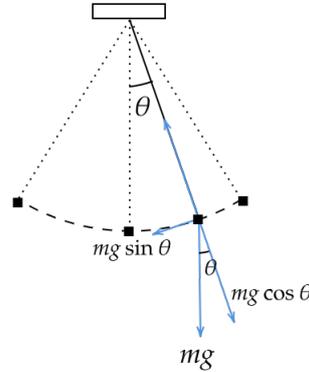


Figura 3.1: Esquema del diagrama dinámico del péndulo simple.

El movimiento de este sistema viene descrito por la segunda ley de Newton

$$\sum F = ma,$$

donde  $\sum F$  es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema,  $m$  es la masa puntual en el extremo de la ligadura y  $a$  es la aceleración vectorial que ésta experimenta. Teniendo en cuenta sólo las fuerzas que actúan sobre la masa en la dirección tangencial al movimiento, se tiene que éstas son la descomposición de la fuerza gravitatoria en dicha dirección y la fuerza de rozamiento viscoso con la atmósfera, la cual se modela proporcional al módulo de la velocidad de la masa. De esta forma se tiene

$$\sum F_t = -mg \operatorname{sen} \theta - b\|v\|,$$

donde  $F_t$  denota fuerza tangencial,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $b$  es una constante,  $v$  es la velocidad de la masa y  $\theta$  es el ángulo que forma la masa con la vertical en cada instante, la cual es la variable de estado del sistema. Denotando como  $l$  a la longitud de la ligadura, y considerando que la aceleración tangencial  $a_t$  viene determinada por  $a_t = l\theta''$  y que el módulo de la velocidad es  $\|v\| = l\theta'$ , se obtiene que la ecuación diferencial de segundo orden que rige el sistema es:

$$ml\theta'' + b\theta' + mg \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (3.3)$$

Esta ecuación, dividiéndola por el factor  $ml$  que es distinto de cero ya que todas las constantes que intervienen en la ecuación son positivas por su sentido físico, se puede escribir como

$$\theta'' + c\theta' + a \operatorname{sen} \theta = 0, \quad (3.4)$$

donde se han renombrado  $a := g/l$  y  $c := b/m$ . Definiendo  $x := \theta$  y reescribiendo esta ecuación diferencial de segundo orden como un sistema autónomo de dos ecuaciones, se obtiene

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -cy - a \operatorname{sen} x \end{cases} \quad (3.5)$$

Se comprueba por comparación que el sistema de la ecuación (3.5) tiene la forma del sistema de la ecuación (3.2). Así, en este caso la función  $g$  de la ecuación (3.1) se corresponde con  $g(x) = c$  y la función  $h$  se corresponde con  $h(x) = a \sin x$ , y se concluye que la ecuación diferencial de segundo orden que describe el movimiento de un péndulo simple como el presentado es una ecuación de Liénard.

Por otra parte, se puede representar el mapa de fases del péndulo simple descrito, lo que se ha realizado en la Figura 3.2 diferenciando entre los cuatro casos existentes dependiendo de los valores de las constantes  $a$  y  $c$ . La Figura 3.2 (a) se corresponde con el péndulo ideal, el cual no tiene rozamiento viscoso con la atmósfera y por tanto se considera  $c = 0$ . Como se puede observar, en este caso existen trayectorias que son ciclos, pero no son ciclos límite porque no son conjunto  $\omega$ -límite ni conjunto  $\alpha$ -límite de ninguna trayectoria distinta de los propios ciclos. Los otros tres casos, en cambio, son los casos existentes si se considera un péndulo amortiguado, es decir, en el que  $c \neq 0$ . En concreto, el caso de la Figura 3.2 (b) se denomina caso subcrítico y se corresponde con la situación en la que la gravedad tiene más influencia en el sistema que el rozamiento de la masa con la atmósfera, el caso de la Figura 3.2 (c) se denomina caso crítico y se corresponde con la situación en la que la influencia de la gravedad y el rozamiento son equivalentes, y el caso de la Figura 3.2 (d) se denomina caso supercrítico y se corresponde con la situación en la que el rozamiento con la atmósfera influye más en el sistema que la gravedad. Se puede observar por los mapas de fases de la Figura 3.2 que en ninguno de los tres últimos casos existen ciclos, lo cual concuerda con el sentido físico de que al existir rozamiento viscoso con la atmósfera el péndulo va a tender a la posición de equilibrio vertical y no va a oscilar indefinidamente.

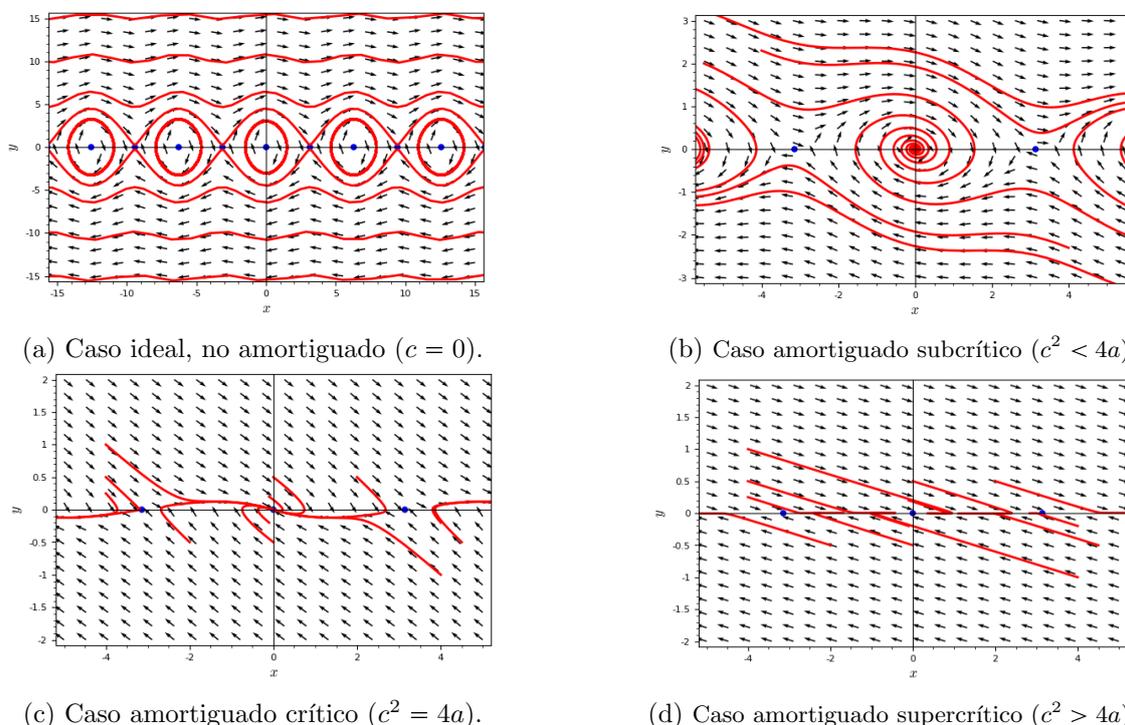


Figura 3.2: Mapas de fases del sistema relativo al péndulo simple en función de las constantes  $a$  y  $c$ .

**Ejemplo 3.2** Se considera la ecuación de van der Pol la cual se utiliza, entre otras aplicaciones y como se afirma en [14], para modelar el comportamiento de circuitos eléctricos en los que se emplean válvulas de vacío. Esta ecuación es

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\mu$  es un parámetro real cualquiera (para que la ecuación tenga sentido físico habría que imponer  $\mu > 0$ ). La ecuación de van der Pol, que es una ecuación diferencial de segundo orden, puede escribirse también como un sistema autónomo plano mediante

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\mu(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad (3.7)$$

Así, se comprueba por comparación con el sistema de la ecuación (3.2) que la ecuación de van der Pol es un caso concreto de ecuación de Liénard, en la que la función  $g$  es  $g(x) = \mu(x^2 - 1)$  y la función  $h$  es  $h(x) = x$ . En función del parámetro  $\mu$ , el sistema gobernado por la ecuación de van der Pol tiene uno u otro comportamiento. Se distinguen, en concreto, tres casos diferentes. El primero de ellos es el caso en el que  $\mu = 0$ . En esta situación se recupera la ecuación  $x'' + x = 0$ , cuyo comportamiento se ha analizado en el Ejemplo 1.5 y donde existen infinitas trayectorias que son ciclos estables (Figura 1.1). El segundo y tercer caso son, respectivamente, las situaciones  $\mu > 0$  y  $\mu < 0$ . Los mapas de fases de estos dos casos se representan en la Figura 3.3.

