Universidad de Cantabria

Facultad
de
Ciencias

APLICACIONES DE RECUBRIMIENTO Y SUPERFICIES DE RIEMANN

(Covering maps and Riemann surfaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Eduardo Suengas Rodríguez

Directora: Nuria Corral Pérez

06 - 2025

Agradecimientos

No podía comenzar este trabajo sin agradecer a Nuria, quien durante este último año ha tenido que soportar mis retrasos, los envíos de borradores en la madrugada y mis peticiones varias de última hora. Gracias por tu paciencia, tu dedicación a las Matemáticas y a la docencia, y por todo el apoyo que me has brindado durante la realización de este proyecto, gracias al cual he aprendido mucho.

Agradezco también a mis padres y a mi hermano, que me animaron a escoger esta carrera y han estado a mi lado durante todo el proceso; a mis tíos, que me han ayudado en todo; y a mi abuela, a quien le habría encantado verme graduado en traje.

Por último, quiero mencionar a mis amigos. A los del pueblo, con quienes llevo ya una vida y me queda otra; a los que conocí en los fiordos, que allí fueron mis hermanos; y a mis compañeros de carrera, quienes han hecho de estos últimos cinco años los mejores de mi vida. Aunque ahora nuestros caminos se separen, sé que aún nos quedan muchas tardes de cartas por delante.

Resumen

En este trabajo se estudia la teoría de las aplicaciones de recubrimiento desde un enfoque topológico. Comenzamos introduciendo el concepto de aplicación de recubrimiento, que en particular son homeomorfismos locales, y exploramos su relación con el grupo fundamental. A continuación, mostramos cómo los automorfismos de un recubrimiento forman un grupo que guarda una estrecha relación con el grupo fundamental, culminando en un teorema de clasificación de recubrimientos análoga a la teoría de Galois.

Posteriormente, introducimos las variedades complejas y, en particular, las superficies de Riemann, como contexto natural para estudiar funciones holomorfas. Se analiza cómo las aplicaciones holomorfas propias entre estas superficies se comportan como recubrimientos ramificados, un tipo de aplicaciones que son de recubrimiento al restringirse a un subespacio. Probaremos la equivalencia entre aplicaciones holomorfas propias y recubrimientos ramificados, lo cual nos permite construir un grupo de automorfismos para las aplicaciones propias holomorfas.

Finalmente, se establece una conexión entre los recubrimientos ramificados de superficies de Riemann y las extensiones de cuerpos de funciones meromorfas, dando una equivalencia entre ambos conjuntos lo cual permite obtener grupos de Galois a partir de aplicaciones holomorfas propias. En particular, se muestra que todo grupo finito puede realizarse como el grupo de Galois de una extensión del cuerpo $\mathbb{C}(t)$.

Palabras clave: aplicación de recubrimiento, superficie de Riemann, aplicación holomorfa, grupo Fundamental, recubrimiento ramificado, función meromorfa

Abstract

In this work, we study the theory of covering maps from a topological perspective. We begin by introducing the concept of a covering map, a particular type of local homeomorphism, and we explore its relationship with the fundamental group. Then we show how the automorphisms of a covering form a group that is closely related to the fundamental group, culminating in a classification theorem for coverings analogous to Galois theory.

Next, we introduce complex manifolds and, in particular, Riemann surfaces as the natural setting for studying holomorphic functions. We analyze how proper holomorphic maps between these surfaces behave as branched coverings, a type of map that restricts to a covering on a subspace. We establish an equivalence between proper holomorphic maps and branched coverings, which allows us to construct an automorphism group for proper holomorphic maps.

Finally, we establish a connection between branched coverings of Riemann surfaces and extensions of fields of meromorphic functions, giving an equivalence between these two settings that enables the construction of Galois groups from proper holomorphic maps. In particular, we show that every finite group can be realized as a Galois group of an extension of the field $\mathbb{C}(t)$.

Key words: covering map, Riemann surface, holomorphic map, fundamental group, branched covering, meromorphic function

Índice general

Introducción

La relación entre topología, análisis complejo y álgebra ha sido uno de los ejes fundamentales del desarrollo matemático desde el siglo XIX. El estudio de funciones multivaluadas, como el logaritmo complejo o la raíz cuadrada, llevó a matemáticos como Bernhard Riemann a introducir superficies que permitieran tratar estas funciones como univaluadas. Así, durante la tesis de doctorando de Riemann [13] nacieron las superficies de Riemann, objeto central de la teoría de funciones de variable compleja y punto de encuentro entre geometría y análisis.

Previamente, Évariste Galois había establecido las bases de la teoría de Galois, mostrando cómo las simetrías de las soluciones de una ecuación algebraica pueden organizarse en un grupo que permite clasificar las extensiones de cuerpos. Esta correspondencia entre estructuras algebraicas y grupos de simetrías sirvió de inspiración para desarrollos posteriores en diversos campos.

