

Facultad
de
Ciencias

Las Variedades Homogéneas como Fibrados Principales

(Homogeneous Manifolds as Principal Bundles)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Pablo Miguel Rubio

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio - 2025

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a todos mis profesores a lo largo de la carrera. Sin ellos, además de que este trabajo no habría sido posible, no habría podido disfrutar de las matemáticas como lo he hecho. En especial, quiero agradecer a Fernando Etayo, mi director, por su paciencia y dedicación, y por haberme respondido la cantidad ingente de dudas que han surgido a lo largo de la realización de este trabajo. El trabajo no habría sido posible sin su ayuda y apoyo constante.

También quiero agradecer a mis compañeros de clase, sobre todo a aquellos con los que he jugado tantísimas partidas al mus y que tras estos años en la carrera me han acompañado y acogido como uno más. Quiero agradecer personalmente a Mikel, Pablo (no yo en tercera persona, sino mi compañero de piso), Pepe y Emilio, por haberme dado el gusto de poder compartir piso con vosotros, por todas las cenas y películas, por las risas y los momentos compartidos.

Por último, quiero agradecer a mi familia. A mis padres, por haberme dado la oportunidad de estudiar lo que me gusta y por haberme apoyado en todo momento. A Asier, mi hermano, por haber estado siempre ahí. Y a mis amamas y a izeko, por haberme apoyado en todo momento. Os quiero mucho.

Resumen

Una variedad diferenciable se dice homogénea si para cualquier par de puntos de la variedad existe un difeomorfismo que lleva uno en el otro. En este trabajo veremos que una definición tan intuitiva de homogeneidad da lugar a una estructura matemática rica y profunda. En particular, veremos que toda variedad homogénea es un cociente de grupos de Lie, y que eso permite verlas como la base de un fibrado principal.

Palabras clave: Variedades homogéneas, fibrados principales, grupos de Lie, álgebras de Lie, fibración de Hopf.

Abstract

A differentiable manifold is said to be homogeneous if for any pair of points in the manifold there exists a diffeomorphism that maps one into the other. In this work we will see that such an intuitive definition of homogeneity leads to a rich and profound mathematical structure. In particular, we will see that every homogeneous manifold is a quotient of Lie groups, and that this allows us to view them as the base of a principal bundle.

Keywords: Homogeneous manifolds, principal bundles, Lie groups, Lie algebras, Hopf fibration.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Variedades Diferenciables	4
1.2. Grupos de Lie	9
1.3. Acciones de grupo y órbitas	11
1.4. Campos Invariantes a Izquierda	13
1.5. Álgebras de Lie	15
2. Fibrados Principales	19
2.1. Nociones básicas	19
2.2. Fibración de Hopf	27
3. Variedades Homogéneas	31
3.1. Definición y Ejemplos	31
3.2. Relación con los Fibrados Principales	45
Bibliografía	50

Introducción

La geometría diferencial nos proporciona herramientas para describir y estudiar estructuras suaves. Desde sus orígenes en el estudio de curvas y superficies, ha crecido hasta convertirse en una rama fundamental de las matemáticas, que conecta el álgebra, la topología y el análisis. En el presente trabajo exploraremos uno de los encuentros más fascinantes de la geometría diferencial: las variedades homogéneas y su relación con los fibrados principales.

Se atribuye la primera instancia de la palabra fibra a Seifert en 1933, quien introdujo el término *faserraum*, o espacio fibrado. Aunque no formuló la teoría moderna de fibrados, definió lo que hoy en día llamaríamos fibrados de circunferencias. No fue hasta 1935 cuando Whitney introdujo la noción de fibrado en el sentido moderno. Los fibrados son una construcción matemática que permite estudiar espacios topológicos que son localmente iguales a un espacio producto, pero que no lo son globalmente. Los actores principales son el espacio base y el espacio fibra, el fibrado no es más que una variedad en la que localmente los entornos son producto de estos dos espacios, y por tanto podemos verlo como una parametrización del espacio fibra por un espacio base. Sin embargo, Whitney introdujo la idea pensando en lo que hoy en día llamaríamos fibrados vectoriales. No fue hasta 1950 que apareció un nombre clave: Charles Ehresmann. Ehresmann generalizó la idea de Whitney incorporando una acción de un grupo de Lie libre y transitiva sobre las fibras. Ahora las fibras no son espacios “pegados” sobre una base, sino que tienen una estructura de órbitas. Los fibrados principales fueron así introducidos por Ehresmann como una generalización del trabajo de Whitney en *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. en 1950.

Un ejemplo intuitivo de esta construcción es el cilindro, en el que las fibras son las circunferencias y el espacio base es la recta real. La circunferencia, como grupo de Lie que es, actúa libre y transitivamente sobre las fibras, y cada entorno es localmente un producto de un entorno de la recta con una circunferencia. La idea de Ehresmann fue consolidada por Kobayashi y Nomizu en 1963, y posteriormente, en los años 60-70, ha influido fuertemente en teorías físicas modernas como las teorías gauge, donde Yang y Wu interpretaron los campos gauge como conexiones en fibrados principales.

Por su lado, el origen exacto de las variedades homogéneas es más difícil de rastrear. La idea intuitiva detrás de estas estructuras es que son variedades diferenciables cuyos puntos son “equivalentes”. Un ejemplo clásico es la esfera $\mathbb{S}^2$, que tiene todos sus puntos indistinguibles unos de otros. Dado un punto de la esfera, podemos girar la esfera de forma que vayamos a cualquier otro punto. Esta idea intuitiva de que todos los puntos sean indistinguibles o equivalentes va ligada a la intuición geométrica de que estas variedades son altamente simétricas. Debido a la sencillez de esta noción, no es de extrañar que aparezca prácticamente desde el inicio de la geometría. Ya en la Antigua Grecia, aun no teniendo un lenguaje matemático formal como el actual ni haber desarrollado las teorías de variedades o grupos de Lie, la idea de formas o cuerpos simétricos era sumamente

atractiva, hasta el punto de que Platón las consideraba como los cuerpos fundamentales del universo.

La teoría moderna de las variedades homogéneas se desarrollo casi paralela a la de los grupos de Lie y los fibrados principales. A finales del siglo XIX, Felix Klein introdujo la idea de grupos de transformación y el pensar en geometrías como espacios sobre los que actúan estos grupos. Esta idea fue la que inspiró a Lie para desarrollar su teoría de grupos, y posteriormente, fue Cartan en el siglo XX quien impulsó el estudio de espacios homogéneos con estructura diferenciable. Cartan se centró en el estudio de espacios simétricos, que son un caso particular de variedades homogéneas. Siguiendo la intuición de Klein, e incluyendo la teoría de grupos de Lie, Cartan estudió los espacios de la forma G/H , donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G . Esta última es la formulación moderna de las variedades homogéneas.

El objetivo de este trabajo es explorar el papel de las variedades homogéneas en el marco de la teoría de fibrados principales. En particular, veremos cómo toda variedad homogénea de la forma G/H puede ser vista como la variedad base de un fibrado principal con grupo estructural H . Este enfoque nos permitirá entender las variedades homogéneas como variedades que heredan la simetría de G desde un punto de vista estructural, y cómo el subgrupo H actúa sobre las fibras del fibrado.

El trabajo ha sido estructurado en tres capítulos. En el primero, se presentan los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de la teoría, incluyendo definiciones y resultados básicos de la teoría de variedades diferenciables, de grupos de Lie y álgebras de Lie. En el segundo capítulo, se introduce la teoría de fibrados principales y se exponen varios ejemplos, poniendo especial atención en un caso histórico: la fibración de Hopf. Finalmente, en el tercer capítulo, se estudian las variedades homogéneas, viendo la definición y ejemplos, y se acompaña de resultados sobre la estructura simétrica de estas variedades, concluyendo con la demostración de que toda variedad homogénea de la forma G/H es la base de un fibrado principal con grupo estructural H . A lo largo de la memoria se ha ido presentando y trabajando una selección de ejemplos que se ha ido revisitando a medida que se introducía nueva teoría.

Este trabajo se apoya en diversas fuentes para la redacción del mismo. Se han seguido tanto apuntes de asignaturas del grado, como libros de texto y artículos de investigación. De entre las fuentes, destacan por su importancia los apuntes de Fernando Etayo ([3]) y de Luis Miguel Pardo ([7]), así como los libros de Lee ([5]), de Kobayashi y Nomizu ([4]) y de Warner ([8]). Parte de las demostraciones se han reproducido y reinterpretado a partir de estas referencias, mientras que otras se han desarrollado de forma original. La selección de ejemplos y la organización del contenido reflejan un enfoque personal orientado a la claridad y la conexión entre ideas.

Capítulo 1

Preliminares

Esta sección tiene como objetivo hacer un pequeño repaso de algunos conceptos que se creerán necesarios para el desarrollo de la teoría a exponer. Se presentarán nociones que pueden ya ser conocidas por el lector, dado que se pueden tratar en asignaturas del grado, pero que se consideran necesarias para la comprensión de la teoría de fibrados principales y variedades homogéneas. Al mismo tiempo, se darán por conocidas a lo largo del trabajo algunas definiciones y resultados que se consideran básicos, como podrían ser la definición de homeomorfismo y algunos resultados de la Topología General; la definición de espacio vectorial, grupo u homomorfismo de grupos, entre las nociones de Álgebra Lineal y Estructuras Algebraicas; o las definiciones de continuidad y diferenciabilidad de aplicaciones o resultados como el Teorema de la Función Inversa del Análisis.

Sin más dilación, se presentan algunas definiciones y resultados que serán útiles en el desarrollo de la teoría. Para esta sección se han seguido principalmente las referencias [3] y [5] para lo relativo a las variedades y [7] para lo relativo al álgebra.

1.1. Variedades Diferenciables

Existen numerosas definiciones de variedad diferenciable, en algunos contextos algunas de ellas son equivalentes, pero en este caso, por no ser este trabajo una introducción a la teoría de variedades ni gozarse del tiempo suficiente, se opta por la definición que más se ajusta a la teoría que vamos a trabajar:

Definición 1.1. Sea M un conjunto no vacío.

- Se llama **carta** a una aplicación $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y tal que $x(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.
- Se llama **atlas** C^∞ sobre M a una familia $\mathcal{A}$ de cartas cuyos dominios recubren todo M y tales que las cartas sean compatibles dos a dos. Esto es, si $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ son cartas de $\mathcal{A}$ cuyos dominios tienen intersección no vacía, entonces $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y la aplicación $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Esta composición se denomina **cambio de cartas**.
- Dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen **equivalentes** si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas C^∞ . Un atlas C^∞ se dice **maximal** si lo es para la inclusión.
- Una **variedad diferenciable** es un conjunto M equipado con un atlas C^∞ maximal. La dimensión de la variedad es la dimensión de $\mathbb{R}^n$ de las cartas que la componen.

Sólo consideraremos variedades de dimensión finita y mayor o igual que uno, pues estas son las que reflejan la idea intuitiva de lo que es una variedad diferenciable. Es algunos

casos, haremos la excepción de considerar variedades de dimensión 0, variedades discretas, pero no en general.

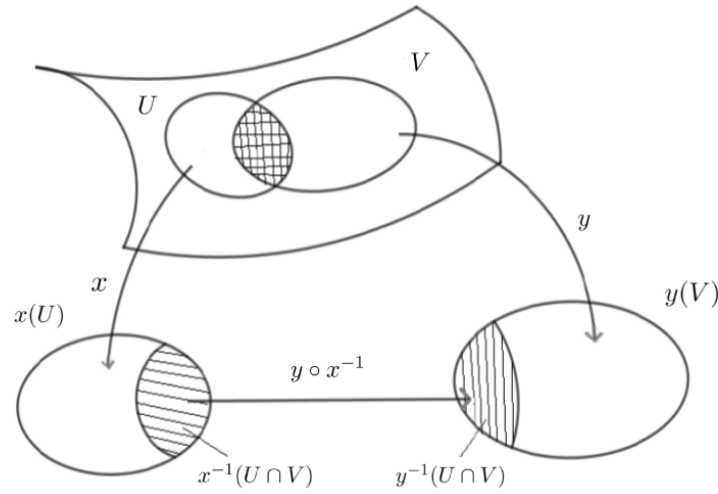


Figura 1.1: Cambio de cartas. Imagen tomada de [3] y ajustada para coincidir en notación.

Esta definición es muy general y permite definir variedades diferenciables desde las variedades abstractas. Por ejemplo, la recta con origen doble, $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p, q\}$, es una variedad diferenciable bajo esta definición, pues podemos definir un atlas con dos cartas: $x : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p\} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $x(t) = t$ para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x(p) = 0$ e $y : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{q\} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $y(t) = t$ para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y(q) = 0$. Sin embargo, no goza de propiedades buenas, como la de ser un espacio topológico Hausdorff, aunque para eso hay que definir primero una topología sobre la variedad. Recordamos por lo tanto algunos conceptos básicos de topología general.

Definición 1.2. Sea M un conjunto no vacío. Se dice que (M, T) es un **espacio topológico** si T es una colección de subconjuntos de M que cumple:

1. M y $\emptyset$ están en T .
2. Si $A_i \in T$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.
3. Si $A_i \in T$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^k A_i \in T$.

T se llama **topología** en M . Los elementos de T se llaman **abiertos** y sus complementarios **cerrados**.

Se llama **base de una topología** a una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de M tal que:

1. Para todo $p \in M$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$. Luego $\mathcal{B}$ recubre M .
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $p \in B_1 \cap B_2$, entonces existe un $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dados un espacio topológico (M, T) y un conjunto $U \subseteq M$, se define la **topología inducida** (o de subespacio) T_U como la colección de intersecciones de los abiertos de T con U , es decir, $T_U = \{U \cap A : A \in T\}$.

Se puede demostrar que toda base de una topología genera una topología, siendo $T_{\mathcal{B}} = \{\emptyset, M, \bigcup_{i \in I, B_i \in \mathcal{B}} B_i\}$, y por tanto los elementos de la base son abiertos de la topología. El siguiente resultado nos permitirá definir una topología sobre una variedad diferenciable.

Proposición 1.3. *Sea $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta de una variedad diferenciable M , con $U \subseteq M$. Si $W \subseteq U$ es un subconjunto de forma que $x(W)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $x|_W$ es también una carta de M .*

Se introduce finalmente la topología de la variedad diferenciable M como la topología generada por las cartas:

Proposición 1.4. *La colección de dominios de las cartas de un atlas maximal C^∞ sobre M es una base de una topología en M .*

Con esta topología, las cartas serán homeomorfismos sobre su imagen, pues son biyectivas por definición. Para ver que son continuas basta ver que dado un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $x(U) \cap V$ es abierto en $x(U)$, donde U es el dominio de la carta x . Por tanto, $W = x^{-1}(V \cap x(U))$ es abierto en U , y por la localización de las cartas $x|_W$ es una carta, luego W es abierto en M y x es continua. De forma similar, si $W \subseteq U$ es abierto en M , entonces se puede escribir como unión de abiertos básicos, dominios de cartas, $W = \bigcup_{i \in I} U_i$, y por lo tanto $x(W) = \bigcup_{i \in I} x(U_i)$. Si vemos que $x(U_i)$ es abierto, hemos terminado. Para ello, sea $y : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta cuyo dominio es el abierto básico U_i , tenemos que $U \cap U_i = U_i$ y que el cambio de cartas $y \circ x^{-1} : x(U_i) \rightarrow y(U_i)$ es un difeomorfismo luego como $y(U_i)$ es abierto por definición de carta, $x(U_i)$ es abierto, y como consecuencia $x(W)$ también, luego x es abierta. Por lo tanto, las cartas son homeomorfismos.

Con esta definición de topología en la variedad, podemos ya ver algunas de las propiedades convenientes que se esperan de una variedad diferenciable “buena”. Repasamos por lo tanto algunas definiciones de topología general: los axiomas de separación y de numerabilidad.

Definición 1.5. *Sea (M, T) un espacio topológico. Se dice que verifica*

1. *El axioma T_0 si para todo par de puntos distintos $p, q \in M$ existe un abierto $U \in T$ tal que $p \in U$ y $q \notin U$, o un abierto $V \in T$ tal que $q \in V$ y $p \notin V$.*
2. *El axioma T_1 si para todo par de puntos distintos $p, q \in M$ existen abiertos $U, V \in T$ tales que $p \in U$, $q \notin U$, $q \in V$ y $p \notin V$.*
3. *El axioma T_2 o de Hausdorff si para todo par de puntos distintos $p, q \in M$ existen abiertos $U, V \in T$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $p \in U$ y $q \in V$.*

Para entender bien los axiomas de numerabilidad, es necesario recordar también qué es una base de entornos.

Definición 1.6. *Un **entorno** E de un punto $p \in M$ es un conjunto tal que existe un abierto $U \in T$ con $p \in U \subseteq E$. Se llama **base de entornos de p** a una colección $\{E_i\}$ de entornos de p tal que para todo abierto U que contenga a p , existe un E_i con $p \in E_i \subseteq U$. Por lo tanto, un espacio topológico (M, T) verifica*

1. *El primer axioma de numerabilidad (I.A.N.) si cada punto $p \in M$ tiene una base de entornos numerable.*
2. *El segundo axioma de numerabilidad (II.A.N.) si la topología T tiene una base numerable.*

Se puede verificar que con la definición de variedad diferenciable introducida, a partir de las variedades abstractas, se cumple que las variedades diferenciables son espacios topológicos que verifican los axiomas T_1 y I.A.N.. Sin embargo, Whitney demostró en 1936 que las variedades diferenciables de dimensión n que verifican los axiomas T_2 y II.A.N. se pueden ser inmersas en $\mathbb{R}^{2n+1}$, coincidiendo en tal caso su topología con la topología de

subespacio. No sólo eso, sino que además, las variedades que cumplan estas dos condiciones serán también metrizablees, es decir, se puede definir una métrica sobre ellas que las haga ser espacios topológicos con la misma topología que tenía en primer lugar. También serán espacios paracompactos, admitirán particiones diferenciables de la unidad, etc. En definitiva, serán las variables con propiedades “deseables”.

A partir de ahora, todas las variedades diferenciables que se consideren serán espacios Hausdorff y que cumplan el II.A.N., aunque no se diga explícitamente.

Para concluir esta sección, introduciremos la noción de aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, campos vectoriales y aplicación tangente, que serán fundamentales para definir fibrados principales. Se hará una pequeña diferencia entre las aplicaciones que tomen valores en $\mathbb{R}$ y las que tomen valores en otras variedades diferenciables, se reservará el término función (diferenciable) para las aplicaciones del primer tipo, y se utilizará el término aplicación diferenciable para las del segundo.

La noción de diferenciabilidad de una aplicación entre variedades se dará empleando las cartas, que nos permiten definir las aplicaciones (localmente) como aplicaciones entre espacios euclídeos, y la noción de diferenciabilidad será aquella del análisis. Veámoslo formalmente:

Definición 1.7. Sean M una variedad diferenciable y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Diremos que f es una **función diferenciable** en $p \in M$ si para toda carta $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$, con U el dominio de x , la composición $f \circ x^{-1}$ es diferenciable en $x(p) \in \mathbb{R}^n$. Adicionalmente, se dice que f es una **función diferenciable** si es diferenciable en todo punto de M .

De forma similar, si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación entre variedades diferenciables M y N , diremos que f es **diferenciable** en $p \in M$ si para toda carta $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$, con U el dominio de x , y toda carta $y : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $f(p) \in V$, con V el dominio de y , la composición $y \circ f \circ x^{-1}$ es diferenciable en $x(p) \in \mathbb{R}^n$. Y, se dice que f es una **aplicación diferenciable** si es diferenciable en todo punto de M . Además, llamaremos **difeomorfismo** a una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ biyectiva tal que su inversa también es diferenciable.

Se puede demostrar que el producto cartesiano de variedades diferenciables es también una variedad diferenciable (Ver [3], Teorema 1.13), y en tal caso, una aplicación que vaya de M en $N_1 \times N_2$ es diferenciable si y sólo si lo es en cada una de sus componentes.

Los difeomorfismos serán especialmente importantes, pues nos permitirán identificar variedades diferenciables, ver dos variedades diferenciables como equivalentes. En ocasiones consideraremos también difeomorfismos locales, esto es, aquellas aplicaciones diferenciables que son difeomorfismos restringidas a un entorno de un punto, para todo punto. En el caso de las variedades diferenciables, las cartas son difeomorfismos, luego todo entorno de un punto $p \in M$ es como un entorno de un espacio euclídeo en este sentido.

Denotamos por $\mathfrak{F}(M)$ el espacio de funciones diferenciables definidas en M . $\mathfrak{F}(M)$ es un anillo con las operaciones de suma y producto de funciones.