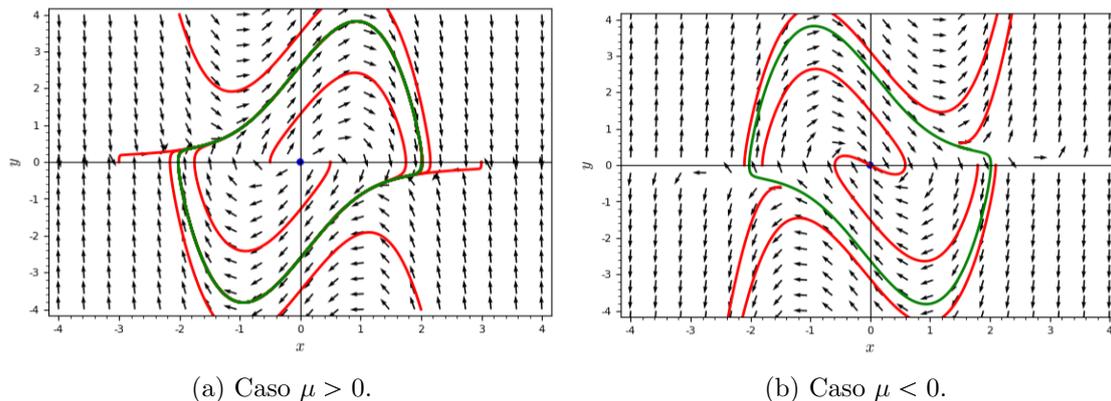


Figura 3.3: Mapas de fases del sistema autónomo asociado a la ecuación de van der Pol, dependiendo del signo del parámetro  $\mu$ .

En la Figura 3.3 (a), que se corresponde con el caso  $\mu > 0$ , se observa que existe un único ciclo, destacado en verde, el cual es además ciclo límite asintóticamente estable ya que tanto las trayectorias de su interior como de su exterior se aproximan a él cuando el tiempo tiende a infinito. En la siguiente sección se demuestra que en este caso la ecuación de van der Pol cumple las condiciones del Teorema de Liénard 3.3 y por tanto se justifica la existencia de este ciclo límite asintóticamente estable.

Por otra parte en la Figura 3.3 (b), que se corresponde con el caso  $\mu < 0$ , se observa que existe de la misma manera un único ciclo. Sin embargo, en este caso se tiene que el ciclo existente es un ciclo límite inestable, ya que como se observa las trayectorias de su interior y de su exterior se alejan de él cuando el tiempo crece. Esto se justifica con el Teorema de Liénard haciendo un cambio de variable que permite escribir la ecuación de van der Pol en el caso  $\mu < 0$  como una ecuación de van der Pol del tipo  $\mu > 0$  pero con el tiempo invertido, lo que explica que el ciclo límite sea inestable en vez de estable.

Así, con estos dos ejemplos introductorios de la ecuación de Liénard se pasa a enunciar y demostrar el Teorema de Liénard y otro relacionado que constituye una extensión de éste, los cuales son de sumo interés para conocer el comportamiento de las trayectorias de este tipo de ecuación.

### 3.2. Teorema de Liénard

El resultado presentado en esta sección es el Teorema de Liénard, el cual permite asegurar la existencia y unicidad de soluciones periódicas de la ecuación de Liénard si las funciones  $g$  y  $h$  cumplen unas hipótesis determinadas. Para la demostración de este teorema se ha seguido [9], pero en libros como [4] también se enuncia y demuestra un Teorema de Liénard en el que las hipótesis varían ligeramente. Además, en [2] se demuestra el teorema para un caso particular de funciones  $g$  y  $h$ .

**Teorema 3.3** (*Teorema de Liénard*) Sea la ecuación de Liénard  $x'' + g(x)x' + h(x) = 0$  con  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas tales que

1.  $G(x) := \int_0^x g(u)du$  es una función impar (esto es  $G(-x) = -G(x)$ ),
2.  $G(x)$  es cero únicamente en  $x = 0$ ,  $x = a$  y  $x = -a$ , para cierto  $a > 0$ , y es negativa para  $x$  entre 0 y  $a$ ,
3.  $G(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito de forma monótona en  $x > a$ ,
4.  $h$  es una función impar y  $h(x) > 0$  cuando  $x > 0$ ,

entonces el sistema asociado tiene un único ciclo límite asintóticamente estable.

Antes de introducir la demostración del Teorema 3.3 es interesante realizar una observación acerca de las hipótesis del mismo que ayudan a entender mejor la prueba.

**Observación 3.4** Bajo las hipótesis del Teorema de Liénard (Teorema 3.3) se tienen las siguientes consecuencias directas.

En primer lugar,  $g$  es una función par, es decir,  $g(x) = g(-x)$ . Para mostrarlo, se considera que la función  $G$  es una función impar, por lo que se tiene

$$G(-x) = -G(x) = -\int_0^x g(u)du.$$

Además, haciendo el cambio de variable  $s = -u$  en la definición de  $G$  se obtiene

$$G(-x) = \int_0^{-x} g(u)du = -\int_0^x g(-s)ds.$$

Por tanto, por el teorema fundamental del cálculo, como  $g$  es continua entonces  $G$  es derivable y en consecuencia se concluye que  $g(x) = g(-x)$ , por lo que  $g$  es una función par.

En segundo lugar, se tiene que  $g(x) \geq 0$  para  $x > a$ . Como  $G(a) = 0$  y  $G(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito de forma monótona para  $x > a$ , y  $G$  no tiene más valores  $x$  mayores que  $a$  en los que se anula, se tiene que  $G$  es monótona creciente para  $x > a$ . Por el teorema fundamental del cálculo se cumple  $G' = g$ , y entonces  $g$  ha de ser mayor o igual que cero para  $x > a$ .

En tercer y último lugar, se tiene que  $g(0) < 0$ . Como  $G$  es impar se cumple  $G(0) = 0$  y puesto que es negativa para  $x$  entre 0 y  $a$ , ha de ser positiva para  $x$  entre  $-a$  y 0 y en consecuencia en un entorno del origen es estrictamente decreciente. Así, ya que  $G' = g$  se tiene que el valor  $g(0)$  ha de ser negativo obligatoriamente. Se muestra en la Figura 3.4 un ejemplo de funciones  $g$  y  $G$  que cumplen las hipótesis del Teorema 3.3, para clarificar sus características. En dicha figura  $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 0.25)(x^2 - 2) - 0.01$  y  $G$  es la primitiva que cumple  $G(0) = 0$ .

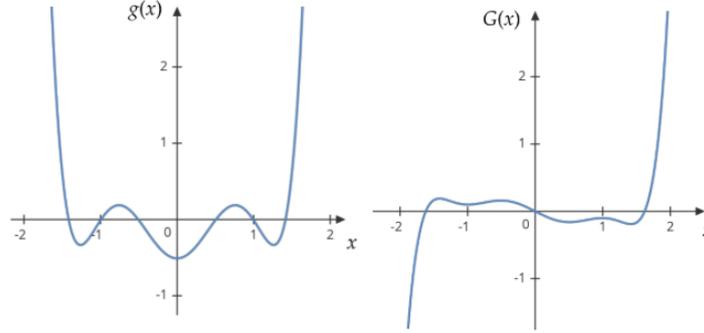


Figura 3.4: Ejemplo de funciones  $g$  y  $G$ .

**Demostración.** (Del Teorema 3.3). Se lleva a cabo considerando un sistema autónomo plano asociado a la ecuación (3.1) diferente del usual, lo que permite que las trayectorias tengan formas más simplificadas sin perder simetría. El sistema asociado que se va a estudiar es

$$\begin{cases} x' = y - G(x) \\ y' = -h(x) \end{cases} \quad (3.8)$$

Para comprobar que de hecho es un sistema autónomo asociado a la ecuación (3.1), se deriva la primera ecuación de (3.8) y se obtiene

$$x'' = y' - G'(x)x' = -h(x) - g(x)x',$$

donde se ha reemplazado  $y'$  con la segunda ecuación y se ha empleado que  $G' = g$ . De esta manera, se obtiene  $x'' + g(x)x' + h(x) = 0$ , por lo que se verifica que el sistema diferencial (3.8) cumple la ecuación de Liénard (3.1). Recíprocamente, si  $x$  verifica la ecuación de Liénard (3.1) basta definir  $y := x' + G(x)$ , con lo que  $x' = y - G(x)$  y derivando se llega al sistema (3.8).

En primer lugar, se presentan las siguientes consideraciones, que aportan información sobre el comportamiento de las trayectorias en el mapa de fases del sistema dado por la ecuación (3.8).

1. Si  $(x(t), y(t))$  es una solución del sistema (3.8), entonces también lo es  $(-x(t), -y(t))$ . Para probarlo, se define  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) := (-x(t), -y(t))$  y hay que comprobar que verifica las ecuaciones del sistema dado por la ecuación (3.8). Esto se obtiene derivando y empleando el hecho de que las funciones  $G$  y  $h$  son ambas impares, pues

$$\tilde{x}(t) = -x(t) \rightarrow \tilde{x}' = -x' = -y + G(x) = -y - G(-x) = \tilde{y} - G(\tilde{x})$$

$$\tilde{y}(t) = -y(t) \rightarrow \tilde{y}' = -y' = h(x) = -h(-x) = -h(\tilde{x}).$$

Así,  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  es también solución del sistema. En consecuencia, el mapa de fases en su conjunto es simétrico respecto del origen (pero no necesariamente cada una de las trayectorias por separado).

2. La pendiente de una trayectoria viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-h(x)}{y - G(x)}. \quad (3.9)$$

Así, la pendiente es nula solo cuando  $h(x) = 0$ , es decir, en  $x = 0$ , y las trayectorias son verticales solo en los puntos de la curva  $y = G(x)$ .

