Universidad de Cantabria

Facultad de Ciencias

De Matrices y Superficies Pitagóricas
(On Pythagorean Matrices and Surfaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Nicole Lucía Oré Cuenca

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio - 2025

Agradecimientos

En un primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento al director de este Trabajo de Fin de Grado, Fernando Etayo Gordejuela. Muchas gracias por tu gran apoyo, consejos, dedicación y compromiso constante tanto a lo largo de este trabajo como durante estos últimos años. Asimismo, quiero agradecer a toda la plantilla docente por su enseñanza y consejos brindados durante estos cuatro años.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi familia. A mis padres por apoyarme e incentivarme siempre a conseguir cualquier objetivo que me plantee. A mi hermana y sobrina por las incontables risas que me sacaban en momentos donde quería tirar la toalla. Y a mi hermano por haberme acercado desde pequeña al mundo de la ciencia, porque esa niña a la que enseñaste todos aquellos vídeos divulgativos, hoy está terminando el grado en Matemáticas.

En tercer lugar, quiero agradecer a todos mis amigos, tanto a los de toda la vida, como a los que he hecho en mi paso por Cantabria, por ser un apoyo fundamental en esta gran experiencia llamada grado en Matemáticas. En especial, quiero agradecer a mis compañeras de piso por su compañía y apoyo incondicional en el desarrollo de este trabajo. Asimismo, quiero agradecer a mi muy querida amiga, Iris Delgado, quien aún siendo de las personas más alejadas del mundo de las matemáticas que conozco, es quizá quien mejor conoce este trabajo por las tantas e interminables conversaciones que hemos tenido y espero seguir teniendo. Muchas gracias Iris por todas las palabras de aliento en los momentos donde no veía la luz al final del túnel. Además, quiero agradecer a otra gran amiga, Amaia Zudaire, por su valiosa amistad y por su gran contribución intelectual en el desarrollo de las demostraciones de las proposiciones 3.34 y 3.36.

Por último, quiero agradecer a mi profesor de matemáticas de primero de Bachillerato, Nathan Elsden, porque aunque siempre me hayan gustado las matemáticas, fue tu forma de enseñar la que me dio el último empujón hacia este mundo.

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado tiene como objetivo estudiar las relaciones pitagóricas entre matrices así como las superficies pitagóricas. Para ello, definimos las ternas pitagóricas de números y generalizamos este concepto a matrices que preservan ternas pitagóricas, a matrices que conforman ternas pitagóricas de matrices y finalmente, a superficies pitagóricas. Estas últimas fueron introducidas por M. E. Aydin y A. Mihai en 2020 y se definen como aquellas en que las matrices de las tres primeras formas fundamentales (g, L, III respectivamente) satisfacen la relación pitagórica $g^2 + L^2 = III^2$. Además, probamos que las superficies pitagóricas están bien definidas (no dependen de las bases escogidas para calcular las matrices de las formas fundamentales) y demostramos que toda superficie pitagórica es una esfera (o parte de una esfera) de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Palabras clave: Terna pitagórica, matriz que preserva ternas pitagóricas, terna pitagórica de matrices, superficie pitagórica, tercera forma fundamental.

Abstract

The aim of this work is to study Pythagorean relations between matrices as well as Pythagorean surfaces. To this end, we define Pythagorean triples of numbers and generalize this concept to Pythagorean triple preserving matrices, matrix Pythagorean triples and finally, Pythagorean surfaces. The latter were first introduced by M. E. Aydin and A. Mihai in 2020 and are defined as those in which the matrices of the first three fundamental forms (g, L, III respectively) satisfy the Pythagorean relation $g^2 + L^2 = III^2$. Furthermore, we prove that Pythagorean surfaces are well-defined (they do not depend on the chosen basis to calculate the matrices of the three fundamental forms) and we show that every Pythagorean surface is a sphere (or part of a sphere) of radius $R = \sqrt{\Phi}$ with $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Key words: Pythagorean triple, Pythagorean triple preserving matrices, matrix Pythagorean triple, Pythagorean surface, third fundamental form.

Índice

Introducción

La noción de superficie pitagórica fue introducida por primera vez por Aydin. M. E. y Mihai. A. en [5], artículo que sirvió de motivación para el desarrollo de este trabajo. Dicho artículo fue nuestro punto de partida y desde ahí fuimos volviendo hacia atrás para encontrarnos con las matrices cuadradas que conformaban ternas pitagóricas de matrices, matrices que preservaban ternas pitagóricas y finalmente las propias ternas pitagóricas que surgen a raíz de uno de los resultados más conocidos de las matemáticas, el Teorema de Pitágoras:

Todo triángulo rectángulo de catetos de longitudes a y b, e hipotenusa de longitud c, verifica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

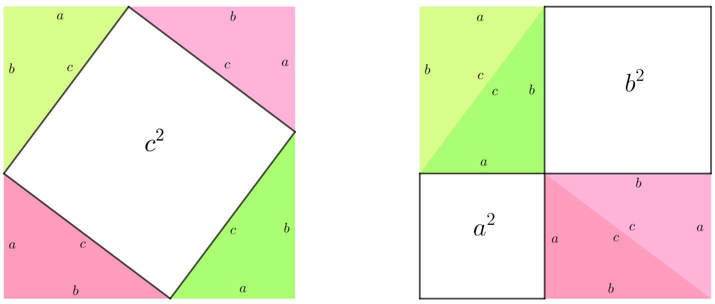

Figura 1: Representación visual del Teorema de Pitágoras

En este trabajo hemos planteado un orden inverso al mencionado previamente, con el fin de facilitar la comprensión de los conceptos teóricos al lector. Así, hemos desarrollado los capítulos de esta Memoria como sigue:

En el Capítulo 1, *Ternas pitagóricas*, introducimos el concepto de terna pitagórica (Definición 1.2). Decimos que (a, b, c) con a, b, c enteros positivos, es una terna pitagórica si se verifica que $a^2 + b^2 = c^2$. Daremos algunas condiciones suficientes para obtener ternas pitagóricas (Apartado 1.1) e introduciremos las ternas pitagóricas de la forma $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ con m y n enteros positivos. En un siguiente apartado (Apartado 1.2) veremos condiciones necesarias para obtener una terna pitagórica. Para ello, introduciremos las ternas pitagóricas primitivas (Definición 1.12), las cuales son ternas pitagóricas (a, b, c) tales que $mcd(a, b, c) = 1$. Al principio de dicho apartado, veremos que toda terna pitagórica tiene asociada una terna pitagórica primitiva, por lo que, bastará con estudiar, únicamente, las condiciones necesarias para obtener ternas pitagóricas primitivas. El Teorema 1.14 nos dará una caracterización de las ternas pitagóricas primitivas.

En el Capítulo 2, *Ternas pitagóricas y matrices*, estudiaremos dos nociones distintas que relacionan las ternas pitagóricas con las matrices. En un primer apartado (Apartado 2.1), estudiaremos las matrices que preservan ternas pitagóricas, esto es, las matrices H de 3 filas y 3 columnas con entradas números enteros, tales que para toda terna pitagórica (a, b, c), verifican que $(a, b, c)H$ es también una terna pitagórica. Como vimos en el capítulo anterior, toda terna pitagórica tiene una terna pitagórica primitiva asociada, luego nos centraremos en estudiar únicamente las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas, esto es, que para toda terna pitagórica primitiva (a, b, c), $(a, b, c)H$ es también una terna pitagórica primitiva. Para el desarrollo de este apartado hemos seguido principalmente [2]. En este artículo se enuncia el Teorema 2.7, el cual hemos demostrado en este trabajo. Asimismo, desarrollamos el Ejemplo 2.8 para mostrar una aplicación del teorema anterior. Cabe destacar que en [2] se enuncia el Teorema 2.10, que dice que todas las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas son de la forma

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

con r, s, t y u números enteros. Para probar el resultado, hemos elaborado una demostración propia del trabajo tomando ideas de la dada en [10] pp. 9-11 para el caso de matrices de aplicaciones proyectivas. En [2] se enuncia también el teorema 1 de caracterización de las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas, sin embargo, este enunciado es erróneo pues no se tiene dicha caracterización, como señalamos en la Observación 2.12 y el Ejemplo 2.13.

En el segundo apartado de este capítulo (Apartado 2.2), buscamos generalizar el concepto de ternas pitagóricas a matrices. Definimos las ternas pitagóricas de matrices (Definición 2.15) como las ternas (A, B, C) con A, B, C matrices cuadradas de tamaño n con entradas números racionales, tales que $A^2 + B^2 = C^2$. En este apartado damos una manera de construir algunas ternas pitagóricas de matrices. Además, presentamos un ejemplo propio, Ejemplo 2.20, donde se ilustran todos los resultados de este apartado.

En el Capítulo 3, *Superficies pitagóricas*, buscamos extender aún más la noción de ternas pitagóricas en una dirección más geométrica, en particular, a superficies regulares. Diremos que una superficie regular S es pitagórica (Definición 3.40) si para todo punto $p \in S$, se verifica

$$g_p^2 + L_p^2 = III_p^2$$

donde g_p, L_p y III_p son las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental en p respecto de una base cualquiera del plano tangente a S en p, T_pS. El objetivo de este capítulo será demostrar que las únicas superficies pitagóricas son las esferas (o partes de ellas) de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, el conjugado del número de oro. Ya lo decía Kepler, "El número de oro y el Teorema de Pitágoras son los dos grandes tesoros de la Geometría ", [4], p.90. En el resultado de este capítulo, vemos cómo aparecen los dos tesoros combinados.

Con este objetivo en mente, comenzaremos el capítulo tanto recordando ciertos conceptos clave de geometría de superficies como la primera y segunda forma fundamental, como enunciando y demostrando algún resultado propio como el de la Proposición 3.15, que nos serán de utilidad posteriormente. En un siguiente apartado, introduciremos la tercera forma fundamental y una fórmula que relaciona las tres formas fundamentales (dada por el Teorema 3.27)

$$\mathrm{III} - 2HL + Kg = 0$$

Seguimos el capítulo con el apartado de *Superficie umbílicas* (Apartado 3.3), donde se enuncia el Teorema 3.31 que afirma que, si todos los puntos de una superficie regular S son umbílicos, entonces S es parte de una esfera o un plano. Este resultado será clave para conseguir el objetivo del capítulo.

A continuación, llegamos al apartado de *Superficies pitagóricas* (Apartado 3.4), donde enunciamos y demostramos algunos resultados propios del trabajo como la Proposición 3.36 que nos permitirán definir correctamente los conceptos de punto pitagórico (Definición 3.37), noción propia del trabajo, y superficie pitagórica (Definición 3.40).

Finalmente, en el apartado de *Clasificación de las superficies pitagóricas* (Apartado 3.5), demostramos que las únicas superficies pitagóricas son las esferas (o partes de ellas) de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Cabe mencionar que para el desarrollo del capítulo, hemos seguido las ideas planteadas en [5], donde demuestran que las superficies pitagóricas son las esferas de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, usando que la superficie es compacta. Es decir, el artículo obtiene una clasificación de superficies pitagóricas cuando la superficie es compacta. En este trabajo, hemos conseguido omitir la hipótesis de compacidad apoyándonos en que las superficies pitagóricas son totalmente umbílicas (consecuencia de la Proposición 3.34) y así, generalizar el resultado del artículo. Además, en el artículo no prueban que la definición de superficie pitagórica es independiente de la base del plano tangente escogida, lo cual sí probamos en este trabajo (como consecuencia de la Proposición 3.36).

En el capítulo anterior, estudiamos cuándo (g, L, III) es una terna pitagórica de matrices. En este capítulo, Capítulo 4, *Formas fundamentales y ternas pitagóricas de matrices*, estudiamos si podemos realizar un estudio análogo para los casos (g, III, L) y (L, III, g). Concluimos que para el primer caso no es posible mientras que para el segundo, sí podemos trazar una analogía con las superficies pitagóricas añadiendo cierta hipótesis.

En el Capítulo 3 introdujimos la tercera forma fundamental, una noción no tan conocida. Surge de manera natural la duda de si esta noción es utilizada más allá de las superficies pitagóricas. En el último capítulo, Capítulo 5, *Teorema de Beltrami-Enneper*, demostramos el Teorema de Beltrami-Enneper, un bello resultado cuya demostración hace uso de la tercera forma fundamental así como del Teorema 3.27 que la relaciona con la primera y segunda forma fundamental. Para comprender este resultado se necesita cierta base teórica de geometría de curvas, por lo que hemos desarrollado un apéndice con la teoría necesaria para el lector que lo considere oportuno.

Por último, cabe mencionar que, si bien algunos de los resultados del trabajo son ampliamente conocidos (sobre todo los dados en el Capítulo 1), este trabajo pretende ser autocontenido por lo que hemos detallado las demostraciones y explicaciones cuando hemos visto oportuno. Asimismo, todas las representaciones visuales del trabajo son propios del mismo y se han realizado con el fin de ofrecer al lector explicaciones visuales y geométricas complementarias al texto.

Capítulo 1

Ternas pitagóricas

El Teorema de Pitágoras enuncia una relación entre los lados de todo triángulo rectángulo. El teorema afirma que todo triángulo rectángulo de catetos de longitudes a y b, e hipotenusa de longitud c, verifica la siguiente igualdad:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

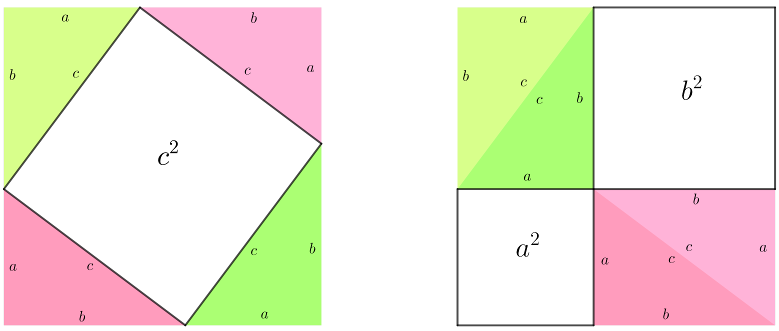

Figura 2: Representación visual del Teorema de Pitágoras

Este teorema sirve de motivación para introducir el concepto de terna pitagórica, donde se restringe el Teorema de Pitágoras a triángulos rectángulos de lados de longitud entera. En este capítulo, definiremos las ternas pitagóricas, las ternas pitagóricas primitivas, y además, obtendremos una serie de propiedades de las mismas. Cabe mencionar que, si bien los resultados enunciados a continuación son ampliamente conocidos por la comunidad matemática, este trabajo pretende ser autocontenido por lo que detallaremos las demostraciones de los mismos.

Notación 1.1. *Denotemos* $\mathbb{N}^*$ *el conjunto de todos los números enteros positivos.*

Definición 1.2. *(**Terna pitagórica**) Sean* $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. *Se dice que* (a, b, c) *es una terna pitagórica si se verifica que*

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Notación 1.3. *A lo largo de este trabajo denotaremos las ternas pitagóricas como* (a, b, c)*, aunque también se pueden encontrar escritas como* $\{a, b, c\}$ *en distintas fuentes, entre ellas, algunas de las referencias citadas en este trabajo.*

Ejemplo 1.4. *Un ejemplo clásico de terna pitagórica es la terna* $(3, 4, 5)$.

1.1. Condiciones suficientes para obtener una terna pitagórica

Uno de los principales interrogantes que nos planteamos es si podemos generar ternas pitagóricas de alguna manera. A continuación, veremos algunos resultados que nos proporcionarán condiciones suficientes sobre una terna para que esta sea una terna pitagórica.

Proposición 1.5. *Si (a, b, c) es una terna pitagórica, entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{N}^*$, tenemos que $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ es también una terna pitagórica.*

Demostración. Este resultado es trivial. Sea (a, b, c) una terna pitagórica y $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Como $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ es monoide conmutativo, tenemos que λa, λb, $\lambda c \in \mathbb{N}^*$. Por otra parte

$$(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) = \lambda^2 c^2$$

Así, $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ verifica (1) y por ende, es una terna pitagórica. $\square$

Así, a partir de cualquier terna pitagórica, por ejemplo la terna $(3, 4, 5)$, podemos obtener infinitas ternas pitagóricas distintas.

Proposición 1.6. *Todo número impar se puede expresar como diferencia de cuadrados.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{N}^*$ un número impar. Entonces, existe $b \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ de manera que podemos escribir a como $a = 2b + 1$. Así, se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$a = 2b + 1 = 2b + 1 + b^2 - b^2 = (b + 1)^2 - b^2$$

También podemos considerar la siguiente demostración geométrica del resultado:

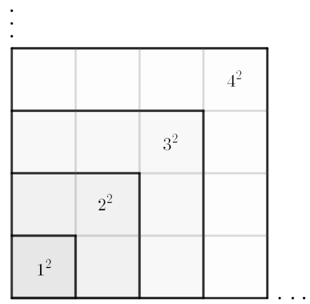

Figura 3: Todo número impar se puede expresar como diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned}
1^2 - 0^2 &= 1\\
2^2 - 1^2 &= 3\\
3^2 - 2^2 &= 5\\
4^2 - 3^2 &= 7\\
&\ldots
\end{aligned}$$

$\square$

A partir de este resultado, deducimos que todo número impar que sea un cuadrado, define una terna pitagórica.