Definición 1.8. Sea M una variedad diferenciable. Un **campo vectorial** sobre M es una aplicación

$$X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

de modo que se verifica queda

$$\blacksquare X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g), \forall f, g \in \mathfrak{F}(M) \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (\mathbb{R}\text{-linealidad})$$

$$\blacksquare X(fg) = fX(g) + gX(f), \forall f, g \in \mathfrak{F}(M). \quad (\text{Regla de Leibniz})$$

Se denota por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales sobre M .

Definimos el **corchete de Lie de campos vectoriales** como la operación binaria

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Una comprobación sencilla muestra que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, esto es, $\mathbb{R}$ -lineal y verifica la regla de Leibniz. Además, verifica que es antisimétrico, $[X, Y] = -[Y, X]$, la identidad de Jacobi, $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, y que es aditivo, $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Llamaremos **vector tangente en $p \in M$** a una derivación en p , esto es, una aplicación lineal $X_p : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se verifica

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f), \quad \forall f, g \in \mathfrak{F}(M).$$

El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{F}(M)$ en p se denota por $T_p M$ y se llama **espacio tangente en p** . La dimensión del espacio tangente es la misma que la de la variedad M .

Dada una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables, queremos saber cómo se comporta un vector dado del espacio tangente en un punto $p \in M$ bajo la aplicación f . Para ello, definimos la aplicación tangente asociada a f .

Definición 1.9. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. La **aplicación tangente asociada a f** se define, dado un vector tangente en p , X_p , y una función diferenciable $g \in \mathfrak{F}(N)$, como

$$\begin{aligned} f_* : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ X_p &\mapsto (f_* X_p)(g) = X_p(g \circ f) \end{aligned}$$

Siendo rigurosos, la aplicación diferencial es una derivación en un punto. Como el punto dado estará claro por el contexto, de forma general no lo escribiremos.

Se definen a continuación algunas aplicaciones diferenciables que serán útiles en el desarrollo de la teoría de variedades y por consiguiente en la de fibrados principales y variedades homogéneas.

Definición 1.10. Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se dice que

- f es una **inmersión** si f_* es inyectiva para todo $p \in M$.
- f es una **submersión** si f_* es sobreyectiva para todo $p \in M$.
- f es una **embedding** si f es una inmersión y además f es inyectiva.
- M es una **subvariedad** de N si $M \subseteq N$ y la inclusión $i : M \hookrightarrow N$ es una inmersión.

Obsérvese que se utiliza la palabra inglesa *embedding* para referirse a la inmersión inyectiva, pues es un término común en la literatura, generalmente anglosajona, y se distingue de la inmersión (*immersion* frente a *embedding*).

Una propiedad importante que necesitaremos más adelante es que la aplicación tangente tiene carácter de funtor covariante, esto es que si tenemos $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables y $p \in M$, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : T_p M \rightarrow T_{g \circ f(p)} P$ y $(Id_M)_* = Id_{T_p M}$. Además, si f es un difeomorfismo, entonces f_* es un isomorfismo lineal para todo $p \in M$ (Ver [5], Proposición 3.6)

1.2. Grupos de Lie

La idea intuitiva de los grupos de Lie es la de un grupo que tiene una estructura de variedad diferenciable, y que las operaciones de grupo, multiplicación e inversa, son diferenciables. Estos grupos son un caso particular de los grupos topológicos, en los que las operaciones de grupo deben ser continuas en el espacio topológico que define al grupo. Esta idea se formaliza en la siguiente definición.

Definición 1.11. *Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable equipada con dos operaciones de grupo: la multiplicación $\mu : G \times G \rightarrow G$ tal que $\mu(x, y) = xy$, y la inversa $\iota : G \rightarrow G$ tal que $\iota(x) = x^{-1}$, y tales que son diferenciables como aplicaciones entre variedades de $G \times G$ en G .*

La dimensión de G es la dimensión de la variedad diferenciable subyacente.

Las dos condiciones de diferenciabilidad en la definición anterior son equivalentes a que la aplicación $\alpha(x, y) = x^{-1}y$ sea diferenciable como aplicación de $G \times G$ en G .

Ejemplo 1.12. *Algunos ejemplos de grupos de Lie son:*

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ es el **grupo de traslaciones en $\mathbb{R}^n$** . Como variedad, tiene una carta global dada por la identidad. Un elemento de este grupo es un vector $v \in \mathbb{R}^n$, y se corresponde con la traslación $x \mapsto x + v$.
2. La **circunferencia $\mathbb{S}^1$** vista como los complejos de norma 1 es un grupo de Lie con la multiplicación de complejos.

Como espacios vectoriales, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ son isomorfos, pero además podemos definir varias operaciones sobre $\mathbb{C}$. Para que se dé la estructura de espacio vectorial (real) de $\mathbb{C}$, necesitamos definir la suma de vectores, números complejos, y multiplicación por escalares, pero podemos hacerlo fácilmente con la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. Identificando el vector (a, b) con el número complejo $a+bi$, tenemos las siguientes operaciones internas:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b) = a + bi, (c, d) = c + di) &\mapsto (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i \\ \cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (a, b)) &\mapsto (\lambda a, \lambda b) \end{aligned}$$

Estas propiedades se corresponden con las propiedades de la suma y el producto por escalares en $\mathbb{C}$, por lo que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, podemos considerar una multiplicación de números complejos:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b) = a + bi, (c, d) = c + di) &\mapsto (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Con esta última operación y la primera, $(\mathbb{C}, +, \cdot) \cong (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo al igual que $\mathbb{R}$. Un conjunto que cuenta con operaciones, de aditividad, producto y multiplicación por escalar, se llama **álgebra sobre un cuerpo**, o simplemente **álgebra**. En este caso, $\mathbb{C}$ es un álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$, y además, es un álgebra normada, con la norma del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. De la misma forma, $\mathbb{R}$ es un álgebra normada, conmutativa y real sobre $\mathbb{R}$.

La norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ la podemos dar por $|(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pero en $\mathbb{C}$ podemos hacerlo a partir de la multiplicación de números complejos, $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, donde $\bar{z} = a - bi$ es el conjugado de $z = a + bi$. Esto permite que el producto de

números complejos sea compatible con la norma, es decir, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Y por lo tanto, el producto de dos complejos de norma 1 tiene norma 1, igual con el inverso de un complejo de norma 1, por lo que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un grupo para la multiplicación de complejos. Como la multiplicación de complejos es diferenciable, $\mathbb{S}^1$ es un grupo de Lie. Este grupo es el grupo de rotaciones en el plano, y como variedad es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

3. La construcción del ejemplo anterior, en la que a partir del álgebra de los números reales se construye el álgebra de los números complejos, es una particularización de la construcción de Cayley-Dickson. Esta construcción permite obtener álgebras sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2^n , $n \geq 1$, a partir de $\mathbb{R}$, siendo $\mathbb{C}$ el caso $n = 1$. El siguiente paso en la construcción es el álgebra de los cuaterniones, $\mathbb{H}$, que es un álgebra no conmutativa de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$. En esta álgebra también podemos dar la norma de un elemento $q = a + bi + cj + dk$ como $|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, donde $q^* = a - bi - cj - dk$ es el conjugado de q . Los cuaterniones de norma 1 forman el grupo de Lie $\mathbb{S}^3$, que es la **esfera de dimensión 3** centrada en el origen.

Podría surgir la pregunta de si el proceso de construcción de álgebras normadas de Cayley-Dickson nos permite obtener más grupos de Lie. La respuesta es negativa, pues en el proceso de duplicación se van perdiendo propiedades “buenas”, y en particular, la propiedad de ser asociativa se pierde al pasar de cuaterniones a octoniones.

4. El grupo de las **matrices ortogonales** $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^\top A = AA^\top = I_n\}$ es un grupo con la multiplicación de matrices. Es el grupo de las matrices que transforman bases ortonormales en bases ortonormales. En efecto, si A cumple que $A^\top A = I_n$, entonces dada una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$, se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\langle Av_i, Av_j \rangle = (Av_i)^\top (Av_j) = v_i^\top A^\top Av_j = v_i^\top v_j = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual. Luego, la base $\{Av_1, \dots, Av_n\}$ es ortonormal. Y, recíprocamente, si A transforma bases ortonormales en bases ortonormales, entonces como $\langle Av_i, Av_j \rangle = \delta_{ij}$, y $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

se tiene que $A^\top A$ y la matriz identidad I_n son formas bilineales que actúan igual sobre una misma base, por lo que son iguales. Además, si $A^\top A = I_n$, entonces multiplicando por la izquierda por A y por la derecha por $A^\top$ se obtiene que $AA^\top AA^\top = (AA^\top)^2 = AA^\top$, por lo que $AA^\top(AA^\top - I_n) = 0$, y como $AA^\top$ tiene determinante igual a 1 es invertible, multiplicando por la inversa de $AA^\top$ por la izquierda se tiene que $AA^\top = I_n$. Además, $O(n)$ es una variedad diferenciable de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$, y no es conexa, tiene dos componentes conexas (Ver [4], Ejemplo 4.2, para la dimensión y [5], Proposición 21.34, para las componentes conexas).

5. El **grupo especial ortogonal** $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ es un subgrupo de $O(n)$ y es, de hecho, la componente conexa de la identidad. Estas son las matrices ortogonales que preservan la orientación. El caso $n = 2$, $SO(2)$, tiene dimensión 1 y coincide con $\mathbb{S}^1$, antes mencionado. Por otro lado, el caso $n = 3$, $SO(3)$, tiene dimensión 3. Este último tiene como recubrimiento universal a $\mathbb{S}^3$, que es un recubrimiento de dos hojas, y por tanto, $SO(3)$ es isomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, el espacio proyectivo real tridimensional (Ver [5], Ejercicio 21-21).

6. El producto cartesiano de grupos de Lie es un grupo de Lie. Si G y H son grupos de Lie, entonces $G \times H$ es una variedad diferenciable, ya que el producto cartesiano de variedades es una variedad, y la multiplicación y la inversa son diferenciables por serlo en cada componente. La dimensión de $G \times H$ es la suma de las dimensiones de G y H . En general, para cualquier producto de variedades, la dimensión es la suma de las dimensiones de cada una de las variedades, y por lo tanto, también se cumple para grupos de Lie (Ver [3], Teorema 1.13).
7. El cociente de grupos de Lie no es un grupo de Lie en general. Por ejemplo, si tomamos el cociente de $\mathbb{S}^3$ por $\mathbb{S}^1$, obtenemos $\mathbb{S}^2$, que veremos que no es un grupo de Lie. $\mathbb{S}^2$ es un ejemplo de variedad homogénea. Todos los cocientes de grupos de Lie son variedades homogéneas, como veremos más adelante, pero no siempre grupos de Lie, y su dimensión es la diferencia de las dimensiones de los grupos de Lie que se cocientan.

1.3. Acciones de grupo y órbitas

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$ e imaginemos cómo sería hacerlo girar respecto del origen, mediante una transformación del grupo $SO(2)$. Si nos fijamos en un punto concreto distinto del origen, este punto describirá una circunferencia, parecido a las sendas estelares (*star trails*) en el cielo nocturno. Así, podemos separar el plano en estas circunferencias concéntricas (más el origen) y clasificar los puntos del plano según la circunferencia a la que pertenecen, esto es, su distancia al origen. Para formalizar este concepto de clasificar el espacio mediante la transformación de sus puntos por un grupo, se introducen las siguientes definiciones de acción y órbitas.



Figura 1.2: Foto de sendas estelares en el cielo nocturno en Chile. Disponible en [9].

Definición 1.13. Sean G un grupo y X un conjunto no vacío. Se llama **acción a izquierda de G en X** a una aplicación

$$L : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

tal que:

1. $L(e, x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es el elemento neutro de G .
2. $L(gh, x) = L(g, L(h, x))$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

De manera análoga, se define la acción a derecha de G en X , cumpliendo propiedades similares.

Podemos simplificar la notación escribiendo $L(g, x) = L_g x$. De esta forma, las propiedades que buscamos son $L_e x = x$ y $L_g(L_h x) = L_{gh} x$. Y análogamente para la acción a derecha con $R_e x = x$ y $R_g(R_h x) = R_{hg} x$.

Definición 1.14. Sean G un grupo, X un conjunto no vacío y $L : G \times X \rightarrow X$ una acción a izquierda de G sobre X . Sean S un subgrupo de G e Y un subconjunto de X . Se definen:

1. La **órbita de Y bajo la acción de S** como el conjunto

$$\mathcal{O}_S(Y) = \{sy \mid s \in S, y \in Y\}.$$

2. Para cada $x \in X$, la **órbita de x bajo la acción de S** como el conjunto

$$\mathcal{O}_S(x) = \{gx \mid g \in S\}.$$

Proposición 1.15. Sean G un grupo, $S \subseteq G$ un subgrupo, X un conjunto no vacío y $L : G \times X \rightarrow X$ una acción a izquierda de G sobre X . Entonces, las órbitas definen una relación de equivalencia en X de forma que $x \sim y$ si y solo si $y \in \mathcal{O}_S(x)$.

Más concretamente, las órbitas son las clases de equivalencia, esto es, $x \sim y$ si y sólo si $\mathcal{O}_S(x) = \mathcal{O}_S(y)$.

Demostración. Hay que probar que la relación mencionada cumple las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

- Reflexividad: $x \sim x$ porque $x \in \mathcal{O}_S(x)$ trivialmente ($x = e \cdot x, e \in S$).
- Simetría: Si $x \sim y$, entonces $y \in \mathcal{O}_S(x)$. Por tanto, $y = gx$ para cierto $g \in S$. Pero entonces $x = g^{-1}y$ y $g^{-1} \in S$ por ser subgrupo. Por tanto, $x \in \mathcal{O}_S(y)$, luego $y \sim x$.
- Transitividad: Si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $y = gx$ y $z = hy$ para ciertos $g, h \in S$. Por tanto, $z = h(gx) = (hg)x$ y $hg \in S$ por ser subgrupo. Luego, $z \in \mathcal{O}_S(x)$, y $x \sim z$.

Hemos visto que la relación es de equivalencia. Nos falta ver que las órbitas son las clases de equivalencia. Supongamos que $x \sim y$, entonces $y = g_0 x$ para cierto $g_0 \in S$. Entonces, $\mathcal{O}_S(x) = \{gx : g \in S\} = \{gg_0^{-1}g_0 x : g \in S\} = \{gg_0^{-1}y : g \in S\} = \{g'y : g' \in S\} = \mathcal{O}_S(y)$, donde la segunda igualdad se da porque $g_0^{-1} \in S$ por ser S un grupo y la cuarta igualdad se da porque $g' = gg_0^{-1}$ está en S por ser un grupo. Por otro lado, si $\mathcal{O}_S(x) = \mathcal{O}_S(y)$, entonces $y \in \mathcal{O}_S(y)$ trivialmente porque podemos escribir $y = ey$ con $e \in S$ y por ser conjuntos iguales, $y \in \mathcal{O}_S(x)$, luego $x \sim y$. $\square$

Definición 1.16. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Se dice que la acción a izquierda de G en X es **libre** si para todo $x \in X$ y todo $g \in G$ se tiene que $gx \neq x$ salvo si $g = e$. Esto es, ningún elemento a excepción del neutro de G fija un punto de X . Se llama **estabilizador** de $x \in X$ al conjunto

$$\text{stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

La acción es libre si y sólo si el estabilizador de todo punto $x \in X$ es trivial, esto es, $\text{stab}(x) = \{e\}, \forall x \in X$.

Se dice que la acción es **transitiva** si para todo $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que $gx = y$. Esto es, cualquier punto de X puede ser llevado a cualquier otro mediante una transformación de G . De ser así, G define una sola clase de equivalencia.

Si la acción es libre y transitiva, diremos que es **simplemente transitiva**. Esto es equivalente a que para cada $x, y \in X$ existe un único $g \in G$ tal que $gx = y$.

Ejemplo 1.17. Algunos ejemplos de acciones de grupo son:

1. La acción de $SO(2)$ en $\mathbb{R}^2$ con la que se ha abierto esta sección es un ejemplo de acción que no es ni libre ni transitiva. En efecto, para cada órbita, cada circunferencia, puede llevarse cualquier punto a cualquier otro mediante una rotación, pero la condición de transitividad requiere que el grupo pueda transformar cualquier punto en cualquier otro, lo cual no es posible en este caso. Además, la acción no es libre porque el origen queda fijo bajo cualquier rotación.
2. Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes reales. La acción de $GL(n, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por la multiplicación de matrices es una acción transitiva, pues cualquier matriz invertible puede llevar cualquier vector no nulo a cualquier otro vector no nulo, pero no es libre, veamos esto con más detalle. Tomemos el vector $e_1 = (1, 0)^\top \in \mathbb{R}^2$, y la matriz A que da una reflexión respecto de la recta $x_2 = 0$, esto es,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $Ae_1 = e_1$, pero la matriz A , que pertenece a $GL(2, \mathbb{R})$ porque es su propia inversa, fija un vector no nulo y no es la matriz identidad. Por tanto, la acción no es libre.

3. Podemos construir espacios a partir de las órbitas de una acción de grupo, considerando el espacio cociente, cuando se pueda (en general no se podrá), dado por las propias órbitas. Por ejemplo, si consideramos la acción de $\mathbb{R}_+$ en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por $t \cdot x = tx$, entonces las órbitas son las semirrectas desde el origen y el espacio cociente es la esfera S^n . O, tomando como grupo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ actuando sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, las órbitas son las rectas vectoriales que pasan por el origen (sin este) y el espacio cociente es el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
4. La propia multiplicación de G en sí mismo por la izquierda es una acción transitiva y libre. En efecto, para cualquier $g, h \in G$, si $L_g h = gh = h$, entonces multiplicando por $h^{-1} \in G$ por la derecha se tiene que $ghh^{-1} = hh^{-1}$, luego $g = e$ y la acción es libre. Y si $g, h \in G$, entonces existe $gh^{-1} \in G$ tal que $L_{gh^{-1}} h = gh^{-1}h = g$, por lo que la acción es transitiva. Obsérvese que L_g es un difeomorfismo para cada $g \in G$.

1.4. Campos Invariantes a Izquierda

Definición 1.18. Una variedad diferenciable M se dice **paralelizable** si existe una base global de campos vectoriales $\{X^1, \dots, X^n\}$ en M . Esto es, para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p y campos vectoriales $X^1, \dots, X^n$ en U tales que para cada punto $q \in U$ los vectores $\{X_q^1, \dots, X_q^n\}$ forman una base de $T_q M$.

Proposición 1.19. Todo grupo de Lie es paralelizable.

Demostración. Sean G un grupo de Lie y $X_e \in T_e G$ un campo vectorial en el neutro y veamos que podemos definir un campo X global. Para cada $g \in G$, definimos el campo vectorial $X_g \in T_g G$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh \\ e &\mapsto ge = g \end{aligned}$$

es un difeomorfismo, por lo tanto, la aplicación tangente

$$(L_g)_* : T_e G \rightarrow T_g G$$

$$X_e \mapsto X_g := (L_g)_*(X_e)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Así, si X_e no se anula, entonces X_g no se anulará para ningún g y X es un campo vectorial sin ceros. Por otro lado, si $\{X_e^1, \dots, X_e^n\}$ es una base de $T_e G$, entonces $\{(L_g)_*(X_e^1), \dots, (L_g)_*(X_e^n)\}$ es una base de $T_g G$ para todo $g \in G$, por ser $(L_g)_*$ un isomorfismo. Luego, G tiene una base global de campos vectoriales y es paralelizable. $\square$

Es conocido que las únicas esferas paralelizables son $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$, por lo que cualquier otra esfera es descartada de ser un grupo de Lie. En el caso de $\mathbb{S}^7$, es una variedad paralelizable, pero no es grupo de Lie. De hecho, $\mathbb{S}^7$ es el conjunto de los octoniones de norma 1, cuya multiplicación no es asociativa, por lo que ni siquiera es un grupo. Para ver que el producto no es asociativo basta tomar tres octoniones x, y, z y ver que $(xy)z \neq x(yz)$. Recordando que los octoniones se definen por la siguiente tabla de multiplicación

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tabla 1.1: Tabla de multiplicación de los octoniones obtenida de [1].

podemos tomar $x = e_1$, $y = e_2$ y $z = e_3$, de modo que $(xy)z = (e_1 e_2)e_3 = e_4 e_3 = -e_6$ y $x(yz) = e_1(e_2 e_3) = e_1 e_5 = e_6$.

Además, como se había adelantado, $\mathbb{S}^2$ no es paralelizable, ya que no admite un campo sin ceros, menos aún una base global, por lo que no puede ser un grupo de Lie.

Definición 1.20. Un campo vectorial X en G se dice **invariante a izquierda** si para todo $g \in G$ se tiene que $(L_g)_* X_h = X_{gh}$. Es decir, el campo vectorial X es invariante bajo la acción de G por la izquierda. Cuando no haya ambigüedad, se escribiremos simplemente que X es invariante a izquierda si $(L_g)_* X = X$ para todo $g \in G$. Se definen los campos invariantes a derecha de manera análoga.