3. Puesto que la función  $h$  es impar y  $h(x) > 0$  en  $x > 0$ , se tiene  $h(x) < 0$  en  $x < 0$  y en consecuencia  $y' < 0$  para  $x > 0$  e  $y' > 0$  para  $x < 0$ . Además, si  $y > G(x)$  se tiene que  $x' > 0$  y si  $y < G(x)$  se tiene que  $x' < 0$ .
4. Analizando el sistema asociado a la ecuación de Liénard (3.1) y considerando las hipótesis del teorema,  $y' = 0$  solo en  $x = 0$  y  $x'$ , puesto que por definición  $G(0) = 0$ , solo se anula en  $y = 0$  (cuando  $x = 0$  asimismo). De esta forma, el único punto crítico del sistema es el origen.

En segundo lugar, en lo sucesivo se va a denotar por  $ab$  a la distancia entre dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  del plano. Además, el tramo de trayectoria que une dos puntos  $c$  y  $d$  cualesquiera de la misma, o tres puntos  $c$ ,  $d$  y  $e$  cualesquiera también de la trayectoria, se denota por  $\widehat{cd}$  o  $\widehat{cde}$ , respectivamente.

Algunas de las trayectorias de este sistema, teniendo en cuenta las consideraciones descritas, se presentan en la Figura 3.5. Además, un ejemplo específico de mapa de fases de este tipo de sistema se presenta en la Figura 3.8 del Ejemplo 3.6, en el que se pueden distinguir también estas características.

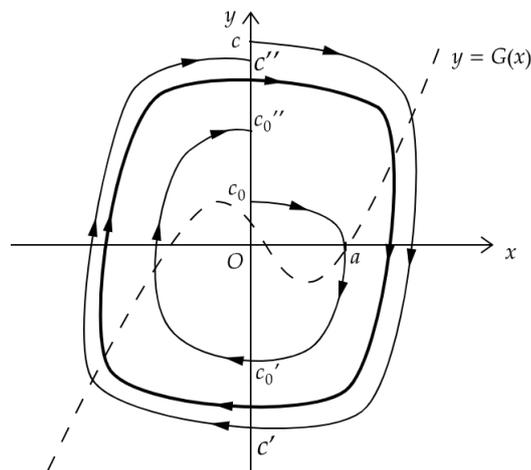


Figura 3.5: Algunas trayectorias del sistema (3.8).

De esta forma, la trayectoria que pasa por los puntos  $c$ ,  $c'$  y  $c''$  es cerrada si y solo si  $c$  y  $c''$  coinciden. Cabe señalar que estos tres puntos pertenecen al eje de ordenadas y que  $c$  y  $c''$  pertenecen al semiplano  $y > 0$  y que  $c'$  pertenece al semiplano  $y < 0$ . Como el mapa de fases es simétrico respecto del origen, que la trayectoria es cerrada es equivalente a que la distancia entre el origen y el punto  $c$  sea igual a la distancia entre el origen y el punto  $c'$ ,

es decir,  $Oc = Oc'$ . Se va probar el teorema mostrando que dada una trayectoria que pasa por los puntos  $c_0$ ,  $c'_0$  y  $c''_0$  y que también pasa por  $(a, 0)$  se tiene que  $Oc_0 - Oc'_0 < 0$ , y que cuando el punto  $c$  se aleja al infinito a lo largo del eje positivo  $y$ , se tiene  $Oc - Oc' \rightarrow \infty$  de manera monótona creciente. Por tanto, se podrá concluir que existe un único punto  $c$  para el cual  $Oc - Oc' = 0$  y que éste identifica el único ciclo del sistema, asociado a una solución periódica. Además, en el desarrollo de la demostración se pone de manifiesto que tanto las trayectorias del interior como del exterior del ciclo se acercan al mismo cuando el tiempo crece, por lo que se podrá confirmar que éste se trata de un ciclo límite asintóticamente estable.

Se considera la función

$$v(x, y) = \int_0^x h(u) du + \frac{1}{2}y^2$$

y se define, para dos puntos cualesquiera  $r$  y  $t$  de una trayectoria,

$$V_{\widehat{rt}} = v_t - v_r = \int_{\widehat{rt}} dv.$$

De esta forma,  $Oc - Oc' = 0$  si y solo si  $V_{\widehat{cc'}} = 0$ . Esto se debe al hecho de que  $c$  y  $c'$  están ambos en el eje  $y$ , por tanto  $v(x, y) = \frac{1}{2}y^2$  en ambos puntos y así si  $Oc - Oc' = 0$  entonces los valores absolutos de las coordenadas  $y$  de ambos puntos coinciden y en consecuencia  $v_{c'} = v_c$ . De manera recíproca, si  $V_{\widehat{cc'}} = 0$  entonces  $v_{c'} = v_c$  y los valores absolutos de las coordenadas  $y$  de los dos puntos son iguales, de forma que  $Oc - Oc' = 0$ .

Por otra parte, a lo largo de una trayectoria cualquiera del mapa de fases, considerando la ecuación (3.9) y la definición de  $v$  y suponiendo que  $h \neq 0$  (esto es,  $x \neq 0$ ), se tiene

$$dv = y dy + h dx = y dy + h \frac{dx}{dy} dy = y dy + h \frac{y - G}{-h} dy = y dy - y dy + G dy = G dy.$$

Se tiene en cuenta el esquema del mapa de fases de la Figura 3.6, en el que solo se considera el semiplano  $x > 0$  porque la información del otro semiplano viene dada de manera análoga por la simetría del mapa de fases respecto del origen. En este mapa se traza la recta vertical que pasa por  $(a, 0)$ , y se denotan por  $b$  y  $b'$  los puntos de corte de dicha recta con el tramo de trayectoria  $\widehat{cc'}$ . De esta manera, el segmento  $\widehat{bb'}$ , a través del punto  $(a, 0)$ , separa las partes del semiplano  $x > 0$  en las que  $G$  es positiva y negativa. Se consideran estas partes por separado para calcular  $V_{\widehat{cc'}}$  de forma que  $V_{\widehat{cc'}} = V_{\widehat{cb}} + V_{\widehat{bb'}} + V_{\widehat{b'c'}}$ , y la demostración se lleva a cabo en varios pasos.

El primer paso es probar que, considerando  $q = (\alpha, G(\alpha))$  con  $\alpha > a$  el punto de corte del tramo de trayectoria  $\widehat{cc'}$  con la curva  $y = G(x)$ ,  $V_{\widehat{cb}} + V_{\widehat{b'c'}}$  es positivo y monótono decreciente a medida que el punto  $q$  se aleja de  $(a, 0)$  a lo largo del segmento que une el punto  $(a, 0)$  con el punto  $z$ . Para ello, se considera el tramo de trayectoria  $\widehat{cq'c'}$  como se muestra en la Figura 3.6, y se considera otro tramo de trayectoria  $\widehat{c_1q_1c'_1}$  con  $q_1$  siendo el punto  $(\alpha_1, G(\alpha_1))$  como se señala en la misma figura, y cumpliendo  $\alpha_1 > \alpha$ . Puesto que a lo largo de  $\widehat{cb}$  y de  $\widehat{c_1b_1}$  se tiene  $y > 0$  y  $G(x) < 0$  (pues  $0 < x < a$ ), y como  $h(x) > 0$  para  $x > 0$ , se cumple atendiendo a la ecuación (3.9) que

$$\left( \frac{dy(x)}{dx} \right)_{\widehat{cb}} < \left( \frac{dy(x)}{dx} \right)_{\widehat{c_1b_1}} < 0$$

para cada  $x$ , donde la primera desigualdad se tiene porque los valores de las coordenadas  $y$  de los puntos de  $\widehat{c_1b_1}$  son mayores que los de los puntos de  $\widehat{cb}$ .

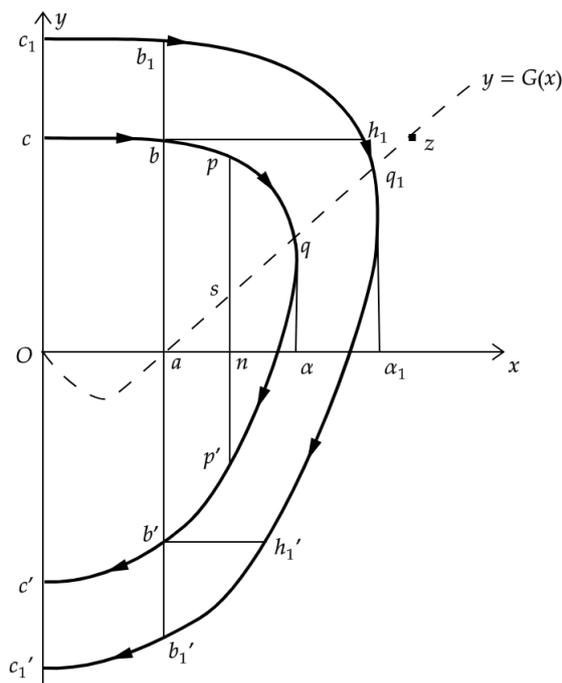


Figura 3.6: Esquema del mapa de fases del sistema (3.8) para  $x > 0$ .