Corolario 1.7. *Si tenemos un entero a^2 impar mayor que 1 y que sea cuadrado de un entero; es decir, $a^2 = 2b + 1$ con $b \in \mathbb{N}^*$, entonces $(a, b, b + 1)$ es una terna pitagórica.*

Ejemplo 1.8. *Tomando $5^2 = 25 = 2 \cdot 12 + 1$, por el resultado previo, tenemos que $(5, 12, 13)$ es una terna pitagórica.*

A continuación, introduciremos las ternas pitagóricas de la forma

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

con m y $n \in \mathbb{N}^*$.

Cabe mencionar que estas ternas serán de especial interés en esta sección y en la siguiente, ya que, como veremos posteriormente (en el Teorema 1.14), definen unívocamente un caso particular de ternas pitagóricas.

Construiremos estas ternas a partir de la inversa de la proyección estereográfica de $\mathbb{S}^1$ sobre la recta real desde el punto $N = (0, 1)$. Primero, recordemos cómo se define esta proyección.

Definición 1.9. ***(Proyección estereográfica)*** *Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad y $N = (0, 1)$. Definimos la proyección estereográfica de $\mathbb{S}^1\backslash\{N\}$ sobre $\mathbb{R}$, desde N, como la aplicación $\tilde{\pi}$ que a cada punto $p \in \mathbb{S}^1\backslash\{N\}$, lo envía sobre la intersección de la recta que pasa por N y p, con la recta real $\{y = 0\} \cong \mathbb{R}$.*

Lema 1.10. *Sea $\tilde{\pi}$ la aplicación de la definición anterior (Definición 1.9). Entonces,*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\pi}: & \mathbb{S}^1\backslash\{(0,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} \\ & (a, b) & \longmapsto & \left(\frac{a}{1-b}, 0\right) \end{array}$$

Y tiene como inversa,

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1\backslash\{(0,1)\} \\ & x & \longmapsto & \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{array}$$

Demostración. Primero, veamos que, dado $(a, b) \in \mathbb{S}^1\backslash\{(0, 1)\}$, entonces $\tilde{\pi}(a, b) = \left(\frac{a}{1-b}, 0\right)$. Para ello, consideramos las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y (a, b):

$$l : \begin{cases} X = & at \\ Y = 1 & +(b-1)t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Calculamos para qué valores del parámetro t, dicha recta interseca con la recta $\{y = 0\}$.

$$Y = 0 \Longleftrightarrow 1 + (b-1)t_0 = 0 \Longleftrightarrow t_0 = \frac{1}{1-b}$$

Notemos que $b \neq 1$ ya que $(0, 1) \notin \mathbb{S}^1\backslash\{(0, 1)\}$. Así, $\tilde{\pi}(a, b) = \left(\frac{a}{1-b}, 0\right)$.

En segundo lugar, veamos que dado $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, $\pi(x, 0) = \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$. Consideramos las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(x, 0)$.

$$r : \begin{cases} X = & xt \\ Y = 1 & -\ t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Calculamos para qué valores del parámetro t, intersecan dicha recta y $\mathbb{S}^1\backslash\{(0, 1)\}$.

$$X^2+Y^2=1 \iff (xt_0)^2+(1-t_0)^2=1 \iff x^2t_0^2+1+t_0^2-2t_0=1 \iff t_0^2(x^2+1)-2t_0=0$$

$$\iff t_0(t_0(x^2+1)-2)=0$$

Así, tenemos que $t_0=0$ ó $t_0(x^2+1)-2=0$. Notemos que si $t_0=0$, entonces $(X,Y)=(0,1)$, lo cual no tiene sentido ya que $(0,1)\notin \mathbb{S}^1\backslash\{(0,1)\}$. Así, obtenemos que $t_0(x^2+1)-2=0$, ó equivalentemente, que $t_0=\frac{2}{x^2+1}$. En consecuencia, el punto de intersección de la recta r y $\mathbb{S}^1\backslash\{(0,1)\}$ es $(X,Y)=(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1})$.

Por último, comprobamos que π es la aplicación inversa de $\tilde{\pi}$. Sean $(a,b)\in\mathbb{S}^1\backslash\{(0,1)\}$ y $(x,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}$:

$$\begin{aligned}
\pi\circ\tilde{\pi}(a,b) &= \pi\left(\frac{a}{1-b},0\right)=\left(\frac{2\frac{a}{1-b}}{(\frac{a}{1-b})^2+1},\frac{(\frac{a}{1-b})^2-1}{(\frac{a}{1-b})^2+1}\right)=\left(\frac{\frac{2a}{1-b}}{\frac{a^2+(1-b)^2}{(1-b)^2}},\frac{\frac{a^2-(1-b)^2}{(1-b)^2}}{\frac{a^2+(1-b)^2}{(1-b)^2}}\right)=\\
&=\left(\frac{2a(1-b)}{a^2+(1-b)^2},\frac{a^2-(1-b)^2}{a^2+(1-b)^2}\right)=\\
&=\left(\frac{a(2-2b)}{a^2+b^2+1-2b},\frac{1-b^2-(1+b^2-2b)}{a^2+b^2+1-2b}\right)=\\
&=\left(\frac{a(2-2b)}{2-2b},\frac{b(2-2b)}{2-2b}\right)=(a,b)=Id_{\mathbb{S}^1\backslash\{(0,1\}}(a,b)\\
\tilde{\pi}\circ\pi(x) &= \tilde{\pi}\left(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\frac{(\frac{2x}{x^2+1})}{1-(\frac{x^2-1}{x^2+1})}=\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1}}=\frac{2x}{2}=x=Id_{\mathbb{R}}(x)
\end{aligned}$$

□

Consideramos la inversa de la proyección estereográfica de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{R}$ desde el punto $(0,1)$, es decir, la aplicación π definida en el lema anterior (Lema 1.10). Y veamos qué pasa para los puntos de $\mathbb{Q}^+$:

Sea $q\in\mathbb{Q}^+$, entonces existen m y $n\in\mathbb{N}^*$ tales que $q=\frac{m}{n}$. En consecuencia,

$$\pi(q)=\left(\frac{2(\frac{m}{n})}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1},\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^2-1}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}\right)=\left(\frac{2mn}{m^2+n^2},\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$$

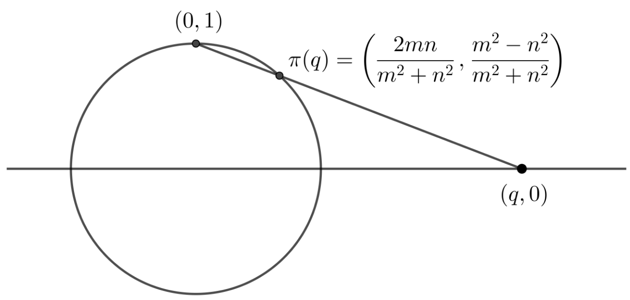

Figura 4: Inversa de la proyección estereográfica sobre $\mathbb{S}^1$

Recordemos que el punto $\pi(q)$ está en $\mathbb{S}^1$, por lo que verifica que $\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)^2 = 1$, de donde se obtiene la siguiente igualdad:

$$(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

Así, $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ es una terna pitagórica.

En consecuencia, podemos definir una terna pitagórica a partir de cualquier número racional positivo y hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 1.11. *Sean m, $n \in \mathbb{N}^*$. Entonces, $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ es una terna pitagórica.*

1.2. Condiciones necesarias para obtener una terna pitagórica

En este apartado buscamos condiciones necesarias sobre una terna para que esta sea una terna pitagórica. Primero, notemos que dada $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$, una terna pitagórica arbitraria, siempre podemos considerar el máximo común divisor de la terna, esto es, $\lambda = mcd(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \in \mathbb{N}^*$. Por definición de divisor, existirán a, b y $c \in \mathbb{N}^*$ tales que $\tilde{a} = \lambda a, \tilde{b} = \lambda b$ y $\tilde{c} = \lambda c$. En particular, (a, b, c) será una terna pitagórica con $mcd(a, b, c) = 1$. Así, toda terna pitagórica $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ tiene asociada una terna pitagórica (a, b, c) con $mcd(a, b, c) = 1$. En consecuencia, estudiaremos únicamente las condiciones necesarias para que una terna (a, b, c) con $mcd(a, b, c) = 1$, sea una terna pitagórica.

Definición 1.12. ***(Terna pitagórica primitiva)*** *Sea (a, b, c) una terna pitagórica. Se dice que (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva si $mcd(a, b, c) = 1$.*

A continuación, veremos que toda terna pitagórica primitiva (a, b, c) con a impar, es de la forma $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ con m, $n \in \mathbb{N}^*$ verificando ciertas condiciones (Teorema 1.14). Es decir, determinaremos unívocamente a las ternas pitagóricas primitivas.

Primero, veamos el siguiente resultado auxiliar que nos será de utilidad para probar el Teorema 1.14 de caracterización de ternas pitagóricas primitivas.

Proposición 1.13. *Si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, entonces a y b no pueden tener la misma paridad.*

Demostración. Sea (a, b, c) una terna pitagórica primitiva. Primero, veamos el siguiente resultado auxiliar:

Resultado auxiliar: Si el cuadrado de un entero r es par, entonces r es par.

> *Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que r es impar. Entonces existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $r = 2s + 1$. Así, tenemos las siguientes igualdades:
>
> $$r^2 = (2s + 1)^2 = 4s^2 + 1 + 4s = 2(2s^2 + 2s) + 1$$
>
> Luego r^2 es impar y hemos llegado a una contradicción ya que habíamos supuesto que era par. □

- Veamos que a y b no pueden ser ambos pares:

  Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que ambos son pares, esto es, que existen m y $n \in \mathbb{N}^*$ tales que $a = 2m$ y $b = 2n$. Entonces:

  $$a^2 + b^2 = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4(m^2 + n^2) = c^2$$

  Por el resultado auxiliar, como c^2 es par, tenemos que c también lo es. Consecuentemente, $mcd(a, b, c) \geq 2$ y llegamos a contradición con que $mcd(a, b, c) = 1$.

- Veamos que a y b no pueden ser ambos impares:

  Razonemos nuevamente por reducción al absurdo y supongamos que ambos son impares, esto es, que existen m y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$. Entonces:

  $$a^2+b^2 = (2m+1)^2+(2n+1)^2 = 4m^2+1+4m+4n^2+1+4n = 4(m^2+n^2+m+n)+2 = c^2$$

  Así, tenemos que $c^2 \equiv 2 \ (mod\ 4)$. Por otra parte, por el resultado auxiliar, como c^2 es par, tenemos que c también es par, luego existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $c = 2s$, de donde $c^2 = 4s^2$, es decir, $c^2 \equiv 0 \ (mod\ 4)$ y hemos llegado a contradicción. $\square$

Por el resultado anterior, dada una terna pitagórica primitiva (a, b, c), podemos suponer sin pérdida de generalidad, que a es impar y b es par. Además, notemos que c es necesariamente impar, ya que, en caso contrario, c^2 también sería par pero como a^2+b^2 es impar, llegaríamos a un absurdo.

Teorema 1.14. *La terna (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva si, y sólo si,*

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

con m y n verificando las siguientes condiciones:

I. $m, n \in \mathbb{N}^*$

II. $m > n$

III. $mcd(m, n) = 1$

IV. $m + n \equiv 1 \ (mod\ 2)$

Para demostrar el teorema, detallaremos la demostración del teorema 1 de [9], que se encuentra en el capítulo 2, *Obtaining primitive pythagorean triangles.*

Demostración. Probemos el resultado por doble implicación.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Por la Proposición 1.11 sabemos que la terna $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ es una terna pitagórica, luego basta ver que es además primitiva.

Si $mcd(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = d > 1$, entonces d tiene que ser impar porque $a = m^2 - n^2$ y $c = m^2 + n^2$ son impares (por la condición IV). Sin embargo, si d divide a $(m^2 - n^2)$ y d divide a

$(m^2 + n^2)$, entonces, d divide a su suma y a su diferencia, esto es, d divide a $2m^2$ y a $2n^2$, y como d es impar, tendría que dividir a m^2 y a n^2. Pero como m y n no tienen factores en común, tenemos que m^2 y n^2 tampoco, y llegamos a contradicción.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea (a, b, c) una terna pitagórica primitiva con a impar. Veamos que la terna es de la forma $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ con m y n verificando las condiciones I a IV.

Sabemos que la terna (a, b, c) verifica $a^2 + b^2 = c^2$, o, equivalentemente:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) \tag{2}$$

Además, como a y c son impares, tenemos que $c + a$ y $c - a$ son pares, es decir, existen x e $y \in \mathbb{N}^*$ tales que:

$$c + a = 2x \qquad\qquad c - a = 2y \tag{3}$$

de donde,

$$c = x + y \qquad\qquad a = x - y \tag{4}$$

Veamos que $mcd(x, y) = 1$:

> Si $mcd(x, y) = d > 1$, entonces tendríamos que d dividiría a la suma $x + y = c$ y a la diferencia $x - y = a$, esto es, d dividiría a c y a a, y por ende, d dividiría a $c + a = 2x$ y $c - a = 2y$. Consecuentemente, por (2), d^2 dividiría a b^2 y d dividiría a b. Así, d sería un factor común para a y b, lo cual es imposible ya que $mcd(a, b) = 1$ (puesto que si $mcd(a, b) = \tilde{d} > 1$, tendríamos que $\tilde{d}^2$ dividiría a c^2 y en consecuencia, $\tilde{d}$ dividiría a c. Llegando a contradicción con que $mcd(a, b, c) = 1$).

Por otra parte, como b es par (por la Proposición 1.13 y porque habíamos supuesto a impar), existe $z \in \mathbb{N}^*$ tal que $b = 2z$. Y por (2) y (3), obtenemos:

$$4z^2 = b^2 = (c + a)(c - a) = 2x2y = 4xy$$

Es decir, $z^2 = xy$. Como x e y son coprimos y su producto es un cuadrado, existen m y $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x = m^2$ e $y = n^2$. En consecuencia, por (4), tenemos que $c = m^2 + n^2$ y $a = m^2 - n^2$. Veamos que $b = 2mn$. Por (2),

$$b^2 = (c + a)(c - a) = 4m^2n^2$$

de donde $b = 2mn$. Finalmente, conseguimos la expresión buscada para (a, b, c):

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

Ahora veamos que se verifican las condiciones I a IV:

I. $m, n \in \mathbb{N}^*$ por construcción.

II. $m > n$ ya que $a = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ es positivo.

III. $mcd(m,n)=1$ ya que si $mcd(m,n)=d>1$, entonces, $d^2>1$ sería un factor común para x e y, contradiciendo que $mcd(x,y)=1$.

IV. $m+n\equiv 1\ (mod\ 2)$ ya que si m y n fueran ambos pares, llegaríamos a absurdo con que $mcd(a,b,c)=1$ y si fueran ambos impares, tendríamos que $m^2-n^2=a$ sería par y habíamos supuesto que a era impar.

□

Observación 1.15.
- *No toda terna pitagórica de la forma* $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ *es primitiva. Por ejemplo, si tomamos* $(m,n)=(4,2)$*, obtenemos la terna pitagórica* $(12,16,20)$ *que no es primitiva.*
- *No toda terna pitagórica es de la forma* $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$ *con* $m,n\in\mathbb{N}^*$*. Por ejemplo, la terna pitagórica* $(9,12,15)$ *no puede escribirse de esa forma. Si pudiera, existirían* $m,n\in\mathbb{N}^*$ *tales que* $9=m^2-n^2$ *y* $15=m^2+n^2$ *por lo que sumando las ecuaciones, llegaríamos a* $24=2m^2$*, de donde* $12=m^2$*, lo cual es absurdo pues* $m\in\mathbb{N}^*$*.*

Notación 1.16. *En las condiciones del teorema anterior (Teorema 1.14), diremos que el par* (m,n) *define la terna pitagórica primitiva* $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$*.*

Ejemplo 1.17. *Por el teorema anterior (Teorema 1.14), los pares* $(2,1)$*,* $(4,1)$ *y* $(6,1)$ *definen las siguientes ternas pitagóricas primitivas respectivamente:* $(3,4,5)$*,* $(15,8,17)$ *y* $(35,12,37)$*.*

Capítulo 2

Ternas pitagóricas y matrices

En este capítulo introduciremos dos nociones distintas que relacionan las ternas pitagóricas con las matrices.