Ejemplo 1.21. Ejemplos de campos invariantes a izquierda son:

1. El campo vectorial X definido en la demostración anterior es invariante a izquierda. En efecto, $(L_g)_* X_h = (L_g)_*((L_h)_*(X_e)) = (L_{gh})_*(X_e) = X_{gh}$, donde la segunda igualdad se da porque la aplicación tangente es un funtor covariante, esto es, se cumple que $(L_g)_*((L_h)_*) = (L_g L_h)_*$. Y como $L_g L_h = L_{gh}$, se tiene que $(L_g)_*((L_h)_*) = (L_{gh})_*$.
2. Podemos particularizar aún más el ejemplo anterior para el caso de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. La circunferencia son los puntos de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ que cumplen la condición $|z| = 1$, o equivalentemente, los puntos $z = a + bi$ (o $z = (a, b)$) tales que $a^2 + b^2 = 1$. Y podemos así reescribir $a = \cos(t)$ y $b = \sin(t)$, para cierto $t \in [0, 2\pi)$. Sin embargo,

los números complejos pueden representarse también como matrices de 2×2 con coeficientes reales, de forma que

$$z = a + bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Esta representación se llama representación real de los números complejos y se puede comprobar que la primera columna son los coeficientes de z y la segunda los de iz . Además, se puede comprobar también que es un isomorfismo multiplicativo entre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y su imagen, de modo que si

$$z = a + bi \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$w = c + di \longleftrightarrow \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix},$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc) \longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Restringiendo por lo tanto a los elementos de norma uno, tenemos que los elementos se pueden escribir con coeficientes $a = \cos(t)$ y $b = \sin(t)$, de forma que

$$z = \cos(t) + i \sin(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

y por lo tanto dado una parametrización de la circunferencia, por ejemplo $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, podemos considerar el campo vectorial $X_t = f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Este campo vectorial es invariante a izquierda, ya que si $g = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, entonces la acción de g sobre $f(t)$ es la que viene dada por la multiplicación de g como matriz, es decir, como aplicación lineal, sobre el campo vectorial X_t :

$$\begin{aligned} (L_g)_* X_t &= g X_t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \cos(\theta) - \cos(t) \sin(\theta) \\ \sin(t) \sin(\theta) + \cos(t) \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(t + \theta) \\ \cos(t + \theta) \end{pmatrix} = X_{t+\theta}. \end{aligned}$$

Por tanto, el campo vectorial X_t es invariante a izquierda.

Enunciamos sin demostración el siguiente resultado. La demostración completa está en [5], a lo largo de la sección 8.

Proposición 1.22. *El corchete de Lie $[X, Y]$ de dos campos vectoriales invariantes a izquierda X, Y es un campo vectorial invariante a izquierda.*

1.5. Álgebras de Lie

Definición 1.23. *Un álgebra de Lie (real) es un espacio vectorial real V de dimensión finita con una operación bilineal $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in V$. (Antisimetría)
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in V$. (Identidad de Jacobi)

Ejemplo 1.24. *Algunos ejemplos de álgebras de Lie son:*

1. *El álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ con la operación $[A, B] = AB - BA$ el conmutador de matrices.*
2. *Dada una variedad diferenciable M , el espacio de los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio vectorial de dimensión infinita con las operaciones de suma de campos vectoriales y el producto por escalares. Junto con el corchete de Lie de campos vectoriales, dado por $[X, Y] = XY - YX$, $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de álgebra de Lie. En este caso, la dimensión es infinita porque localmente se puede encontrar una base de modo que cualquier campo vectorial se puede escribir como combinación lineal. Sin embargo, al tratarse del espacio de funciones de M en $\mathbb{R}$, el cardinal de esa base es infinito. Pensemos por ejemplo en el caso de $M = \mathbb{R}$, donde el espacio de funciones tiene como base $\{1, t, t^2, \dots\}$, que es infinita.*
3. *Al igual que sobre cualquier variedad podemos considerar siempre un campo vectorial, el campo vectorial trivial que es cero en todo punto, también se tiene siempre un álgebra de Lie trivial para todo espacio vectorial. Todo espacio vectorial es un álgebra de Lie definiendo la operación $[X, Y] = 0$ para todo $X, Y \in V$. Cuando el corchete de Lie es idénticamente cero diremos que el álgebra de Lie es abeliana. En ese sentido, este es el álgebra de Lie abeliana que siempre podemos considerar.*

La siguiente definición muestra que a cada grupo de Lie le corresponde un álgebra de Lie. Es más, para cada álgebra de Lie de dimensión finita existirá también un grupo de Lie simplemente conexo cuya álgebra de Lie asociada es isomorfa a la primera (Ver Teorema 3.28 de [8]). Esta relación se llama correspondencia grupo de Lie-álgebra de Lie.

Definición 1.25. *Sea G un grupo de Lie. Llamamos **álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G** al conjunto de todos los campos invariantes a izquierda definidos sobre G junto con las operaciones usuales de suma y producto por escalares de campos vectoriales, que lo dota de estructura de espacio vectorial, y el corchete de Lie de campos vectoriales. Esta álgebra de Lie tiene la misma dimensión que el grupo de Lie G , como se verá en la Proposición 1.26.*

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es una subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$. Como se ha discutido en el ejemplo anterior, el espacio de los campos vectoriales sobre una variedad diferenciable es un álgebra de Lie. En particular, los grupos de Lie son variedades diferenciables, por lo que el conjunto de los campos vectoriales sobre G , $\mathfrak{X}(G)$, es un álgebra de Lie. Y por ser $\mathfrak{g}$ un subconjunto de $\mathfrak{X}(G)$ dotado de las mismas operaciones y cerrado bajo estas, se cumple que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie (Ver [5], Ejemplo 8.36).

Proposición 1.26. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G es isomorfo al espacio tangente $T_e G$ en el neutro e de G . El isomorfismo se da por la aplicación*

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e\end{aligned}$$

que es un isomorfismo de espacios vectoriales que da a cada campo vectorial invariante a izquierda su valor en el elemento neutro del grupo.

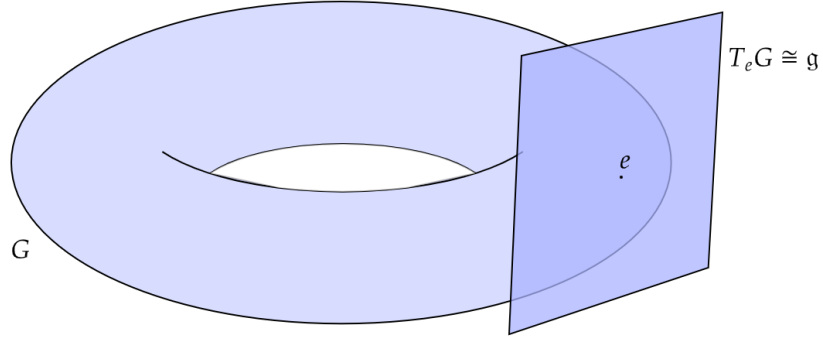


Figura 1.3: Representación del espacio tangente $T_e G$ en el neutro e de un grupo de Lie G . En este caso, el grupo es el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y el espacio tangente es un plano tangente al toro en el punto e .

Demostración. Para ver que es un isomorfismo, basta ver que es lineal y biyectivo.

La linealidad se da por ser ϕ la evaluación en e , $\phi(X + Y) = (X + Y)_e = X_e + Y_e = \phi(X) + \phi(Y)$ y $\phi(\lambda X) = (\lambda X)_e = \lambda X_e = \lambda \phi(X)$. La aplicación es inyectiva porque si tenemos dos campos $X, Y \in \mathfrak{g}$ tales que $\phi(X) = \phi(Y)$, entonces $X_e = Y_e$, y por ser campos invariantes a izquierda, $X_g = (L_g)_* X_e = (L_g)_* Y_e = Y_g$ para todo $g \in G$, por lo que $X = Y$. Por último, queremos ver que si existe un elemento $v \in T_e G$, entonces existe un campo $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\phi(X) = X_e = v$. Para ello, definimos el campo X de la misma forma que en la demostración la Proposición 1.19, esto es, $X_g = (L_g)_* v$ para todo $g \in G$. Entonces, X es un campo invariante a izquierda por construcción y $\phi(X) = X_e = v$, por lo que ϕ es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo.

De esta forma, vemos que si G es un grupo de Lie de dimensión n , entonces su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión n isomorfo al espacio tangente en el elemento neutro. $\square$

Obsérvese que el isomorfismo de la proposición anterior tiene varias propiedades interesantes. En primer lugar, se ha hablado anteriormente de que el conjunto de campos vectoriales sobre una variedad diferenciable es un espacio vectorial de dimensión infinita, sin embargo, el subconjunto de los campos invariantes a izquierda es un subespacio vectorial de dimensión finita, por ser isomorfo al espacio tangente en el neutro del grupo de Lie.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que la aplicación ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales, pero no necesariamente de álgebras de Lie. Sin embargo, el propio isomorfismo permite definir una estructura de álgebra de Lie en el espacio tangente $T_e G$ de forma natural. Para ello, dados dos elementos $u, v \in T_e G$, definimos el corchete de Lie $[u, v]$ de la siguiente manera:

$$[u, v] := \phi([\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)])$$

Por último, es sorprendente el simple hecho de poder tomar el corchete de Lie de elementos del espacio tangente. En general, para una variedad diferenciable cualquiera, el espacio tangente en un punto no tiene estructura de álgebra de Lie, ya que el corchete de Lie de dos campos vectoriales es una forma de derivar un campo respecto del otro, y para tomar una derivada se requiere conocer el comportamiento de los campos no en un punto sino en un entorno de este. Sin embargo, poder definir el corchete de Lie en el espacio tangente permite dar esa derivada conociendo únicamente el valor de los campos en el elemento neutro, lo cual es algo contraintuitivo. Una analogía con el análisis de funciones

reales sería dar la derivada de una función en un punto conociendo únicamente el valor de la función en ese punto.

Ejemplo 1.27. *Algunos ejemplos de álgebras de Lie asociadas a grupos de Lie son:*

1. *En el ejemplo 1.24.1 hemos visto que el conjunto de matrices $n \times n$ con la operación de conmutador de matrices es una álgebra de Lie. Esta álgebra de Lie la denotamos, de forma muy poco original, por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, pues es el álgebra de Lie asociada al grupo de matrices invertibles $GL(n, \mathbb{R})$. Se puede observar que en el paso al álgebra de Lie se ha perdido la condición de invertibilidad, veremos con otros ejemplos que la pérdida o transformación de las condiciones es algo común. En lo que respecta a esta álgebra de Lie, se corresponde directamente con el conjunto $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y es por lo tanto isomorfa a $\mathbb{R}^{n^2}$.*

Hemos visto en la proposición anterior que esta álgebra de Lie es isomorfa al espacio tangente en el neutro del grupo de matrices invertibles, esto es, la identidad. Sin embargo, si pensamos que $GL(n, \mathbb{R})$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$, es razonable que su espacio tangente en cualquier punto, y en particular en la identidad, sea isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$.

2. *Si ahora consideramos el grupo de matrices ortogonales $O(n)$, su álgebra de Lie asociada es el conjunto de matrices antisimétricas, esto es, las matrices A tales que $A^T = -A$. El grupo ortogonal no es simplemente conexo, sino que tiene dos componentes conexas, siendo una de ellas el grupo especial ortogonal, también mencionado anteriormente. Como ambos grupos tienen la misma dimensión y, de hecho, el grupo especial ortogonal es la componente conexa de la identidad, entonces ambos grupos tendrán la misma álgebra de Lie asociada. Así, con la notación que hemos ido utilizando, estos dos grupos de matrices nos darían las respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{o}(n)$ y $\mathfrak{so}(n)$. Sin embargo, ambas álgebras de Lie son isomorfas. En este caso, la condición que define al grupo ha cambiado en lugar de desaparecer, en lugar de que $A^T = A^{-1}$, ahora tenemos que $A^T = -A$. En cierto modo, en lugar de condiciones en el producto de matrices ahora son en la suma. Además, en el caso del grupo especial ortogonal, la condición que define al grupo es que $A^T = A^{-1}$ y $\det(A) = 1$, al pasar al álgebra de Lie, la condición de determinante se pierde, aunque la condición $A^T = -A$ implica que $\text{Tr}(A) = 0$. De nuevo, hay restricciones en las matrices, que en el grupo de Lie están en forma de determinante (productos) y en el álgebra de Lie en forma de traza (sumas), y además los resultados de estas operaciones van al neutro de la operación en $\mathbb{R}$, 1 y 0 respectivamente.*

Más generalmente, y de nuevo debido a la Proposición 1.26, dado un grupo de Lie G que no sea conexo, su álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$ será isomorfa a la de la componente conexa de la identidad.

Capítulo 2

Fibrados Principales

Como se ha mencionado al principio del trabajo, la idea de fibrado principal quiere generalizar el concepto de producto cartesiano. En este sentido, un fibrado es una variedad diferenciable que se puede ver localmente como un producto cartesiano de dos variedades, aunque no necesariamente globalmente. Esto realmente no es la propiedad que define a los fibrados principales, sino que es la que define a la noción de fibrado general. Un fibrado principal es un tipo especial de fibrado, en cierto sentido el más importante de todos. Esto es, los fibrados pueden ser de muchos tipos, hay fibrados vectoriales como el tangente y el cotangente, los tensoriales, de esferas, etc. Sin embargo, cada uno de esos fibrados está asociado a un fibrado principal. Todo fibrado está asociado a un fibrado principal y cada fibrado principal puede engendrar otros tipos de fibrados; los fibrados principales son en cierto sentido el “esqueleto” de los fibrados. Un fibrado principal tiene dos características importantes: la primera es que es un fibrado, es decir, localmente es producto cartesiano de dos variedades, y la segunda es que hay un grupo que actúa sobre el fibrado de modo que las órbitas de la acción coinciden con las fibras del fibrado.

Para esta sección se han seguido principalmente las referencias [2], [4] y [8] para las definiciones y ejemplos de fibrados principales, y [1] y [6] para la sección sobre la fibración de Hopf.

2.1. Nociones básicas

Como se ha mencionado, los fibrados principales combinan dos ideas a priori separadas: por un lado la de fibrado, más relacionada con la Topología y la Geometría, y por el otro la de las acciones de grupos y órbitas, más relacionadas con el Álgebra y la Teoría de Grupos. Esto no supone una novedad, en la primera sección se han tratado los grupos de Lie, que son grupos que tienen estructura de variedad diferenciable, nociones pertenecientes al Álgebra y la Geometría respectivamente, y en la que la relación entre ambas debe cumplir ciertas características que respeten ambas disciplinas, en este caso, que las operaciones de grupo sean diferenciables. En este sentido, los fibrados principales no son muy distintos, pues son variedades con una cierta estructura simétrica, pero de modo que esa simetría, las fibras, se pueden ver como las órbitas de una acción de grupo. Los fibrados principales son, en cierto sentido, una familia de grupos de Lie, las fibras, parametrizada por la variedad base. Es importante recalcar que el grupo estructural debe ser un grupo de Lie. Con esto en mente, podemos dar la siguiente definición de fibrado principal.

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Un **fibrado principal** de grupo G sobre M es una variedad diferenciable P con una acción de G tal que:

1. G actúa libremente sobre P por la derecha.

2. M es el espacio cociente de P por la acción de G , $M = P/G$ y la proyección $\pi : P \rightarrow M$ es diferenciable, tal que para cada $x \in M$, G actúa sobre la fibra $\pi^{-1}(x)$ de forma simplemente transitiva.
3. P es localmente trivial, es decir, para cada punto x de M existe un entorno U de x y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tal que $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ con $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ una aplicación diferenciable que cumple $\varphi(pg) = \varphi(p)g$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ y $g \in G$.

Denotaremos a los fibrados principales por $P(M, G, \pi)$, $P(M, G)$ o simplemente P si no hay ambigüedad. Adicionalmente, se representarán comúnmente mediante el diagrama

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

P se llama el espacio total del fibrado, M el espacio base, G el grupo estructural y π la proyección.

Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ se llama la fibra en x .

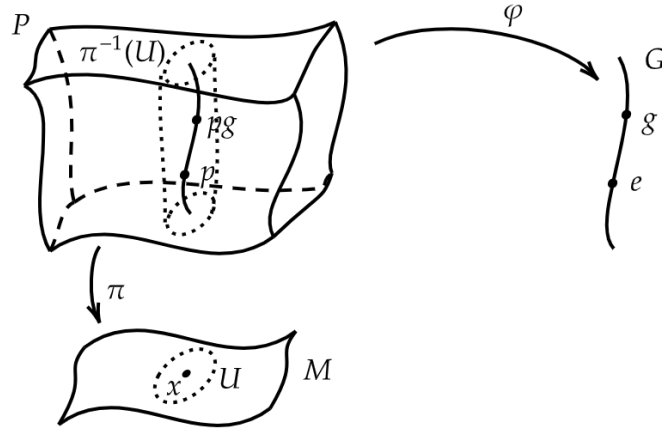


Figura 2.1: Dibujo esquemático de un fibrado principal.

La trivialidad local del fibrado principal tiene como consecuencia que cada una de las fibras sea difeomorfa al grupo estructural G . En efecto, si tomamos un punto $x \in M$ y un entorno trivializante U de x , entonces como tenemos un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, restringiendo a la fibra $\pi^{-1}(x)$, tenemos que $\Phi|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times G$ es también un difeomorfismo.

Proposición 2.2. *Sea P un fibrado principal de grupo G sobre M . Entonces, la acción de G sobre las fibras es simplemente transitiva.*

Demostración. Como la acción de G es libre sobre P , entonces lo será restringiendo a los puntos de la fibra. Veamos la transitividad. Sean $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(x)$, queremos ver que existe un $g \in G$ tal que $p_2 = p_1 g$.

Usando la propiedad de que P es localmente trivial, tenemos que $\Phi(p_1) = (x, g_1)$ y $\Phi(p_2) = (x, g_2)$, con $g_1 = \varphi(p_1)$ y $g_2 = \varphi(p_2)$, que son elementos de G . Utilizando el difeomorfismo local Φ , tenemos la siguiente cadena de igualdades $\Phi(p_1 g_1^{-1} g_2) = (\pi(p_1 g_1^{-1} g_2), \varphi(p_1 g_1^{-1} g_2)) = (\pi(p_1), \varphi(p_1) g_1^{-1} g_2) = (x, g_1 g_1^{-1} g_2) = (x, g_2) = \Phi(p_2)$, por lo que $p_1 g_1^{-1} g_2 = p_2$, luego $p_2 = p_1 g$ con $g = g_1^{-1} g_2 \in G$. Por tanto, la acción de G sobre las fibras es simplemente transitiva. $\square$

Ejemplo 2.3. Algunos ejemplos de fibrados principales son:

1. Dada una variedad diferenciable M y un grupo de Lie G , la variedad producto $M \times G$ es el fibrado principal trivial de grupo G sobre M . La acción de G sobre $M \times G$ es la acción por la derecha, $(x, g)h = (x, gh)$ para todo $x \in M$, $g, h \in G$, que es claramente libre. La proyección $\pi : M \times G \rightarrow M$ es la proyección canónica sobre la primera componente, $\pi(x, g) = x$, que es diferenciable. Por último, la trivialidad local es directa, $M \times G$ es globalmente trivial, y por lo tanto también lo es localmente. En este caso, el difeomorfismo trivializante viene dado por la identidad.
2. Dada una variedad diferenciable M , el fibrado de referencias lineales LM es el conjunto de todas las bases de $T_x M$ para cada $x \in M$. Este fibrado es un fibrado principal de grupo estructural $GL(n, \mathbb{R})$, donde $n = \dim(M)$. La acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre LM es la acción por la derecha, $(x, B)g = (x, Bg)$ para todo $x \in M$ y $B, g \in GL(n, \mathbb{R})$, donde se ha identificado la base en $T_x M$ con una matriz de $GL(n, \mathbb{R})$ y g tomaría el papel de la matriz de cambio de base. En este caso, la fibra de un punto sería el conjunto de todas las bases de $T_x M$, y dado un punto del fibrado, moverse por la fibra sería cambiar, de manera suave, la referencia elegida.
3. Similar al fibrado de referencias lineales, el fibrado de referencias ortonormales OM es el conjunto de todas las bases ortonormales de $T_x M$. Pero, para hablar de ortogonalidad o norma, primero hay que definir el concepto de una métrica en una variedad. Llamamos métrica riemanniana a un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ que es simétrico y positivo definido. Aplicado a este caso, una métrica riemanniana g será, para cada punto $x \in M$, una aplicación bilineal $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

$$(I) \quad g_x(X_x, Y_x) = g_x(Y_x, X_x) \text{ para todo } X_x, Y_x \in T_x M. \quad (\text{Simétrica})$$

$$(II) \quad g_x(X_x, X_x) > 0 \text{ para todo } X_x \in T_x M \text{ si } X_x \neq 0. \quad (\text{Definida positiva})$$

De esta forma, g asigna un producto interno a cada uno de los espacios tangentes $T_x M$, y por lo tanto, puede definirse a su vez una norma $\|\cdot\|_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ en cada punto de la variedad, dada por $\|v\|_x = \sqrt{g_x(v, v)}$ con $v \in T_x M$. Una referencia ortonormal en $T_x M$ es un conjunto de vectores $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $g_x(v_i, v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

La acción de $O(n)$ sobre OM es la acción por la derecha, $(x, B)g = (x, Bg)$ para todo $x \in M$ y $B, g \in O(n)$, análoga al caso anterior.