De manera análoga, considerando los tramos de trayectoria  $\widehat{b'c'}$  y  $\widehat{b_1'c_1'}$  se obtiene, debido a que  $y < G(x)$  y  $G(x) < 0$  en esos tramos, que

$$0 < \left( \frac{dy(x)}{dx} \right)_{\widehat{b_1'c_1'}} < \left( \frac{dy(x)}{dx} \right)_{\widehat{b'c'}}$$

para cada  $x$ . En la segunda desigualdad se ha tenido en cuenta que los valores de las coordenadas  $y$  de los puntos de  $\widehat{b_1'c_1'}$  son más negativos que los de los puntos de  $\widehat{b'c'}$ . En consecuencia, atendiendo a que  $dv = G dy$  y que  $G(x) < 0$  en los tramos de trayectoria que se están considerando se obtiene, por un lado,

$$V_{\widehat{cb}} = \int_{\widehat{cb}} G dy = \int_{\widehat{cb}} (-G) \left( -\frac{dy}{dx} \right) dx > \int_{c_1 b_1} (-G) \left( -\frac{dy}{dx} \right) dx = \int_{c_1 b_1} G dy = V_{\widehat{c_1 b_1}} > 0, \quad (3.10)$$

ya que  $-G(x) > 0$  y  $-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\widehat{cb}} > 0$ . Por otro lado, de manera análoga se tiene también

$$V_{\widehat{b'c'}} = \int_{\widehat{b'c'}} G dy = \int_{\widehat{b'c'}} G \frac{dy}{dx} dx > \int_{\widehat{b_1'c_1'}} G \frac{dy}{dx} dx = \int_{\widehat{b_1'c_1'}} G dy = V_{\widehat{b_1'c_1'}} > 0. \quad (3.11)$$

Así, sumando la ecuación (3.10) y la ecuación (3.11) se tiene que  $V_{\widehat{cb}} + V_{\widehat{b'c'}} > V_{\widehat{c_1 b_1}} + V_{\widehat{b_1'c_1'}} > 0$ , por lo que se puede concluir que  $V_{\widehat{cb}} + V_{\widehat{b'c'}}$  es positivo y monótono decreciente a medida que el punto  $q$  se aleja de  $(a, 0)$ .

El segundo paso es demostrar que a medida que el punto  $q$  se aleja de  $(a, 0)$  a lo largo del segmento que une el punto  $(a, 0)$  con el punto  $z$ ,  $V_{\widehat{bb'}}$  es monótono decreciente. Para ello, se considera el tramo de trayectoria  $\widehat{bqb'}$  arbitrariamente a la derecha de  $(a, 0)$  y se toma otro tramo de trayectoria  $\widehat{b_1 q_1 b_1'}$  con  $q_1$  a la derecha de  $q$ . Se denota por  $h_1$  al punto de corte del tramo  $\widehat{c_1 c_1'}$  con la recta horizontal que pasa por  $b$  y por  $h_1'$  al punto de corte

del mismo tramo con la recta horizontal que pasa por  $b'$ . En esos tramos de trayectoria se cumple  $G(x) > 0$ , y se tiene

$$V_{\overline{b_1 b'_1}} = -V_{\overline{b'_1 b_1}} = -\int_{\overline{b'_1 b_1}} G dy \leq -\int_{\overline{h'_1 h_1}} G dy \leq -\int_{\overline{b' b}} G dy = -V_{\overline{b' b}} = V_{\overline{b b'}}. \quad (3.12)$$

En la primera desigualdad se ha considerado que  $\overline{h'_1 h_1} \subset \overline{b'_1 b_1}$  y en la segunda desigualdad se ha tenido en cuenta que los segmentos  $\overline{b h_1}$  y  $\overline{b' h'_1}$  son paralelos al eje  $x$  y que, para los mismos valores de  $y$ ,  $G$  en  $\overline{b' b}$  es menor o igual que en  $\overline{h'_1 h_1}$ . De esta manera, se concluye que  $V_{\overline{b_1 b'_1}} \leq V_{\overline{b b'}}$  y así  $V_{\overline{b b'}}$  es monótono decreciente a medida que el punto  $q$  se aleja de  $(a, 0)$ .

Con los dos primeros pasos descritos, puesto que se ha demostrado que tanto  $V_{\overline{c b}} + V_{\overline{b' c'}}$  como  $V_{\overline{b b'}}$  son monótonos decrecientes, se puede deducir que  $V_{\overline{c c'}} = V_{\overline{c b}} + V_{\overline{b b'}} + V_{\overline{b' c'}}$  es también monótono decreciente a medida que  $q$  se aleja de  $(a, 0)$  a lo largo del segmento que une el punto  $(a, 0)$  con el punto  $z$ .

El tercer paso consiste en demostrar que  $V_{\overline{b b'}}$  tiende a menos infinito a medida que las trayectorias se alejan hacia el infinito. Para ello, se considera un punto  $s$  de la curva  $y = G(x)$  que esté a la derecha del punto  $(a, 0)$ , como se representa en la Figura 3.6, y se toma un tramo de trayectoria arbitraria  $\overline{b q b'}$  con  $q$  a la derecha de  $s$ . Se consideran ahora los puntos  $p$  y  $p'$ , que son los puntos de corte del tramo  $\overline{b q b'}$  con la recta perpendicular al eje  $x$  que pasa por  $s$ , y se considera también el punto  $n$ , que es el punto de corte de dicha recta con el eje  $x$ . Además, según el esquema de la Figura 3.6 como  $G$  es monótona creciente en  $x > a$  se tiene que  $G(x) \geq ns$  en todos los valores de  $x$  para los cuales se recorre el tramo  $\overline{p p'}$ . De esta forma, empleando también que en el tramo considerado  $G(x) > 0$ , se puede acotar el valor  $V_{\overline{b b'}}$  como

$$V_{\overline{b b'}} = -V_{\overline{b' b}} = -\int_{\overline{b' b}} G(x) dy \leq -\int_{\overline{p' p}} G(x) dy \leq -ns \int_{\overline{p' p}} dy = -ns \cdot pp' \leq -ns \cdot np. \quad (3.13)$$

Pero a medida que  $q$  se va al infinito hacia la derecha a lo largo de la curva  $y = G(x)$ , se tiene que la distancia  $np$  tiende a infinito (pues  $G(x)$  tiende a infinito) y en consecuencia  $V_{\overline{b b'}}$  tiende a menos infinito. De esta manera, teniendo en cuenta que como se ha demostrado  $V_{\overline{c c'}} = V_{\overline{c b}} + V_{\overline{b b'}} + V_{\overline{b' c'}}$  es monótono decreciente y que se acaba de probar que  $V_{\overline{b b'}}$  tiende a menos infinito, se concluye que también  $V_{\overline{c c'}}$  tiende a menos infinito cuando  $q$  tiende al infinito hacia la derecha.

Por último, cuando  $q$  coincide con el punto  $(a, 0)$  o cuando  $q$  está a la izquierda de dicho punto, se tiene en el tramo  $\overline{c c'}$  que  $G(x) < 0$  y  $dy < 0$ , por lo que se obtiene que

$$V_{\overline{c c'}} = \int_{\overline{c c'}} G(x) dy > 0.$$

En conclusión, existe una y solo una trayectoria para la cual  $V_{\overline{c c'}} = 0$ , por lo que para esa trayectoria  $Oc - Oc' = 0$  y así esta trayectoria es una curva cerrada simple por la simetría del mapa de fases respecto del origen. En consecuencia, existe un único ciclo en el sistema. Además, éste se trata de un ciclo límite asintóticamente estable porque, atendiendo al esquema de la Figura 3.5, tanto las trayectorias del interior como del exterior del ciclo se acercan a éste cuando el tiempo crece. Así, queda demostrado el Teorema de Liénard. ■

Se ha probado que bajo ciertas condiciones de las funciones  $g$  y  $h$  de la ecuación (3.1), el sistema modelado por dicha ecuación presenta un ciclo límite asintóticamente estable,

lo que mecánicamente implica que el sistema tiende a oscilar periódicamente y de manera indefinida independientemente de sus condiciones iniciales. Analizando las condiciones impuestas a  $g$  y  $h$  en el Teorema 3.3, tal como se expone en [16], el hecho de que el sistema presente un ciclo límite asintóticamente estable es plausible. Las hipótesis que cumple la función  $h$  implican que la fuerza restauradora que ésta modela actúa como un muelle, siendo positiva para  $x > 0$  y negativa para  $x < 0$  y oponiéndose al movimiento. Además, las hipótesis que cumple la función  $g$  implican que el amortiguamiento es negativo para valores pequeños de  $|x|$  y positivo para valores grandes de  $|x|$ . Esto se traduce en que para oscilaciones de pequeña amplitud del sistema el amortiguamiento favorece al movimiento mientras que para oscilaciones de gran amplitud el amortiguamiento perjudica al movimiento, de forma que no es inesperado que el sistema tienda a oscilar de manera autosuficiente y con una amplitud intermedia.

A continuación, se va a demostrar que el péndulo modelado en el Ejemplo 3.1 no cumple con las hipótesis del Teorema de Liénard 3.3 independientemente de los parámetros  $a$  y  $c$ , mientras que la ecuación de van der Pol presentada en el Ejemplo 3.2 sí que verifica las condiciones de dicho teorema en el caso  $\mu > 0$ , por lo que en ese sistema existe un ciclo límite asintóticamente estable como se adelantaba en dicho ejemplo.