En el ámbito de la topología, Henri Poincaré introdujo el concepto de grupo fundamental a partir de los caminos definidos en un espacio topológico [12]. Este grupo permite clasificar, entre otras cosas, los recubrimientos topológicos, aplicaciones que son homeomorfismos locales y nos permiten estudiar el espacio sobre el que actúan. La teoría de recubrimientos y su correspondencia con subgrupos del grupo fundamental presenta una analogía directa con la teoría de Galois, ya que ambas establecen una relación entre espacios (o cuerpos) y grupos de automorfismos.

Este Trabajo de Fin de Grado explora esta interacción entre topología, análisis complejo y álgebra. En el capítulo 1, se introducen las aplicaciones de recubrimiento desde un punto de vista topológico. Tras presentar sus propiedades básicas y ejemplos fundamentales, se estudia la acción del grupo fundamental del espacio base sobre las fibras del recubrimiento. Introducimos el concepto de homomorfismos del recubrimiento, que son aplicaciones entre recubrimientos de un espacio base que conservan las fibras. Esto conduce al concepto de grupo de automorfismos de un recubrimiento y culmina con un teorema de clasificación de recubrimientos en términos de clases de subgrupos del grupo fundamental del espacio base, evocando la estructura de la teoría de Galois. Se ve que dado un espacio suficientemente bueno, el grupo de automorfismos coincide con el grupo fundamental. Este hecho ha llevado a autores como Douady en [3] a definir el grupo fundamental de un espacio X como el grupo de automorfismos de un funtor entre los recubrimientos de un espacio y las fibras de este.

Continuamos la memoria incluyendo un breve interludio entre los capítulos 1 y 2. El enfoque cambia de la topología al análisis complejo y se introducen las variedades complejas y las superficies de Riemann. Se estudia su topología inherente y se presentan ejemplos relevantes. A partir de ellas, se abordan las aplicaciones holomorfas y meromorfas, herramientas esenciales para el estudio de funciones entre estas superficies.

El capítulo 2 se centra en las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann, analizando su comportamiento local y global. Se introducen dos nociones fundamentales: la de aplicación propia y la de recubrimiento ramificado, mostrando que ambas coinciden en el contexto de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. A partir de ahí, se construye el grupo de automorfismos de un recubrimiento ramificado, extendiendo las ideas topológicas del capítulo 1 al caso ramificado.

Finalmente, en el capítulo 3, se plantea una reinterpretación algebraica de los conceptos anteriores. Se considera el cuerpo de funciones meromorfas de una superficie de Riemann conexa y se ve que una aplicación holomorfa propia entre superficies de Riemann induce una extensión entre los cuerpos de funciones meromorfas. Además, se muestra que existe una equivalencia entre extensiones del cuerpo de funciones meromorfas y de recubrimientos ramificados. Como cierre del trabajo, se demuestra que todo grupo finito puede realizarse como grupo de Galois de una extensión del cuerpo racional de funciones $\mathbb{C}(t)$, estableciendo así una poderosa conexión entre geometría, topología y álgebra.

Capítulo 1

Aplicaciones de recubrimiento

En este capítulo, introduciremos el concepto de aplicación de recubrimiento. Estas son un tipo particular de aplicaciones que son homeomorfismos locales. En la primera parte del capítulo, veremos varios ejemplos de estas aplicaciones y sus propiedades más sencillas. Mostraremos que estas aplicaciones están relacionadas con los grupos fundamentales de los espacios entre los que se definen y concluiremos la primera sección viendo qué ocurre cuando el dominio es simplemente conexo.

Continuamos viendo cómo el grupo fundamental del codominio induce una acción sobre las fibras de las aplicaciones de recubrimiento. También, introduciremos el concepto de homomorfismos del recubrimiento, que son aplicaciones entre recubrimientos de un mismo espacio y veremos que, cuando ambos espacios coinciden, estos homomorfismos determinan un grupo que llamaremos el grupo de automorfismos del recubrimiento.

El capítulo termina con un teorema de clasificación de los recubrimientos de un espacio topológico suficientemente bueno. Probaremos que se podrán identificar clases de conjugación de subgrupos del grupo fundamental con clases de recubrimientos del espacio. Esto induce una equivalencia como la que se da en la teoría de Galois entre cuerpos y grupos de automorfismos.

Para escribir este capítulo, principalmente se han seguido los capítulos 11 y 12 de [8]. También, se ha consultado [9]. Además, algunos resultados se vieron en la asignatura de Topología Algebraica [1] y por ello quedarán sin demostrar.

Esta memoria incluye en el Apéndice A nociones básicas del grupo fundamental que sirven de recordatorio de algunos conceptos relacionados con este grupo.