Los espacios recubridores comparten muchas propiedades con los fibrados, tienen esa noción de ser localmente “copias” de un espacio base, así como los fibrados son localmente productos de un espacio base y un grupo estructural, y por tanto son localmente “copias” de un espacio parametrizadas por las fibras. Aunque en general no se pueda hacer esa identificación y ver los recubrimientos como fibrados principales, sí que hay algunos casos de recubrimientos que se comportan como tales, siendo las fibras variedades de dimensión cero, pero que también cumplan las definiciones de grupo topológico. Ese es el caso de los recubrimientos regulares (a veces llamados normales o de Galois). Estos espacios recubridores son aquellos en los que el grupo de automorfismos del recubrimiento $\text{Deck}(p) = \{\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} : p \circ \varphi = p\}$, donde X sería el espacio recubierto y $\tilde{X}$ el espacio recubridor, actúa de forma simplemente transitiva sobre las fibras del recubrimiento. El grupo $\text{Deck}(p)$ son los automorfismos que cambian elementos de las fibras, manteniendo las fibras fijas, esencialmente toma cada una de esas copias del espacio X y las “baraja” o reordena como si fueran cartas. El grupo estructural del fibrado es el grupo de automorfismos del recubrimiento, que actúa libremente sobre el espacio $\tilde{X}$, y la condición de

libertad y transitividad sobre las fibras es la que hace que el recubrimiento sea regular, pudiendo así considerarlo un caso particular de fibrado principal, si admitimos variedades de dimensión cero para las fibras.

Un ejemplo de fibrado principal trivial es el toro. El toro es el producto de dos circunferencias, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y por lo tanto es un fibrado trivial de grupo $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{S}^1$. Sin embargo, hay otro fibrado principal que podemos dar, con base y grupo estructural la circunferencia, y que no es trivial: la botella de Klein. Ambos fibrados tienen mismo grupo estructural y se fibran sobre la misma base, pero no son homeomorfos como espacios totales, por lo que uno podría preguntarse si son o no equivalentes como fibrados. Para responder a esta pregunta, se introduce la siguiente definición.

Definición 2.4. Sean M y M' dos variedades diferenciables y P y P' fibrados principales de grupos estructurales G y G' sobre M y M' respectivamente. Un **homomorfismo de fibrados principales** es un par (F, ϕ) , donde $F : P \rightarrow P'$ es una aplicación entre variedades y $\phi : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos, de modo que F sea compatible respecto de la acción de grupos de la siguiente forma:

$$F(pg) = F(p)\phi(g)$$

En otras palabras, la aplicación F debe conmutar con la acción de los grupos, $(F(R_g(p))) = R_{\phi(g)}(F(p))$, y por lo tanto el homomorfismo de fibrados lleva fibras en fibras.

Este par de aplicaciones (F, ϕ) nos permite definir una aplicación $f : M \rightarrow M'$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow M' \\ x &\mapsto \pi'(F(p)) \end{aligned}$$

con $p \in \pi^{-1}(x)$. Esta definición no depende del representante p , ya que si tomamos otro punto $q \in \pi^{-1}(x)$, entonces existe un único $g \in G$ tal que $q = pg$, y por lo tanto $\pi'(F(q)) = \pi'(F(pg)) = \pi'(F(p)\phi(g)) = \pi'(F(p))$, ya que la proyección π' es invariante por la acción de G' . De este modo, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Esto es, $\pi' \circ F = f \circ \pi$.

Diremos que (F, ϕ) es un **isomorfismo de fibrados principales** si existe otro homomorfismo (F', ϕ') tal que $F' \circ F = \text{Id}_P$ y $F \circ F' = \text{Id}_{P'}$, y análogamente para ϕ y ϕ' . En este caso, diremos que P y P' son isomorfos como fibrados principales. Obsérvese en tal caso que P y P' son variedades difeomorfas, y que G y G' son grupos de Lie isomorfos. Además, la aplicación inducida f es un difeomorfismo entre las variedades base M y M' , por composición.

Por otro lado, un homomorfismo de fibrados principales (F, ϕ) se llama **embedding** si F es un embedding de variedades y ϕ es un monomorfismo de grupos. En tal caso, identificando los espacios P con $F(P)$, G con $\phi(G)$ y M con $f(M)$, diremos que P es un **subfibrado** de P' . Además, se tendrá que la aplicación f inducida será también un embedding de variedades.

Si, adicionalmente, la aplicación inducida f es la identidad, entonces $M = M'$ y (F, ϕ) se llama una **reducción del grupo estructural** de P' a G . En este caso, el subfibrado P se llama **fibrado reducido**.

Una propiedad importante de los homomorfismos de fibrados principales es que preservan las fibras, esto es, llevan fibras en fibras. Obsérvese que si tenemos dos puntos pertenecientes a la misma fibra, $p, q \in P$ tales que $\pi(p) = \pi(q)$, entonces $\pi'(F(p)) = f(\pi(p)) = f(\pi(q)) = \pi'(F(q))$, por lo que $F(p)$ y $F(q)$ pertenecen a la misma fibra de P' .

Ejemplo 2.5. *Algunos ejemplos de morfismos de fibrados principales son:*

1. *El fibrado de referencias ortonormales OM como subfibrado del fibrado de referencias lineales LM . Supongamos que M es una variedad riemanniana de dimensión n . Entonces, podemos considerar el fibrado de referencias ortonormales OM sobre M , así como el fibrado de referencias lineales LM , que existe siempre. Queremos encontrar un homomorfismo de fibrados principales que lleve OM en LM . Para ello, consideramos la inclusión $i : OM \rightarrow LM$, que lo que hace es incluir cada fibra de OM en la correspondiente fibra de LM . Para el homomorfismo de grupos, como $O(n)$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, podemos considerar también la inclusión $\phi : O(n) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Entonces, tenemos que ver que el par (i, ϕ) es un embedding de fibrados principales.*

Para ver que i es un embedding de variedades, hay que comprobar que es un diferenciable, inyectiva y que la aplicación tangente también es inyectiva. Para la diferenciabilidad, veamos que es diferenciable en cada punto. Sea $x \in M$, entonces, por la trivialidad local del fibrado, existe un entorno trivializante U de x tal que $\pi^{-1}(U) \cong U \times O(n)$, y de igual manera, existe un entorno V de x tal que $\pi^{-1}(V) \cong V \times GL(n, \mathbb{R})$. Tomamos la intersección de los dos y lo denotamos simplemente U . Bajo esta trivialización local, la inclusión i tiene la forma

$$\begin{aligned} i|_U : U \times O(n) &\rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ (u, B) &\mapsto (u, B), \end{aligned}$$

que es claramente diferenciable. Además, $i(R_A(u, B)) = i(u, BA) = (u, BA) = R_A(u, B)$, así que es un homomorfismo, y como $O(n)$ es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, la inclusión es inyectiva, pues a cada elemento de $O(n)$ le corresponde un único elemento de $GL(n, \mathbb{R})$, y lo mismo para el punto $u \in U$. La aplicación tangente es la aplicación inducida que lleva elementos del campo tangente de OM en el campo tangente de LM . Localmente, los espacios tangentes son isomorfos a la suma directa de los espacios tangentes de la variedad base y del grupo estructural, $T_{(u, B)}OM \cong T_uM \oplus \mathfrak{o}(n)$ y $T_{(u, B)}LM \cong T_uM \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. La aplicación tangente de i es

$$\begin{aligned} (i|_U)_* : T_uM \oplus \mathfrak{o}(n) &\rightarrow T_uM \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ (v, A) &\mapsto (v, A), \end{aligned}$$

que es claramente inyectiva, pues es la identidad en la primera componente y la inclusión en la segunda. Por lo tanto, i es un embedding de variedades. Y por tanto, (i, ϕ) es un embedding de fibrados principales. Obsérvese también que la aplicación inducida $f : M \rightarrow M$ es la identidad, ya que dado un punto $x \in M$, tenemos que $f(x) = \pi(i(x, B)) = \pi(x, B) = x$ para todo $B \in O(n)$. Entonces OM no es sólo un subfibrado de LM , sino que es un fibrado reducido de LM y el homomorfismo es una reducción del grupo estructural de $GL(n, \mathbb{R})$ a $O(n)$.

La hipótesis de que M es una variedad riemanniana, esto es, que tenga equipada una métrica riemanniana, puede parecer que no se requiera, pero es completamente necesaria para la construcción del fibrado de referencias ortonormales. Uno podría

pensar que el grupo $O(n)$, como grupo algebraico, está bien definido por la propiedad de que $A^\top = A^{-1}$, y es verdad, aunque sólo en el contexto del álgebra. Como variedad, inmersa en un espacio euclídeo, esta condición no es suficiente. Al pensar en las matrices como el conjunto de vectores que forma una base y dar la relación que define al grupo ortogonal, indirectamente se está eligiendo una métrica, en este caso la usual euclídea, esto es, las columnas de $A \in O(n)$ son vectores ortonormales para el producto interno usual. Si pensamos en el espacio $\mathbb{R}^n$ como una variedad “lisa”, sin una métrica asociada, no hay forma de definir un conjunto de vectores ortogonales, o de norma 1, pues no existe la noción. Elegir una métrica es elegir un conjunto de vectores privilegiados, que definen la geometría del espacio. Y uno podría preguntarse qué pasa si sobre un mismo espacio, en el que pueden definirse diferentes métricas, se define el fibrado de referencias ortonormales con diferentes métricas. En ambos casos el grupo estructural sería el mismo, $O(n)$, pero las fibras serían diferentes. Los grupos ortogonales que definen las métricas estarían relacionados por un isomorfismo, pero no serían estrictamente iguales, pues los vectores que los definen serían diferentes.

2. La reducción del grupo estructural puede servir también para saber si una variedad es orientable o no. De hecho, una variedad diferenciable M es orientable si y sólo si el fibrado de referencias lineales LM admite una reducción al fibrado de referencias orientadas LM^+ , con grupo estructural $GL^+(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$, que es el grupo de matrices invertibles con determinante positivo. En primer lugar, si consideramos el fibrado de referencias lineales LM , entonces para cada punto $x \in M$, la fibra $\pi^{-1}(x)$ es el conjunto de todas las bases del espacio tangente $T_x M$. Dadas dos bases B_1 y B_2 de $T_x M$, existe un único $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $B_2 = B_1 A$, ya que la acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre LM debe ser simplemente transitiva en las fibras, por la estructura de fibrado principal. Decimos que dos bases definen la misma orientación si $\det(A) > 0$. Bajo esta relación, en cada fibra hay dos orientaciones posibles, positiva y negativa. Cuando decimos que una variedad es orientable, nos referimos a que existe una elección global de orientación, en cada $T_x M$ escogemos una de esas dos orientaciones, y que varía continuamente con x , llamamos a tal elección la orientación positiva.

Definimos el fibrado de referencias orientadas LM^+ como el conjunto de todas las bases orientadas de $T_x M$, es decir, aquellas bases que definen una orientación positiva. Construyamos un homomorfismo de fibrados principales que lleve LM^+ en LM . Para ello, notemos que LM^+ es una subvariedad de LM , consideramos la inclusión como aplicación entre las variedades $F : LM^+ \rightarrow LM$, que lo que hace es incluir cada fibra de LM^+ en la componente conexa de la identidad en cada fibra de LM . La aplicación es claramente inyectiva, y su aplicación tangente también, pues es $i_* : T_{(x,B)} LM^+ \cong T_x M \oplus \mathfrak{gl}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_{(x,B)} LM \cong T_x M \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, donde $\mathfrak{gl}^+(n, \mathbb{R})$ es el álgebra de Lie asociada al grupo $GL^+(n, \mathbb{R})$ de las matrices $n \times n$ con traza positiva. La aplicación tangente es la identidad en la primera componente y la inclusión en la segunda, que es claramente inyectiva. Por lo tanto, F es un embedding de variedades. Para el homomorfismo de grupos, consideramos la inclusión $\phi : GL^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, que es claramente un monomorfismo de grupos. Para ver que conmuta con la acción de grupos, notemos que para todo $(x, B) \in LM^+$ y $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$, tenemos que $F((x, B)A) = F(x, BA) = (x, BA) = (x, B)A$, y por lo tanto $F((x, B)A) = F(x, B)\phi(A)$, donde $\phi(A) = A$ por ser la inclusión. Por lo tanto, LM^+ es un subfibrado de LM y el par (F, ϕ) es un embedding de fibrados principales. Además, la aplicación inducida $f : M \rightarrow M$ es la identidad, ya que dado un punto $x \in M$, tenemos que $f(x) = \pi(F(x, B)) = \pi(x, B) = x$ para todo $B \in GL^+(n, \mathbb{R})$. La composición no depende de qué proyección se tome, pues $\pi^+ = \pi|_{LM^+}$ por ser un subfibrado. Por lo tanto, LM^+ es un fibrado reducido de LM .

Para la otra implicación, supongamos que LM admite una reducción al fibrado de referencias orientadas LM^+ . Entonces, LM^+ es un fibrado de M y por lo tanto las fibras varían suavemente con x . Para cada x , la fibra $(\pi^+)^{-1}(x)$ en LM^+ es una de las componentes conexas de la fibra $\pi^{-1}(x)$ en LM , y la acción de $GL^+(n, \mathbb{R})$ no permite salirse de esa componente conexa. Para cada punto $x \in M$, definimos la orientación positiva como aquellas contenidas en $(\pi^+)^{-1}(x)$. Esta es una elección de orientación en M , como varía suavemente con x entonces la elección es continua, y como no podemos salirnos de las referencias positivamente orientadas mediante la acción de $GL^+(n, \mathbb{R})$, entonces la elección es consistente en todo M . Por lo tanto, M es orientable.

Obsérvese que si la variedad M está equipada con una métrica riemanniana, por el ejemplo anterior, entonces el fibrado de referencias lineales LM puede ser reducido al fibrado de referencias ortogonales OM . Combinando estas dos ideas, tenemos que si M es una variedad riemanniana, entonces M es orientable si y sólo si el fibrado de referencias lineales LM admite una reducción de grupo estructural a $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Hasta ahora hemos visto algunos ejemplos de fibrados principales y cómo pueden proyectarse sobre el espacio base mediante la proyección π . Sin embargo, podemos considerar el camino a la inversa y “levantar” la variedad base al fibrado. Este levantamiento se da mediante las llamadas secciones del fibrado principal. Las secciones son, en cierto sentido, la inversa de la proyección. De hecho, son la inversa componiéndolas por la derecha. Veamos esto con más detalle.

Definición 2.6. *Sea P un fibrado principal de grupo G sobre M . Una **sección de P** es una aplicación diferenciable $\sigma : U \rightarrow P$ tal que $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in U$, donde U es un abierto de M .*

Cuando $U = M$, diremos que σ es una sección global.

La existencia de secciones es equivalente a decir que la proyección π del fibrado es una submersión de P en M (Ver [5], Teorema 4.26).

Los campos vectoriales son secciones de un fibrado tangente. El fibrado tangente es un fibrado vectorial, no un fibrado principal, que se define como la unión disjunta de todos los espacios tangentes de una variedad diferenciable, $TM = \dot{\bigcup}_{x \in M} T_x M$. Una sección global de este fibrado es darle a cada punto un elemento del espacio tangente en ese punto, esto es, un vector en cada punto, y que varíe suavemente de punto a punto. En otras palabras, una sección global de un fibrado tangente es un campo vectorial definido sobre la variedad. El fibrado tangente está asociado al fibrado de referencias lineales (aunque este tema se escapa del alcance de este trabajo).

De una forma parecida, una sección del fibrado de referencias lineales es una aplicación diferenciable que asigna a cada punto de la variedad una base del espacio tangente en ese punto, de nuevo, variando suavemente de punto a punto. En este caso, si la sección es global, estaríamos dando una base global de campos vectoriales sobre la variedad, esto es, la variedad sería paralelizable.

Es importante darse cuenta de que no siempre existirá una sección global. Sin embargo, sí podremos dar una sección local. Aprovechando la trivialidad local del fibrado, podemos definir siempre una sección local. Sea x un punto de M y U un entorno trivializante de x . Entonces, como hemos visto, existe un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$. Entonces, podemos definir la sección local $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ como $\sigma(x) = \Phi^{-1}(x, e)$, donde e es el elemento neutro de G . Se puede comprobar que $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in U$. Intuitivamente, una sección nos permite elegir un representante de cada fibra de un entorno de manera

suave, aunque no podremos hacerlo globalmente, en general. La siguiente proposición nos da una caracterización de los fibrados principales que admiten secciones globales.

Proposición 2.7. *Sea P un fibrado principal de grupo G sobre M . Entonces, P admite una sección global si y solo si P es isomorfo al fibrado trivial, es decir, $P \cong M \times G$.*

Demostración. Lo vemos por doble implicación. Primero, supongamos que P es isomorfo al fibrado trivial. Entonces, el difeomorfismo $\Phi : P \rightarrow M \times G$ es global y no depende del abierto trivializante. Definimos la sección $\sigma : M \rightarrow P$ como $\sigma(x) = (x, e)$, donde e es el elemento neutro de G . La primera componente de σ es la identidad y la segunda es la aplicación constante a $e \in G$, por lo que σ es una aplicación diferenciable. Además, como el fibrado es trivial, la proyección π es la proyección canónica sobre la primera componente, por lo que $\pi(\sigma(x)) = \pi((x, e)) = x$. Por tanto, σ es una sección global.

Para la otra implicación, supongamos que P admite una sección global $\sigma : M \rightarrow P$, tal que $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in M$. Entonces, podemos escribir todo punto del fibrado como

$$p = \sigma(\pi(p))g_p,$$

donde g_p es el único elemento de G que nos lleva de $\sigma(\pi(p))$ a p . Sabemos que este elemento existe porque la acción de G es transitiva en las fibras y es único porque la acción es libre. Entonces, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : P &\rightarrow M \times G \\ p &\mapsto (\pi(p), g_p). \end{aligned}$$

Veamos que esta aplicación es un isomorfismo de fibrados principales, considerando como homomorfismo de grupos la aplicación identidad $id : G \rightarrow G$. La aplicación es trivialmente biyectiva porque podemos escribir $p = \sigma(\pi(p))g_p$. De hecho, tiene como inversa la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : M \times G &\rightarrow P \\ (x, g) &\mapsto \sigma(x)g. \end{aligned}$$

En efecto, $\Phi(\Psi(x, g)) = \Phi(\sigma(x)g) = (\pi(\sigma(x)g), g) = (\pi(\sigma(x)), g) = (x, g)$, mientras que por otro lado $\Psi(\Phi(p)) = \Psi(\pi(p), g_p) = \sigma(\pi(p))g_p = p$. Además, es fácil ver que Ψ es diferenciable porque σ es diferenciable y la multiplicación por un elemento de G también lo es. Por tanto, sólo queda ver que Φ es diferenciable. Para esto, como Ψ es diferenciable, por el teorema de la función inversa, existe una inversa local de Ψ que es diferenciable. La inversa de Ψ es Φ , por lo que Φ es un difeomorfismo local, y por ser biyectiva, es un difeomorfismo global. Por tanto, Φ es un isomorfismo de fibrados principales. $\square$

Ejemplo 2.8. *Algunos ejemplos de fibrados que admiten secciones globales son:*

1. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, es un fibrado trivial de grupo $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{S}^1$, como se ha mencionado anteriormente. Por lo tanto, admite una sección global. Por otro lado, antes también hemos hablado de otro fibrado principal, de mismo grupo estructural y base: la botella de Klein. Como se ha dicho antes, este fibrado no es isomorfo al trivial, pues de serlo también serían difeomorfas las variedades totales, el toro y la botella de Klein, y esto no puede ser porque uno es orientable y el otro no y por lo tanto no son ni espacios homeomorfos. Por lo tanto, la botella de Klein no admite secciones globales.
2. La esfera $\mathbb{S}^2$ sabemos que no es paralelizable, por lo que el fibrado de referencias lineales no admite secciones globales, y por lo tanto este fibrado no es trivial para la esfera. Por otro lado, las esferas $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^7$ son paralelizables, por lo que el fibrado de referencias lineales sobre estas esferas es trivial. Ninguna otra esfera es paralelizable, luego sus respectivos fibrados de referencias lineales no admiten secciones globales.