En primer lugar, es sencillo ver que el sistema que modela el péndulo presentado en el Ejemplo 3.1 no cumple con las condiciones del Teorema de Liénard 3.3. En ese sistema se tiene que las funciones  $g$  y  $G$  son  $g(x) = c$  y  $h(x) = a \sin x$ , donde  $a$  es un parámetro real mayor que cero y  $c$  es un parámetro real mayor o igual que cero. Analizando si la función  $h(x) = a \sin x$  cumple la hipótesis 4 del Teorema 3.3, se tiene que ésta es una función impar pero no se cumple que  $a \sin x > 0$  para  $x > 0$ . Esto se debe a que existen valores positivos de  $x$  que hacen que  $\sin x$  sea negativo, por ejemplo  $x = 3\pi/2$ , y en consecuencia  $h(3\pi/2) = -a$ , lo que es negativo ya que  $a > 0$ . De esta manera, para cualquier valor del parámetro  $c$ , incluyendo el caso del péndulo no amortiguado en el que  $c = 0$ , no se verifican todas las condiciones del Teorema de Liénard 3.3 y por tanto no se puede asegurar ni la existencia ni la unicidad de ciclos límite asintóticamente estables en el mapa de fases del sistema (3.5) que modela el péndulo. Como se estudió en el Ejemplo 3.1, en el caso del péndulo amortiguado en el que  $c > 0$  no existen ciclos en el mapa de fases del sistema, aunque en el caso del péndulo no amortiguado en el que  $c = 0$  sí, pero no son ciclos límite asintóticamente estables. Esto puede observarse en la Figura 3.2.

En segundo lugar, que la ecuación de van der Pol presentada en el Ejemplo 3.2 sí verifica las hipótesis del Teorema de Liénard 3.3 en el caso  $\mu > 0$  se demuestra en forma de ejemplo (Ejemplo 3.5). En esta ecuación de Liénard se tiene  $g(x) = \mu(x^2 - 1)$  y  $h(x) = x$ . Previamente a introducir el ejemplo, se considera el caso  $\mu = 0$ . En este caso, se obtiene que  $g(x) = 0$  y en consecuencia  $G(x) = 0$ , por lo que no se verifica la hipótesis 3 del Teorema 3.3 y no se puede asegurar ni la existencia ni la unicidad de ciclos límite asintóticamente estables en el sistema. Tal como se analizó en el Ejemplo 3.2, en efecto en este caso se recupera la ecuación  $x'' + x = 0$  y como se presenta en la Figura 1.1 del Ejemplo 1.5 se obtiene que existen infinitos ciclos estables pero no asintóticamente estables. Se introduce ahora el Ejemplo 3.5 para estudiar el caso  $\mu > 0$ .

**Ejemplo 3.5** *Se demuestra que la ecuación de van der Pol (3.6) tiene un único ciclo límite asintóticamente estable en el caso  $\mu > 0$ .*

*Como se ha indicado anteriormente, para la ecuación de van der Pol se tiene  $g(x) = \mu(x^2 - 1)$  y  $h(x) = x$ , las cuales son funciones continuas al ser ambas polinómicas. Así, se obtiene integrando que  $G(x) = \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right)$ . Atendiendo a la función  $G(x)$ , ésta es una*

función impar puesto que

$$G(-x) = \mu \left( \frac{(-x)^3}{3} - (-x) \right) = \mu \left( \frac{-x^3}{3} + x \right) = -\mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right) = -G(x),$$

así que se cumple la hipótesis 1 del Teorema de Liénard 3.3.

Para verificar que se cumple la hipótesis 2 de dicho teorema, hay que demostrar que existe un número real  $a > 0$  tal que  $G$  sólo se anula en  $x = 0$ ,  $x = a$  y  $x = -a$  y que es negativa para  $x$  entre 0 y  $a$ . De esta manera, como  $G$  es una función polinómica, se calculan sus raíces y se obtiene  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{3}$  y  $x = -\sqrt{3}$ , por lo que se cumple que  $G$  sólo se anula en tres valores reales concretos. Ahora, se considera el intervalo  $0 < x < \sqrt{3}$  y hay que verificar que en ese intervalo  $G(x) < 0$ . La función  $G$  se puede reescribir como  $G(x) = \mu x \left( \frac{x^2}{3} - 1 \right)$ . En el intervalo considerado,  $x > 0$  y  $\frac{x^2}{3} - 1 < 0$ , por lo que para que  $G$  sea negativa se ha de cumplir  $\mu > 0$ , que es el caso que se está estudiando en este ejemplo y por tanto se verifica la hipótesis 2 del Teorema 3.3. Que se verifica la hipótesis 3 del citado teorema es trivial, puesto que  $G$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito y por el teorema fundamental del cálculo se tiene  $G'(x) = g(x) = \mu(x^2 - 1)$ , la cual es positiva para  $x > \sqrt{3}$  y en consecuencia  $G$  crece de manera monótona para  $x > \sqrt{3}$ .

Por último, falta analizar que se verifica la hipótesis 4 del Teorema 3.3, para lo que hay que demostrar que  $h$  es una función impar y que  $h(x) > 0$  para  $x > 0$ . Esto es sencillo probarlo, puesto que se tiene  $h(-x) = -x = -h(x)$  y trivialmente  $h(x) = x > 0$  en  $x > 0$ . Así, se cumplen todas las condiciones impuestas en el Teorema de Liénard sobre las funciones  $g$  y  $h$  y se puede concluir que el sistema asociado a la ecuación de van der Pol tiene un único ciclo límite asintóticamente estable. Esto se puede observar en la Figura 3.3 (a) del Ejemplo 3.2.

De esta manera, se han analizado para la ecuación de van der Pol (3.6) los casos  $\mu = 0$  y  $\mu > 0$ , por lo que falta estudiar el caso  $\mu < 0$ . Como se adelantaba en el Ejemplo 3.2, en este caso se puede hacer un cambio de variable para escribir la ecuación de van der Pol con  $\mu < 0$  como una ecuación de van der Pol del tipo  $\mu > 0$  ya analizado pero con el tiempo invertido, lo que se detalla a continuación.

Se introduce el cambio de variable  $u(t) := -x(-t)$ , por lo que se tiene derivando y aplicando la regla de la cadena  $u'(t) = x'(-t)$  y  $u''(t) = -x''(-t)$ . Así, se puede escribir la ecuación de van der Pol (3.6) para tiempos negativos

$$x''(-t) + \mu(x^2(-t) - 1)x'(-t) + x(-t) = 0,$$

donde  $\mu < 0$ , como

$$-u''(t) - |\mu|(u^2(t) - 1)u'(t) - u(t) = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por menos uno, se obtiene

$$u''(t) + |\mu|(u^2(t) - 1)u'(t) + u(t) = 0,$$

que se corresponde con la ecuación de van der Pol en la variable  $u$  y con parámetro  $|\mu| > 0$ . De esta manera, según se ha estudiado en el Ejemplo 3.5, el sistema asociado a esta ecuación tiene un ciclo límite asintóticamente estable porque las funciones  $g$  y  $h$  del mismo cumplen todas las condiciones del Teorema de Liénard 3.3. Sin embargo, al deshacer el cambio de variable  $x(-t) = -u(t)$ , lo que sucede es que lo que para tiempos positivos en la variable  $u$  era un ciclo límite asintóticamente estable, para tiempos negativos en la

variable  $x$  se convierte en un ciclo límite inestable ya que el mapa de fases es el simétrico respecto del eje  $y$  del caso  $\mu > 0$  y el campo de direcciones cambia de sentido. Esto se puede observar en la Figura 3.3 (a) y (b) del Ejemplo 3.2, donde se pueden comparar los mapas de fases de ambos casos  $\mu > 0$  y  $\mu < 0$  y confirmar que en efecto en el caso  $\mu < 0$  lo que se obtiene es un ciclo límite inestable.

Por último, para finalizar con el Teorema de Liénard se introduce otro ejemplo en el que se demuestra que una ecuación de Liénard concreta cumple las hipótesis de dicho teorema.

**Ejemplo 3.6** *El mapa de fases del sistema asociado a la ecuación de Liénard  $x'' + (x^2 + |x| - 1)x' + x^3 = 0$  tiene un único ciclo límite asintóticamente estable.*

*En primer lugar, el sistema autónomo usual equivalente a esta ecuación es*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(x^2 + |x| - 1)y - x^3 \end{cases}, \quad (3.14)$$

*mientras que el sistema autónomo equivalente mediante el cual se realiza la demostración del Teorema de Liénard 3.3 es*

$$\begin{cases} x' = y - G(x) \\ y' = -x^3 \end{cases}, \quad (3.15)$$

donde  $G(x) := \int_0^x g(u)du$  (ver (3.16)).