1.1. Propiedades básicas de las aplicaciones de recubrimiento

La definición de aplicación de recubrimiento es la siguiente:

Definición 1.1.1. Sean $\widetilde{X}$ y X espacios topológicos. Una aplicación continua $p : \widetilde{X} \to X$ se llama **aplicación de recubrimiento** o **aplicación recubridora** si cumple las siguientes propiedades:

1. p es suprayectiva.
2. Para todo $x \in X$, existe un entorno abierto U de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ con:
   - V_i es un abierto de $\widetilde{X}$ para todo $i \in I$,
   - $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
   - la restricción $p|_{V_i} : V_i \to U$ es un homeomorfismo para cada $i \in I$.

Decimos que $\widetilde{X}$ es un **espacio recubridor** o un **recubrimiento** de X y que X es un **espacio base**. Los abiertos U que verifican las condiciones anteriores se denominan **abiertos distinguidos** o **regularmente cubiertos**. Además, dado un punto $x \in X$, al conjunto $p^{-1}(x)$ se le denomina **fibra de x**.

Se presentan dos ejemplos de aplicaciones de recubrimiento.

Ejemplo 1.1.2. Dado $k \in \mathbb{N}$, la siguiente aplicación es de recubrimiento:

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\longrightarrow (0, +\infty) \\ r &\longmapsto r^k \end{aligned}$$

La aplicación f es continua. Además, en este dominio de definición es biyectiva y su inversa, $f^{-1}(r) = r^{1/k}$, también es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo. Luego, f es una aplicación suprayectiva y el conjunto $(0, \infty)$ es un abierto distinguido de todo punto. En general, tendremos que los homeomorfismos son aplicaciones de recubrimiento por un argumento similar.

Ejemplo 1.1.3. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Entonces, la siguiente aplicación es de recubrimiento:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto z^k \end{aligned}$$

La aplicación g es continua y sobreyectiva. Dado $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, el punto $w = e^{i\theta/k}$ también pertenece a $\mathbb{S}^1$, ya que su norma es 1, y satisface

$$g(w) = z^k = \left(e^{i\theta/k}\right)^k = e^{i\theta} = z,$$

por lo que g es sobreyectiva.

Queda comprobar que cada punto posee un entorno distinguido. Daremos este entorno para 0 y para el resto de puntos será equivalente con una rotación de ángulo. Sea $U = \{e^{i\theta} : \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\}$. Entonces, se tiene que

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j.$$

donde $V_j = \{e^{i\theta} : \theta \in (\frac{2\pi j}{k} - \frac{\pi}{2k}, \frac{2\pi j}{k} + \frac{\pi}{2k})\}$. Los abierto V_j son disjuntos dos a dos y $g|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ es un homeomorfismo, como se quería.

La siguiente proposición será útil para construir aplicaciones de recubrimiento.

Proposición 1.1.4. *Sean $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $q : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ aplicaciones de recubrimiento. Entonces, el producto*

$$\begin{aligned} p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} &\longrightarrow X \times Y, \\ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) &\longmapsto (p(\widetilde{x}), q(\widetilde{y})) \end{aligned}$$

también es una aplicación de recubrimiento.

Usando este resultado y los ejemplos anteriores, construimos el siguiente ejemplo de aplicación de recubrimiento:

Ejemplo 1.1.5. Sea $k \in \mathbb{N}$ y se denota $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces, la siguiente aplicación es de recubrimiento:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^k \end{aligned}$$

La representación polar de $\mathbb{C}^*$ permite definir un homeomorfismo $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{S}^1 \times (0, +\infty)$, dado por $z = re^{i\theta} \mapsto (\theta, r)$.

Bajo esta identificación, la aplicación $p(z) = z^k = r^k e^{ik\theta}$ puede verse como el producto $f \times g$ donde f es la aplicación de recubrimiento del Ejemplo 1.1.2 y g la aplicación de recubrimiento del Ejemplo 1.1.3. Por la Proposición 1.1.4, el producto $f \times g$ es un recubrimiento, y por tanto, también lo es p.

A continuación, se enuncian algunas propiedades de las aplicaciones de recubrimiento que se usarán en los próximos capítulos:

Proposición 1.1.6. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación de recubrimiento, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) p es una aplicación abierta.

*(b) Si X es conexo, entonces el cardinal de las fibras es el mismo para cada punto de X. Si este número es finito, se dice que p es un **recubrimiento finito** y el cardinal de la fibra k se denomina **número de hojas del recubrimiento**. Diremos que un recubrimiento con k hojas es un **recubrimiento de k hojas** o un **recubrimiento de grado k**. Además, la preimagen de un abierto distinguido de X estará compuesta por la unión disjunta de k abiertos.*

(c) Sea $X_0 \subset X$ un subespacio tal que $\widetilde{X_0} = p^{-1}(X_0)$. Entonces, la restricción $p|_{\widetilde{X_0}} : \widetilde{X_0} \to X_0$ es también una aplicación de recubrimiento.