2.2. Fibración de Hopf

A lo largo la sección anterior hemos visto la definición y hemos ido explorando ejemplos de fibrados principales, además de las nociones de homomorfismos de fibrados principales y secciones, tanto locales como globales. Respecto a las secciones, hemos visto resultados importantes como las implicaciones de la existencia de sección global. Antes de continuar introduciendo conceptos más avanzados, creo que es interesante hacer un pequeño descanso y ver un ejemplo concreto de fibrado principal muy utilizado en la literatura, la fibración de Hopf.

Originalmente, Heinz Hopf no concibió esta construcción, en 1931, queriendo ver su estructura como un fibrado, mucho menos un fibrado principal, debido a que la primera definición de fibrado se debe a Whitney en 1935 y no se volverían un objeto de estudio en sí mismos hasta finales de la misma década. La motivación de Hopf era fundamentalmente topológica: quería entender mejor los grupos fundamentales de las esferas. Mientras que ya se conocía que el n -ésimo grupo fundamental de la n -esfera era trivial, $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \{e\}$, no se conocían bien los grupos fundamentales de orden superior, y Hopf estaba particularmente interesado en el caso de $\pi_3(\mathbb{S}^2)$.

En aquel entonces ya se conocían algunos grupos de orden superior, como podría ser $\pi_2(\mathbb{S}^1)$. Los grupos fundamentales de orden k se pueden definir como el siguiente conjunto:

$$\pi_k(X) = \{[f] : f : \mathbb{S}^k \rightarrow X\}$$

donde $[f]$ denota la clase de homotopía de la función f , esto es, decimos que f y g están en la misma clase si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times \mathbb{S}^k \rightarrow X$ con $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$. Para $k = 2$ y $X = \mathbb{S}^1$, como la circunferencia tiene como espacio recubridor universal a la recta real, que es un espacio contráctil, toda aplicación continua puede levantarse a la recta, donde existe una homotopía con la aplicación constante, y al proyectar de nuevo da otra homotopía con la aplicación constante ahora en la circunferencia. Por lo tanto, toda aplicación continua de la esfera en la circunferencia es nulhomótopa, y consecuentemente, el grupo fundamental es el trivial. Con el mismo argumento, las aplicación de cualquier esfera de dimensión mayor a 1 en la circunferencia son también nulhomótomas. No obstante, el caso de Hopf no era tan sencillo, incluso hoy en día no conocemos bien los grupos fundamentales de las esferas. Por eso, la idea de Hopf era encontrar ejemplos de aplicaciones continuas de la 3-esfera en la 2-esfera y ver si eran o no nulhomótomas. Viendo que la aplicación que da esta fibración no era homótoma a la aplicación constante, Hopf fue el primero en demostrar que el grupo fundamental de orden 3 de la 2-esfera no era trivial, $\pi_3(\mathbb{S}^2) \not\cong \{e\}$, y proporcionó así un generador para el grupo fundamental, que era, de hecho, isomorfo a $\mathbb{Z}$.

A lo largo de esta sección se irá introduciendo la fibración de Hopf mediante conceptos que ya hemos visto y acabaremos viendo algunas generalizaciones de este fibrado. Dicho esto, vamos con la construcción de la fibración de Hopf.

En la sección 1 hemos visto los espacios proyectivos reales como el espacio cociente de las órbitas de la acción de un grupo. La intuición detrás de esta construcción es que el espacio proyectivo es el conjunto de todas las rectas vectoriales que pasan por el origen. Esta definición, aunque es correcta, se puede generalizar a cuerpos más allá del de los números reales. Veámoslo con detenimiento.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideramos el espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{K}^{n+1}$ como $x \sim y$ si y solo si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Así, llamamos espacio proyectivo de dimensión n al espacio cociente dado por la relación de equivalencia $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} / \sim)$, que no es más que el conjunto de todas las rectas vectoriales que pasan por el origen de $\mathbb{K}^{n+1}$.

Centrémonos en el caso de dimensión $n = 1$ y tomando como cuerpo el de los números complejos $\mathbb{C}$. El espacio vectorial sería $\mathbb{C}^2$, y nuestro espacio proyectivo a considerar es la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{\text{rectas vectoriales complejas en } \mathbb{C}^2\}$. Los espacios proyectivos de dimensión n pueden ser vistos también como la unión del espacio afín de dimensión n y el espacio proyectivo de dimensión $n - 1$ que representa el hiperplano proyectivo de los puntos del infinito. Para el caso que nos atañe, daríamos la recta proyectiva compleja como $\mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$, donde P_∞ es el punto del infinito. Este espacio, a veces denotado también $\overline{\mathbb{C}}$, se suele conocer como el plano complejo extendido, plano complejo cerrado o como la esfera de Riemann. En un principio, la idea de ver esta construcción como una esfera puede ser algo confusa, pero es sencillo ver la conexión entre ambos conjuntos recordando la transformación de la esfera sin un punto en el plano complejo mediante la proyección estereográfica, y añadiendo ese punto se completa la esfera. Por lo tanto, tenemos que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \cup \{P_\infty\} \cong \mathbb{S}^2$. Se suele decir que la esfera de Riemann es la compactificación por un punto del plano complejo, pues añadiendo un punto se obtiene un espacio compacto de algo que previamente no lo era, análogamente pasa con la recta real y la circunferencia.

La fibración de Hopf viene dada precisamente por la aplicación cociente que asocia a cada punto de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ su clase de equivalencia en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dado que $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, y la 3-esfera está contenida en este espacio, tenemos una aplicación de proyección π de $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{S}^2$, restringiendo la aplicación a $\mathbb{S}^3$.

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ v &\mapsto [v]\end{aligned}$$

Antes de pasar a ver que esta estructura es efectivamente un fibrado principal, estaría bien ver cómo son realmente las fibras de esta proyección.

Supongamos que tenemos un punto $[v] \in \mathbb{S}^2$, entonces la fibra $\pi^{-1}([v])$ es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{S}^3$ que se proyectan sobre $[v]$. Esto es, como la clase está definida por la relación de equivalencia y tenemos que preservar que la norma de los puntos es 1, la fibra viene dada por el conjunto de todos los puntos de la forma λv con $\lambda \in \mathbb{C}$ y tal que $|\lambda v| = 1$. Sin embargo como v ya es de norma 1 por pertenecer a la esfera, tenemos que $|\lambda| = 1$, es decir, λ es un número complejo de módulo 1, y por lo tanto, $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Queda por lo tanto demostrado que las fibras de la proyección π son difeomorfas a circunferencias y por lo tanto, a falta de la prueba, tenemos la siguiente estructura de fibrado:

$$\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2.$$

En este caso, estamos viendo a $\mathbb{S}^3$ como un fibrado principal de grupo estructural $\mathbb{S}^1$ sobre el espacio base $\mathbb{S}^2$. Es un fibrado que aparece en muchos contextos en las Matemáticas, no necesariamente en el de los fibrados de forma exclusiva, e incluso en la física. Es también un ejemplo conocido de fibrados con fibras circunferencias, junto al trivial $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, a veces llamados $\mathbb{S}^1$ -fibrados o $U(1)$ -fibrados, que son un caso particular muy estudiado de fibrados principales, teniendo incluso teoremas de clasificación de fibrados de este tipo. Sin embargo, a pesar del interés que pueda despertar, no es el objetivo de este trabajo estudiar estos fibrados en profundidad.

Una vez hemos visto la construcción de la fibración de Hopf y nos hemos familiarizado un poco con su estructura, veamos paso a paso la prueba de que respeta la definición de fibrado principal. En primer lugar, debemos definir la acción de grupo que nos da la estructura de fibrado principal. En este caso, la acción de grupo más natural es que dado

un punto $p = (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3$, con $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$, y un elemento $g \in \mathbb{S}^1$, la acción de g sobre p sea la multiplicación de p por g , es decir, $R_g p = pg = ((z_0 g, z_1 g))$, como cabría esperar a partir de la justificación sobre la elección de la fibra.

La libertad de la acción es inmediata, pues si tomamos un punto $(z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3$, entonces $R_g(z_0, z_1) = (z_0 g, z_1 g)$ y si esto fuera igual a (z_0, z_1) , tendríamos que $g = 1$ ya que es la única forma de no alterar la norma y fase de un número complejo.

La transitividad de la acción es directa también. Tomamos dos puntos de la misma fibra, por definición de la clase de equivalencia, existe un $g \in \mathbb{S}^1$ tal que $p_2 = p_1 g$.

La trivialidad local, así como la diferenciabilidad de la aplicación proyección π pueden probarse usando coordenadas y escribiendo explícitamente la aplicación, aunque es una tarea laboriosa y se ha decidido dejar fuera del trabajo. La forma explícita de la aplicación de Hopf es la siguiente (Obtenida de [6], sección 1.1.4)

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto (y_0, y_1, y_2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} y_0 &= 2(x_0 x_2 + x_1 x_3), \\ y_1 &= 2(x_1 x_2 - x_0 x_3), \\ y_2 &= x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \end{cases}$$



Figura 2.2: Dos representaciones de la fibración de Hopf. A la izquierda, se muestran las fibras de los puntos marcados en la esfera, con el mismo color, obtenidos a partir de la proyección estereográfica. A la derecha, se muestra un modelo hecho con argollas de parte de la fibración de Hopf, donde cada argolla representa una fibra de la proyección. Imágenes obtenidas de [10] y [11], respectivamente.

Es razonable que surja la pregunta de si este fibrado que hemos construido es, a fin de cuentas, un simple producto cartesiano de $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^1$, un fibrado trivial. La respuesta es que no, y la razón es que si así lo fuera, tendríamos que existe un isomorfismo de fibrados principales entre ambos fibrados, lo que implicaría que ambos fibrados son difeomorfos y, en particular, homeomorfos. Sin embargo, el grupo fundamental de $\mathbb{S}^3$ es trivial $\pi_1(\mathbb{S}^3) \cong \{e\}$, mientras que el de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ es $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \cong \{e\} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Como el grupo fundamental es un invariante topológico, debe preservarse bajo homeomorfismos, por lo que no puede existir un homeomorfismo entre ambos espacios y mucho menos un isomorfismo de fibrados.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^3 & \xrightleftharpoons[G]{F} & \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \\
 & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi_2 \\
 & & \mathbb{S}^2
 \end{array}$$

La idea de Hopf, por su sencillez y genialidad, inspiró algunas generalizaciones de la fibración de Hopf. Para esta construcción hemos tomado como cuerpo el de los números complejos, y como espacio vectorial $\mathbb{C}^2$. Lo mismo podríamos haber hecho si hubiéramos elegido el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ y la construcción sería la misma, pero el espacio proyectivo sería $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^2 / \sim) \cong \mathbb{S}^1$, dando una proyección de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ y una fibra $\mathbb{S}^0$, aceptando variedades de dimensión 0. De manera análoga para los cuaterniones $\mathbb{H}$ y para los octoniones $\mathbb{O}$, se obtienen las dos fibraciones de Hopf restantes. Dando lugar a la siguiente familia de fibraciones de Hopf:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{S}^0 &\hookrightarrow \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \\
 \mathbb{S}^1 &\hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \\
 \mathbb{S}^3 &\hookrightarrow \mathbb{S}^7 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^4 = \mathbb{P}^1(\mathbb{H}), \\
 \mathbb{S}^7 &\hookrightarrow \mathbb{S}^{15} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^8 = \mathbb{P}^1(\mathbb{O}).
 \end{aligned}$$

Quitando el último de todos porque $\mathbb{S}^7$ no es grupo de Lie, todos los demás son fibrados principales (viendo para el primero $\mathbb{S}^0$ como grupo de Lie discreto). Esta familia de fibrados cumple que todos ellos son esferas que se fibran sobre esferas y con fibras esferas; y Adams demostró que son los únicos fibrados no triviales que cumplen esta propiedad (Ver [1], Sección 3.1).

Capítulo 3

Variedades Homogéneas

La idea intuitiva de las variedades homogéneas se puede entender bien con un ejemplo sencillo. Consideremos la esfera en $\mathbb{R}^3$, los puntos sobre la esfera son indistinguibles entre sí. Rotar la esfera no la cambia y nos permite ir de un punto a otro. Todos sus puntos son en cierto sentido equivalentes, y tienen la misma apariencia y estructura, es simétrica. El concepto de variedad homogénea busca formalizar esta idea de que todos los puntos de una variedad son equivalentes entre sí. Veremos que estas variedades vienen acompañadas de un grupo de Lie que actúa sobre ellas de forma transitiva, es decir, que para cualquier par de puntos de la variedad, existe un elemento del grupo, un movimiento, que lleva un punto en el otro. En este sentido, las variedades homogéneas no tienen puntos privilegiados y son, como bien dice el nombre, homogéneas en todos sus puntos.

Para esta sección se ha seguido principalmente la referencia [8].

3.1. Definición y Ejemplos

Aunque la intuición detrás de las variedades homogéneas es clara, es necesario formalizarla. Para ello, partiremos de la definición de subgrupo de Lie, e iremos construyendo la estructura de variedad homogénea a partir del cociente de grupos de Lie. Terminaremos demostrando que las variedades construidas de esta manera siguen la intuición geométrica de homogeneidad que hemos visto antes.

Definición 3.1. (H, φ) es un **subgrupo de Lie** de un grupo de Lie G si:

1. H es un grupo de Lie.
2. H es una subvariedad de G .
3. φ es un homomorfismo de grupos.

Diremos que H es un subgrupo cerrado de G si la imagen de H por φ es un subconjunto cerrado de G .

Podemos considerar como ejemplo el conjunto de los números reales con la suma $(\mathbb{R}, +)$, este es el grupo de Lie de las traslaciones en la recta real. Además, podemos verlo dentro, como subvariedad, de $\mathbb{R}^2$ que también es un grupo de Lie, luego podemos preguntarnos si el primero es un subgrupo de Lie del segundo. Para ello, es necesario dar una aplicación φ con la que se cumpla la definición anterior. Podemos tomar, por ejemplo, la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, 0).\end{aligned}$$

Esta aplicación es diferenciable y es un homomorfismo de grupos, pues si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Por lo tanto, $((\mathbb{R}, +), \varphi)$ es un subgrupo de Lie de $(\mathbb{R}^2, +)$. Sin embargo, también podemos tomar las aplicaciones φ_1 y φ_2 dadas por

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (0, x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, x).\end{aligned}$$

Ambas aplicaciones son diferenciables y son homomorfismos de grupos, y también cumplen la definición de subgrupo de Lie. Por lo tanto, queda claro que no hay una única forma de dar la estructura de subgrupo de Lie para un mismo grupo de Lie. No obstante, también hay que recalcar que todas estas subvariedades son en cierto sentido “equivalentes”, y es que todas ellas son difeomorfismos entre sí, como subvariedad. Así, nos referiremos a subgrupos de Lie como equivalentes si existe un par (α, β) , con $\alpha : H \rightarrow H'$ y $\beta : G \rightarrow G$ dos isomorfismos de grupos de Lie, tal que $\beta \circ \varphi' \circ \alpha = \varphi$, donde φ y φ' son las aplicaciones de inclusión de H y H' en G . En este caso concreto tenemos que partimos en los tres casos del mismo grupo de Lie, y que las aplicaciones de inclusión son las que cambian, dando lugar a variedades difeomorfismos entre sí. Por lo tanto, podemos decir que $((\mathbb{R}, +), \varphi)$, $((\mathbb{R}, +), \varphi_1)$ y $((\mathbb{R}, +), \varphi_2)$ son subgrupos de Lie equivalentes de $(\mathbb{R}^2, +)$ mediante los siguientes pares de aplicaciones (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , donde las aplicaciones α_1 y α_2 son las identidades en ambos casos y las aplicaciones β_1 y β_2 son las siguientes:

$$\begin{aligned}\beta_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, x+y).\end{aligned}$$

Se puede comprobar que se cumple en ambos casos que $\beta_i \circ \varphi_i \circ \alpha_i = \varphi$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto, todas estas estructuras son equivalentes bajo esta relación. Cuando no haya ambigüedad, nos referiremos a (H, φ) o cualquier otro subgrupo equivalente como H simplemente.

Teorema 3.2. *Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G , entonces H es un subgrupo de Lie de G .*

La demostración de este teorema requiere la introducción de la aplicación exponencial y un desarrollo más profundo de la teoría de álgebras de Lie, por lo que no se incluirá aquí. Esta prueba junto a toda la teoría previa necesaria puede encontrarse en [8] (Teorema 3.20).

Teorema 3.3. *Sean H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G y $G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de clases laterales a izquierda de H en G . Entonces G/H define una única estructura de variedad diferenciable tal que:*

1. *La proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ tal que $\pi(g) = gH$ es diferenciable.*
2. *Existen secciones locales de G/H en G , es decir, para cada $gH \in G/H$, existe un entorno U de gH y una aplicación diferenciable $\sigma : U \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$.*

Demostración. La demostración de este teorema es un poco técnica, pero la idea es la siguiente. Primero, debemos dotar de una topología al conjunto de clases laterales, G/H . Después, hay que comprobar que con tal topología G/H es una variedad diferenciable, esto es, que es un espacio Hausdorff, II.A.N. y localmente euclídeo. Esto nos daría la existencia de la estructura de variedad y la aplicación π . Por último, hay que comprobar la unicidad, salvo difeomorfismo, de la estructura de variedad diferenciable en G/H .

La topología más natural en este tipo de construcciones es la topología cociente, que se define como la topología más fina tal que la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ es continua. De esta forma, un conjunto $U \in G/H$ será abierto en G/H si y sólo si $\pi^{-1}(U) \in G$ es abierto en G . Con esta topología, π es continua por definición, y es además abierta, pues si W es abierto en G ,

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \{g \in G : \pi(g) = gH \in \pi(W)\} = \{g \in W : \exists h \in H : gh \in W\} = \bigcup_{h \in H} Wh,$$

que es abierto por ser unión de abiertos (Wh es abierto porque es la imagen de W por la acción de un elemento de G , que es un difeomorfismo). Por lo tanto, $\pi(W)$ es abierto en G/H y π es abierta.

Ahora, para ver que G/H es Hausdorff, obsérvese que el conjunto $R \subseteq G \times G$ dado por $R = \{(g_1, g_2) \in G \times G : \exists h \in H : g_1h = g_2\}$ es cerrado en $G \times G$, pues se tiene que $R = \alpha^{-1}(H)$, donde $\alpha : G \times G \rightarrow G$ es la aplicación $\alpha(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2$ que es la aplicación diferenciable que da la estructura de grupo de Lie a G a partir de la definición 1.11. Ahora, si tomamos dos puntos distintos de G/H , g_1H y g_2H , entonces $(g_1, g_2) \notin R$, y por tanto, $(g_1, g_2) \in G \times G \setminus R$ que es un conjunto abierto por ser R cerrado. Por lo tanto, existe un entorno básico $U \times V$ de $G \times G \setminus R$ tal que $(U \times V) \cap R = \emptyset$, y como $G \times G$ es Hausdorff, podemos tomar U y V entornos abiertos disjuntos de g_1 y g_2 , respectivamente, tales que $g_1 \notin V$ y $g_2 \notin U$. Con esto, tendríamos que $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son abiertos disjuntos de G/H con $g_1H \in \pi(U)$ y $g_2H \notin \pi(V)$, y viceversa. Por lo tanto, G/H es Hausdorff. Comprobar que G/H cumple el II Axioma de Numerabilidad es sencillo, pues como G es un grupo de Lie, y por tanto variedad diferenciable, tiene una base numerable de la topología, y la base numerable de G/H se obtiene como la imagen de la base numerable de G por la proyección π .

La localidad euclídea de G/H es el punto más delicado de la demostración. Para hacerlo, se van a introducir la noción de distribución y algún resultado relacionado con estas, como el Teorema de Frobenius, que no se demostrarán, pero pueden encontrarse con todo detalle en la sección 1 de [8]. Dada M una variedad diferenciable y k un número natural con $0 < k < n = \dim(M)$, una distribución de dimensión k es una familia $\mathcal{D} = \{D_x \subset T_x M : x \in M\}$, donde para cada $x \in M$, D_x es un subespacio vectorial de dimensión k del espacio tangente $T_x M$ y tal que para cada $x \in M$, D_x está generado por k campos de vectores diferenciables linealmente independientes. Una distribución se dice involutiva si para cada $X, Y \in \mathcal{D}$, entonces $[X, Y] \in \mathcal{D}$. Y una distribución se dice completamente integrable si para cada $x \in M$, existe una subvariedad integral de M que contenga a $\mathcal{D}$, esto es, una subvariedad N de M tal que para cada $x \in N$, $T_x N = D_x$. El Teorema de Frobenius nos asegura que una distribución es completamente integrable si y solo si es involutiva. No sólo eso, también nos asegura que para todo $m \in M$ existe un entorno abierto U de m y una carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $x(U)$ es un cubo abierto en $\mathbb{R}^n$ y $x(m) = 0 \in \mathbb{R}^n$, con funciones coordenadas $x_1, \dots, x_n$ tales que los cortes (*slices*, “rebanadas” en inglés, también se suelen llamar placas) de la forma

$$x_i = \text{constante}, \quad i = k + 1, \dots, n,$$

son subvariedades integrales de $\mathcal{D}$. Además, por cada punto pasa una única subvariedad integral conexa. Un ejemplo sencillo es ver $\mathbb{R}^3$ como $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, y considerar la distribución dada por los planos. En cada punto el espacio tangente es como todo el espacio, pero para cada punto hay un plano contenido en ese espacio. Para cada punto se puede tomar un sistema de coordenadas (x, y, z) centradas en ese punto, la distribución está generado por los puntos $(x, y, 0)$, y elegir un plano es elegir un valor constante de z .