*Para probar que esta ecuación tiene un único ciclo límite asintóticamente estable, hay que verificar que las funciones  $g(x) = x^2 + |x| - 1$  y  $h(x) = x^3$  cumplen las condiciones del Teorema de Liénard 3.3. Trivialmente se tiene que tanto  $g$  como  $h$  son funciones continuas. Además, integrando se obtiene que la función  $G(x) = \int_0^x (u^2 + |u| - 1) du$  es*

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

*Hay que demostrar, para ver que se cumple la hipótesis 1 del Teorema 3.3, que  $G$  es una función impar. Por un lado, se tiene para  $x \geq 0$  que*

$$G(-x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right) = -G(x).$$

*Por otro lado, se tiene para  $x < 0$  que*

$$G(-x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right) = -G(x).$$

*De esta forma, se obtiene que  $G$  es una función impar y se cumple la hipótesis 1. Ahora, se pueden calcular de manera sencilla las raíces de los polinomios de  $G$  en función del signo de  $x$ . Trivialmente se observa que  $G(0) = 0$ . Para  $x \geq 0$ , se tiene que la raíz positiva*

*del polinomio  $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - 1$  es  $x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ , y para  $x < 0$  se tiene que la raíz negativa*

*del polinomio  $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - 1$  es  $x = \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$ . De esta forma, se concluye que  $G$  se anula*

*únicamente en  $x = 0$ ,  $x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$  y en  $x = \frac{3 - \sqrt{57}}{4}$ . Es necesario comprobar también*

*que  $G(x)$  es negativo para  $x$  entre 0 y  $x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ , lo que se hace evaluando la función*

en un punto cualquiera de dicho intervalo y se obtiene un valor menor que cero, por lo que se verifica. Así, se cumple la hipótesis 2 del Teorema 3.3.

A continuación, que  $G(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito se cumple al ser la función que define  $G$  para  $x > 0$  un polinomio cuyo coeficiente de mayor grado es positivo. Hay que probar que crece de forma monótona para  $x > \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ . Para ello, se considera que por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$G'(x) = g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Calculando las raíces de los polinomios que conforman  $G'$  se tiene que son  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , y analizando el signo de  $G'$  para  $x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  se tiene que éste es positivo. De esta manera, se obtiene que  $G$  es monótona creciente en  $x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  y, como  $\frac{-3 + \sqrt{57}}{4} > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , se concluye que  $G$  es monótona creciente también en  $x > \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}$ . De esta manera, se verifica la hipótesis 3 del Teorema 3.3.

Falta probar que se cumple la hipótesis 4 de dicho teorema, pero esto es trivial ya que  $h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$  y por tanto  $h$  es impar y claramente se tiene  $h(x) > 0$  cuando  $x > 0$ . Por lo tanto, la ecuación  $x'' + (x^2 + |x| - 1)x' + x^3 = 0$  cumple todas las hipótesis del Teorema de Liénard y en consecuencia se concluye que el mapa de fases del sistema asociado tiene un único ciclo límite asintóticamente estable. Este ciclo puede observarse (en verde) en la Figura 3.7, en la cual se representa el mapa de fases del sistema (3.14).

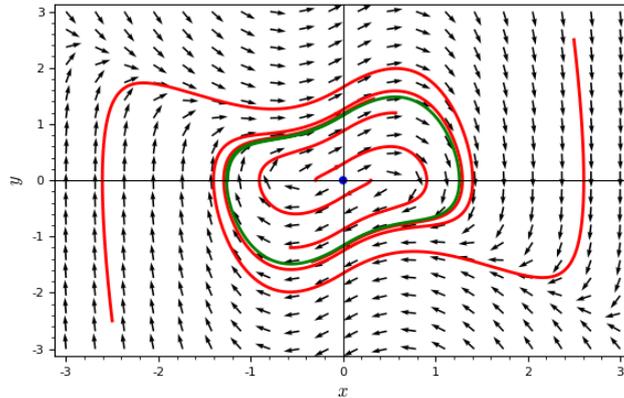


Figura 3.7: Mapa de fases del sistema (3.14).

Además, en la Figura 3.8 se representa el mapa de fases del sistema (3.15), en el cual se puede observar también que existe un único ciclo límite asintóticamente estable (en verde) y se puede verificar que se cumplen las consideraciones descritas en la demostración del Teorema de Liénard 3.3. En esta figura, se representa en morado la curva  $y = G(x)$ .

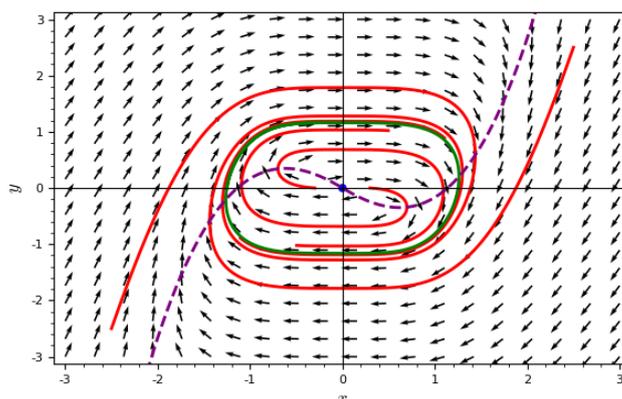


Figura 3.8: Mapa de fases del sistema (3.15).

### 3.3. Extensión del Teorema de Liénard

En esta última sección del capítulo se enuncia y demuestra un teorema que constituye una extensión del Teorema de Liénard y en el que se considera la ecuación diferencial

$$x'' + g(x, x')x' + h(x) = 0, \quad (3.17)$$

donde ahora  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones arbitrarias. A diferencia de la ecuación de Liénard (3.1), en este caso la función  $g$  también depende de  $x'$ , por lo que se trata de una generalización de la de Liénard. Expresando la ecuación (3.17) como un sistema diferencial autónomo haciendo el cambio de variables usual, se obtiene

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x, y)y - h(x) \end{cases} \quad (3.18)$$

El teorema que se presenta a continuación garantiza la existencia de un ciclo en el mapa de fases del sistema asociado a la ecuación (3.17), pero no aporta información sobre la unicidad ni sobre si este ciclo es un ciclo límite o no, como ocurría en el caso del Teorema de Liénard 3.3. Para la demostración de este teorema se ha empleado [9], y es consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixson (Teorema 2.15) estudiado en el Capítulo 2.

**Teorema 3.7** *El sistema (3.18) asociado a la ecuación diferencial  $x'' + g(x, x')x' + h(x) = 0$ , donde  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas, tiene al menos un ciclo bajo las siguientes condiciones:*

1. Existe  $a > 0$  tal que  $g(x, y) > 0$  cuando  $x^2 + y^2 > a^2$ ,
2.  $g(0, 0) < 0$  (por tanto al ser  $g$  continua  $g(x, y) < 0$  en un entorno del origen),
3.  $h(0) = 0$ ,  $h(x) > 0$  cuando  $x > 0$  y  $h(x) < 0$  cuando  $x < 0$ ,
4.  $H(x) := \int_0^x h(u)du$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito.

**Demostración.** En primer lugar, se analizan los puntos críticos del sistema dado por la ecuación (3.18) y bajo las condiciones enumeradas. Para que un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sea un punto crítico, la primera ecuación impone la condición  $y = 0$ . Por otra parte por la segunda ecuación, imponiendo la condición que se ha obtenido de la primera  $y = 0$ , se

tiene que se debe cumplir  $h(x) = 0$ . Por la hipótesis 3 en cuanto al comportamiento de la función  $h$ , esto sólo se cumple en  $x = 0$ , y por tanto el único punto crítico del sistema es el origen.

Se considera ahora la función  $\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + H(x)$ . Esta función representa la energía del sistema, donde el primer sumando corresponde a la energía cinética y el segundo a la energía potencial, cuando se considera que las ecuaciones modelan el movimiento de una partícula sometida a fuerzas externas. Claramente  $H(0) = 0$  por cómo está definida esta función. Se analiza a continuación el comportamiento de  $H$  cuando  $x \neq 0$ .

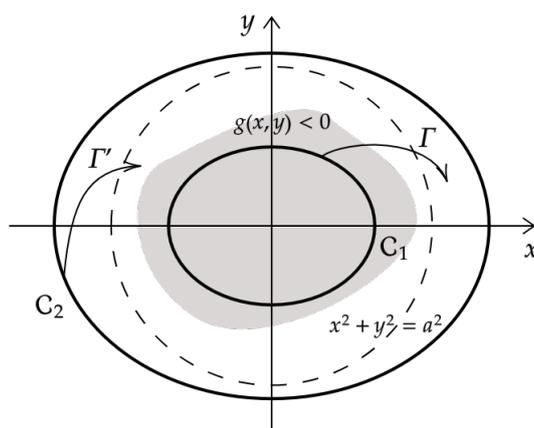
Si  $x > 0$ , se considera un  $x = b > 0$ . Entonces  $H(b) = \int_0^b h(u)du > 0$  ya que  $h(x) > 0$  cuando  $x$  está entre 0 y  $b$  por la hipótesis 3. Si  $x < 0$ , se considera un  $x = -b < 0$  (con  $b > 0$ ). Entonces  $H(-b) = \int_0^{-b} h(u)du = -\int_{-b}^0 h(u)du > 0$  porque  $h(x) < 0$  cuando  $x$  está entre  $-b$  y 0 también por la hipótesis 3. Así,  $H(x) > 0$  si  $x \neq 0$  y por el teorema fundamental del cálculo como  $h$  es continua  $H$  es derivable y se cumple  $H' = h$ , por lo que por la hipótesis 3  $H$  es estrictamente creciente para  $x > 0$  (y estrictamente decreciente para  $x < 0$ ) y tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito. De esta manera,  $\varepsilon(0, 0) = 0$  y  $\varepsilon(x, y) > 0$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ . En otras palabras,  $\varepsilon$  es una función definida positiva. Además, es de clase  $C^1$  en todo el plano y es estrictamente creciente en cualquier dirección radial desde el origen.