Primero, estudiaremos las matrices que preservan ternas pitagóricas, es decir, las matrices H de 3 filas y 3 columnas con entradas números enteros, tales que para toda terna pitagórica (a, b, c), verifican que $(a, b, c)H$ es también una terna pitagórica. Como vimos en el capítulo anterior, toda terna pitagórica tiene asociada una terna pitagórica primitiva, por lo que nos centraremos en estudiar las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas, estas son, las matrices H tales que para toda terna pitagórica primitiva (a, b, c), $(a, b, c)H$ es también una terna pitagórica primitiva. Veremos que todas ellas, son de la forma

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

con $r, s, t, u \in \mathbb{Z}$.

Posteriormente, hablaremos de matrices cuadradas de tamaño n, con $n \in \mathbb{N}^*$ y entradas números racionales, las cuales verifican ellas mismas la relación de Pitágoras, es decir, las ternas de matrices cuadradas de tamaño n, (A, B, C), que cumplan que $A^2 + B^2 = C^2$.

2.1. Matrices que preservan ternas pitagóricas

Introduzcamos la noción de matrices que preservan ternas pitagóricas con un ejemplo trivial. Si tomamos H la matriz identidad de tamaño 3, tenemos trivialmente que para toda terna pitagórica (a, b, c), se verifica que $(a, b, c)H = (a, b, c)$, es decir, nos devuelve la misma terna que es pitagórica por hipótesis. Veamos ahora otro ejemplo no tan trivial. Consideremos la siguiente matriz H

$$H = \begin{pmatrix} -15 & -10 & -18 \\ 26 & 15 & 30 \\ 30 & 18 & 35 \end{pmatrix}$$

y la terna pitagórica primitiva $(3, 4, 5)$.

Al multiplicar $(3, 4, 5)H$ obtenemos la terna $(209, 120, 241)$. Notemos que esta terna es pitagórica ya que verifica la ecuación (1), pero no sólo eso, dado que 241 es primo, y mayor que 209 y 120, la terna es además una terna pitagórica primitiva. Nos preguntamos si toda terna pitagórica primitiva multiplicada por esta matriz dará como resultado otra terna pitagórica primitiva. Además, a partir de esta cuestión, surge de manera natural la duda de si se podrían construir otras matrices de tamaño 3 por 3 que preserven ternas pitagóricas primitivas. Asimismo, dado que la matriz H tiene alguna entrada negativa, será necesario trabajar con matrices de entradas número enteros y no sólo números enteros positivos como hasta ahora. Estas cuestiones sirven de motivación para el desarrollo de este apartado.

Recordemos que toda terna pitagórica tiene asociada una terna pitagórica primitiva, luego en este apartado nos restringiremos a la búsqueda de matrices de 3 filas y 3 columnas con entradas números enteros que preserven ternas pitagóricas primitivas. Para ello, seguiremos las ideas presentadas en [2].

Notación 2.1. *Denotamos el conjunto de matrices de 3 filas y 3 columnas con entradas números enteros, como* $M_3(\mathbb{Z})$.

Definición 2.2. ***(Matriz que preserva ternas pitagóricas)*** *Sea* $H \in M_3(\mathbb{Z})$*, decimos que* H *es una matriz que preserva ternas pitagóricas si para cualquier terna pitagórica* $X = (a, b, c)$*, tenemos que* XH *es también una terna pitagórica.*

Observación 2.3. *Aunque en este trabajo hemos optado por definir las matrices que preservan ternas pitagóricas como las que verifican que dada una terna pitagórica* X*,* XH *es terna pitagórica, el estudio de estas matrices se haría de manera análoga si en la definición tomásemos* HX^T.

Definición 2.4. ***(Matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas)*** *Sea* $H \in M_3(\mathbb{Z})$*, decimos que* H *es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas si para cualquier terna pitagórica primitiva* $X = (a, b, c)$*, tenemos que* XH *es también una terna pitagórica primitiva.*

Como ya mencionado previamente, toda terna pitagórica tiene asociada una terna pitagórica primitiva luego nos centraremos en estudiar las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas, pues estas en particular, preservan ternas pitagóricas.

Proposición 2.5. *Sean* $r, s, t, u \in \mathbb{Z}$*,* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *y* $H \in M_3(\mathbb{Z})$ *con*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)H = (M^2 - N^2, 2MN, M^2 + N^2)$$

donde $M = mr + nt$ *y* $N = ms + nu$.

Demostración. La demostración de esta proposición se basa en una mera serie de cuentas mostrada a continuación. Para simplificar la notación, denotamos la columna i-ésima de H como C_i y la terna $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ como X. Así, veamos que se verifica la igualdad planteada en la proposición columna a columna:

Primera columna:

$$\begin{aligned}
X\ C_1 &= \frac{(m^2-n^2)\ [(r^2-t^2)-(s^2-u^2)]}{2} + 2mn(rt-su) \\
&\quad + \frac{(m^2+n^2)\ [(r^2+t^2)-(s^2+u^2)]}{2} \\
&= \frac{m^2}{2}[r^2-t^2-s^2+u^2+r^2+t^2-s^2-u^2] + 2mn(rt-su) + \\
&\quad + \frac{n^2}{2}[-r^2+t^2+s^2-u^2+r^2+t^2-s^2-u^2] = \\
&= m^2(r^2-s^2)+n^2(t^2-u^2)+2mnrt-2mnsu = \\
&= (m^2r^2+n^2t^2+2mrnt)-(m^2s^2+n^2u^2+2mnsu) = \\
&= (mr+nt)^2-(ms+nu)^2 = M^2-N^2
\end{aligned}$$

Segunda columna:

$$\begin{aligned}
X\ C_2 &= (m^2-n^2)(rs-tu)+2mn(ru+st)+(m^2+n^2)(rs+tu) = \\
&= m^2rs-m^2tu-n^2rs+n^2tu+2mnru+2mnst+ \\
&\quad +m^2rs+m^2tu+n^2rs+n^2tu = \\
&= 2(m^2rs+n^2tu+mnru+mnst) = \\
&= 2(mr+nt)(ms+nu) = 2MN
\end{aligned}$$

Tercera columna:

$$\begin{aligned}
X\ C_3 &= \frac{(m^2-n^2)\ [(r^2-t^2)+(s^2-u^2)]}{2} + \\
&\quad +2mn(rt+su) + \frac{(m^2+n^2)\ [(r^2+t^2)+(s^2+u^2)]}{2} = \\
&= \frac{m^2}{2}(r^2-t^2+s^2-u^2+r^2+t^2+s^2+u^2) + 2mn(rt+su) + \\
&\quad + \frac{n^2}{2}(-r^2+t^2-s^2+u^2+r^2+t^2+s^2+u^2) = \\
&= m^2(r^2+s^2)+n^2(t^2+u^2)+2mn(rt+su) = \\
&= (m^2r^2+n^2t^2+2mnrt)+(m^2s^2+n^2u^2+2mnus) \\
&= (mr+nt)^2+(ms+nu)^2 = M^2+N^2
\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.6. *Las identidades $M = mr + nt$, $N = ms + nu$ se pueden escribir matricialmente de la siguiente manera:*

$$(m,n)\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M, N \end{pmatrix}$$

Buscamos condiciones suficientes sobre r, s, t y $u \in \mathbb{Z}$ tales que la matriz H de la proposición anterior (Proposición 2.5), preserve ternas pitagóricas primitivas. Con este propósito, presentamos el siguiente resultado (enunciado en [2]), cuya demostración es propia del trabajo.

Teorema 2.7. *Sean $r, s, t, u \in \mathbb{Z}$ tales que:*

H.1. $r, s \in \mathbb{N}^*$, $r + t \geq 0$ *y* $s + u \geq 0$

H.2. $r + t \geq s + u \geq 0$

H.3. $det \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \pm 1$

H.4. $r + s \equiv 1 \ (mod\ 2)$ *y* $t + u \equiv 1 \ (mod\ 2)$

Entonces,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas.

Demostración. Sea $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ con m y n verificando las condiciones I a IV del Teorema 1.14, es decir, la terna es una terna pitagórica primitiva. Por la Proposición 2.5, tenemos que

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)H = (M^2 - N^2, 2MN, M^2 + N^2)$$

con $M = mr + nt$ y $N = ms + nu$.

Veamos que M y N verifican las condiciones I a IV del Teorema 1.14. (Y por ende, $(M^2 - N^2, 2MN, M^2 + N^2)$ será también una terna pitagórica primitiva.)

I. Veamos que M y $N \in \mathbb{N}^*$. Dado que m y n verifican I, por H.1. y II, tenemos:

$$\begin{array}{lllllllll} M & = & mr + nt & > & nr + nt & = & n(r + t) & \geq & 0 \\ N & = & ms + nu & > & ns + nu & = & n(s + u) & \geq & 0 \end{array}$$

II. Veamos que $M > N$, o equivalentemente, $M - N > 0$. Por II y H.2., obtenemos trivialmente el resultado:

$$M - N = (mr + nt) - (ms + nu) = m(r - s) + n(t - u) > n((r - s) + (t - u)) \geq 0$$

III. Probemos que $mcd(M, N) = 1$. Denotamos J a la matriz $J = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$.

- Por III, $mcd(m, n) = 1$, luego por la Identidad de Bézout [1], existen a y $b \in \mathbb{Z}$ tales que $(m, n) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ma + nb = 1$.

[1]**Identidad de Bézout**: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $d = mcd(a, b)$. Entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $sa + tb = d$. Llamamos a esta identidad la Identidad de Bézout.

- Recordemos que si $det(J) \neq 0$, entonces, definíamos la inversa de J en $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como $J^{-1} = \frac{Adj(J^T)}{detJ}$ donde $Adj(J^T)$ es la matriz adjunta de J^T, la matriz traspuesta de J. Por H.3. tenemos que $detJ = \pm 1$, y como $Adj(J^T)$ tiene entradas de números enteros, entonces J es invertible en $Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.
- Consideramos el vector $y^T = J^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Notemos que y^T tiene como entradas números enteros por ser producto de una matriz y un vector, ambos con coeficientes enteros.

En consecuencia,

$$1 = (m,n)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (m,n)(JJ^{-1})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (M,N)y^T$$

Luego, nuevamente por la Identidad de Bézout, concluimos que $mcd(M,N) = 1$

IV. Veamos que $M + N \equiv 1 \ (mod\ 2)$. Por H.4. y IV, tenemos:

$$M + N \equiv mr + nt + ms + nu \equiv m(r+s) + n(t+u) \equiv m + n \equiv 1 \ (mod\ 2)$$

Concluimos que H es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas.

$\square$

Ejemplo 2.8. *Veamos un ejemplo de una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas utilizando el resultado previo (Teorema 2.7).*

Consideremos

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que r, s, t y u verifican las condiciones H.1. a H.4. del Teorema 2.7:

H.1. $r, s \in \mathbb{N}^*$. $r + t = 11 \geq 0$, $s + u = 3 \geq 0$

H.2. $11 = r + t \geq s + u = 3 \geq 0$

H.3. $det\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 7 = 1$

H.4. $r + s = 5 \equiv 1 \ (mod\ 2)$ *y* $t + u = 9 \equiv 1 \ (mod\ 2)$

Por el Teorema 2.7, tenemos que

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -10 & -18 \\ 26 & 15 & 30 \\ 30 & 18 & 35 \end{pmatrix}$$

es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas.

Por ejemplo, dada la terna pitagórica primitiva $(3,4,5)$, *obtenemos* $(3,4,5)H = (209,120,241)$ *otra terna pitagórica primitiva. Este es el ejemplo que hemos escogido para motivar el desarrollo de este apartado al principio del mismo.*

Hemos visto que las condiciones H.1. a H.4. del Teorema 2.7 son suficientes para que la matriz H sea una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas. Sin embargo, dichas condiciones no son todas necesarias, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9. *Seguimos el ejemplo presentado en [1] p.165 y consideramos*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que r, s, t *y* u *verifican las condiciones H.1., H.2. y H.4. del Teorema 2.7, pero no verifican la condición H.3., ya que:*

$$det \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq \pm 1$$

Sin embargo, para dichos valores de r, s, t *y* u, *probaremos que la matriz* H *definida en la proposición 2.5, es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas.*

Sean m *y* n *verificando las condiciones* I *a* IV *del Teorema 1.14 (el par* (m,n) *define una terna pitagórica primitiva), veamos que,* $M = mr + nt$ *y* $N = ms + nu$ *verifican también las condiciones* I *a* IV *del Teorema 1.14.*

Como vimos en la demostración del Teorema 2.7, por H.1.,H.2. y H.4., tenemos que M *y* N *verifican las condiciones* I, II *y* IV. *Veamos que verifican también la condición* III.

$$(m,n) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2m, m+n) = (M,N)$$

Tenemos que $mcd(M,N) = mcd(2m, m+n)$. *Sabemos que* $m + n \equiv 1 \pmod 2$, *luego* $m+n$ *es impar. Así,* $mcd(2m, m+n)$ *es impar. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que* $mcd(2m, m+n) = d > 1$, *entonces,* d *divide a* $2m$ *y a* $m+n$. *Como* d *es impar,* d *divide a* m, *luego* d *divide a la diferencia* $m + n - m = n$, *llegando a contradicción con que* $mcd(m,n) = 1$.

Así, (M,N) *define una terna pitagórica primitiva y tenemos que*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas.

A continuación, veremos que lo que sí que podremos asegurar, gracias al siguiente resultado (Teorema 2.10), es que toda matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas es de cierta manera.

Teorema 2.10. *Sea H una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas, entonces, H es de la forma*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs-tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt-su & ru+st & rt+su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs+tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

Demostración. Como $H \in M_3(\mathbb{Z})$ entonces,

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

con $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{Z}$ para todo $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. Puesto que H preserva ternas pitagóricas primitivas, para todo (m, n) verificando las condiciones I a IV del Teorema 1.14, tenemos

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)H = (M^2 - N^2, 2MN, M^2 + N^2) \tag{5}$$

con (M, N) definiendo también una terna pitagórica primitiva. Como $mcd(m, n) = 1$, por la Identidad de Bézout, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ con

$$1 = mx + ny \tag{6}$$

Multiplicamos la ecuación (6) por M: $M = mr + nt$ con $r, t \in \mathbb{Z}$.
Multiplicamos la ecuación (6) por N: $N = ms + nu$ con $s, u \in \mathbb{Z}$.
Entonces,

$$M^2 = m^2(r^2) + 2mn(rt) + n^2(t^2) \tag{7}$$

$$N^2 = m^2(s^2) + 2mn(su) + n^2(u^2) \tag{8}$$

Así, por las ecuaciones (7) y (8), obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} M^2 - N^2 &= m^2(r^2 - s^2) + 2mn(rt - su) + n^2(t^2 - u^2) = \\ &= (m^2, 2mn, n^2) \begin{pmatrix} r^2 - s^2 \\ rt - su \\ t^2 - u^2 \end{pmatrix} \\ 2MN &= 2(mr + nt)(ms + nu) = m^2(2rs) + 2mn(ru + ts) + n^2(2tu) = \\ &= (m^2, 2mn, n^2) \begin{pmatrix} 2rs \\ ru + ts \\ 2tu \end{pmatrix} \\ M^2 + N^2 &= m^2(r^2 + s^2) + 2mn(rt + su) + n^2(t^2 + u^2) = \\ &= (m^2, 2mn, n^2) \begin{pmatrix} r^2 + s^2 \\ rt + su \\ t^2 + u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos la siguiente igualdad,

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = (m^2, 2mn, n^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para simplificar notación, denotamos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} r^2 - s^2 & 2rs & r^2 + s^2 \\ rt - su & ru + ts & rt + su \\ t^2 - u^2 & 2tu & t^2 + u^2 \end{pmatrix}$$

Así, sustituyendo en la ecuación (5), tenemos la siguiente ecuación:

$$(m^2, 2mn, n^2)BH = (m^2, 2mn, n^2)\widetilde{H} \tag{9}$$

Notemos que esta ecuación se verifica para todo par (m, n) que verifique las condiciones del Teorema 1.14.

Veamos ahora que $BH = \widetilde{H}$.