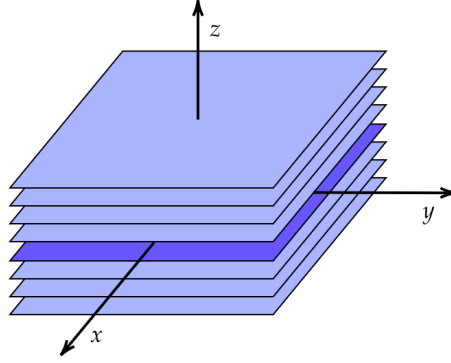


Figura 3.1: Foliación de $\mathbb{R}^3$ con planos, difeomorfos a $\mathbb{R}^2$. Se ha enfatizado la placa que pasa por el origen de coordenadas.

Continuemos con la demostración del teorema. Como H es un subgrupo cerrado de G , entonces sabemos que H es un subgrupo de Lie de G por el Teorema 3.2, supongamos $\dim(G) = d$ y $\dim(H) = d - k$. Por lo tanto, consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ asociada a H , recordemos que es isomorfo como espacio vectorial al espacio tangente $T_e H$, y que por lo tanto está contenido en $T_e G$. Definimos una distribución generada por esta álgebra de Lie, dada por traslación del punto mediante la acción de G sobre sí mismo, es decir, para cada $g \in G$, definimos la distribución $\mathcal{D} = \{D_g \subset T_g G : D_g = (L_g)_*(\mathfrak{h})\}$. Esta distribución es involutiva, pues como $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie, entonces para $X_e, Y_e \in \mathfrak{h} \cong T_e H$, tenemos que $[X_e, Y_e] \in \mathfrak{h}$, y por lo tanto, $[X_g, Y_g] = (L_g)_*([X_e, Y_e]) \in D_g$ para todo $g \in G$. Como es involutiva, por el Teorema de Frobenius, sabemos que existen un entorno abierto V de $e \in G$ y una carta $x : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $x(e) = 0 \in \mathbb{R}^d$. Y, como existe una variedad integral que pasa por e , y H es una variedad que contiene a e y tal que el espacio tangente $T_e H$ coincide con el valor de la distribución en e , entonces en un entorno suficientemente pequeño, tal que se cumpla la condición de conexión, H debe ser esa subvariedad integral, por unicidad de la variedad integral. Por lo tanto, podemos elegir V lo suficientemente pequeño para que $S_0 := V \cap H$ sea el corte que pasa por e , y de modo que S_0 sean los puntos tales que $x_i = 0$ para $i = n - k + 1, \dots, n$, dentro de ese entorno V . Recordemos que S_0 es la única placa que pasa por e , cualquier otra placa tiene otra “altura” en este sistema de referencias.

Vamos a definir ahora otros dos entornos de e tales que sus imágenes sean cubos también, y que estén contenidos en V . Sean $V_1 = x^{-1}((-\epsilon, \epsilon)^d)$ y $U = x^{-1}((-\delta, \delta)^{n-k})$, donde ϵ y δ son números reales positivos suficientemente pequeños. Queremos que estos sean conjuntos tales que $V_1 V_1 \subset V$ y $U^{-1} U \subset V_1$, esto es, que V_1 y U representen los productos e inversas de elementos cercanos a e . Podemos elegirlos de esta forma porque las operaciones $(g, h) \mapsto gh$ y $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ son diferenciables, y por lo tanto, continuas. Luego, podemos elegir ϵ y δ suficientemente pequeños para que se cumplan estas inclusiones.

Veamos que cada rebanada se corresponde a una clase lateral a izquierda. Sean $\sigma, \tau \in U$, tales que están en la misma clase módulo H , es decir, $\sigma \in \tau H$. Entonces, $\tau^{-1} \sigma \in H$, y

como σ y τ están en U , entonces $\sigma^{-1}\tau \in U^{-1}U \subset V_1$. Por lo tanto, $\tau^{-1}\sigma \in V_1 \cap H$, y en particular, $\tau^{-1}\sigma \in V_1 \cap S_0$. Por lo tanto, $\sigma \in \tau(V_1 \cap S_0)$. Ahora, como la distribución es invariante a izquierda por construcción y S_0 es la placa que pasa por e , y por tanto variedad integral contenida en el entorno V , entonces $V_1 \cap S_0$ es una placa de la distribución en V_1 , y al trasladarla por τ , $\tau(V_1 \cap S_0)$ es una placa de la distribución en τV_1 . Además, como V_1 es la contraimagen de un cubo, y S_0 es un corte de V , entonces $V_1 \cap S_0$ es conexo, y su traslación por τ también lo es. Entonces, la subvariedad integral es única y $\tau(V_1 \cap S_0)$ está en una única placa de la distribución y σ y τ pertenecen a la misma placa de la distribución. Recíprocamente, si σ y τ pertenecen a la misma placa de la distribución, entonces $\sigma \in \tau(V_1 \cap S_0)$, y como $S_0 \subset H$, entonces $V_1 \cap S_0 \subset H$, y por lo tanto, $\sigma \in \tau H$ y σ y τ pertenecen a la misma clase lateral a izquierda. Nótese que esta propiedad sólo puede asegurarse dentro de U , entonces nos interesa especialmente U como entorno abierto de e . A partir de ahora trabajaremos con la localización de la carta x a U , $x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, aunque por conveniencia, seguiremos escribiendo x para referirnos a esta localización.

Llamamos $S \subset x(U)$ a los puntos tales que cumplen $x_i = 0$ para $i = k + 1 \dots, d$. S es un corte del cubo $x(U)$. Y definimos el siguiente homeomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{-1} : S &\rightarrow \pi(U) \\ s &\mapsto \pi \circ x^{-1}|_S(s). \end{aligned}$$

Ver que $\tilde{x}^{-1}$ es un homeomorfismo es sencillo, para empezar es continua y abierta por serlo tanto π como $x^{-1}|_S$. Además, es inyectiva, pues si $\tilde{x}^{-1}(s_1) = \tilde{x}^{-1}(s_2)$, entonces $x^{-1}|_S(s_1)$ y $x^{-1}|_S(s_2)$ están en la misma clase módulo H , y por lo que hemos visto antes también pertenecen a la misma placa integral. Ahora, por cómo hemos definimos S , S es un transversal local a las placas de la distribución, que corta una única vez a cada una. Como s_1 y s_2 pertenecen a S y sus preimágenes por $x^{-1}|_S$ son iguales, entonces son el mismo punto. Para ver la sobreyectividad, basta con ver que para cada clase lateral $gH \in \pi(U)$, existe un punto $g \in U$ que está en una única placa integral, y por lo tanto, existe un punto $s \in S$ tal que $x^{-1}|_S(s)$ pertenezca a la misma placa que g , y que al proyectarlo por π nos dé la clase lateral gH . Por lo tanto, $\tilde{x}^{-1}$ es un homeomorfismo.

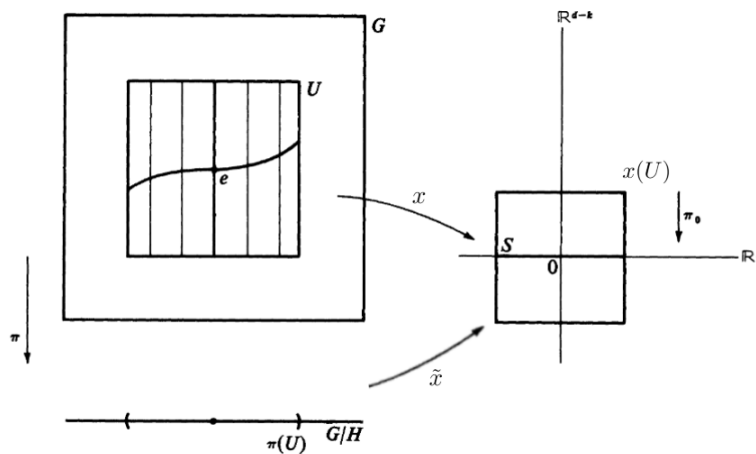


Figura 3.2: Esquema de la construcción de la carta $\tilde{x}$ sobre el cociente G/H . Imagen tomada de [8] y ajustada para coincidir en notación.

La inversa de esta aplicación $\tilde{x}^{-1}$ es la aplicación

$$\tilde{x} : \pi(U) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^k,$$

que será una carta sobre $\pi(U)$, pudiendo dar un sistema de coordenadas centrado en eH en este entorno. Podemos obtener el resto de cartas, para cualquier punto $\tau H \in G/H$, mediante traslación por la acción de G . Si $L_\sigma : G \rightarrow G$ es la acción a izquierda de $\sigma \in G$, entonces tenemos un homeomorfismo inducido en G/H por L_σ , que es

$$\begin{aligned}\tilde{L}_\sigma : G/H &\rightarrow G/H \\ \tau H &\mapsto L_\sigma(\tau H) = \sigma\tau H.\end{aligned}$$

Ahora, para cada $\sigma H \in G/H$, definimos la carta

$$\tilde{x}_{\sigma H} = \tilde{x} \circ \tilde{L}_{\sigma^{-1}}|_{\tilde{L}_\sigma(\pi(U))} : \tilde{L}_\sigma(\pi(U)) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^k.$$

Esta carta nos da un sistema de coordenadas centrado en σH en el entorno $\tilde{L}_\sigma(\pi(U))$. Esto demuestra que G/H es localmente euclídeo, pues para cada punto $gH \in G/H$, existe un entorno abierto $\tilde{L}_\sigma(\pi(U))$ de gH y una carta $\tilde{x}_{\sigma H}$ tal que el entorno es homeomorfo al abierto $S \subset \mathbb{R}^k$. Consideramos entonces la siguiente familia y veamos que es un atlas diferenciable sobre G/H :

$$\mathcal{A} = \{\tilde{x}_{\sigma H} : \sigma \in G\}.$$

Por todo lo discutido hasta ahora, los dominios de las cartas de $\mathcal{A}$ cubren todo G/H , luego sólo tenemos que comprobar que los cambios de carta son diferenciables. Sean $\sigma_1 H, \sigma_2 H \in G/H$ tales que tienen entornos asociados no disjuntos, $\tilde{L}_{\sigma_1}(\pi(U)) \cap \tilde{L}_{\sigma_2}(\pi(U)) \neq \emptyset$. Llamamos V_i a la imagen por $\tilde{x}_{\sigma_i H}$ de esta intersección, entonces hay que probar que la aplicación

$$\tilde{x}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{x}_{\sigma_1 H}^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

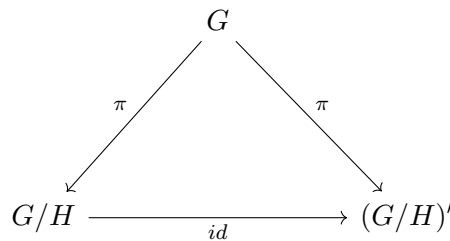
es C^∞ . Para ello, tomamos $t \in V_1$, y observamos que por definición de V_1 , $\tilde{L}_{\sigma_2^{-1}} \circ \tilde{L}_{\sigma_1} \circ \tilde{x}^{-1}(t) \in \pi(U)$, porque si $t \in V_1$, entonces $\tilde{x}^{-1}(t) \in \pi(U) \cap \tilde{L}_{\sigma_2^{-1}\sigma_1}(\pi(U))$. Por lo tanto, debe existir un elemento $h \in H$ tal que $\sigma_2^{-1}\sigma_1\tilde{x}^{-1}(t)h \in U$. Como la aplicación es continua en t , para todo entorno U' de $\sigma_2^{-1}\sigma_1\tilde{x}^{-1}(t)h$ debe existir un entorno abierto W de t tal que $\sigma_2^{-1}\sigma_1\tilde{x}^{-1}(W)h \subset U'$. Podemos elegir $U' = U$, y por lo tanto, sólo nos queda probar que $\tilde{x}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{x}_{\sigma_1 H}^{-1}|_W$ es diferenciable. Sin embargo, podemos expresar esta aplicación como la siguiente cadena de composiciones de aplicaciones diferenciables:

$$\tilde{x}_{\sigma_2 H} \circ \tilde{x}_{\sigma_1 H}^{-1}|_W = \pi_0 \circ x \circ R_h \circ L_{\sigma_2^{-1}\sigma_1} \circ x^{-1}|_W,$$

donde $\pi_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ es la proyección canónica de $x(U)$ en S (Ver Figura 3.2). De esta forma, el cambio de carta es diferenciable en V_1 , y concluimos que $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable sobre G/H . Por lo tanto, G/H es una variedad diferenciable.

Esta estructura diferenciable hace directamente que la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ sea diferenciable, pues, restringida a un conjunto abierto de la forma $L_g U$, es la composición de aplicaciones $\tilde{x}_{gH}^{-1} \circ \pi_0 \circ x \circ L_{g^{-1}}|_{L_g U}$, y además $L_g \circ x^{-1} \circ \tilde{x}_{gH}^{-1}$ es una sección local de G/H en G en el entorno $\tilde{L}_g(\pi(U))$ de gH .

Finalmente, sólo falta por probar la unicidad de la estructura de variedad diferenciable en G/H . Supongamos que existe otra estructura de variedad diferenciable $(G/H)'$ y tal que se cumpla que π es diferenciable y que existen secciones locales de π en G .



Entonces, como π es submersión, $id : G/H \rightarrow (G/H)'$ es diferenciable porque se puede escribir como la composición de $\pi : G \rightarrow (G/H)'$ con una sección local $\sigma : G/H \rightarrow G$, y análogo para su inversa, luego son difeomorfos. $\square$

Este resultado nos da por lo tanto una condición suficiente para que el cociente de un grupo de Lie por un subgrupo sea una variedad diferenciable. Nos da además algunas propiedades de la aplicación cociente. Este tipo de variedades que son cocientes de grupos de Lie son muy interesantes y constituyen un objeto de estudio en sí mismos. Veremos también que los grupos de Lie que hemos visto hasta ahora son también este tipo de variedades. Introducimos por lo tanto la siguiente definición:

Definición 3.4. Se llaman variedades homogéneas a las variedades de la forma G/H , donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G .

Proposición 3.5. Bajo las condiciones del Teorema 3.3, dada una aplicación diferenciable entre variedades $f : G \rightarrow X$, existe una y solo una aplicación diferenciable $\tilde{f} : G/H \rightarrow X$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Aún más, f es diferenciable si y solo si $\tilde{f}$ es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ G/H & & \end{array}$$

Demostración. Un resultado de topología general nos dice que si $f : G \rightarrow X$ es continua, entonces existe una única aplicación $\tilde{f} : G/H \rightarrow X$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$ que sea continua. Sólo falta ver que $\tilde{f}$ es diferenciable si y solo si f es diferenciable.

La implicación de izquierda a derecha es inmediata, pues si $\tilde{f}$ es diferenciable, entonces $f = \tilde{f} \circ \pi$ es la composición de dos aplicaciones diferenciables, y por lo tanto, también es diferenciable. Para la otra implicación, supongamos que f es diferenciable. Entonces, por el teorema de la aplicación cociente, $\tilde{f}$ existe y es única, y además es continua. Para ver que es diferenciable, basta con ver que para cada punto $gH \in G/H$, existe un entorno abierto U de gH y una aplicación $\sigma_U : U \rightarrow G$ que es una sección local de la proyección π tal que $\tilde{f}|_U = \tilde{f} \circ \pi \circ \sigma_U = f \circ \sigma_U$. Como $\tilde{f}|_U$ es la composición de aplicaciones diferenciables, es diferenciable localmente para todo punto, y por lo tanto, $\tilde{f}$ es diferenciable en G/H . $\square$

Ejemplo 3.6. Algunos ejemplos de variedades homogéneas son:

1. La esfera $\mathbb{S}^2$. Como hemos visto en el apartado sobre la fibración de Hopf, la esfera se puede escribir como el cociente de $\mathbb{S}^3$, que es un grupo de Lie, por la circunferencia $\mathbb{S}^1$, que es un subgrupo cerrado de $\mathbb{S}^3$. Para ver que es un subgrupo cerrado, basta ver que la circunferencia son los puntos de $\mathbb{S}^3$ que tienen las coordenadas $x_3 = x_4 = 0$, por ejemplo, es claramente un grupo de Lie en sí mismo, y es cerrado porque $\mathbb{S}^1 = F^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^3$, donde $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, que es una función continua, luego su preimagen por un cerrado es cerrado, luego $\mathbb{S}^1$ un cerrado del subespacio $\mathbb{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto, la 2-esfera es una variedad homogénea, y de hecho su aplicación de proyección $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ es precisamente la proyección de la fibración de Hopf que hemos visto antes.
2. Más generalmente, las esferas $\mathbb{S}^n$ son variedades homogéneas, pues se pueden escribir como el cociente $O(n+1)/O(n)$, donde $O(n+1)$ y $O(n)$ son los grupos ortogonales de dimensiones $n+1$ y n , respectivamente. Veamos esto con detenimiento. Recordemos

que el grupo ortogonal de dimensión n es el grupo de matrices ortogonales de orden n , es decir, las matrices $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A^\top A = I_n$, y que como consecuencia vimos que preservan las bases ortonormales. En particular, las matrices ortogonales transforman vectores de norma 1 en vectores de norma 1, y por lo tanto, las matrices ortogonales de orden $n+1$ actúan sobre la esfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} O(n+1) \times \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ (A, v) &\mapsto Av. \end{aligned}$$

Además actúa transitivamente. Esto se debe a que si $v_1 \in \mathbb{S}^n$, entonces sea el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que v_1 es el primer vector. Entonces podemos escribir esa base en función de la base canónica de la siguiente forma:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ji} e_j,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes de la base ortonormal en la base canónica. Podemos definir la matriz $A \in O(n+1)$ cuyos coeficientes son precisamente estos a_{ij} , y la transitividad se debe a que dados $v, w \in \mathbb{S}^n$, entonces existen matrices ortogonales A y B tales que $v = Ae_1$ y $w = Be_1$, y por lo tanto, $w = BA^{-1}v$. Esto nos permite definir la siguiente aplicación diferenciable:

$$\begin{aligned} f : O(n+1) &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ A &\mapsto Ae_1 \end{aligned}$$

La aplicación es además sobreyectiva, por la transitividad de la acción. El núcleo de la aplicación f es el conjunto de matrices ortogonales que dejan fijo el vector e_1 , es decir, $\ker(f) = \{A \in O(n+1) : Ae_1 = e_1\}$. Los elementos de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{A} \in O(n)$ están claramente en el núcleo de f , veamos que también se cumple el otro contenido y por lo tanto $\ker(f) \cong O(n)$. Si $A \in O(n+1)$ y $Ae_1 = e_1$, como $e_1 = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j1} e_j$, tenemos que $a_{11} = 1$ y $a_{j1} = 0$ para todo $j \neq 1$. Como A es ortogonal, tenemos que $A^\top A = I_{n+1}$, y por lo tanto, $\sum_{j=1}^{n+1} a_{1j}^2 = 1$, y como $a_{11} = 1$, tenemos que $a_{1j} = 0$ para todo $j \neq 1$. Por lo tanto, A es de la forma descrita arriba, luego $O(n) \cong \ker(f) \subset O(n+1)$. $O(n)$ es un subgrupo cerrado de $O(n+1)$, pues es cerrado en $\mathbb{R}^{n^2}$ y este a su vez en $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$. Por el Teorema 3.3, tenemos que $O(n+1)/O(n)$ es una variedad diferenciable (homogénea), y además, la aplicación cociente $\pi : O(n+1) \rightarrow O(n+1)/O(n)$ es una submersión.

$$\begin{array}{ccc} O(n+1) & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ O(n+1)/O(n) & & \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos una aplicación diferenciable f y una aplicación cociente π , luego sabemos que existe una aplicación diferenciable $\tilde{f} : O(n+1)/O(n) \rightarrow \mathbb{S}^n$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$, que además es biyectiva. Por lo tanto, por el teorema de la función inversa, $\tilde{f}$ es un difeomorfismo local, y como es biyectiva, es un difeomorfismo global. Por lo tanto, $\mathbb{S}^n \cong O(n+1)/O(n)$. Con un razonamiento similar, podemos ver que $\mathbb{S}^n \cong SO(n+1)/SO(n)$. El caso con $n = 1$ es el que se ha comentado al principio del trabajo, y es que $\mathbb{S}^1 \cong SO(2)/SO(1)$, y $SO(1) \cong \{1\}$, luego $\mathbb{S}^1 \cong SO(2)$.