Se prueba ahora que la familia de curvas  $\varepsilon(x, y) = C$ , con  $C$  una constante positiva, consiste en curvas cerradas simples alrededor del origen en el mapa de fases del sistema autónomo dado por la ecuación (3.18). Para ello, se considera una curva cualquiera  $\varepsilon(x, y) = C$  con  $C > 0$  (no puede ser  $C < 0$  ya que  $\varepsilon(x, y) \geq 0$  y si  $C = 0$  se tiene un único punto, el origen). Así, se tiene  $\frac{1}{2}y^2 + H(x) = C$  y se puede despejar  $y^2 = 2(C - H(x))$ . Por tanto, es necesario que  $C - H(x) \geq 0$ , o lo que es lo mismo,  $H(x) \leq C$ , lo que implica que la curva ha de estar acotada porque  $H(x) > 0$  si  $x \neq 0$ . Además, al cumplirse que  $H(x)$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito y teniendo en cuenta la hipótesis 3, se tiene que  $H$  tiene un mínimo en  $x = 0$ . En consecuencia, la ecuación  $H(x) = C$  tiene dos soluciones, una negativa  $x_-$  y una positiva  $x_+$ , y el intervalo en el que se cumple  $H(x) \leq C$  es  $x \in [x_-, x_+]$ . En ese intervalo  $y = \pm\sqrt{2(C - H(x))}$  y por tanto existen dos ramas (superior e inferior) que son funciones continuas y derivables que se tocan en  $y = 0$  cuando  $H(x) = C$ , y la curva  $\varepsilon(x, y) = C$  es simétrica respecto del eje  $x$ . Así, se concluye que la curva  $\varepsilon(x, y) = C$  es una curva cerrada simple alrededor del origen para cada  $C > 0$ . Cuando  $C$  se aproxima a cero la curva se acerca al origen, y cuando  $C$  tiende a infinito la curva crece en amplitud.

Se fija a continuación una  $C = C_1$  lo suficientemente pequeña para que la curva cerrada simple  $\mathcal{C}_1 := \varepsilon(x, y) = C_1$  correspondiente esté contenida en el entorno del origen para el cual, por la hipótesis 2,  $g(x, y) < 0$  en todos los puntos de dicho entorno. Esta situación se puede observar en la Figura 3.9. Se considera una trayectoria  $\Gamma$  que pasa por un punto de  $\mathcal{C}_1$ , y se puede calcular la derivada temporal de  $\varepsilon(x, y)$  en  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} &= y \frac{dy}{dt} + h(x) \frac{dx}{dt} = yy' + h(x)x' = \\ &= y(-g(x, y)y - h(x)) + h(x)y = -g(x, y)y^2 - h(x)y + h(x)y = -y^2g(x, y) \end{aligned} \quad (3.19)$$

De esta manera, según la ecuación (3.19) en los puntos de la curva  $\mathcal{C}_1$ , ya que en dichos puntos se cumple  $g(x, y) < 0$ , se tiene que  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} > 0$  (salvo en  $y = 0$ ). Si se considera la trayectoria  $\Gamma$  que pasa por un punto de  $\mathcal{C}_1$  para el cual  $y \neq 0$ , entonces en ese punto

Figura 3.9: Curvas cerradas simples  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ .

$\frac{d\varepsilon(x, y)}{dy} > 0$  y el sistema adquiere energía (consultar [9] para más detalles), de forma que  $\Gamma$  sale de  $\mathcal{C}_1$  en dirección creciente (radialmente desde el origen) y está contenida en el exterior de  $\mathcal{C}_1$  para tiempos posteriores. En otras palabras, la trayectoria  $\Gamma$  se mueve cruzando curvas cerradas  $\varepsilon(x, y) = C$  de constante creciente  $C > 0$ , y no puede entrar en el interior de  $\mathcal{C}_1$  en tiempos posteriores porque para eso tendría que cruzar algunas curvas  $\varepsilon(x, y) = C$  de constante decreciente  $C > 0$ , lo que es imposible porque  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} \geq 0$  en todas las curvas cercanas a  $\mathcal{C}_1$ , además de en  $\mathcal{C}_1$ .

De manera análoga, se fija una  $C = C_2$  de modo que la correspondiente curva cerrada simple  $\mathcal{C}_2 := \varepsilon(x, y) = C_2$  esté contenida en el exterior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  dada por la hipótesis 1, como se representa en la Figura 3.9. Entonces debido a la misma hipótesis se tiene que  $g(x, y) > 0$  en todos los puntos de la curva  $\mathcal{C}_2$ . De esta forma, por la ecuación (3.19) en dichos puntos se cumple  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} < 0$  (salvo en  $y = 0$ ) y por tanto si se considera una trayectoria  $\Gamma'$  que pasa por un punto de  $\mathcal{C}_2$  para el cual  $y \neq 0$ , entonces en ese punto  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} < 0$  y el sistema pierde energía, por lo que  $\Gamma'$  se mueve cruzando curvas  $\varepsilon(x, y) = C$  de constante decreciente  $C > 0$  (o  $\Gamma'$  es tangente a  $\mathcal{C}_2$  si  $y = 0$  y se conserva la energía). Así,  $\Gamma'$  está contenida en el interior de  $\mathcal{C}_2$  para cualquier tiempo posterior y no puede entrar en el exterior de  $\mathcal{C}_2$  porque entonces cruzaría algunas curvas  $\varepsilon(x, y) = C$  de constante creciente  $C > 0$ , lo que es imposible ya que  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} \leq 0$  en todas las curvas cercanas a  $\mathcal{C}_2$ , además de en la propia  $\mathcal{C}_2$ .

Por último, considerando el conjunto compacto delimitado por las curvas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , en este conjunto no hay puntos críticos del sistema ya que el origen es el único existente y una vez que una trayectoria entra en él ya no puede salir, por lo que se mantiene en él indefinidamente y en consecuencia la trayectoria considerada es acotada. Así, por el Teorema de Poincaré-Bendixson 2.15, se tiene que la trayectoria es un ciclo o que su conjunto  $\omega$ -límite lo es, por lo que en cualquiera de las dos situaciones existe un ciclo en el mapa de fases y se concluye la demostración del teorema. ■

Así, el Teorema 3.7 puede interpretarse de la siguiente manera. En un entorno del origen el coeficiente de amortiguamiento, modelado por la función  $g$ , es negativo, por lo

que las trayectorias se alejan del origen radialmente ya que el sistema adquiere energía. Sin embargo, en puntos más alejados del origen el coeficiente de amortiguamiento dado por la función  $g$  se vuelve positivo, por lo que las trayectorias se acercan al origen radialmente porque el sistema pierde energía. Entre esas dos regiones, por lo tanto, ha de existir una trayectoria que sea un ciclo. Para clarificar lo establecido por el Teorema 3.7, se proporcionan dos ejemplos de ecuaciones de la forma dada en la ecuación (3.17) en los que se verifican las hipótesis de dicho teorema y en consecuencia se puede asegurar la existencia de al menos un ciclo en el mapa de fases de su sistema asociado.

**Ejemplo 3.8** *Se considera la ecuación diferencial*

$$x'' + (|x| + |x'| - 1)x' + x|x| = 0$$

*y se va a demostrar que el sistema asociado tiene al menos un ciclo en su mapa de fases.*

*El sistema equivalente asociado a dicha ecuación, obtenido con el cambio de variables usual, es*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(|x| + |y| - 1)y - x|x| \end{cases} \quad (3.20)$$

*Para ello, se comprueba que la ecuación cumple las hipótesis del Teorema 3.7. En primer lugar, se tiene que las funciones  $g$  y  $h$  de la ecuación (3.17) son en este caso  $g(x, x') = |x| + |x'| - 1$  y  $h(x) = x|x|$ , por lo que trivialmente son continuas ( $g$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $h$  en  $\mathbb{R}$ ). Además, atendiendo a la función  $g$ , se tiene que los puntos  $(x, x')$  del plano en los que se cumple  $|x| + |x'| - 1 = 0$  forman un cuadrado inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Por tanto, en la hipótesis 1 del Teorema 3.7 se puede considerar  $a = 1$  y se tiene que  $g(x, y) > 0$  para  $x^2 + y^2 > 1$ , por lo que ésta se verifica.*

*Por otra parte, se tiene  $g(0, 0) = -1 < 0$  y así se cumple también la hipótesis 2 del teorema. Ahora, atendiendo a la función  $h(x) = x|x|$ , se tiene  $h(0) = 0$  y  $h(x) = x^2 > 0$  cuando  $x > 0$  y  $h(x) = -x^2 < 0$  cuando  $x < 0$ , por lo que se verifica también la hipótesis 3 del Teorema 3.7. Por último, integrando se obtiene la función*

$$H(x) = \int_0^x u|u| du = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^3}{3} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

*que claramente tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito. Por lo tanto, se verifica la hipótesis 4 del Teorema 3.7, con lo que se cumplen todas las hipótesis de dicho teorema, y se concluye que existe al menos un ciclo en el mapa de fases del sistema (3.20). En concreto, para esta ecuación existe un único ciclo, el cual se puede observar en la Figura 3.10.*