Denotamos $C = BH$. Como las matrices $C, \widetilde{H} \in M_3(\mathbb{Z})$, entonces son de la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

con c_{ij} y h_{ij} números enteros para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Así, multiplicando por la primera columna en ambos lados de la ecuación (9), obtenemos la siguiente igualdad para cada par (m, n) verificando las condiciones anteriores:

$$m^2 c_{11} + 2mnc_{21} + n^2 c_{31} = m^2 h_{11} + 2mnh_{21} + n^2 h_{31}$$

O equivalentemente,

$$0 = m^2(c_{11} - h_{11}) + 2mn(c_{21} - h_{21}) + n^2(c_{31} - h_{31})$$

Definimos $x = c_{11} - h_{11}$, $y = c_{21} - h_{21}$ y $z = c_{31} - h_{31}$. Basta tomar m, n concretos (y verificando el Teorema 1.14) para crear un sistema lineal homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya única solución sea $x = y = z = 0$.

$$\begin{array}{ll} m = 2, n = 1 & 4x + 4y + z = 0 \\ m = 4, n = 1 & 16x + 8y + z = 0 \\ m = 6, n = 1 & 36x + 12y + z = 0 \end{array}$$

Calculamos el determinante del sistema lineal

$$det\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 16 & 8 & 1 \\ 36 & 12 & 1 \end{pmatrix} = -32 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo, tenemos que la única solución es la trivial, es decir $x = y = z = 0$ o equivalentemente, $c_{11} = h_{11}, c_{21} = h_{21}$ y $c_{31} = h_{31}$. Razonando de manera análoga para las otras dos columnas, concluimos que $BH = \widetilde{H}$.
Calculamos la inversa de B y obtenemos la siguiente matriz:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por B^{-1} a izquierdas de ambos lados de la igualdad $BH = \widetilde{H}$ y vemos que H tiene la forma deseada.

$$H = B^{-1}\widetilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{(r^2-t^2)-(s^2-u^2)}{2} & rs - tu & \frac{(r^2-t^2)+(s^2-u^2)}{2} \\ rt - su & ru + st & rt + su \\ \frac{(r^2+t^2)-(s^2+u^2)}{2} & rs + tu & \frac{(r^2+t^2)+(s^2+u^2)}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora solo falta ver que todas las entradas son enteras. Tenemos que $\alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ y γ_2 son trivialmente enteros por ser producto y suma de números enteros. Queremos ver que $\alpha_1, \alpha_3, \gamma_1$ y γ_3 también lo son, para ello, basta probar que los numeradores de cada uno son pares, o equivalentemente, congruentes con 0 módulo 2.

Operando en la primera columna de la ecuación (5), tenemos

$$M^2 - N^2 \quad = \quad (m^2 - n^2)\alpha_1 + (2mn)\beta_1 + (m^2 + n^2)\gamma_1$$

Dado que $M + N \equiv 1\ (mod\ 2)$, tenemos que $M^2 - N^2 \equiv M^2 + N^2 \equiv 1\ (mod\ 2)$. Asimismo, puesto que $m + n \equiv 1\ (mod\ 2)$, tenemos que $m^2 - n^2 \equiv m^2 + n^2 \equiv 1\ (mod\ 2)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 1 \ &\equiv \ M^2 - N^2 \ \equiv \alpha_1 + \gamma_1 \equiv \quad r^2 - s^2 \ \equiv r^2 + s^2\ (mod\ 2) \\ 1 \ &\equiv \ M^2 - N^2 \ \equiv \alpha_1 - \gamma_1 \equiv \ -t^2 + u^2 \ \equiv t^2 + u^2\ (mod\ 2) \end{aligned}$$

Así, se obtiene trivialmente que $\alpha_1, \alpha_3, \gamma_1$ y γ_3 son enteros pues

$$(r^2 - t^2) - (s^2 - u^2) \equiv (r^2 - t^2) + (s^2 - u^2) \equiv (r^2 + t^2) - (s^2 + u^2) \equiv (r^2 + t^2) + (s^2 + u^2) \equiv 0\ (mod\ 2)$$

□

Ejemplo 2.11. *La matriz identidad de tamaño 3 es el ejemplo trivial de matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas, pues para toda terna pitagórica primitiva, la identidad nos devuelve la misma* *terna. Esta matriz se obtiene tomando los siguientes valores para r, s, t y u.*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 2.12. *A continuación, enumeraremos una serie de observaciones sobre el Teorema 2.10. Además, nos referiremos a las matrices de la forma del Teorema 2.10 como matrices de la forma H.*

1. *Con la notación precedente, y por la demostración del Teorema 2.10, tenemos que la condición H.4 del Teorema 2.7, $r + s \equiv 1 \pmod 2$ y $t + u \equiv 1 \pmod 2$, es además necesaria.*

2. *Aunque el Teorema 2.10 esté enunciado en [2] p.104, no hemos seguido la demostración dada en el artículo, sino que hemos elaborado una demostración propia tomando ideas de la demostración del teorema 4.4 de [10] pp. 9-11 para el caso de matrices de aplicaciones proyectivas.*

3. *En [2] se enuncia el teorema 1 de caracterización de las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas como consecuencia de los Teoremas 2.7 y 2.10. Este enunciado es impreciso, pues no se tiene tal caracterización: el Teorema 2.7 da condiciones suficientes para que una matriz de la forma H preserve ternas pitagóricas; y el Teorema 2.10 prueba que toda matriz que preserva ternas pitagóricas es de la forma H. De hecho, en el Ejemplo 2.9 se muestra una matriz que preserva ternas pitagóricas primitivas y no verifica las condiciones del Teorema 2.7. Más aún, se puede construir una matriz de la forma H que no cumpla las condiciones suficientes y que no preserve ternas pitagóricas primitivas (Ejemplo 2.13), lo cual prueba que las matrices de la forma H, no caracterizan las matrices que preservan ternas pitagóricas primitivas.*

Ejemplo 2.13. *Veamos una matriz de la forma H del Teorema 2.7 que no preserva ternas pitagóricas primitivas. Tomando $r = s = t = u = 1$ obtenemos la siguiente matriz*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, $(3, 4, 5)H = (0, 18, 18)$ que no es si quiera terna pitagórica.

2.2. Ternas pitagóricas de matrices

Para introducir el concepto de matrices pitagóricas, veamos primero el siguiente ejemplo. Consideremos las siguientes matrices de tamaño 2 por 2 y con entradas números racionales:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{59}{12} & \frac{5}{3} \\ \frac{-15}{4} & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{13}{12} & \frac{19}{3} \\ \frac{15}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los cuadrados de estas matrices:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2581}{144} & \frac{115}{36} \\ \frac{-115}{16} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} \frac{3589}{144} & \frac{475}{36} \\ \frac{125}{16} & \frac{99}{4} \end{pmatrix}$$

Y notemos que se verifica la siguiente igualdad

$$A^2 + B^2 = C^2$$

la cual tiene una expresión semejante a la de (1), la relación de Pitágoras. En consecuencia, diremos que la terna (A, B, C) es una terna pitagórica de matrices.

Nos preguntamos si en el conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con $n \in \mathbb{N}^*$ y con entradas números racionales, podemos construir ternas pitagóricas de matrices.

En este apartado, generalizaremos la noción de ternas pitagóricas a ternas pitagóricas de matrices con entradas números racionales. Además, construiremos algunas de ellas siguiendo las ideas planteadas en [3]. Cabe mencionar que en este apartado trabajaremos con vectores columna siguiendo la notación de [3].

Notación 2.14. *Al conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con entradas números racionales lo denotaremos $M_n(\mathbb{Q})$.*

Definición 2.15. ***(Terna pitagórica de matrices)*** *Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{Q})$, se dice que (A, B, C) es una terna pitagórica de matrices si $A^2 + B^2 = C^2$.*

Ejemplo 2.16. *Veamos el ejemplo trivial. Sean*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

con (a_i, b_i, c_i) terna pitagórica para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Tenemos que (A, B, C) es terna pitagórica de matrices.

Antes de introducir una manera de construir ternas pitagóricas de matrices, veamos primero el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2.17. *Sea $U \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que*

1. *Los valores propios λ_j con $j \in \{1, ..., n\}$ de U satisfacen: $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ con $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

2. *Los vectores propios de U forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.*

Entonces, para todo $P \in M_n(\mathbb{Q})$, existe una única matriz $V \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que $P = 2(UV + VU)$.

Demostración. <u>Existencia.</u> Llamaremos x_j a los vectores propios de U correspondientes a los valores propios λ_j con $j = 1, ..., n$. Dado que $\{x_j\}_{j=1,...,n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ (por 2.), para encontrar la matriz V, consideramos los siguientes sistemas:

$$2(UV + VU)x_j = Px_j \qquad\qquad j = 1, ..., n$$

Notemos que dado que x_j es un vector propio de U, obtenemos las siguientes igualdades:

$$(UV + VU)x_j = U(Vx_j) + \lambda_j Vx_j = (U + \lambda_j I)Vx_j \qquad\qquad \forall\ j = 1, ..., n$$

con I la matriz identidad de tamaño n.

Veamos ahora que las matrices $U + \lambda_j I$ son invertibles para todo $j = 1, ..., n$. Para ello, notemos que los vectores x_i con $i = 1, ..., n$, son también vectores propios de $U + \lambda_j I$.

$$(U + \lambda_j I)x_i = \lambda_i x_i + \lambda_j x_i = (\lambda_i + \lambda_j)x_i$$

Así, los valores propios de la matriz $U + \lambda_j I$ son de la forma $\lambda_i + \lambda_j$ con $i = 1, ..., n$ que son no nulos por la condición 1., y por ende, la matriz $U + \lambda_j I$ es invertible para todo $j = 1, ..., n$.

Ahora, consideramos la siguiente igualdad:

$$2Vx_j = (U + \lambda_j I)^{-1} Px_j$$

y definimos los vectores y_j de la siguiente manera:

$$y_j = (U + \lambda_j I)^{-1} Px_j \tag{10}$$

Por los sistemas de la forma $2Vx_j = y_j$, tenemos que:

$$2VX = Y$$

donde $X = [x_1|x_2|...|x_n]$ e $Y = [y_1|y_2|...|y_n]$.
Notemos además, que X es invertible por la segunda condición.

Finalmente, definimos la matriz V:

$$V = \frac{1}{2} YX^{-1} \tag{11}$$

<u>Unicidad.</u> Sea $\tilde{V} \in M_n(\mathbb{Q})$ tal que $P = 2(U\tilde{V} + \tilde{V}U)$, es decir,

$$2(UV + VU) = 2(U\tilde{V} + \tilde{V}U) \tag{12}$$

Como $\{x_j\}_{j=1,...,n}$ es base de $\mathbb{R}^n$, para demostrar la unicidad de la matriz V, basta ver que

$$Vx_j = \tilde{V}x_j \qquad \forall j = 1, ..., n$$

Por (12), tenemos que $UV + VU = U\tilde{V} + \tilde{V}U$. Entonces,

$$(UV + VU)x_j = (U\tilde{V} + \tilde{V}U)x_j \qquad \forall j = 1, ..., n$$

O equivalentemente,

$$UVx_j + \lambda_j Vx_j = U\tilde{V}x_j + \lambda_j \tilde{V}x_j \qquad \forall j = 1, ..., n$$

Nuevamente, por la propiedad distributiva,

$$(U + \lambda_j I)Vx_j = (U + \lambda_j I)\tilde{V}x_j \qquad \forall j = 1, ..., n$$

Multiplicando por $(U + \lambda_j I)^{-1}$ a izquierdas de ambos lados de la igualdad, tenemos finalmente:

$$Vx_j = \tilde{V}x_j \qquad \forall j = 1, ..., n$$

como queríamos ver. $\square$

Teorema 2.18. *Sea $P \in M_n(\mathbb{Q})$, entonces existen A, $C \in M_n(\mathbb{Q})$ tales que $P = C^2 - A^2$.*

Demostración. Sea $X \in M_n(\mathbb{Q})$ una matriz invertible, y $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$ una matriz diagonal que satisfaga la condición 1 del Lema 2.17. Consideramos la matriz $U = X\Lambda X^{-1}$ y veamos que verifica las hipótesis del Lema 2.17. Primero notemos que λ_j con $j = 1, ..., n$ son los valores propios de U con x_j vector propio asociado a dicho valor propio, donde x_j es la columna j-ésima de la matriz X:

$$Ux_j = X\Lambda X^{-1}x_j = X\Lambda e_j = \lambda_j Xe_j = \lambda_j x_j$$

Así, tenemos que se verifican las hipótesis del Lema 2.17:

1. Puesto que U y Λ tienen los mismos valores propios, los valores propios de U verifican trivialmente que $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ con $i, j \in \{1, ..., n\}$.

2. Como X es invertible, tenemos que tiene rango máximo, luego $\{x_j\}_{j=1,...n}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

Por otra parte, tomamos V la matriz dada en (11), esto es, $V = \frac{1}{2}YX^{-1}$ con $Y = [y_1|y_2|...|y_n]$ donde $y_j = (U + \lambda_j I)^{-1}Px_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.
Por el Lema 2.17, tenemos que $P = 2(UV + VU)$.

Además, notemos que se verifican las siguientes igualdades:

$$(U+V)^2 = U^2+V^2+UV+VU = U^2+V^2+2UV+2VU-UV-VU = (U-V)^2+2UV+2VU$$

de donde tenemos que $(U+V)^2-(U-V)^2 = 2(UV+VU) = P$.
Consecuentemente, basta tomar $C = U+V$ y $A = U-V$. □

Este resultado, nos permite construir una terna pitagórica de matrices a partir de cualquier matriz cuadrada con entradas números racionales de nuestra elección. Es decir, basta considerar una matriz $B \in M_n(\mathbb{Q})$ y tomar como P del teorema, el cuadrado de la matriz B. Entonces, el teorema nos asegura que existirán A y $C \in M_n(\mathbb{Q})$ tales que $B^2 = C^2 - A^2$, o equivalentemente, $A^2+B^2 = C^2$. Así, la terna (A,B,C) será una terna pitagórica de matrices.

Corolario 2.19. *Dado $B \in M_n(\mathbb{Q})$, y considerando $P = B^2$, y A y C del Teorema 2.18, entonces (A,B,C) es una terna pitagórica de matrices.*

Apoyándonos en los resultados previos, presentamos en el siguiente ejemplo una construcción de una terna pitagórica de matrices a partir de una matriz $B \in M_n(\mathbb{Q})$ dada.

Ejemplo 2.20. *Sea*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Siguiendo la notación precedente, denotamos $P = B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$. *Tomamos* $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y notemos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$ son los valores propios de la matriz. Obervamos que Λ verifica la condición 1 del Lema 2.17 trivialmente. Consideramos* $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y definimos*

$X = [x_1|x_2] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *invertible por ser de rango máximo.*
Ahora bien, siguiendo la demostración del Teorema 2.18, consideramos:

$$U = X\Lambda X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Asimismo, definimos $Y = [y_1|y_2]$ como en la demostración del Lema 2.17, donde, por (10), y_1 e y_2 son los siguientes:

$$y_1 = (U+\lambda_1 I)^{-1} P x_1 = \begin{pmatrix} \frac{-23}{6} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = (U + \lambda_2 I)^{-1} P x_2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

Siguiendo dicha demostración, por (11), obtenemos V:

$$V = \frac{1}{2} Y X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-23}{12} & \frac{7}{3} \\ \frac{15}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, definimos C y A de la siguiente manera:

$$C = U + V = \begin{pmatrix} \frac{13}{12} & \frac{19}{3} \\ \frac{15}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = U - V = \begin{pmatrix} \frac{59}{12} & \frac{5}{3} \\ \frac{-15}{4} & -3 \end{pmatrix}$$

Así, por los resultados precedentes, tenemos que (A, B, C) es una terna pitagórica de matrices. Este es el ejemplo que hemos utilizado como motivación de este apartado.

Capítulo 3

Superficies pitagóricas

En el capítulo anterior, ya extendimos la noción de terna pitagórica a matrices. En este capítulo, pretendemos ir un poco más allá en una dirección geométrica y buscamos extender la noción de terna pitagórica a superficies regulares. Diremos que una superficie regular S es pitagórica (Definición 3.40) cuando, para todo punto p de la superficie, se verifica la siguiente igualdad:

$$g_p^2 + L_p^2 = III_p^2$$

donde g_p, L_p y III_p son las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental de la superficie en p respectivamente. Además, veremos que dicha definición no depende de la base del plano tangente a la superficie S en el punto p, T_pS escogida (consecuencia de la Proposición 3.36). Además, terminaremos el capítulo demostrando que las únicas superficies pitagóricas son las esferas (o partes de ellas) de radio $R = \sqrt{\Phi}$ donde $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, el conjugado del número de oro.

3.1. Superficies regulares

En este apartado, presentaremos algunos conceptos clave de Geometría de Superficies con el fin de introducir de manera más clara la noción de Superficie Pitagórica. Para ello, seguiremos principalmente las definiciones y notación presentadas en [6], Capítulo 14, titulado *Superficies en el Espacio de Dimensión 3*; y en [7], Capítulos 7 a 10 que hablan sobre el concepto de superficie, formas fundamentales, curvatura normal, curvaturas y direcciones principales. Además, cabe resaltar que debido a limitaciones en la extensión de este trabajo, se omitirán algunas definiciones y demostraciones de resultados elementales de Álgebra y Geometría, aunque todas ellas quedan a disposición del lector en las referencias citadas previamente.