3. Los espacios proyectivos $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. La idea es esencialmente la misma. En este caso, veremos como el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ se puede escribir como el cociente $SO(n+1)/O(n)$. Recordemos que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es el conjunto de rectas a través del origen en $\mathbb{R}^{n+1}$, y que se puede identificar con el cociente de la esfera $\mathbb{S}^n$ por la relación de equivalencia que identifica puntos antipodales. Tenemos una proyección natural al conjunto de clases $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, que dotando al espacio cociente de la topología final, es continua. Podemos restringir esta proyección al conjunto de puntos de la esfera $\mathbb{S}^n$, que constituye un recubrimiento de doble hoja del espacio proyectivo. Mediante cartas homogéneas, podemos dotar al espacio proyectivo de una estructura de variedad diferenciable de modo que la proyección p también sea un difeomorfismo local. De esta forma, como el grupo $SO(n+1)$ actúa sobre la esfera $\mathbb{S}^n$, se induce una aplicación diferenciable del grupo $SO(n+1)$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{f} : SO(n+1) &\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto [Ae_1] = p(f(A)), \end{aligned}$$

donde f es la aplicación definida en el anterior ejemplo, pero para el caso de $SO(n+1)$. Esta aplicación es también sobreyectiva, pues lo es f , y por tanto lo es su composición con la aplicación cociente p . El núcleo de la aplicación $\bar{f}$ es el conjunto de matrices ortogonales que dejan fijo el punto proyectivo $[e_1]$, es decir, los que llevan el vector e_1 a sí mismo o a su opuesto, $-e_1$. Estos son los elementos de $SO(n+1)$ que son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \det(\tilde{A}) & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

con $\tilde{A} \in O(n)$. De la misma forma que antes se prueba que el núcleo no sólo contiene a los elementos de esta forma sino que $O(n) \cong \ker(\bar{f}) \subset SO(n+1)$. Como $O(n)$ es un subgrupo cerrado de $SO(n+1)$, por el Teorema 3.3, tenemos que $SO(n+1)/O(n)$ es una variedad diferenciable, y además, la aplicación cociente $\pi : SO(n+1) \rightarrow SO(n+1)/O(n)$ es una submersión. Por lo tanto, existe una aplicación diferenciable $\tilde{\tilde{f}} : SO(n+1)/O(n) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tal que $\bar{f} = \tilde{\tilde{f}} \circ \pi$, que es biyectiva, y por lo tanto, un difeomorfismo global, por el teorema de la función inversa. Por lo tanto, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong SO(n+1)/O(n)$.

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{f} & \downarrow p \\ SO(n+1)/O(n) & \xrightarrow{\tilde{\tilde{f}}} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Como se puede observar, justificar las estructuras de variedad homogénea de los ejemplos anteriores, aunque no es excesivamente complicado, es desde luego laborioso, más aún en un caso general. El siguiente resultado general nos da una forma de ver que una cierta variedad es homogénea sin necesidad de entrar en detalles sobre la estructura que la define.

Proposición 3.7. *Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie que actúa sobre M de forma transitiva. Entonces, dado un punto $x \in M$, el cociente $G/\text{stab}(x)$ es difeomorfo a M , donde $\text{stab}(x)$ denota el estabilizador de x en G .*

Demostración. Recordemos que el estabilizador de un punto $x \in M$ es el conjunto de todos los elementos de G que dejan fijo a x , es decir, $\text{stab}(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Para probar la proposición, basta con ver que el cociente $G/\text{stab}(x)$ es como la órbita de x por la acción de G y que el estabilizador de x es un subgrupo cerrado de G . Consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow \mathcal{O}_G(x) \subseteq M \\ g &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Esta aplicación es diferenciable, no es más que la acción de G sobre M , restringida al conjunto $G \times \{x\}$. Además, es sobreyectiva, pues la imagen de f es precisamente la órbita de x . El núcleo de f es el conjunto de elementos de G que dejan fijo a x , esto es, $\ker(f) = \{g \in G : gx = x\} = \text{stab}(x)$. Por lo tanto, f induce una aplicación biyectiva $\tilde{f} : G/\text{stab}(x) \rightarrow \mathcal{O}_G(x)$, dada por $\tilde{f}(g\text{stab}(x)) = gx$. Como tal, no se puede hablar de diferenciable de $\tilde{f}$, pues el cociente $G/\text{stab}(x)$ no tiene por qué tener una estructura de variedad diferenciable. Sin embargo, si $\text{stab}(x)$ es un subgrupo cerrado de G , entonces por el Teorema 3.3, $G/\text{stab}(x)$ tiene una estructura de variedad diferenciable, la aplicación cociente $\pi : G \rightarrow G/\text{stab}(x)$ es diferenciable y es una submersión, y por lo tanto, la aplicación $\tilde{f}$ es diferenciable. Además, por el teorema de la función inversa, $\tilde{f}$ es un difeomorfismo local, y como es biyectiva, es un difeomorfismo global. Veamos entonces que $\text{stab}(x)$ es efectivamente un subgrupo cerrado de G .

La clausura se da directamente por ser el núcleo de la aplicación f , $\text{stab}(x) = f^{-1}(x)$, que es cerrado por ser f continua y $\{x\}$ cerrado en M , por ser M Hausdorff (es suficiente con T_1). Y la estructura de grupo también es inmediata, pues si $g_1, g_2 \in \text{stab}(x)$, entonces $g_1x = x$ y $g_2x = x$, y por lo tanto, $g_1x = g_2x$, luego $g_2^{-1}g_1x = x$, y $g_2^{-1}g_1 \in \text{stab}(x)$. Por la caracterización de subgrupo $\text{stab}(x)$ es un subgrupo de G . Así, hemos visto que $G/\text{stab}(x) \cong \mathcal{O}_G(x)$, como variedades diferenciables. Para concluir, como G actúa de forma transitiva sobre M , la órbita de x es única y es todo el conjunto, luego se tiene que $M \cong G/\text{stab}(x)$. $\square$

Obsérvese que el resultado es independiente del punto elegido, pues debido a la transitividad de la acción, todos los puntos de M son equivalentes bajo la acción del grupo G . Esto nos permite tomar puntos “cómodos” como podrían ser la identidad si la variedad es un grupo de Lie, o el origen en algún otro espacio. Así, se justifica la elección aparentemente privilegiada del vector e_1 en los ejemplos anteriores, se justifica en cierto modo, dado un punto genérico $x \in M$, el poder tomar una referencia tal que $x = e_1$ y seguir el razonamiento. Con esto en mente, podemos hacer un pequeño repaso de los ejemplos anteriores. Y de paso, ver algunos ejemplos más.

Ejemplo 3.8. 1. *La esfera $\mathbb{S}^n$. En la esfera, hay más de un grupo de Lie que actúa de forma transitiva. El que hemos visto antes es el grupo ortogonal $O(n+1)$. La justificación es exactamente la misma, las matrices ortogonales mantienen la norma de los vectores de la esfera, y se puede transformar cualquier punto de la esfera en*

cualquier otro mediante una matriz ortogonal. Luego, buscando el estabilizador de un punto $x \in \mathbb{S}^n$, tenemos la estructura de variedad homogénea que buscábamos. El estabilizador de un punto $x \in \mathbb{S}^n$ es el conjunto de matrices ortogonales que dejan fijo a x , es decir, $\text{stab}(x) = \{A \in O(n+1) : Ax = x\}$. Hemos demostrado cómo este conjunto es isomorfo al grupo ortogonal de una dimensión menor, $O(n)$, luego $O(n+1)/O(n) \cong \mathbb{S}^n$, por la anterior proposición.

El caso para el grupo especial ortogonal $SO(n+1)$ que se ha omitido en el ejemplo anterior se hace también con una facilidad parecida mediante esta proposición. El grupo $SO(n+1)$ son las “rotaciones” de la n -esfera, y las matrices ortogonales que dejan fijo un punto $x \in \mathbb{S}^n$ son las que tienen como eje de giro el eje que pasa por x y el origen. De manera similar se demuestra que $\text{stab}(x) = SO(n)$, y por lo tanto, $SO(n+1)/SO(n) \cong \mathbb{S}^n$.

2. Similar a los dos ejemplos anteriores, el grupo de Lie $SO(n+1)$ actúa de forma transitiva sobre el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, porque actúa de forma transitiva sobre la esfera, que es un espacio recubridor de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Y el grupo que deja fijo un punto $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es $\text{stab}([x]) = \{A \in SO(n+1) : Ax = x \vee Ax = -x\}$ que es el conjunto de las matrices de la forma (3.1), que es precisamente el grupo ortogonal $O(n)$. Por lo tanto, $SO(n+1)/O(n) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
3. El grupo de las traslaciones de $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, +)$, actúa de forma transitiva sobre $\mathbb{R}^n$ mediante la acción

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^n, +) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (v, x) &\mapsto v + x. \end{aligned}$$

La acción es simplemente transitiva, pues dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe un único $v = y - x \in \mathbb{R}^n$ tal que $v + x = y$. El estabilizador de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es la traslación de vector 0, esto es, la identidad del grupo, $\text{stab}(x) = \{0\}$. Por lo tanto, el cociente $(\mathbb{R}^n, +)/\text{stab}(x) = (\mathbb{R}^n, +)/\{0\} \cong \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ es por lo tanto una variedad homogénea. Tenemos por lo tanto la biyección

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow (\mathbb{R}^n, +) \\ r = (r_1, r_2, \dots, r_n) &\mapsto \tau_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto r + x \end{aligned}$$

Este ejemplo es un caso particular de un resultado más general, y es que cualquier grupo de Lie será una variedad homogénea. Hemos visto que la acción de un grupo de Lie G sobre sí mismo es simplemente transitiva, luego es transitiva y se está en posición de aplicar la Proposición 3.7, y además la acción es libre. Que la acción sea libre es equivalente a que el estabilizador de cualquier punto $x \in G$ sea trivial. Como consecuencia, el cociente $G/\text{stab}(x) = G/\{e\} \cong G$ y por lo tanto, G es una variedad homogénea.

4. Se llama **Grassmanniana** de orden (k, n) al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k , con $0 < k < n$, de $\mathbb{R}^n$ y se denota por $Gr_{k,n}$. Antes de ver su estructura diferenciable, exploremos algunos ejemplos para familiarizarnos con el concepto.

Por ejemplo, $Gr_{1,2}$ es el conjunto de rectas a través del origen en $\mathbb{R}^2$, luego es isomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$, aunque por ir mostrando un patrón lo escribiremos como $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. El caso $Gr_{1,3}$ es el conjunto de rectas a través del origen en $\mathbb{R}^3$, que es el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, $Gr_{2,3}$ es el conjunto de planos a través del origen en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, como todo plano de $\mathbb{R}^3$ está unívocamente determinado

por su recta tangente, podemos identificar $Gr_{2,3}$ con $Gr_{1,3}$. Para el caso de dimensión 4, pasa algo similar, $Gr_{1,4}$ es el conjunto de rectas a través del origen en $\mathbb{R}^4$, que es isomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ y a $Gr_{3,4}$, pues en $\mathbb{R}^4$ los hiperplanos están unívocamente determinados por sus rectas normales. De hecho, todas las grassmannianas con $k = 1$ o $k = n - 1$ serán isomorfas a los espacios proyectivos de dimensión $n - 1$, debido a que están determinados por las rectas o hiperplanos de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $Gr_{1,n} \cong Gr_{n-1,n} \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. La Grassmanniana más simple que no es un espacio proyectivo es $Gr_{2,4}$ y es de dimensión 4, como veremos a continuación.

Para ver que $Gr_{k,n}$ es una variedad, y en concreto, una variedad homogénea, consideremos el grupo de Lie $O(n)$, que actúa sobre $Gr_{k,n}$ de forma transitiva mediante la acción

$$\begin{aligned} O(n) \times Gr_{k,n} &\rightarrow Gr_{k,n} \\ (A, V) &\mapsto A(V), \end{aligned}$$

donde V es un subespacio vectorial de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ generado por k vectores linealmente independientes, y $A(V)$ es el subespacio generado por la imagen de los vectores generadores de V por A como aplicación lineal. Para entender mejor cómo actúa $O(n)$ sobre $Gr_{k,n}$, consideremos el caso $k = 2$, los planos de $\mathbb{R}^n$ que pasan por el origen. Dado una matriz ortogonal $A \in O(n)$, este plano se puede transformar en otro plano, mediante giros y reflexiones.

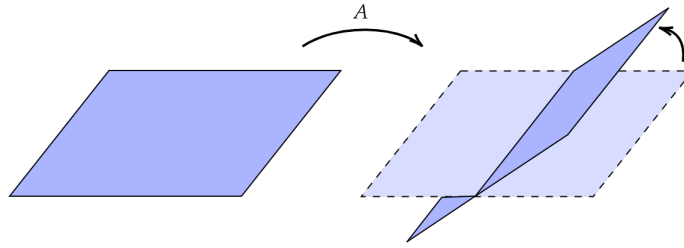


Figura 3.3: Rotación de un plano en $\mathbb{R}^3$

Siendo rigurosos, sobre un conjunto de planos cuales quiera de $\mathbb{R}^n$ actúa realmente el grupo afín $Aff(n)$, aunque las traslaciones afines se descartan por salirse del conjunto. Quitando esas traslaciones, nos quedaría el grupo euclídeo de los movimientos rígidos, $E(n)$, que es un subgrupo de $Aff(n)$. Este segundo grupo excluye los movimientos de traslación que llevan el subespacio a otro subespacio paralelo, pero no los que mantienen el plano invariante, las traslaciones con vector un vector del subespacio. El grupo euclídeo es el que realmente actúa sobre $Gr_{k,n}$, sin embargo, podemos quedarnos únicamente con el grupo ortogonal, debido a que los “puntos” de este espacio son los subespacios lineales y las traslaciones estarán contenidas en el estabilizador de cualquier punto. Como el grupo euclídeo se puede representar por los elementos que son pares (A, b) , donde $A \in O(n)$ y $b \in \mathbb{R}^n$ un vector de traslación, el grupo ortogonal será suficiente. Además, que el grupo ortogonal actúe de forma transitiva sobre las bases ortogonales es suficiente para ver que actúa de forma transitiva sobre los subespacios de dimensión k de $\mathbb{R}^n$. En efecto, si V es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_k\}$ de V , y por lo tanto, podemos completar la base de $\mathbb{R}^n$ con $n - k$ vectores ortonormales $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$. Entonces, dado otro subespacio de dimensión k , V' , existe una base

ortonormal $\{v'_1, \dots, v'_k\}$ de V' y la completamos con $n - k$ vectores ortonormales $\{w'_1, \dots, w'_{n-k}\}$. La transitividad de la acción del grupo ortogonal sobre las bases ortonormales nos dice que existe una matriz ortogonal $A \in O(n)$ tal que $Av_i = v'_i$ para todo $i = 1, \dots, k$, y $Aw_j = w'_j$ para todo $j = 1, \dots, n - k$. Por lo tanto, A lleva el subespacio V al subespacio V' , y la acción es transitiva. Ahora, tenemos una acción transitiva del grupo ortogonal $O(n)$ sobre nuestra variedad $Gr_{k,n}$, y por lo tanto, podemos aplicar la Proposición 3.7, sólo resta encontrar el estabilizador de un punto $V \in Gr_{k,n}$.

Para esto, pensemos en cuáles son las transformaciones que dejan fijo un subespacio de dimensión k . Estas deberían ser las transformaciones que transforman una base del subespacio en otra base del subespacio, como estamos buscando un subgrupo de $O(n)$, estas deben ser todas las pertenecientes al grupo $O(k) \subset O(n)$. Sin embargo, también hay que contar con todas las transformaciones que dejan fijo el subespacio ortogonal, estas serían, dentro de $O(n)$, las del grupo $O(n - k)$. De esta forma, eligiendo una base (ortonormal) del espacio total $\mathbb{R}^n$, tal que las primeras k coordenadas son las del subespacio y las últimas $n - k$ son las del ortogonal, $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$, el estabilizador de un subespacio V de dimensión k son las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix},$$

donde $A \in O(k)$ y $B \in O(n - k)$. Una matriz de esta forma puede darse como un par $(A, B) \in O(k) \times O(n - k)$, y por lo tanto, $\text{stab}(V) \cong O(k) \times O(n - k)$.

Por lo tanto, $Gr_{k,n} \cong O(n)/(O(k) \times O(n - k))$, y queda así demostrado que es una variedad homogénea. Esta expresión para la variedad también justifica las relaciones que hemos visto antes entre algunos de los espacios en función de sus dimensiones. Tenemos por ejemplo que $Gr_{k,n} \cong O(n)/(O(k) \times O(n - k)) \cong O(n)/(O(n - k) \times O(k)) \cong Gr_{n-k,n}, \forall k \in \{1, \dots, n - 1\}$, y no sólo para el caso $k = 1$ y $k = n - 1$, como hemos visto antes. Por último, la dimensión de $Gr_{k,n}$ es la dimensión del cociente: $\dim(Gr_{k,n}) = \dim(O(n)) - \dim(O(k) \times O(n - k)) = \frac{n(n-1)}{2} - \left(\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\right) = k(n - k)$.

Nota: Si hubiéramos elegido el grupo euclídeo $E(n)$, las traslaciones estarían contenidas en el estabilizador de cualquier punto, y por lo tanto, al hacer el cociente, nos quedaríamos únicamente con las matrices del grupo ortogonal, pero el procedimiento es el mismo.

Nota: Podemos hacer una construcción similar, pero en lugar de considerar subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, consideramos subespacios vectoriales orientados, esto es, una base con una orientación determinada. Como hay dos posibles orientaciones en cada subespacio, tendríamos por cada subespacio de la grassmanniana original dos posibles subespacios orientados. Esta construcción se llama **grassmanniana orientada** y se denota por $\widetilde{Gr}_{k,n}$. No es difícil comprobar que la grassmanniana orientada constituye un recubrimiento de doble hoja de la grassmanniana original, y además, con un argumento similar al del ejemplo, se verifica que $\widetilde{Gr}_{k,n} \cong SO(n)/(SO(k) \times SO(n - k))$, donde en este caso se emplea el grupo especial ortogonal para preservar las orientaciones. Luego $\widetilde{Gr}_{k,n}$ es también una variedad homogénea. Nótese que $\widetilde{Gr}_{1,n} \cong SO(n + 1)/SO(n) \cong \mathbb{S}^n$ son las esferas de dimensión n , y que $\widetilde{Gr}_{k,n} \cong Gr_{n-k,n}$, como antes.

Nota: Se pueden extender estas ideas a cualquier variedad diferenciable M , en lugar de quedarse en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$. En este caso, estaríamos hablando de

lo que se conoce por **fibrado Grassmanniano** de dimensión k de M , denotado por $Gr_k(M) = \dot{\bigcup}_{x \in M} Gr_k(T_x M)$, donde $T_x M$ es el espacio tangente a la variedad M en el punto x y $\dot{\bigcup}$ denota la unión disjunta. Este fibrado no es ni vectorial ni principal, ya que cada fibra es una grassmanniana. Una sección de este fibrado es una elegir para cada punto un subespacio vectorial de dimensión k del espacio tangente y hacer que cambie de punto a punto de forma suave, es decir, una sección del fibrado grassmanniano da una distribución sobre la variedad M . Este espacio nos permite también generalizar una idea muy importante en geometría diferencial, que es la aplicación de Gauss. Dada una superficie en $\mathbb{R}^3$, la aplicación de Gauss es una aplicación que asocia a cada punto de la superficie el vector normal a la superficie en ese punto, descrito generalmente como un punto en la esfera unidad $\mathbb{S}^2$.

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

Esta noción se puede extender a cualquier variedad M , pues dada una subvariedad N de dimensión k y asociando a cada punto $x \in M$ un subespacio vectorial de dimensión k del espacio tangente $T_x M$ se obtiene la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned} G : N &\rightarrow Gr_k(M) \\ x &\mapsto T_x N, \end{aligned}$$

Para el caso de $k = n - 1$, se recupera la intuición habitual de la aplicación de Gauss, pues a cada punto le corresponde un subespacio de dimensión $n - 1$ del espacio tangente, y como a cada hiperplano le corresponde un único vector normal, la aplicación de Gauss lleva puntos a sus vectores normales en la esfera unidad $\mathbb{S}^n$.

Se ve por lo tanto que es suficiente conocer que un grupo de Lie actúa transitivamente sobre una variedad diferenciable para poder concluir que esta es una variedad homogénea. Este resultado refuerza la idea de que las variedades homogéneas son variedades en las que todos los puntos son geoméricamente equivalentes o que no hay puntos privilegiados. Pero falta preguntarse si el recíproco se da también, es decir, si dada una variedad homogénea G/H , donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado, el grupo G actúa de forma transitiva sobre la variedad y H es el estabilizador de un punto. La respuesta es afirmativa, veámoslo.