*Cabe señalar que atendiendo a la demostración del Teorema 3.7 se puede encontrar una región compacta en la que esté contenido el ciclo en el mapa de fases. Dicha región viene delimitada por curvas de la forma*

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{|x|^3}{3} = C,$$

*donde  $C$  es una constante positiva. Para encontrar constantes  $C_1, C_2$  tales que las correspondientes curvas definan una región compacta que contiene al ciclo, basta con considerar  $C_1$  de forma que la curva  $\frac{1}{2}y^2 + \frac{|x|^3}{3} = C_1$  esté en el interior de la región cerrada*

$R : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| - 1 = 0\}$  y  $C_2$  de forma que la curva  $\frac{1}{2}y^2 + \frac{|x|^3}{3} = C_2$  esté en el exterior de la misma región. Esto se debe a la ecuación (3.19), ya que  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} > 0$  en el interior de  $R$  y  $\frac{d\varepsilon(x, y)}{dt} < 0$  en su exterior (si  $y \neq 0$ ). Tomando  $C_1 = 0.1$  y  $C_2 = 1$  se tienen las curvas cerradas con las características descritas, y en consecuencia el ciclo ha de estar contenido en la región compacta delimitada por ambas. Esto puede observarse en la Figura 3.10, donde el cuadrado azul se corresponde con la región  $R$  (que no es una trayectoria del sistema), las curvas cerradas azules se corresponden con las curvas  $\varepsilon(x, y) = C_1$  y  $\varepsilon(x, y) = C_2$  (las cuales tampoco son trayectorias) y la curva cerrada verde se corresponde con el ciclo.

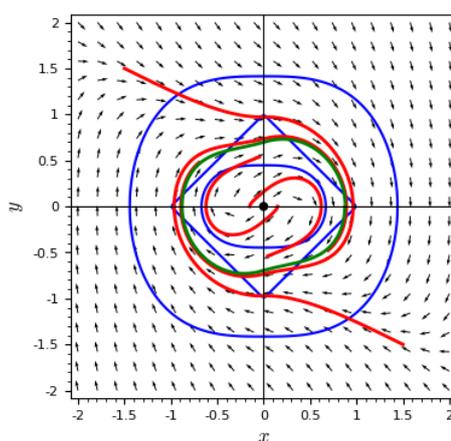


Figura 3.10: Mapa de fases del sistema (3.20).

Cabe señalar que, como puede apreciarse en la Figura 3.10, el ciclo existente en el sistema es además ciclo límite asintóticamente estable porque tanto las trayectorias de su exterior como de su interior tienden a él. Sin embargo, esto no ocurre siempre puesto que el Teorema 3.7 solo asegura la existencia de al menos un ciclo, no de un ciclo límite asintóticamente estable.

En el Ejemplo 3.8 la ecuación estudiada cumple las hipótesis del Teorema 3.7 y el sistema tiene un único ciclo, pero puede darse el caso de que una cierta ecuación también cumpla dichas hipótesis pero el sistema asociado tenga más de un ciclo en su mapa de fases, porque el Teorema 3.7 asegura la existencia de al menos un ciclo pero no establece que éste sea único. En el Ejemplo 3.9 presentado a continuación, se da el hecho de que el sistema de la ecuación analizada tiene en concreto tres ciclos en su mapa de fases.

**Ejemplo 3.9** Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + (x^2 + x'^2 - 1)(x^2 + x'^2 - 2)(x^2 + x'^2 - 3)x' + x = 0 \quad (3.21)$$

y se va a demostrar que el sistema asociado

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2)(x^2 + y^2 - 3)y - x \end{cases} \quad (3.22)$$

tiene al menos un ciclo en su mapa de fases.

Para ello, al igual que en el ejemplo precedente, se prueba que la ecuación verifica todas las hipótesis del Teorema 3.7. En primer lugar, se tiene que las funciones  $g(x, x') = (x^2 + x'^2 - 1)(x^2 + x'^2 - 2)(x^2 + x'^2 - 3)$  y  $h(x) = x$  son claramente continuas. Ahora, para ver que se cumple la hipótesis 1, hay que encontrar  $a > 0$  tal que  $g(x, y) > 0$  cuando  $x^2 + y^2 > a^2$ . Atendiendo a la expresión de la función  $g$ , si se considera  $a = \sqrt{3}$  entonces los tres factores cuyo producto conforman esta función son positivos en  $x^2 + y^2 > 3$ , por lo que se tiene  $g(x, y) > 0$  en dicha región y se verifica esta hipótesis. Claramente  $g(0, 0) = -6 < 0$ , por lo que también se cumple la hipótesis 2 del Teorema 3.7. Ahora, considerando la función  $h(x) = x$ , se tiene que  $h(0) = 0$ ,  $h(x) = x > 0$  cuando  $x > 0$  y  $h(x) = x < 0$  cuando  $x < 0$ , con lo que se tiene también la hipótesis 3 de dicho teorema.

Falta verificar la hipótesis 4, pero ésta se cumple porque  $H(x) = \int_0^x u \, du = \frac{x^2}{2}$ , que tiende a infinito cuando  $x$  tiende a infinito. De esta manera, las funciones  $g$  y  $h$  verifican todas las hipótesis del Teorema 3.7 y se concluye que el sistema (3.22) asociado a la ecuación (3.21) tiene al menos un ciclo en su mapa de fases.

Puede hacerse un estudio analítico de los ciclos existentes en el sistema mediante el cambio de coordenadas a coordenadas polares dado por  $rr' = xx' + yy'$  y  $r^2\theta' = -x'y + y'x$ . Con este cambio de variables se obtiene el sistema

$$\begin{cases} r' = -(r^2 - 1)(r^2 - 2)(r^2 - 3)r \operatorname{sen}^2 \theta \\ \theta' = -1 - (r^2 - 1)(r^2 - 2)(r^2 - 3) \cos \theta \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (3.23)$$

Analizando las expresiones de  $r'$  y  $\theta'$ , si se toma  $r = 1$ ,  $r = \sqrt{2}$  o  $r = \sqrt{3}$  se obtiene que  $r' = 0$  y  $\theta' = -1$ , por lo que para esos valores el radio va a ser constante independientemente del ángulo  $\theta$  ya que  $\theta = -t + C$  con  $C$  una constante real y en consecuencia tiende a menos infinito. Por lo tanto, para  $r = 1$ ,  $r = \sqrt{2}$  y  $r = \sqrt{3}$  existe un ciclo en el mapa de fases, y así en este caso existen tres ciclos. De esta forma, se da un ejemplo de ecuación que verifica el Teorema 3.7 y cuyo sistema asociado tiene más de un ciclo en su mapa de fases, mostrando que este teorema no implica la unicidad de ciclos. El mapa de fases del sistema, en el que se pueden observar los tres ciclos existentes (en azul), se representa en la Figura 3.11.

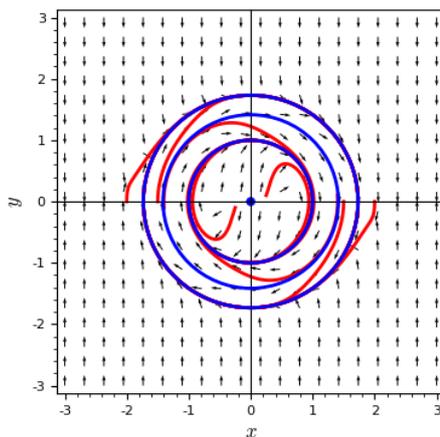


Figura 3.11: Mapa de fases del sistema (3.22).

# Bibliografía

- [1] Andronov A. A., Vitt A. A. & Khaikin S. E., *Theory of Oscillators*, Adisson-Wesley, 1966.
- [2] Arrowsmith D. K. & Place C. M., *Ordinary Differential Equations. A Qualitative Approach with Applications*, Chapman & Hall, 1982.
- [3] Bendixson I. O., *Sur les Courbes Définies par des Équations Différentielles*, *Acta Mathematica*, Vol. 24, 1-88, 1901.
- [4] Brauer F. & Nobel J. A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, Dover Publications Inc., 1989.
- [5] Coddington E. A. & Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [6] Gómez D., *Teoría Cualitativa de EDO*, Universidad de Cantabria, 2024.
- [7] Hale J. K., *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, 1969.
- [8] Hirsch M. W., Smale S. & Devaney R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Academic Press, 2004.
- [9] Jordan D. W. & Smith P., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 1977.
- [10] Liapunov A. M., *The General Problem of the Stability of Motion*, Doctoral dissertation: University of Kharkov, Kharkov Mathematical Society, 1892.
- [11] Liénard A., *Étude des Oscillations Entretienues*, *Revue Générale de l'Électricité*, Vol. 23, 901-912 & 946-954, 1928.
- [12] Liu J. H., *A First Course in the Qualitative Theory of Differential Equations*, Prentice Hall, 2003.
- [13] Novo S., Obaya R. & Rojo J., *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, McGraw-Hill, 1995.
- [14] Perko L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [15] Poincaré H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1892.
- [16] Strogatz S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Chapman & Hall, 2018.
- [17] Veblen O., *Theory on Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs*, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 6, 83-98, 1905.