Definición 3.1. ***(Superficie simple)*** *Se llama superficie simple a toda aplicación f diferenciable C^∞ de un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$,*

$$\begin{array}{rccc} f: & U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & f(u,v) \end{array}$$

tal que

SS.1. $\overrightarrow{f_u} \times \overrightarrow{f_v} \neq \overrightarrow{0}$ en todos los puntos de U (donde $\overrightarrow{f_u}$ es la derivada de f respecto de u y $\overrightarrow{f_v}$ es la derivada de f respecto de v).

SS.2. $f : U \longrightarrow f(U)$ es homeomorfismo (biyectiva, continua y de inversa continua).

Notación 3.2. *Para simplificar notación, en diversas ocasiones omitiremos la flecha sobre una letra utilizada para indicar que estamos trabajando con un vector, es decir, escribiremos X en lugar de $\overrightarrow{X}$. En general, escribiremos los vectores con letras mayúsculas, excepto cuando hablemos de vectores de una base del plano tangente, donde utilizaremos minúsculas.*

Definición 3.3. ***(Superficie regular, parametrización de S)*** *Un subconjunto conexo $S \subset \mathbb{R}^3$ se llama superficie regular si*

SR.1. *para todo $p \in S$ existen un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, una aplicación f y un entorno abierto V de p en S de modo que $f : U \longrightarrow V = f(U)$ es una superficie simple (tal superficie simple se llama parametrización local o parametrización de S en p).*

SR.2. *para cada par de superficies simples $f : U \longrightarrow V \subset S$, $\overline{f} : \overline{U} \longrightarrow \overline{V} \subset S$ con $V \cap \overline{V} \neq \emptyset$ resulta que*

$$(\overline{f}^{-1} \circ f) : f^{-1}(V \cap \overline{V}) \longrightarrow \overline{f}^{-1}(V \cap \overline{V})$$

es un difeomorfismo de un abierto de $\mathbb{R}^2$ en otro abierto de $\mathbb{R}^2$.

Observación 3.4. ***(Plano vectorial tangente y afín)*** *Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, los vectores $f_u(u_0, v_0)$ y $f_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes para todo $(u_0, v_0) \in U$ (por SS.1.), y por tanto, generan un plano. Este plano se llama plano vectorial tangente en el punto $f(u_0, v_0)$ y se denota $T_{f(u_0,v_0)}f(U)$ o $T_{f(u_0,v_0)}f$. Si S es una superficie regular, denotamos al plano vectorial tangente T_pS.*

El plano afín tangente a la superficie en dicho punto es el plano afín que pasa por dicho punto y tiene como dirección el plano vectorial tangente.

En general, hablaremos del plano tangente y el contexto dejará claro si nos referimos al vectorial (cuando hablemos de vectores) o al afín (cuando hablemos de puntos o rectas afines).

Definición 3.5. ***(Vector normal de la superficie en un punto)*** *Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple y $p = f(u_0, v_0)$. Llamamos vector normal de la superficie en el punto p, al vector*

$$\overrightarrow{N}_p = \frac{f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0)}{||f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0)||}$$

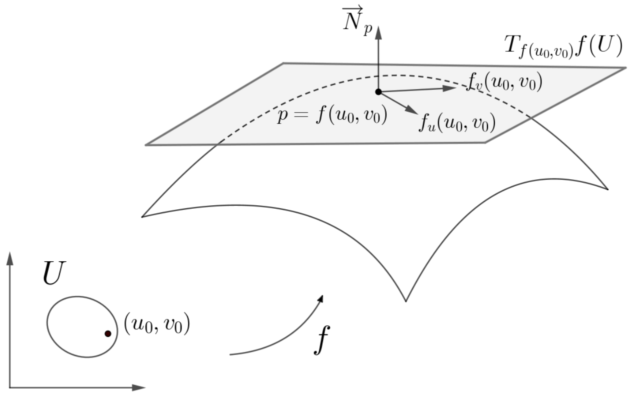

Figura 5: Plano tangente a una superficie en un punto

A continuación, recordaremos la primera y segunda forma fundamental de una superficie simple $S = f(U)$ en un punto $p \in S$. Cabe recordar que la primera forma fundamental es la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ al plano vectorial tangente a la superficie en el punto p, y estudia la geometría local de la superficie. Por otra parte, la segunda forma fundamental, estudia cómo está inmersa la superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Definición 3.6. ***(Primera forma fundamental)*** *Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie y $T_p f(U)$ el plano vectorial tangente a la superficie en el punto. Se llama primera forma fundamental de la superficie en p a la forma bilineal, simétrica y definida positiva*

$$\begin{array}{rccc} g_p: & T_pf(U) \times T_pf(U) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & g(X,Y) = X \cdot Y \end{array}$$

Como mencionamos previamente, $\{f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0)\}$ es una base del plano vectorial tangente $T_p f$. Para simplificar notación, nos referiremos a dicha base como la base de las parciales y escribiremos $\{f_u, f_v\}$. Asimismo, en ocasiones omitiremos la dependencia de la primera forma fundamental sobre el punto p, es decir, escribiremos g en lugar de g_p.

Calculamos la imagen por g de los vectores de la base de las parciales:

$$\begin{aligned} ||f_u||^2 = \quad & g(f_u, f_u) = g_{11} \\ & g(f_u, f_v) = g_{12} \\ & g(f_v, f_u) = g_{21} \\ ||f_v||^2 = \quad & g(f_v, f_v) = g_{22} \end{aligned}$$

Dados $X, Y \in T_p f(U)$, podemos escribir $X = X_1 f_u + X_2 f_v$ e $Y = Y_1 f_u + Y_2 f_v$ para ciertos $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} X \cdot Y = g(X,Y) \quad & = g(X_1 f_u + X_2 f_v, Y_1 f_u + Y_2 f_v) = \\ & = g(X_1 f_u, Y_1 f_u) + g(X_1 f_u, Y_2 f_v) + g(X_2 f_v, Y_1 f_u) + g(X_2 f_v, Y_2 f_v) = \\ & = X_1 Y_1 \ g_{11} + X_1 Y_2 \ g_{12} + X_2 Y_1 \ g_{21} + X_2 Y_2 \ g_{22} = \\ & = (X_1, X_2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$M(g_p, \{f_u, f_v\}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

es la matriz de la primera forma fundamental respecto de la base de las parciales.

Notación 3.7. *A lo largo del trabajo, haremos un abuso de notación y nos referiremos a la matriz de la primera forma fundamental como la matriz g dejando siempre claro la base del plano tangente, respecto de la cuál se ha calculado dicha matriz.*

Por la simetría del producto escalar, resulta que $g_{12} = g_{21}$ y por ser definido positivo, que $g_{11} > 0$ y $g_{22} > 0$.

Además, observamos que el determinante $det(g) > 0$, luego la matriz g tiene inversa. Escribiremos

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

Definición 3.8. *(**Segunda forma fundamental**) Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie, $T_pf(U)$ el plano vectorial tangente a la superficie en el punto p y $\overrightarrow{N}_p$ el vector normal de la superficie en el punto p. Llamamos segunda forma fundamental de la superficie en p a la forma bilineal simétrica $L_p : T_pf(U) \times T_pf(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ que tiene como matriz respecto de $\{f_u, f_v\}$ a*

$$M(L_p, \{f_u, f_v\}) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

donde $L_{11} = f_{uu} \cdot \overrightarrow{N_p}$, $L_{12} = f_{uv} \cdot \overrightarrow{N_p}$, $L_{21} = f_{vu} \cdot \overrightarrow{N_p}$ y $L_{22} = f_{vv} \cdot \overrightarrow{N_p}$.

Notación 3.9. *Al igual que para la primera forma fundamental, haremos un abuso de notación y nos referiremos a la matriz de la segunda forma fundamental en un punto p como la matriz L.*

Definición 3.10. *(**Aplicación de Weingarten u Operador Forma**) Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie y $T_pf(U)$ el plano vectorial tangente a la superficie en el punto p. Llamamos aplicación de Weingarten u Operador forma en el punto p a la aplicación*

$$\mathcal{L}_p : T_pf(U) \longrightarrow T_pf(U)$$

que respecto de la base de las parciales $\{f_u, f_v\}$ tenga como matriz

$$M(\mathcal{L}_p, \{f_u, f_v\}) = g_p^{-1} L_p$$

Siguiendo la notación precedente para las formas fundamentales, en ocasiones omitiremos la dependencia de $\mathcal{L}_p$ sobre el punto p de la superficie sobre el que se define, es decir, escribiremos $\mathcal{L}$ en lugar de $\mathcal{L}_p$, y cuando nos refiramos a la matriz de $\mathcal{L}$, haremos un abuso de notación y escribiremos también $\mathcal{L}$.

Observación 3.11. *La matriz de $\mathcal{L}$ no es simétrica en general, pues el producto de matrices simétricas no tiene por qué ser simétrica. Por ejemplo, si tomamos el paraboloide hiperbólico con parame-*

trización $f(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, obtenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{2}{(1+4u^2+4v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ 4uv & -(1+4u^2) \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

La Aplicación de Weingarten u Operador forma (Shape Operator en inglés) también se puede definir como el opuesto de la aplicación tangente de Gauss. Ambas definiciones son equivalentes por el siguiente teorema (enunciado y demostrado en [8], Capítulo 5).

Teorema 3.12. *La aplicación de Weingarten es el opuesto de la aplicación tangente de Gauss, esto es, si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ y $\nu : f(U) \longrightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss[2], entonces $\mathcal{L}_p = -\nu_*$, siendo, $\nu_* : T_p f(U) \longrightarrow T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ la aplicación tangente[3] de ν en p.*

Este teorema nos permite obtener una interpretación geométrica de la aplicación de Weingarten: esta aplicación nos indica cómo varía el vector normal en una superficie, esto es, como se comba la superficie.

Corolario 3.13. ***(Ecuaciones de Weingarten)*** *Con la notación precedente,*

$$\mathcal{L}(f_u) = -\overrightarrow{N}_u \qquad\qquad \mathcal{L}(f_v) = -\overrightarrow{N}_v$$

donde $\overrightarrow{N}_u$ es la derivada de $\overrightarrow{N}$ respecto de u y $\overrightarrow{N}_v$ la derivada de $\overrightarrow{N}$ respecto de v.

Proposición 3.14. *Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie, $T_p f$ el plano vectorial tangente a la superficie, L la segunda forma fundamental de la superficie en p, y $\mathcal{L}$ la aplicación de Weingarten de la superficie en p. Entonces, para todos $X, Y \in T_p f$, se tiene:*

$$L(X,Y) = g(\mathcal{L}(X), Y) = g(X, \mathcal{L}(Y))$$

En consecuencia, la aplicación de Weingarten es un operador autoadjunto y, por tanto, tiene valores propios reales.

Previamente, definimos la Aplicación de Weingarten de manera matricial como $\mathcal{L} = g^{-1}L$ respecto de la base de las parciales. El siguiente resultado nos mostrará que esta identidad matricial se verifica siempre, independientemente de la base del plano tangente escogida. Esto será crucial para demostrar que las únicas superficies pitagóricas son las esferas (o partes de ellas) de radio $R = \sqrt{\Phi}$. Cabe destacar que este resultado es propio del trabajo.

[2]**Aplicación de Gauss**: Se llama aplicación de Gauss de una superficie regular S a una aplicación continua (si existe) $\nu : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\nu(p) = \overrightarrow{N}_p$. Si existe, entonces la superficie es orientable pues se puede dar una determinación continua del vector normal o, equivalentemente, una orientación coherente en cada plano tangente.

[3]**Aplicación tangente o diferencial**: Sea $\varphi : S \longrightarrow S'$ una aplicación diferenciable entre superficies regulares y sea $p \in S$. Se llama aplicación tangente o diferencial de φ en p a la aplicación $\varphi_* : T_pS \longrightarrow T_{\varphi(p)}S'$ con $\varphi_*(X) = \frac{d(\varphi\circ\gamma)}{dt}(0)$ siendo γ una curva con imagen contenida en S y tal que $\gamma(0) = p$ y $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X$.

Proposición 3.15. *Sean S una superficie regular, p un punto de la superficie, g y L las matrices de la primera y segunda forma fundamental y $\mathcal{L}$ la matriz de la aplicación de Weingarten respecto de una base cualquiera $\{v_1, v_2\}$ de T_pS. Entonces*

$$\mathcal{L} = g^{-1}L$$

Demostración. Sea $\{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de T_pS. Sean $X, Y \in T_pS$, entonces podemos escribir

$$X = X_1\ v_1 + X_2\ v_2$$

$$Y = Y_1\ v_1 + Y_2\ v_2$$

con $X_i, Y_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$.
Consideramos ahora las formas matriciales. Por una parte, tenemos:

$$L(X,Y) \quad = \quad (X_1, X_2)\ L \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_2 \end{pmatrix} = X^T\ L\ Y$$

Y por otra parte, por la Proposición 3.14, $L(X,Y) = g(\mathcal{L}(X), Y)$ que en expresión matricial se expresa como sigue

$$X^T LY = (\mathcal{L}(X))^T gY = (\mathcal{L}X)^T gY = X^T \mathcal{L}^T gY$$

Puesto que hemos tomado X e Y vectores cualesquiera de T_pS, tenemos que $L = \mathcal{L}^T g$. Como g es invertible, podemos multiplicar por su inversa y así, obtenemos $\mathcal{L}^T = Lg^{-1}$. Ahora, trasponiendo tenemos el resultado esperado.

$$\mathcal{L} = (Lg^{-1})^T = (g^{-1})^T L^T = (g^T)^{-1} L^T = g^{-1}L$$

Es decir, $\mathcal{L} = g^{-1}L$ respecto de una base cualquiera de T_pS. □

Dada una superficie regular S y p un punto cualquiera de la misma, gracias al siguiente enunciado, podremos considerar siempre una base ortonormal del plano tangente T_pS.

Teorema 3.16. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2 (con un producto escalar) y sea $\mathcal{L} : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal tal que $\mathcal{L}(X) \cdot Y = X \cdot \mathcal{L}(Y)$ para cualesquiera $X, Y \in V$. Entonces,*

1. *la aplicación $L : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $L(X,Y) = \mathcal{L}(X) \cdot Y = X \cdot \mathcal{L}(Y)$ es bilineal y simétrica.*

2. *los vectores unitarios para los que $L(X,X)$ es máximo o mínimo son vectores propios de $\mathcal{L}$.*

3. *existe $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de V formada por vectores propios de $\mathcal{L}$.*

Observación 3.17. *Aplicamos el teorema al caso de tener una superficie simple* $f : U \longrightarrow f(U)$, $p \in f(U)$, $V = T_p f(U)$ *y* $\mathcal{L} : V \longrightarrow V$ *la aplicación de Weingarten. Entonces* L *es la segunda forma fundamental y existe una base de* $T_p f(U)$ *ortonormal* $\{e_1, e_2\}$ *formada por vectores propios de* $\mathcal{L}$ *con* k_1 *y* k_2 *los valores propios asociados a* e_1 *y* e_2 *respectivamente.*

Definición 3.18. ***(Curvatura normal, curvaturas principales, direcciones principales)*** *Con la notación precedente, definimos las siguientes nociones.*

- *Llamamos curvatura normal en la dirección de* X *a* $k_n(X) = \frac{L(X,X)}{g(X,X)}$.
- *Llamamos direcciones principales a las direcciones que generan* e_1 *y* e_2. *Estas, son perpendiculares entre sí.*
- *Llamamos a los valores máximo y mínimo de las curvaturas normales, curvaturas principales y las denotamos* k_1 *y* k_2 *respectivamente. Así,* $\mathcal{L}(e_1) = k_1 e_1$ *y* $\mathcal{L}(e_2) = k_2 e_2$.

Observación 3.19. *Con la notación precedente, tenemos*

$$M(\mathcal{L}, \{f_u, f_v\}) = g^{-1}L = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$M(\mathcal{L}, \{e_1, e_2\}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Definición 3.20. ***(Curvatura de Gauss, curvatura media)*** *Con la notación precedente,*

- *se llama curvatura de Gauss a* $K = k_1 k_2 = det(\mathcal{L}) = det(g^{-1}L) = \frac{detL}{detg}$.
- *se llama curvatura media a* $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{traza(\mathcal{L})}{2}$.

Observación 3.21. *Las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media de un punto* p *de una superficie regular* S, *no dependen de la base de* T_pS *escogida. Esto es consecuencia de estar definidos a partir de invariantes como los valores propios, determinante y traza de la matriz de la aplicación de Weingarten.*

Proposición 3.22. *Sea* S *una superficie regular. La aplicación* $K : S \longrightarrow \mathbb{R}$ *que a cada punto* p *de la superficie le hace corresponde su curvatura de Gauss* $K(p)$, *es una aplicación continua.*

Demostración. Podemos escribir K como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} K & : & S & \longrightarrow & End(T_pS) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \mapsto & \mathcal{L}_p & \mapsto & det(\mathcal{L}_p) \end{array}$$

con $\mathcal{L}_p$ la aplicación de Weingarten en T_pS y $det(\mathcal{L}_p)$ el determinante de la matriz de la aplicación de Weingarten en una base cualquiera (está bien definido pues el determinante es un invariante). En consecuencia, K es una aplicación continua por ser composición de aplicaciones continuas. □

3.2. La Tercera Forma Fundamental

A continuación, veremos cómo se define la tercera forma fundamental y en el Teorema 3.27 veremos que se puede expresar como combinación de la primera y segunda forma fundamental. Cabe mencionar que la tercera forma fundamental suele pasar más desapercibida en los libros y cursos de geometría de superficies, pues la primera forma fundamental es la que define la geometría intrínseca de una superficie mientras que la segunda y la tercera forma fundamental estudian ambas la geometría extrínseca.