Supongamos que tenemos una variedad homogénea $M = G/H$, donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G . Por el Teorema 3.3, la aplicación cociente $\pi : G \rightarrow M$ es una submersión. Esta aplicación induce una acción del grupo G sobre la variedad M de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{L} : G \times G/H &\rightarrow G/H \\ (g, \sigma H) &\mapsto (g\sigma)H. \end{aligned}$$

Esta aplicación cumple que $\pi \circ L = \tilde{L} \circ (id \times \pi)$, donde L es la acción de G sobre sí mismo. La acción es diferenciable, pues por ser π una submersión, se puede definir mediante secciones locales definiendo una aplicación intermedia $\tilde{\tilde{L}} : G \times G/H \rightarrow G$ que existe por la Proposición 3.5.

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{L} & G \\ (id \times \pi) \downarrow & \nearrow \tilde{\tilde{L}} & \downarrow \pi \\ G \times (G/H) & \xrightarrow{\tilde{L}} & G/H \end{array}$$

Esta acción está bien definida, pues $\tilde{L}_e \sigma H = (e\sigma)H = \sigma H$ y $\tilde{L}_{g_1}(\tilde{L}_{g_2}(\sigma H)) = (g_1 g_2 \sigma)H = \tilde{L}_{g_1 g_2}(\sigma H)$. Además, es transitiva, pues si tomamos dos puntos $g_1 H, g_2 H \in G/H$, entonces $\tilde{L}_{g_2 g_1^{-1}}(g_1 H) = (g_2 g_1^{-1} g_1)H = g_2 H$. Por la Proposición 3.7, ya tendríamos que G/H se puede escribir como $G/\text{stab}(eH)$, donde se ha tomado eH como punto de referencia, pero ya se ha justificado que la elección del punto es irrelevante. $\text{stab}(eH) = \{g \in G : geH = eH\} = \{g \in G : g \in H\} = H$, y por lo tanto, en toda variedad homogénea G/H hay una acción transitiva del grupo G , satisfaciendo el recíproco de la Proposición 3.7. Este resultado puede resumirse en el siguiente teorema, cuya demostración es la que ya se ha discutido.

Teorema 3.9. *Una variedad diferenciable M es homogénea si y sólo si existe un grupo de Lie G que actúa de forma transitiva sobre M .*

A partir de ahora, siempre que se mencione una variedad homogénea G/H , se entiende que G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G , aunque no se diga explícitamente.

3.2. Relación con los Fibrados Principales

A lo largo de este apartado veremos que las variedades homogéneas están fuertemente relacionadas con los fibrados principales, siendo que estas serían las variedades base sobre las que se fibra un grupo de Lie. Aunque el cociente de un grupo de Lie G por un subgrupo no es, en general, una variedad diferenciable, hemos visto que la hipótesis de que el subgrupo sea cerrado nos asegura que sí lo sea. Más aún, estas variedades tienen una acción transitiva del grupo G sobre ellas. Pero, si quisiéramos dotar a G de una estructura de fibrado principal sobre sus respectivas variedades homogéneas, la acción sobre la variedad total tendría que ser aquella del grupo estructural, y tendría que ser libre. Uno puede considerar una variedad de la forma G/H y ver de manera sencilla que la órbita de un punto $gH \in G/H$ serán todos los puntos de la forma $gh \in G$ tales que $h \in H$, y por lo tanto, las órbitas son difeomorfas al grupo H , luego es de esperar que tengamos una acción por la derecha de H sobre G , haría falta ver que dicha acción es libre.

Proposición 3.10. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G . Entonces, la acción*

$$\begin{aligned} R : H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto gh \end{aligned}$$

es libre sobre G . Además, es simplemente transitiva sobre las fibras de la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ dada por el Teorema 3.3.

Demostración. La acción de G sobre sí mismo por la derecha es libre, entonces dado un elemento $g \in G$, si $gh = g$ para algún $h \in G$, entonces $h = e$. Restringiendo la acción al subgrupo H , si $gh = g$ para algún $h \in H$, entonces $h = e$. Y por lo tanto, la acción de H sobre G es libre.

Como la acción es libre en G , lo es para las fibras también en particular. Para ver la transitividad, consideremos un punto $gH \in G/H$, la fibra de gH es el conjunto de todos los puntos de la forma $gh \in G$ tales que $h \in H$. Si tomamos dos puntos de la fibra, gh_1 y gh_2 , el elemento $h_1^{-1}h_2 \in H$ lleva el primer punto al segundo:

$$R_{h_1^{-1}h_2}(gh_1) = gh_1 h_1^{-1}h_2 = gh_2.$$

□

Para terminar de ver que G se fibra sobre G/H como fibrado principal, sólo resta ver que la aplicación $\pi : G \rightarrow G/H$ induce un difeomorfismo local de modo que el grupo G sea localmente trivial.

Proposición 3.11. *Sea G/H una variedad homogénea, entonces para cada punto $gH \in G/H$, existe un entorno U de gH y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H$ tal que $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ con $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow H$ una aplicación diferenciable tal que $\varphi(ph) = \varphi(p)h$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ y $h \in H$.*

Demostración. Como G/H es una variedad homogénea, la proyección $\pi : G \rightarrow G/H$ es una submersión, y por lo tanto, para cada punto $gH \in G/H$, existe un entorno U de gH y una sección local $\sigma : U \rightarrow G$ tal que $\pi \circ \sigma = id_U$. Esta sección local nos permite definir una aplicación en un entorno de cada punto de G/H . Para ello, observemos primero lo siguiente. Nótese que, como hicimos en la demostración de la Proposición 2.7, dado un punto $p \in G$, $\sigma(\pi(p)) \in G$ está en la misma fibra que p , es decir, $\pi(\sigma(\pi(p))) = \pi(p)$, y que por lo tanto, existe un único elemento $h_p \in H$ tal que $p = \sigma(\pi(p))h_p$. No sólo eso, sino que en este caso, a diferencia de en aquella demostración, $\sigma(\pi(p))$ es un elemento de un grupo, luego existe su inverso en el grupo y podemos multiplicar por la izquierda por él. De esta manera, podemos definir una aplicación como

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow H \\ p &\mapsto \varphi(p) = (\sigma(\pi(p)))^{-1}p = h_p, \end{aligned}$$

que es claramente diferenciable, por ser la composición de aplicaciones diferenciables, a saber, la sección local σ , la proyección π y las operaciones de grupo. Esta aplicación también cumple que $\varphi(ph) = (\sigma(\pi(p)))^{-1}(ph) = (\sigma(\pi(p)))^{-1}ph = \varphi(p)h$, para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ y $h \in H$.

Con esta aplicación y la proyección podemos definir la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times H \\ p &\mapsto (\pi(p), \varphi(p)). \end{aligned}$$

La aplicación es diferenciable por serlo en sus dos componentes. Para acabar la prueba sólo hace falta ver que existe una inversa local que sea también diferenciable, con lo que Φ sería un difeomorfismo local. Para ello, consideremos la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Psi : U \times H &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ (pH, h) &\mapsto \sigma(pH)h, \end{aligned}$$

que es sencillo comprobar que es efectivamente C^∞ . Veamos para concluir que es la inversa local de Φ :

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(pH, h) &= \Phi(\sigma(pH)h) = (\pi(\sigma(pH)h), \varphi(\sigma(pH)h)) = \\ &= (pH, (\sigma(\pi(\sigma(pH)h)))^{-1}(\sigma(pH)h)) = (pH, h), \\ \Psi \circ \Phi(p) &= \Psi(\pi(p), \varphi(p)) = \sigma(\pi(p))\varphi(p) = \sigma(\pi(p))(\sigma(\pi(p)))^{-1}p = p. \end{aligned}$$

□

Tenemos por lo tanto que todo grupo de Lie G se puede considerar como un fibrado principal sobre la variedad homogénea G/H , donde H es un subgrupo cerrado de G .

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H$$

Veamos como ejemplo, de nuevo, la grassmanniana $Gr_{k,n}$. Esta variedad homogénea puede verse como base para un fibrado principal como hemos argumentado. Sin embargo, veamos que ese fibrado principal no necesariamente es único y que podemos construir dos fibrados principales distintos que involucran a la variedad grassmanniana:

Ejemplo 3.12. Como hemos visto en el ejemplo 3.8.4, las variedades grassmannianas $Gr_{k,n}$ son variedades homogéneas, y pueden escribirse como $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$. Podríamos considerar el grupo ortogonal $O(n)$, que actúa de forma transitiva sobre $Gr_{k,n}$, como un fibrado principal sobre la grassmanniana. Este grupo se fibraría sobre la variedad $Gr_{k,n}$ con fibras $O(k) \times O(n-k)$.

Por otro lado, vamos a introducir las variedades de Stiefel y veremos que también son variedades homogéneas, y que se fibran sobre las grassmannianas con fibras $O(k)$. Las variedades de Stiefel son el conjunto de k -referencias ortonormales en $\mathbb{R}^n$, esto es, el conjunto de k -tuplas de vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Se denotan las variedades de Stiefel por $V_k(\mathbb{R}^n)$, o simplemente $V_{n,k}$. En este espacio, al igual que en las grassmannianas, el grupo ortogonal $O(n)$ actúa de forma transitiva, pues dado un conjunto de k vectores ortonormales, existe una matriz ortogonal que transforma esos vectores en cualquier otro conjunto de k vectores ortonormales. El estabilizador de un punto $v \in V_{n,k}$ es el grupo de matrices que transforman las referencias del espacio ortogonal al que generan los vectores que conforman v y dejan fijos dichos vectores. Estas matrices son las de forma

$$\begin{pmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix},$$

donde $A \in O(n-k)$, luego el estabilizador de un punto $v \in V_{n,k}$ es isomorfo al grupo $O(n-k)$. De esta forma, por la Proposición 3.7, tenemos que $V_{n,k} \cong O(n)/O(n-k)$. Se deduce también que el grupo ortogonal $O(n)$ se fibra sobre la variedad de Stiefel, $V_{n,k}$, con fibras isomorfas a $O(n-k)$. De esta forma, tenemos el siguiente diagrama de fibraciones de $O(n)$ sobre $V_{n,k}$ y $Gr_{k,n}$:

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \xrightarrow{\pi_1} & Gr_{n,k} \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow \pi & \\ V_{n,k} & & \end{array}$$

Debido a que se dan las condiciones de la Proposición 3.5, la aplicación $\pi : V_{n,k} \rightarrow Gr_{k,n}$ es diferenciable, y como se tiene que $G/(H \times K) \cong (G/H)/K$, entonces la aplicación π es la proyección de la variedad de Stiefel sobre la grassmanniana, luego $Gr_{k,n} \cong V_{n,k}/O(k)$. Hemos construido así la fibración Stiefel-Grassmann:

$$O(k) \hookrightarrow V_{n,k} \xrightarrow{\pi} Gr_{k,n}.$$

Una sección de esta fibración es una aplicación diferenciable que toma un subespacio vectorial de dimensión k de $\mathbb{R}^n$ y devuelve una base ortonormal de dicho subespacio. Cabe preguntarse si este fibrado admite secciones globales, y la respuesta es que no. Una forma bonita de ver esto es suponer que existiera una sección global, por ejemplo en el caso $k=1$, $\sigma : Gr_{1,n} \rightarrow V_{n,1}$. Conocemos quién es $Gr_{1,n}$, es el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, y no es difícil ver que $V_{1,n}$ es isomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, pues es el cociente $O(n)/O(n-1)$. Así, la proyección no es más que la aplicación de recubrimiento del espacio proyectivo por la esfera. Y las fibras son $O(1) = \{\pm 1\}$, una vez más, si admitimos variedades de dimensión 0. Una sección global de este fibrado sería una aplicación que tome la clase de un punto de la esfera y devuelva su representante en ella. De modo que, como se tienen dos posibilidades, la sección es una elección de x o $-x$ para cada punto de la esfera, y además de manera

diferenciable. Por lo tanto definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \sigma([x]). \end{aligned}$$

Esta aplicación es diferenciable, pues no es más que la composición de π con la sección σ y el producto interno en $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto es una aplicación continua. Sin embargo, esta aplicación cumple que $f(-x) = -x \cdot \sigma([-x]) = -x \cdot \sigma([x]) = -f(x)$. Como $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $x \cdot x = 1$, y por lo tanto, $f(x) \in \{\pm 1\}$, $\forall x \in \mathbb{S}^n$, y como f es continua, f debe ser constante, pero no puede serlo porque $f(-x) = -f(x)$. Se concluye por lo tanto que la fibración Stiefel-Grassmann no admite secciones globales.

Una pregunta que puede surgir es si el producto de dos variedades homogéneas es también una variedad homogénea. Hemos visto que el producto de dos grupos de Lie es un grupo de Lie, y que el cociente de un grupo de Lie por un subgrupo cerrado es una variedad diferenciable. Por lo tanto, si tomamos dos variedades homogéneas G_1/H_1 y G_2/H_2 , ¿Es cierto que $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ es una variedad homogénea? La respuesta es afirmativa, y la demostración es sencilla.

Teorema 3.13. Sean G_1/H_1 y G_2/H_2 dos variedades homogéneas, entonces el producto $G_1/H_1 \times G_2/H_2$ es una variedad homogénea.

Demostración. Consideremos el producto de los grupos de Lie $G_1 \times G_2$, que también es grupo de Lie. Como tenemos dos subgrupos cerrados de G_1 y G_2 , H_1 y H_2 , respectivamente, entonces el producto $H_1 \times H_2 \subset G_1 \times G_2$ es también un subgrupo cerrado. Para ver que es subgrupo basta con ver que dados dos elementos $(h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \in H_1 \times H_2$, entonces definiendo el producto componente a componente, tenemos que $(h_1, h_2)(h'_1, h'_2) = (h_1 h'_1, h_2 h'_2) \in H_1 \times H_2$, porque $h_1 h'_1 \in H_1$ y $h_2 h'_2 \in H_2$ por ser grupos por separado. Como H_1 y H_2 son cerrados en sus respectivos grupos, entonces $H_1 \times H_2$ es cerrado en el producto $G_1 \times G_2$ por ser un producto de cerrados en un producto de espacios Hausdorff. Por lo tanto, el cociente $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ es una variedad diferenciable, y de hecho, homogénea. En problema es que no necesariamente es difeomorfa al producto de las variedades homogéneas a priori, veamos que sí.

Para ver que ambas variedades son difeomorfas, consideramos la siguiente aplicación, y veamos que es un difeomorfismo.

$$\begin{aligned} \Phi : (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) &\rightarrow (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \\ (g_1 H_1, g_2 H_2) &\mapsto (g_1, g_2)(H_1 \times H_2). \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida. Si tomamos dos elementos de las fibras de g_1 y de g_2 , g'_1 y g'_2 , entonces existen $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$ tales que $g'_1 = g_1 h_1$ y $g'_2 = g_2 h_2$. Entonces, $\Phi(g'_1 H_1, g'_2 H_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)(H_1 \times H_2) = (g_1, g_2)(H_1 \times H_2) = \Phi(g_1 H_1, g_2 H_2)$.

También es fácil ver que es biyectiva y que su inversa es

$$\begin{aligned} \Psi : (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) &\rightarrow (G_1/H_1) \times (G_2/H_2) \\ (g_1, g_2)(H_1 \times H_2) &\mapsto (g_1 H_1, g_2 H_2). \end{aligned}$$

Para comprobar la diferenciable de Φ y Ψ , basta ver que las aplicaciones $\pi_1 : G_1 \rightarrow G_1/H_1$, $\pi_2 : G_2 \rightarrow G_2/H_2$ y $\pi : G_1 \times G_2 \rightarrow (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$ son submersiones por construcción, y que admiten secciones locales $\sigma_1 : U_1 \subset G_1/H_1 \rightarrow G_1$, $\sigma_2 : U_2 \subset G_2/H_2 \rightarrow G_2$ y $\sigma : U \subset (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \rightarrow G_1 \times G_2$. Se deduce así que las aplicaciones Φ y Ψ se pueden expresar localmente como

$$\begin{aligned} \Phi &= \pi \circ (\sigma_1 \times \sigma_2), \\ \Psi &= (\pi_1 \times \pi_2) \circ \sigma, \end{aligned}$$

Como son aplicaciones diferenciables en todo punto, entonces son diferenciables en sus respectivos dominios. Queda probado entonces que la aplicación Φ es un difeomorfismo, y por lo tanto, que el producto de dos variedades homogéneas es también una variedad homogénea. $\square$

Con este resultado en mente, tenemos nuevas formas de afrontar el estudio de algunas variedades homogéneas. Por ejemplo, el toro $\mathbb{T}^2$, aunque se suele pensar como el producto de dos circunferencias, también es típica la construcción como el cociente del plano por una relación de equivalencia. Esta segunda construcción es la que se suele emplear para deducir el primer grupo de homotopía del toro. La idea es considerar el plano $\mathbb{R}^2$ y considerar la relación de equivalencia que identifica los puntos que difieren en un vector de la forma (m, n) , donde $m, n \in \mathbb{Z}$. En esta construcción, podemos considerar el plano como el grupo de Lie de traslaciones $\mathbb{R}^2$, y la relación de equivalencia tomaría el papel del estabilizador de un punto, pues dadas las traslaciones de la forma $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, el estabilizador de un punto (x, y) es el conjunto de traslaciones de forma $(x, y) \mapsto (x + m, y + n)$. Claramente, el estabilizador de un punto es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}^2$, que se puede ver como subgrupo discreto, y por tanto cerrado, de $\mathbb{R}^2$. Como se cumplen las condiciones del Teorema 3.3, el cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ es una variedad diferenciable. Y, técnicamente, $\mathbb{Z}^2$ es un grupo de Lie por ser un subgrupo cerrado de un grupo de Lie, una vez más, considerando variedades de dimensión cero. Como esto puede resultar poco satisfactorio, ya que las variedades discretas como $\mathbb{Z}^2$ no suelen ser en lo que uno piensa cuando se habla de variedades diferenciables, podemos tomar otro enfoque.

Si en lugar de pensar en el toro como ese espacio cociente, lo vemos como se suele definir, que es como el producto de dos circunferencias, al ser estas variedades homogéneas, entonces es claro que el toro también lo es, y se puede expresar como $SO(2)/SO(1) \times SO(2)/SO(1) \cong SO(2) \times SO(2)$, pues $SO(1) = \{1\}$. Esto no debería sorprendernos porque el toro es un producto de grupos de Lie, y por lo tanto, es un grupo de Lie, que hemos demostrado que son variedades homogéneas. Esta idea se puede extender a cualquier otro toro de dimensión n , que se puede expresar tanto de la forma $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ como $SO(2) \times \cdots \times SO(2)$, donde $SO(2)$ aparece n veces.

Un ejemplo algo menos trivial es el producto de esferas. De manera análoga al toro, podemos considerar el producto de dos esferas como el cociente de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 = SO(3)/SO(2) \times SO(3)/SO(2)$. En este caso, sería más difícil decir a priori si es una variedad homogénea o no. Las esferas en sí mismas son variedades homogéneas, pero no son grupos de Lie en general. Sin embargo, como hemos demostrado, esta nueva variedad producto es también homogénea, y el grupo de Lie que actúa sobre ella transitivamente es $SO(3) \times SO(3)$. Más generalmente, a partir del teorema anterior se deduce que el producto finito de variedades homogéneas es también una variedad homogénea, y por lo tanto sobre ella actúa transitivamente el grupo $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, donde G_i es el grupo de Lie que actúa sobre la variedad homogénea G_i/H_i . Más aún, el grupo $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ es el estabilizador de un punto de la variedad homogénea resultante, y actúa libremente sobre $G_1 \times \cdots \times G_n$. Se concluye que el grupo de Lie $G_1 \times \cdots \times G_n$ se fibra sobre el producto de las variedades homogéneas $G_1/H_1 \times \cdots \times G_n/H_n$ como fibrado principal con fibras isomorfas a $H_1 \times \cdots \times H_n$.

Bibliografía

- [1] Baez, J. C.: *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. 39, 145-205 (2002).
- [2] Bishop, E. H., Crittenden, R. J.: *Geometry of Manifolds*, Elsevier/Academic Press, 1964.
- [3] Etayo, F.: Apuntes de *Variedades Diferenciables*, Universidad de Cantabria.
- [4] Kobayashi, S., Nomizu K.: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Wiley Classics Library, 1996.
- [5] Lee, J. M.: *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2013.
- [6] Mazzoni, M.: *A fibre bundle approach to $U(1)$ symmetries in physics*. Tesi di Laurea Magistrale, Università di Bologna (2018).
- [7] Pardo, L. M.: Apuntes de *Álgebra Conmutativa*, Universidad de Cantabria.
- [8] Warner, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer, 1983.

Las siguientes referencias son imágenes que se han utilizado en la memoria:

- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/File:All_In_A_Spin_Star_trail.jpg
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hopf_Fibration.png
- [11] <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hopfkeyrings.jpg>