Definición 3.23. ***(Tercera forma fundamental)*** *Sean $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie, T_pf el plano vectorial tangente a la superficie. Se llama tercera forma fundamental de la superficie en p a la forma bilineal*

$$\begin{array}{rccc} III_p: & T_pf(U) \times T_pf(U) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & g_p(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) \end{array}$$

siendo $\mathcal{L}$ la aplicación de Weingarten de la superficie en p.

Observación 3.24. *La tercera forma fundamental es una forma bilineal simétrica pues*

$$III_p(X, Y) = g_p(\mathcal{L}_p(X), \mathcal{L}_p(Y)) = g_p(\mathcal{L}_p(Y), \mathcal{L}_p(X)) = III_p(Y, X)$$

luego su matriz es simétrica, al igual que las matrices de la primera y segunda forma fundamental.

Notación 3.25. *Al igual que en la primera y segunda forma fundamental, haremos un abuso de notación y omitiremos la depedencia de III_p sobre el punto p sobre el que se define y escribiremos III para referirnos tanto a la aplicación de la tercera forma fundamental como a su expresión matricial en una base dada.*

Observación 3.26. *Veamos cómo podemos expresar matricialmente la tercera forma fundamental. Consideramos una superficie simple, p un punto de la superficie y $\{v_1, v_2\}$ una base cualquiera del plano tangente.*

$$\mathit{III}(X, Y) = \mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{L}(Y) = (\mathcal{L}X)^T g(\mathcal{L}Y) = X^T(\mathcal{L}^T g\mathcal{L})Y$$

Así, tenemos que la matriz de la tercera forma fundamental es la matriz III= $\mathcal{L}^T g\mathcal{L}$. Además, recordemos que $\mathcal{L} = g^{-1}L$, por lo que desarrollando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que las matrices L y g^{-1} son simétricas, tenemos

$$\mathit{III}(X, Y) = X^T(g^{-1}L)^T g(g^{-1}L)Y = X^T Lg^{-1}LY$$

Así, la matriz de la tercera forma fundamental es III= $Lg^{-1}L$ o equivalentemente, (recordando que $\mathcal{L} = g^{-1}L$ de donde $L = g\mathcal{L}$)

$$III = g\mathcal{L}^2$$

Teorema 3.27. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie simple, $p = f(u_0, v_0)$ un punto de la superficie, T_pf el plano vectorial tangente a la superficie. Sea III la tercera forma fundamental de la superficie en p, H la curvatura media y K la curvatura de Gauss. Entonces*

$$III - 2HL + Kg = 0$$

Para probar este resultado veremos dos demostraciones distintas. La primera demostración se basa en los resultados geométricos vistos hasta ahora, mientras que, la segunda se basa en el Teorema de Cayley-Hamilton [4] para matrices cuadradas de tamaño 2.

Demostración 1. Notemos que $\mathrm{III} - 2HL + Kg$ es una forma bilineal, luego bastará probar que se da la igualdad para una base de T_pf.

Tomamos una base ortonormal de vectores propios de $\mathcal{L}$, $\{e_1, e_2\}$, con k_1 y k_2 sus respectivos valores propios. Tenemos

$$\begin{aligned}
L(e_1, e_2) &= \mathcal{L}(e_1) \cdot e_2 = k_1\ e_1 \cdot e_2 = 0 \\
L(e_2, e_1) &= \mathcal{L}(e_2) \cdot e_1 = k_2\ e_2 \cdot e_1 = 0 \\
L(e_1, e_1) &= \mathcal{L}(e_1) \cdot e_1 = k_1\ e_1 \cdot e_1 = k_1 \\
L(e_2, e_2) &= \mathcal{L}(e_2) \cdot e_2 = k_2\ e_2 \cdot e_2 = k_2
\end{aligned}$$

Además, respecto de la base $\{e_1, e_2\}$, tenemos que la matriz de la primera forma fundamental g es la identidad, luego es igual a g^{-1}. Para la segunda forma fundamental tenemos

$$L = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

luego, la matriz de la aplicación de Weingarten es $\mathcal{L} = g^{-1}L = L$. Por la Observación 3.26, sabemos que la matriz de la tercera forma fundamental es III$= g\mathcal{L}^2$, entonces,

$$\mathrm{III} = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

[4] **Teorema de Cayley-Hamilton** (para matrices cuadradas de tamaño 2): Sea A una matriz cuadrada de tamaño 2 con entradas en R, un anillo conmutativo y con unidad. Entonces A es raíz de su polinomio característico

$$\chi_A(X) = X^2 - traza(A)X + det(A)\ \in R[X]$$

Con esto, podemos ver que se verifica la igualdad $\mathrm{III} - 2HL + Kg = 0$ con una sencilla cuenta:

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} - 2HL + Kg &= \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix} - (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} + k_1 k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1^2 + k_1 k_2 & 0 \\ 0 & k_2^2 + k_1 k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 k_2 & 0 \\ 0 & k_1 k_2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Demostración 2. Consideramos una base cualquiera de $T_p f(U)$. Por la Observación 3.26 y el Teorema de Cayley-Hamilton, obtenemos el resultado trivialmente:

$$III - 2HL + Kg = g\mathcal{L}^2 - traza(\mathcal{L})g\mathcal{L} + det(\mathcal{L})g = g\chi_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}) = 0$$

□

3.3. Superficies umbílicas

En este apartado, definiremos las nociones de punto umbílico de una superficie regular y superficie umbílica o totalmente umbílica siguiendo el apartado de puntos umbílicos del capítulo 10 de [7]. Además, veremos que las únicas superficies conexas totalmente umbílicas son o parte de una esfera o parte de un plano (Teorema 3.31). Este resultado será crucial para la clasificación de superficies pitagóricas (Apartado 3.5), ya que veremos que toda superficie pitagórica es totalmente umbílica y por tanto, será parte de un plano o de una esfera.

Definición 3.28. ***(Punto umbílico)*** *Sean S una superficie regular y $p \in S$ un punto de la superficie. Decimos que p es un punto umbílico si sus curvaturas principales son iguales.*

Definición 3.29. ***(Superficie umbílica o totalmente umbílica)*** *Sea S una superficie regular. Decimos que S es una superficie umbílica o totalmente umbílica, si todo punto de la superficie es umbílico.*

Lema 3.30. *Sea S una superficie totalmente umbílica. Entonces la curvatura de Gauss en cada punto tiene el mismo valor K y además $K \geq 0$.*

Demostración. Como S es una superficie totalmente umbílica, para cada punto p de la superficie, las curvaturas principales coinciden, esto es, $k_1^p = k_2^p = k(p)$. Consideramos entonces la aplicación $k : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $p \mapsto k(p)$, es decir, que a cada punto le hace corresponder su curvatura principal.

Sea $p \in S$ y $f : U \longrightarrow f(U) \subset S$ una parametrización local de S en $p \in f(U)$. Por el Corolario 3.13,

$$N_u = -\mathcal{L}(f_u) = -kf_u \tag{13}$$
$$N_v = -\mathcal{L}(f_v) = -kf_v \tag{14}$$

Derivamos (13) respecto de v y (14) respecto de u.

$$\overrightarrow{N}_{uv} = \frac{\partial \overrightarrow{N}_u}{\partial v} = -\frac{\partial k}{\partial v} f_u - kf_{uv} \tag{15}$$
$$\overrightarrow{N}_{vu} = \frac{\partial \overrightarrow{N}_v}{\partial u} = -\frac{\partial k}{\partial u} f_v - kf_{uv} \tag{16}$$

Ahora, restando las expresiones anteriores tenemos:

$$-\frac{\partial k}{\partial v} f_u + \frac{\partial k}{\partial u} f_v = 0$$

Como f_u y f_v son vectores linealmente independientes, entonces k es constante. Así, la curvatura principal es constante en $f(U)$, abierto. Además, en dicho entorno, la curvatura de Gauss es $K = k^2 \geq 0$ constante.

Ahora, consideramos el siguiente conjunto

$$C = \{q \in S : K(q) = K(p)\}$$

Notemos que $p \in C$, luego C es no vacío. Si vemos que C es abierto y cerrado, como S es conexo, entonces tendremos que $C = S$ y habremos terminado.

- C abierto: Sea $q \in C$, entonces, tomando $g : V \longrightarrow g(V) \subset S$ una parametrización local de S en $q \in g(V)$ tenemos que $g(V)$ abierto pues g es un homeomorfismo y $g(V) \subset C$ razonando de manera análoga a f. Así, para cada punto de C podemos encontrar un abierto que contenga al punto y esté contenido en C, luego C es abierto.

- C cerrado: Consideramos la aplicación $K : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada punto de S lo manda a su curvatura de Gauss. Esta aplicación es continua (Proposición 3.22), así, $K^{-1}(\{K(p)\}) = C$ es cerrado por ser la contraimagen de un cerrado por una aplicación continua.

□

Teorema 3.31. *Si todos los puntos de una superficie regular (conexa) S son umbílicos, entonces S es parte de una esfera o un plano.*

Demostración. Por el Lema 3.30, tenemos que $K(p) = K$, esto es, que todo punto de la superficie tiene la misma curvatura de Gauss. Además, como $K = k^2$ con K la curvatura de Gauss y S es conexa, tenemos que k es constante. Sea p un punto cualquiera de la superficie y f una parametrización local de S en p.

1. Si $k = 0$, por las ecuaciones (13) y (14), tenemos que $\overrightarrow{N}$ es constante y concluimos que la superficie S es parte de un plano perpendicular a dicho vector.

2. Si $k \neq 0$, entonces $h(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{k}\overrightarrow{N}(u, v)$ es constante, ya que sus derivadas son nulas por las ecuaciones (13) y (14). Por tanto, existe $q \in \mathbb{R}^3$ tal que $h(u, v) = q$. Entonces,

$$||q - f(u, v)|| = ||\frac{1}{k}\overrightarrow{N}(u, v)|| = \frac{1}{|k|}||\overrightarrow{N}(u, v)|| = \frac{1}{|k|}$$

   y así, $f(u, v)$ está en la esfera de centro q y radio $1/|k|$. Esto ocurre para toda superficie simple que es parte de un recubrimiento de S, en consecuencia, S es parte de una esfera.

□

Cabe mencionar que para las demostraciones del Lema 3.30 y el Teorema 3.31 hemos seguido y detallado las dadas en [6], Capítulo 21 (que habla sobre puntos umbílicos), donde están enunciados como los lema 21.4 y teorema 21.5 respectivamente.

Corolario 3.32. *Si S es una superficie totalmente umbílica, entonces las curvaturas principales en dos puntos cualesquiera coinciden.*

Demostración. Esto es trivial pues la curvatura de Gauss K es constante luego las curvaturas principales toman valor $k_p = \pm\sqrt{K}$, para todo punto p. Como las curvaturas principales varían de modo continuo y la superficie es conexa, en todos los puntos tienen que tener el mismo signo. □

3.4. Superficies pitagóricas

La noción de Superficie Pitagórica fue introducida por primera vez por Aydin. M. E. y Mihai. A. en [5]. En este trabajo rescatamos dicha noción, y además, con el fin de trazar una analogía con las definiciones 3.28 y 3.29 del apartado anterior, introducimos también una noción propia del trabajo, punto pitagórico (Definición 3.37). Para que tanto el concepto de superficie pitagórica como el de punto pitagórico estén bien definidos, será imprescindible demostrar que dados cualquier punto p de una superficie regular S y T_pS su plano tangente, entonces la relación pitagórica entre las matrices de las formas fundamentales no depende de la base del plano tangente escogida. Con este objetivo en mente, hemos elaborado un resultado propio del trabajo, la Proposición 3.36.

Proposición 3.33. *Sean S una superficie regular, $p \in S$ un punto de la superficie, $\{v_1, v_2\}$ una base de T_pS y sean g, L, III las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental respecto de la base $\{v_1, v_2\}$. Sea $H(p) = \frac{k_1+k_2}{2}$ la curvatura media en p y k_1, k_2 las curvaturas principales. Si $g^2 + L^2 = III^2$, entonces $H(p) \neq 0$. En particular $k_1 \neq -k_2$.*

Para demostrar este resultado, hemos seguido principalmente la demostración dada en [5], sin embargo, hemos concluido con la Proposición 3.15, un resultado propio del trabajo.

Demostración. Denotemos $K = k_1k_2 = det(\mathcal{L})$ a la curvatura de Gauss y $\mathcal{L}$ a la matriz de la aplicación de Weingarten en la base $\{v_1, v_2\}$. Por el Teorema 3.27, sabemos que $III - 2HL + Kg = 0$. Razonamos por reducción al absurdo y supongamos que $H(p) = 0$. Como $g^2 + L^2 = III^2$, tenemos

$$g^2 + L^2 = (2HL - Kg)^2 = K^2g^2$$

Esto es, $(K^2 - 1)g^2 = L^2$. Por la Proposición 3.15, sabemos que $L = g\mathcal{L}$, entonces,

$$(K^2 - 1)g^2 = (g\mathcal{L})^2$$

Tomamos determinantes a ambos lados de la expresión.

$$(K^2 - 1)(detg)^2 = (detg)^2(det\mathcal{L})^2 = (detg)^2K^2$$

Como $detg > 0$ tenemos que $K^2 - 1 = K^2$ de donde $-1 = 0$ y llegamos a un absurdo. $\square$

Aunque el siguiente resultado se enuncia en [5], cabe mencionar que no hemos seguido la prueba dada en el artículo, sino que hemos elaborado una demostración propia apoyándonos en conceptos elementales de álgebra como las matrices de cambio de base.

Proposición 3.34. *En las condiciones de la proposición anterior (Proposición 3.33), $k_1 = k_2$, es decir, p es umbílico. Además, $|k_1| = |k_2| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.*

Demostración. Recordemos que por la Observación 3.17, podemos considerar una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que respecto de dicha base, las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental son de la siguiente forma

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{III} = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Denotamos A la matriz de cambio de base de $\{e_1, e_2\}$ a $\{v_1, v_2\}$. Así,

$$g = A^TA \qquad L = A^T\widetilde{L}A \qquad III = A^T\widetilde{III}A$$

Como $g^2 + L^2 = III^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} (A^TA)^2 + (A^T\widetilde{L}A)^2 &= (A^T\widetilde{III}A)^2 \\ A^T(AA^T)A + A^T(\widetilde{L}(AA^T)\widetilde{L})A &= A^T\widetilde{III}(AA^T)\widetilde{III}A \end{aligned}$$

Notemos que como A es una matriz de cambio de base, entonces es invertible. Así, podemos multiplicar $(A^T)^{-1}$ a izquierdas y A^{-1} a derechas en la expresión anterior y obtenemos

$$AA^T + \widetilde{L}(AA^T)\widetilde{L} = \widetilde{III}(AA^T)\widetilde{III}$$

Notemos que AA^T es una matriz simétrica y puesto que A es de rango máximo, AA^T es además definida positiva, luego $det(AA^T) > 0$. Así, la matriz AA^T es de la siguiente forma

$$AA^T = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

con $b_1 b_3 - b_2^2 > 0$. Entonces, operando, tenemos:

$$\widetilde{L}(AA^T)\widetilde{L} = \begin{pmatrix} k_1^2 b_1 & k_1 k_2 b_2 \\ k_1 k_2 b_2 & k_2^2 b_3 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{III}(AA^T)\widetilde{III} = \begin{pmatrix} k_1^4 b_1 & k_1^2 k_2^2 b_2 \\ k_1^2 k_2^2 b_2 & k_2^4 b_3 \end{pmatrix}$$

Y tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^2 b_1 & k_1 k_2 b_2 \\ k_1 k_2 b_2 & k_2^2 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^4 b_1 & k_1^2 k_2^2 b_2 \\ k_1^2 k_2^2 b_2 & k_2^4 b_3 \end{pmatrix}$$

De donde tenemos las siguientes ecuaciones:

$$b_1(1 + k_1^2) = b_1(k_1^4)$$
$$b_3(1 + k_2^2) = b_3(k_2^4)$$

Notemos que si $b_1 = 0$ ó $b_3 = 0$ entonces $det(AA^T) = -b_2^2 \leq 0$ y llegamos a contradicción, luego $b_1 \neq 0$ y $b_3 \neq 0$. Así, podemos dividir por b_1 y b_3 y obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$k_1^4 - k_1^2 - 1 = 0$$
$$k_2^4 - k_2^2 - 1 = 0$$

Consideramos la ecuación $x^4 - x^2 - 1 = 0$, la cual es bicuadrada, luego tomando el cambio de variable $y = x^2$ obtenemos la ecuación $y^2 - y - 1 = 0$. Resolviendo la ecuación, tenemos que $x = \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ descartamos las soluciones $\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. Entonces, tenemos dos opciones:

- $k_1 = -k_2$ lo cual es absurdo por el resultado anterior (Proposición 3.33).
- $k_1 = k_2$

Así, concluimos que $k_1 = k_2$, esto es, p es umbílico y $|k_1| = |k_2| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. □

Corolario 3.35. *En las condiciones de la proposición anterior (Proposición 3.34), la curvatura de Gauss en el punto p es $K = \varphi$ con $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, el número de oro.*

Demostración. Por la Proposición 3.34, tenemos que $K = k_1 k_2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 = \varphi$. □

Si bien los resultados previos (Proposición 3.33, Proposición 3.34 y Corolario 3.35) se enuncian y demuestran en [5], la siguiente proposición es propia del trabajo. En [5] demuestran que las únicas superficies regulares compactas tales que en todo punto p que verifican $g_p^2 + L_p^2 = III_p^2$ con g, L y III las matrices de las formas fundamentales en T_pS, son las esferas de radio $\sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Para ello, se basan en el teorema que afirma que las esferas son las únicas superficies compactas de curvatura de Gauss constante positiva. En cambio, gracias a la siguiente proposición, conseguimos generalizar el resultado de [5] quitando la hipótesis de compacidad de la superficie.

Proposición 3.36. *Sean S una superficie regular, $p \in S$, $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de T_pS dada por la Observación 3.17 y $\{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de T_pS. Sean $\widetilde{g}, \widetilde{L}, \widetilde{III}$ las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental respectivamente respecto de la base $\{e_1, e_2\}$ y g, L, III las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental respectivamente respecto de la base $\{v_1, v_2\}$. Entonces,*

$$\widetilde{g}^2 + \widetilde{L}^2 = \widetilde{III}^2 \qquad \textit{si y sólo si} \qquad g^2 + L^2 = III^2$$

Demostración. Recordemos que

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{III} = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Denotamos A la matriz de cambio de base de $\{e_1, e_2\}$ a $\{v_1, v_2\}$. Entonces,

$$g = A^T \widetilde{g} A = A^T A \qquad L = A^T \widetilde{L} A \qquad III = A^T \widetilde{III} A$$

Y los cuadrados

$$g^2 = A^T A A^T A \qquad L^2 = A^T \widetilde{L} A A^T \widetilde{L} A \qquad III^2 = A^T \widetilde{III} A A^T \widetilde{III} A \tag{17}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $g^2 + L^2 = III^2$. Entonces, por (17), tenemos

$$A^T[AA^T + \widetilde{L} A A^T \widetilde{L}]A = A^T[\widetilde{III} A A^T \widetilde{III}]A$$

Como A es una matriz de cambio de base, es invertible, entonces

$$AA^T + \widetilde{L} A A^T \widetilde{L} = \widetilde{III} A A^T \widetilde{III} \tag{18}$$

Por el resultado anterior (Proposición 3.34), sabemos que las curvaturas principales coinciden, esto es $k_1 = k_2 = k$, entonces $\widetilde{L} = k\ Id_2$ y $\widetilde{III} = k^2\ Id_2$ donde Id_2 es la matriz identidad de tamaño dos. Así, sustituyendo en (18),

$$AA^T + k^2 AA^T = k^4 AA^T$$

Y nuevamente, como A es invertible, obtenemos $Id_2 + k^2\ Id_2 = k^4\ Id_2$, es decir, $\widetilde{g}^2 + \widetilde{L}^2 = \widetilde{III}^2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos $\widetilde{g}^2 + \widetilde{L}^2 = \widetilde{III}^2$. Nuevamente por la Proposición 3.34, $k_1 = k_2 = k$. Así, $Id_2 + k^2\ Id_2 = k^4\ Id$. Multiplicamos esta ecuación por $A^T AA^T A$ y tenemos

$$A^T AA^T A + k^2 A^T AA^T A = k^4 A^T AA^T A$$

de donde $g^2 + L^2 = III^2$.

□

Definición 3.37. ***(Punto pitagórico)*** *Sean S una superficie regular y $p \in S$. Decimos que p es un punto pitagórico si dada una base $\{v_1, v_2\}$ de T_pS se tiene que $g^2 + L^2 = III^2$ donde g, L, III son las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental respecto de la base $\{v_1, v_2\}$.*

Observación 3.38. *Como consecuencia de la Proposición 3.36, la definición anterior no depende de la base del plano tangente escogida.*

Corolario 3.39. *Sea p un punto pitagórico de S, entonces*

1. *La matriz de la segunda forma fundamental en cualquier base es distinta de la matriz nula.*

2. *El determinante de la matriz de la segunda forma fundamental es distinto de cero.*

Demostración. 1. Si $L = \mathbf{0}$ respecto de una base cualquiera $\{v_1, v_2\}$ del plano tangente T_pS, entonces por la Observación 3.26, $g^2 = g^2 + L^2 = III^2 = (Lg^{-1}L)^2 = \mathbf{0}$ de donde $det(g) = 0$ lo cual es absurdo.

2. Si $det(L) = 0$, entonces la curvatura de Gauss $K = \frac{detL}{detg}$ de p es nula, lo cual es absurdo por el Corolario 3.35.

□

Definición 3.40. ***(Superficie pitagórica)*** *Sea S una superficie regular. Decimos que S es una superficie pitagórica si todo punto de la superficie es pitagórico.*

Proposición 3.41. *Toda superficie pitagórica es totalmente umbílica.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 3.34. □

3.5. Clasificación de las superficies pitagóricas

Como consecuencia de los resultados previos tenemos que las superficies pitagóricas son totalmente umbílicas. Por el Teorema 3.31, podemos concluir que las únicas superficies pitagóricas serán o esferas (o partes de ellas) o planos (o partes de ellos). Veamos que los planos (o partes de ellos) no son superficies pitagóricas.

Observación 3.42. *En lo que resta del trabajo, cuando digamos que el plano no es una superficie pitagórica, entenderemos que también nos referimos a partes del plano. Análogamente, cuando digamos que las superficies pitagóricas son esferas, entenderemos que son esferas o partes de ellas.*

Proposición 3.43. *El plano no es una superficie pitagórica.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que el plano es una superficie pitagórica. Sea p un punto del plano, como el plano es pitagórico, tenemos que respecto de una parametrización local f en p se verifica:

$$g^2 + L^2 = III^2$$

donde g, L y III son la primera, segunda y tercera forma fundamental del plano en p respecto de la parametrización f. Por el Corolario 3.13, deducimos que la matriz de la aplicación de Weingarten es la matriz idénticamente nula puesto que la superficie no se comba, esto es, $\mathcal{L} = \mathbf{0}$. Así, tenemos que $L = g\mathcal{L} = \mathbf{0}$ y $III = g\mathcal{L}^2 = \mathbf{0}$ son también matrices idénticamente nulas y por ende, $g^2 = \mathbf{0}$. En consecuencia, $det(g^2) = (det(g))^2 = 0$, y tenemos $det(g) = 0$, lo cual es absurdo ya que la primera forma fundamental es definida positiva. □

Así, si S es una superficie pitagórica, necesariamente tiene que ser una esfera. Nos preguntamos qué esferas son pitagóricas.

Teorema 3.44. *Las únicas superficies pitagóricas son las esferas de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Para probar este resultado, veremos dos demostraciones, ambas propias del trabajo. Las dos se apoyarán en los resultados vistos hasta ahora con la diferencia de que la primera demostración se basará en que la curvatura de Gauss en una esfera de radio R es $K = \frac{1}{R^2}$, mientras que la segunda, se apoyará en que podemos recubrir una esfera con superficies simples.

3.5.1. Con la curvatura de Gauss

Por la Proposición 3.43, tenemos que las superficies pitagóricas son esferas (o partes de ellas) y por la Proposición 3.35 tenemos que $K = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Además, recordemos que dada una esfera de radio R, la curvatura de Gauss es $K = \frac{1}{R^2}$. Entonces, basta despejar R de la siguiente igualdad.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{R^2}$$

Operando, $R = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{2}{(1+\sqrt{5})}\frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \sqrt{\Phi}$. Así, tenemos que las únicas superficies pitagóricas son las esferas de radio $R = \sqrt{\Phi}$.

3.5.2. Con parametrizaciones

En este apartado veremos una demostración alternativa para el Teorema 3.44. Sabemos que las superficies pitagóricas son esferas, luego falta ver que las únicas esferas pitagóricas son las de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Para demostrar este resultado, nos apoyaremos en un recubrimiento con superficies simples de la esfera de radio R centrada en el origen. Cabe destacar que podemos realizar esta demostración gracias a la Observación 3.38. Sin pérdida de generalidad, estudiaremos únicamente las esferas centradas en el origen (en caso contrario, bastaría realizar un cambio de variable y trabajar en el origen) y nos referiremos a la esfera de radio R como S.

Observación 3.45. *Como toda superficie regular S es localmente simple, para cada punto $p \in S$, podemos considerar un abierto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $p \in f(U)$ y calcular las formas fundamentales en el punto p.*

Primero, notemos que podemos recubrir la esfera con las siguientes superficies simples:

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= (R\ cosu\ cosv, R\ cosu\ senv, R\ senu) && (u,v) \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \\
\widehat{f}(u,v) &= (R\ cosu\ cosv, R\ cosu\ senv, R\ senu) && (u,v) \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \\
h_N(u,v) &= (u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) && (u,v) \in \{u^2 + v^2 < R^2\} \\
h_S(u,v) &= (u, v, -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) && (u,v) \in \{u^2 + v^2 < R^2\}
\end{aligned}$$

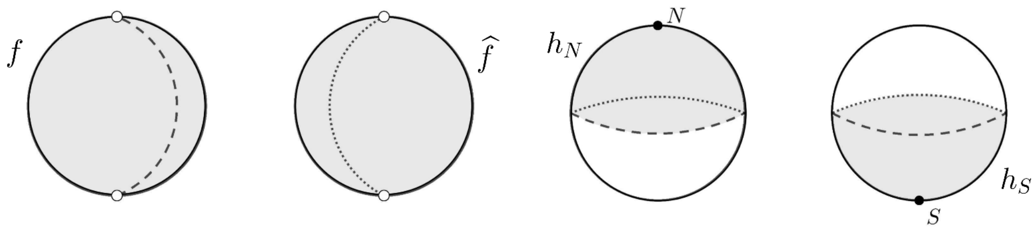

Figura 6: Recubrimiento de la esfera con superficies simples

Veremos que el único radio que hace posible que se verifique la siguiente ecuación para todo punto $p \in S$

$$g^2 + L^2 = III^2$$

donde g, L y III son la primera, segunda y tercera forma fundamental respectivamente, es el radio $R = \sqrt{\Phi}$. Para ello, consideraremos para cada punto una de las parametrizaciones previas que lo contenga.

1. Empecemos estudiando el caso $p = f(u_0, v_0) \in S$. Consideramos como base de T_pS la base de las parciales $\{f_u, f_v\}$ y calculamos las formas fundamentales en el punto p de la esfera de radio R respecto de dicha base.

- Primera forma fundamental:

$$\begin{aligned}
f_u &= (-R\ senu\ cosv, -R\ senu\ senv, R\ cosu) \\
f_v &= (-R\ cosu\ senv, R\ cosu\ cosv, 0) \\
g_{11} &= f_u \cdot f_u = R^2\ sen^2u_0\ cos^2v_0 + R^2\ sen^2u_0\ sen^2v_0 + R^2\ cos^2u_0 = R^2 \\
g_{12} &= f_u \cdot f_v = R^2\ senu_0\ cosu_0\ cosv_0\ senv_0 - R^2\ senu_0\ cosu_0\ senv_0\ cosv_0 = 0 = g_{12} \\
g_{22} &= f_v \cdot f_v = R^2\ cos^2u_0\ sen^2v_0 + R^2\ cos^2u_0\ cos^2v_0 = R^2 cos^2u_0
\end{aligned}$$

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\ cos^2u_0 \end{pmatrix}$$

- Segunda forma fundamental:

  Primero notemos que como estamos en la esfera de radio R, el vector normal coincide con el vector de posición normado ó su opuesto, dependiendo el signo de la parametrización escogida. En nuestro caso, $\overrightarrow{N}_p = (-\ cosu_0\ cosv_0, -\ cosu_0\ senv_0, -\ senu_0)$.

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= (-R\ cosu\ cosv, -R\ cosu\ senv, -R\ senu) \\
f_{uv} &= (R\ senu\ senv, -R\ senu\ cosv, 0) = f_{vu} \\
f_{vv} &= (-R\ cosu\ cosv, -R\ cosu\ senv, 0) \\
L_{11} &= \overrightarrow{N}_p \cdot f_{uu} = R\ cos^2u_0\ cos^2v_0 + R\ cos^2u_0\ sen^2v_0 + R\ sen^2u_0 = R \\
L_{12} &= \overrightarrow{N}_p \cdot f_{uv} = -R\ cosu_0\ senu_0\ cosv_0\ senv_0 + R\ cosu_0\ senu_0\ cosv_0\ senv_0 = 0 = L_{21} \\
L_{22} &= \overrightarrow{N}_p \cdot f_{vv} = R\ cos^2u_0\ cos^2v_0 + R\ cos^2u_0\ sen^2v_0 = R\ cos^2u_0
\end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\ cos^2u_0 \end{pmatrix}$$

- Tercera forma fundamental:

  En la observación 3.26 vimos que, en la base de las parciales, III= $Lg^{-1}L$. Calculamos la inversa de g:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2\ cos^2u_0} \end{pmatrix}$$

  Así, tenemos la matriz de III en la base de las parciales es de la siguiente forma:

$$III = Lg^{-1}L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & cos^2u_0 \end{pmatrix}$$

Ahora, solo queda ver para qué valores de R se verifica la igualdad $g^2 + L^2 = III^2$. Calculamos los cuadrados de las matrices de las formas fundamentales y obtenemos las siguientes matrices:

$$g^2 = \begin{pmatrix} R^4 & 0 \\ 0 & R^4\ cos^4 u_0 \end{pmatrix} \qquad L^2 = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\ cos^4 u_0 \end{pmatrix} \qquad III^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & cos^4 u_0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que la igualdad deseada se verifica cuando

$$\begin{cases} R^4 + R^2 & = & 1 \\ R^4\ cos^4 u_0 + R^2\ cos^4 u_0 & = & cos^4 u_0 \end{cases}$$

Notemos que como $u_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $cos^4 u_0 \neq 0$, por lo que en realidad tenemos una única condición. Así, basta calcular los valores de R para los cuales se verifica la ecuación $R^4 + R^2 - 1 = 0$. Como estamos ante una ecuación bicuadrada, primero realizamos el cambio de variable $x = R^2$ y calculamos las raíces del polinomio $x^2 + x - 1$. Teniendo en cuenta que $x > 0$ (ya que $R > 0$), obtenemos una única raíz, el conjugado del número de oro $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Entonces, $R = \sqrt{\Phi}$.

Comprobamos que llegamos al mismo radio con el resto de parametrizaciones.

2. El caso $p = \widehat{f}(u_0, v_0)$ es análogo al caso $p = f(u_0, v_0)$.

3. Caso $p = N = (0, 0, R) = h_N(0, 0)$. Consideramos la parametrización h_N y tenemos las siguientes formas fundamentales en N:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad III = Lg^{-1}L = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sus cuadrados:

$$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^2 = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad III^2 = \frac{1}{R^4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, para que se cumpla la igualdad $g^2 + L^2 = III^2$ basta que se verifique la ecuación $R^4 + R^2 = 1$ que, como vimos antes, nos da como única solución $R = \sqrt{\Phi}$.

4. El caso $p = S = (0, 0, -R) = h_S(0, 0)$ es análogo al caso anterior considerando la parametrización h_N.

Así, hemos probado que las únicas superficies pitagóricas son las esferas de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Capítulo 4

Formas fundamentales y ternas pitagóricas de matrices

A lo largo del capítulo anterior hemos estudiado qué superficies regulares verifican que para todo punto p de la superficie, (g_p, L_p, III_p) es una terna pitagórica de matrices, concluyendo con el siguiente resultado.

Corolario 4.1. *Sea S una superficie regular. Entonces (g_p, L_p, III_p) es una terna pitagórica de matrices pitagórica para todo punto $p \in S$ si y sólo si, S una esfera de radio $R = \sqrt{\Phi}$ con $\Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Surge de manera natural la cuestión de si podemos hacer un estudio análogo con las ternas (g_p, III_p, L_p) y (L_p, III_p, g_p). Esta cuestión fue planteada en [4] p.93. Veremos que en el primer caso, no se puede trazar una analogía al caso de superficies pitagóricas, mientras que en el segundo caso, esto será posible añadiendo ciertas condiciones.

4.1. Caso (g, III, L)

Sea S una superficie regular y $p \in S$. Para estudiar el caso (g_p, III_p, L_p), consideraremos una base ortonormal de T_pS, $\{e_1, e_2\}$. En esta base, tenemos que

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_p = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \qquad III_p = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Estudiemos la siguiente igualdad

$$g^2 + III^2 = L^2 \tag{19}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^4 & 0 \\ 0 & k_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix}$$

Es decir, cuándo se cumplen las ecuaciones $k_i^4 - k_i^2 + 1 = 0$ con $i = 1, 2$. Notemos que estamos ante dos ecuaciones bicuadradas, luego consideramos los cambios de variable $x_i = k_i^2$. Entonces, buscamos las soluciones reales de $x_i^2 - x_i + 1 = 0$. Sin embargo, estas ecuaciones tienen discriminante negativo, luego no tienen soluciones reales. En consecuencia, podemos concluir que no existe ninguna superficie regular S que verifique que para cualquier punto $p \in S$ y cualquier base de T_pS, se de la igualdad (19), esto es, que (g, III, L) sea una terna pitagórica de matrices.

4.2. Caso (L, III, g)

Sea S una superficie regular, $p \in S$ y $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de T_pS. Estudiemos la siguiente igualdad

$$L^2 + III^2 = g^2 \tag{20}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1^4 & 0 \\ 0 & k_2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, cuándo se cumplen las ecuaciones $k_i^4 + k_i^2 - 1 = 0$ con $i = 1, 2$. Notemos que, nuevamente, estamos ante dos ecuaciones bicuadradas, luego consideramos los cambios de variable $x_i = k_i^2$. Y tenemos las siguientes soluciones:

$$k_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \qquad\qquad k_2 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

En este caso, no descartamos que pudieran existir superficies regulares S tales que para cualquier punto $p \in S$ y cualquier base $\{v_1, v_2\}$ de T_pS se verifique (20). Como consecuencia, intentamos trazar una analogía con los resultados vistos para superficies pitagóricas del capítulo anterior.

Proposición 4.2. *Sea S una superficie regular, $p \in S$ y $\{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de T_pS tal que*

$$L^2 + III^2 = g^2$$

entonces $|k_1| = |k_2| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales en el punto p.

Demostración. Siguiendo un razonamiento análogo a la demostración de la Proposición 3.34, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_1^4 &= 1 \\ k_2^2 + k_2^4 &= 1 \end{aligned}$$

Y como acabamos de ver al principio de este apartado, obtenemos las siguientes soluciones

$$k_1 = \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \qquad\qquad k_2 = \pm\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

□

Corolario 4.3. *En las condiciones de la proposición anterior (Proposición 4.2) y suponiendo que p es umbílico, se tiene que $K = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, el conjugado del número de oro.*

Demostración. Trivial pues $K = k_1\ k_2$. □

Notemos que a diferencia de la Proposición 3.34, no descartamos que la superficie pudiera ser minimal, luego para seguir con la analogía del apartado anterior, pediremos que los puntos sean además umbílicos.

Proposición 4.4. *Sea S una superficie regular, $p \in S$ un punto umbílico, $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de T_pS y $\{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de T_pS. Entonces*

$$\widetilde{L}^2 + \widetilde{III}^2 = \widetilde{g}^2 \qquad \text{si y sólo si} \qquad L^2 + III^2 = g^2$$

donde $\widetilde{g}, \widetilde{L}$ y $\widetilde{III}$ son las matrices de la primera, segunda y tercera forma fundamental respecto de $\{e_1, e_2\}$ respectivamente, y g, L y III de $\{v_1, v_2\}$ respectivamente.

Demostración. Análoga a la demostración de la Proposición 3.36. □

Notemos que al pedir que los puntos sean umbílicos, la demostración de independencia de la base de la ecuación (20), queda restringida a dichos puntos. Por lo que para superficies minimales ($k_1 = -k_2$), este resultado no es válido.

Proposición 4.5. *Sea S una superficie totalmente umbílica tal que para todo punto*

$$L^2 + III^2 = g^2$$

entonces S es una esfera (o parte de ella) de radio $R = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \sqrt{\varphi}$, la raíz del número de oro.

Demostración. De manera análoga a la demostración de la Proposición 3.43, concluimos que ningún punto del plano verifica que $L^2 + III^2 = g^2$. Entonces, por el Teorema 3.31, S es una esfera o parte de ella. Así, para conocer el radio, basta despejar R de la ecuación

$$K = \frac{1}{R^2}$$

Despejando, obtenemos que $R = \sqrt{\frac{1}{K}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \sqrt{\varphi}$. □

Capítulo 5

Teorema de Beltrami-Enneper

En el Apartado 3.2 del Capítulo 3, introdujimos una noción no tan conocida, la tercera forma fundamental. Vimos que la primera forma fundamental era la que estudiaba la geometría intrínseca de una superficie mientras que la segunda servía para estudiar la geometría extrínseca. Aunque la tercera forma fundamental se encarga también de estudiar la geometría extrínseca de una superficie, nos preguntamos si tiene alguna otra utilidad más allá de las superficies pitagóricas. Este capítulo pretende saciar dicha curiosidad mostrando un bello resultado, el teorema de Beltrami-Enneper, cuya demostración utiliza esta noción y el Teorema 3.27 que relaciona las tres formas fundamentales. Además, puesto que para entender este resultado se necesita cierta base teórica de geometría de curvas, se ha desarrollado un apéndice para recordar las nociones necesarias para el lector que lo considere oportuno.

Teorema 5.1. ***(Teorema de Beltrami-Enneper)*** *Si α es una línea asintótica de una superficie simple $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, entonces*

$$\tau^2 = -K$$

donde τ es la torsión y K la curvatura de Gauss en los puntos de la curva.

Demostración. Si α una línea asintótica, entonces la curvatura normal en todo punto de la curva es nula. Entonces, por la Proposición a.9, el vector curvatura se puede escribir como sigue

$$\overrightarrow{k} = k_g \overrightarrow{S} \tag{21}$$

donde $\overrightarrow{S}$ es el vector de curvatura intrínseco y k_g la curvatura geodésica.
Por la Proposición a.3 podemos suponer que α está parametrizada de modo natural. Escribimos entonces, $\alpha = \alpha(s)$.
Calculamos las normas a ambos lados de (21)y tenemos:

$$||\alpha''(s)|| = ||\overrightarrow{k}|| = ||k_g \overrightarrow{S}|| = |k_g|\ ||\overrightarrow{S}|| = |k_g|\ ||\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{t}|| = |k_g|\ ||\overrightarrow{N}||\ ||\overrightarrow{t}|| = |k_g|\ ||\overrightarrow{N}||\ ||\alpha'(s)|| = |k_g|$$

Así, $||\alpha''(s)|| = |k_g|$ por lo que $||\alpha''(s)|| = \pm\ k_g$. Entonces sustituyendo en (21),

$$\alpha''(s) = \pm\ ||\alpha''(s)||\ \overrightarrow{S}$$

Recordemos que $\overrightarrow{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||}$, por lo que $\overrightarrow{n} = \pm\overrightarrow{S}$. Así, el plano tangente a la superficie, generado por $\overrightarrow{t}$ y $\overrightarrow{S}$, perpendicular a $\overrightarrow{N}$, coincide con el plano osculador a la curva, generado por $\overrightarrow{t}$ y $\overrightarrow{n}$, con lo que

$$\overrightarrow{b} = \pm\overrightarrow{N} \tag{22}$$

Derivando la ecuación (22), tenemos que

$$\overrightarrow{b}' = \frac{d\overrightarrow{b}}{ds} = \pm\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \tag{23}$$

Por otra parte, como la curva está parametrizada de modo natural, por la Proposición a.8 tenemos que

$$\overrightarrow{b}' = -\tau\overrightarrow{n} \tag{24}$$

con lo que $\overrightarrow{b}' \cdot \overrightarrow{b}' = \tau^2$. Así, por las ecuaciones (23) y (24), tenemos

$$\tau^2 = \frac{d\overrightarrow{b}}{ds} \cdot \frac{d\overrightarrow{b}}{ds} = \left(\pm\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}\right) \cdot \left(\pm\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}\right) = \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \tag{25}$$

Como la curva está contenida en la superficie, entonces $\alpha(s) = f(h_1(s), h_2(s))$ con lo que $\alpha'(s) = f_u\frac{dh_1}{ds} + f_v\frac{dh_2}{ds}$. Usando la regla de la cadena,

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \overrightarrow{N}_u\frac{dh_1}{ds} + \overrightarrow{N}_v\frac{dh_2}{ds}$$

Por el Corolario 3.13,

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\mathcal{L}(f_u)\frac{dh_1}{ds} - \mathcal{L}(f_v)\frac{dh_2}{ds} = -\mathcal{L}\left(f_u\frac{dh_1}{ds} + f_v\frac{dh_2}{ds}\right) = -\mathcal{L}(\alpha'(s)) \tag{26}$$

Sustituyendo (26) en (25) tenemos

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\mathcal{L}(\alpha'(s)) \cdot (-\mathcal{L}(\alpha'(s))) = \\ &= \mathcal{L}(\alpha'(s)) \cdot \mathcal{L}(\alpha'(s)) = III(\alpha'(s), \alpha'(s)) \end{aligned} \tag{27}$$

Recordemos que por el Teorema 3.27, $III - 2HL + Kg = 0$, esto es, $III = 2HL - Kg$. Entonces, sustituyendo en (27), tenemos

$$\tau^2 = III(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 2HL(\alpha'(s), \alpha'(s)) - Kg(\alpha'(s), \alpha'(s))$$

Notemos que dado que la curva es línea asintótica, $0 = k_n(\alpha'(s)) = \frac{L(\alpha'(s),\alpha'(s))}{g(\alpha'(s),\alpha'(s))}$ con lo que $L(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0$. Además, $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 1$ pues la curva está parametrizada de modo natural. Por lo tanto,

$$\tau^2 = -K$$

como queríamos ver. □

Apéndice

El desarrollo de este apéndice tiene como intención facilitar la lectura y comprensión del Capítulo 5, *Teorema de Beltrami-Enneper*, dando la base necesaria de teoría de curvas para dicho capítulo. Seguiremos las definiciones y resultados presentados y demostrados en los capítulos 2,3 y 4 de [7].

Definición a.1. ***(Curva regular, curva parametrizada de modo natural)*** *Llamamos curva regular o curva a toda aplicación diferenciable $\alpha : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$.*

Decimos que la curva está parametrizada de modo natural si $||\alpha'(t)|| = 1$ para todo $t \in (a,b)$. Si una curva α está parametrizada de modo natural, denotaremos $\alpha = \alpha(s)$.

Observación a.2. *En general, cuando hablemos de curva, nos referiremos a la imagen de la aplicación de la definición anterior, es decir, a su traza.*

Proposición a.3. *Toda curva admite una parametrización natural.*

Definición a.4. ***(Vector tangente, vector de curvatura, curvatura, vector norma a una curva, vector binormal, torsión)*** *Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada de modo natural, para cada punto $\alpha(s)$ de la curva, definimos los siguientes conceptos:*

- *Vector tangente: $\overrightarrow{t}(s) = \alpha'(s)$*
- *Vector de curvatura: $\overrightarrow{k}(s) = \alpha''(s)$*
- *Curvatura: $k(s) = ||\overrightarrow{k(s)}|| = ||\alpha''(s)||$*
- *Vector normal a la curva: $\overrightarrow{n}(s) = \frac{1}{k(s)}\overrightarrow{k(s)} = \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||}$*
- *Vector binormal: $\overrightarrow{b}(s) = \overrightarrow{t}(s) \times \overrightarrow{n}(s)$*
- *Torsión: $\tau(s) = \frac{[\alpha'(s),\alpha''(s),\alpha'''(s)]}{(k(s))^2}$*

Notación a.5. *Por simplificar notación, a veces omitiremos la dependencia de los vectores definidos previamente sobre el parámetro s. Por ejemplo, escribiremos $\overrightarrow{t}$ en lugar de $\overrightarrow{t}(s)$.*

Proposición a.6. *Sea α una curva parametrizada de modo natural, entonces $\{\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}\}$ es una base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$.*

Definición a.7. ***(Planos rectificante, normal y osculador)*** *Sea α una curva parametrizada de modo natural, entonces definimos los siguientes planos en un punto $\alpha(s)$ de la curva:*

- *Plano rectificante: Plano generado por los vectores tangente y binormal.*

- *Plano normal: Plano generado por los vectores binormal y normal.*
- *Plano osculador: Plano generado por los vectores tangente y normal.*

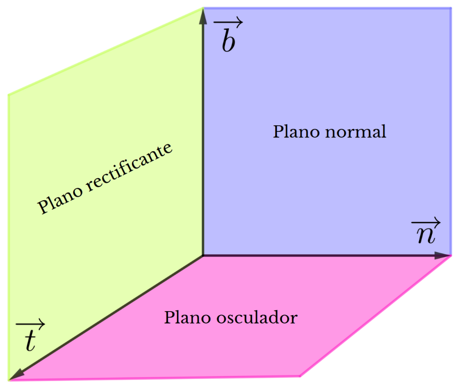

Figura 7: Planos rectificante, normal y osculador

Proposición a.8. *(**Fórmulas de Frenet**) Sea α una curva parametrizada de modo natural, entonces*

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{t}' \\ \overrightarrow{n}' \\ \overrightarrow{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{b} \end{pmatrix}$$

Proposición a.9. *Sea α una curva contenida en una superficie simple $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces, el vector de curvatura en un punto de la curva descompone de manera única como sigue*

$$\overrightarrow{k} = k_n \overrightarrow{N} + k_g \overrightarrow{S}$$

donde k_n es la curvatura normal, k_g se llama curvatura geodésica y $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{t}$ se denota vector normal intrínseco a la curva.

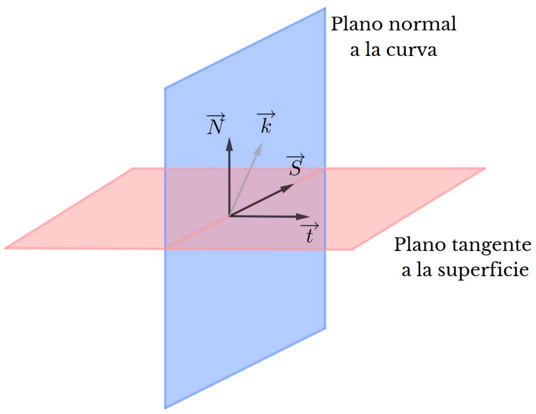

Figura 8: Descomposición del vector de curvatura

Referencias

[1] Ahuja, M.; Palmer, L.; Tikoo, M.: Constructing Pythagorean triple preserving matrices. *Missouri J. Math. Sci.* **10**, (1998), 159–168.

[2] Ahuja, M.; Palmer, L.; Tikoo, M.: Finding Pythagorean triple preserving matrices. *Missouri J. Math. Sci.* **10**, No. 2, (1998), 99–105.

[3] Arnold, M.; Eydelzon, A.: On Matrix Pythagorean Triples. *The American Mathematical Monthly*, **126**, No. 2 (2019), 158-160.

[4] Aydin, M. E.; Mihai, A.; Özgür, C.: Pythagorean submanifolds. Chen, Bang-Yen (ed.) et al., Geometry of submanifolds and applications. Singapore: Springer. Infosys Sci. Found. Ser., (2024), 89-98.

[5] Aydin. M. E.; Mihai. A.: A Note on Surfaces in Space Forms with Pythagorean Fundamental Forms. *Mathematics*, **8**, No. 3, 444 (2020).

[6] Cordero, L.; Fernández, M.; Gray, A.: Geometría diferencial de curvas y superficies: con Mathematica. *Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Wilmington, Delaware, E.U.A.*, 1995.

[7] Etayo, F.: Geometría de Curvas y Superficies. Apuntes de la Asignatura. Curso 2022-23. Universidad de Cantabria.

[8] Etayo, F.: Teoría Global de Superficies. Apuntes de la Asignatura. Curso 2023-24. Universidad de Cantabria.

[9] Sierpiński, W: Pythagorean Triangles. Translated by Sharma, A. *Dover Publications, Inc. Mineola, New York*, 1976.

[10] Tikoo, M.; Wang, H.: Generalized Pythagorean Triples and Pythagorean Triple Preserving Matrices. *Missouri J. Math. Sci.*, **21**, (2009), 3–12.