Con estas propiedades es posible construir otro tipo de aplicación de recubrimiento que será de suma utilidad en próximas secciones. Esta es, la restricción de la aplicación del Ejemplo 1.1.5 al disco unidad abierto.

Ejemplo 1.1.7. Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{D}^* &\longrightarrow \mathbb{D}^* \\ z &\longmapsto z^k \end{aligned}$$

es de recubrimiento. Por el Ejemplo 1.1.5 la aplicación

$$\begin{aligned} q : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^k \end{aligned}$$

es de recubrimiento. $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{C}^*$ y es un conjunto abierto que cumple $\mathbb{D}^* = q^{-1}(\mathbb{D}^*)$. Por la Proposición 1.1.6(c), entonces, la restricción de q al disco es una aplicación de recubrimiento.

Como se ha visto en la Proposición 1.1.6(b), hay propiedades de estas aplicaciones que requieren la condición de conexión del espacio para cumplirse. Es tal la importancia de esta propiedad del espacio, que algunos autores, como [8], incluyen en la definición de espacio recubridor la necesidad de que este sea conexo por caminos y localmente conexo por caminos. De ahora en adelante, **se supondrá que todos los espacios base son conexos y que los espacios recubridores son conexos por caminos y localmente conexos por caminos (y por lo tanto conexos)** aunque no se especifique.

1.1.1. Levantamientos de aplicaciones

En esta subsección, veremos el concepto de levantamiento de aplicaciones, cuando estos existen y su relación con el grupo fundamental de los espacios involucrado. Se comienza dando la definición.

Definición 1.1.8. Dadas una aplicación de recubrimiento $p : \widetilde{X} \to X$ y una aplicación continua $f : Y \to X$, un **levantamiento de f** es una aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

El siguiente resultado nos muestra que si Y es conexo y el levantamiento de f existe, entonces el levantamiento es único.

Proposición 1.1.9. *Sean $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento y $f : Y \to X$ una aplicación continua. Tomamos $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ tales que $f(y_0) = x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Si Y es conexo y existe una aplicación continua $\widetilde{f} : Y \to E$ tal que $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x_0}$ y $f = p \circ \widetilde{f}$, entonces $\widetilde{f}$ es única.*

En concreto, los caminos en el espacio recubierto pueden ser levantados de manera única.

Proposición 1.1.10. *Si consideramos un camino $\sigma : I \to X$ con $\sigma(0) = x_0 \in X$, entonces para cada $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ existe un único camino $\widetilde{\sigma} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{x_0}$ y $\sigma = p \circ \widetilde{\sigma}$.*

De manera idéntica, una homotopía entre caminos también puede ser levantada de manera única en ciertas condiciones.

Proposición 1.1.11. *Si tenemos una aplicación continua $F : I \times I \to X$ con $F(0,0) = x_0 \in X$ y tomamos $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, entonces existe una única aplicación continua $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ que levanta a F con $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x_0}$.*

Como consecuencia de estos dos resultados se tiene que si $\sigma, \tau : I \to X$ son dos caminos homótopos con $\sigma(0) = \tau(0) = x_0$ y tomamos $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, entonces sus levantamientos $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau} : I \to \widetilde{X}$ con $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{\tau}(0) = \widetilde{x_0}$ son homótopos y en particular, se tiene que $\widetilde{\sigma}(1) = \widetilde{\tau}(1)$. Este último resultado se conoce como el **Teorema de monodromía**.

Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento. Tomamos los puntos $x_0 \in X$, $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0) \subset \widetilde{X}$. La aplicación p induce un homomorfismo entre los grupos fundamentales $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ y $\pi_1(X, x_0)$ (ver (A.1)) dado por:

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\sigma] \quad &\longmapsto \quad [p \circ \sigma]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Este homomorfismo es una aplicación inyectiva. Como consecuencia, se obtiene que el grupo fundamental $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$ de un espacio recubridor $\widetilde{X}$ puede identificarse con un subgrupo del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ de X. Además, se tiene que $[\sigma] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ si, y solo si, el levantamiento $\widetilde{\sigma}$ de σ es un lazo en $\widetilde{X}$ con base en $\widetilde{x_0}$.

Dada una aplicación de recubrimiento $p : \widetilde{X} \to X$ y una aplicación continua $f : Y \to X$ con $p(\widetilde{x_0}) = f(y_0) = x_0$, se buscan condiciones que permitan asegurar la existencia de un levantamiento $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x_0}$. El resultado siguiente reduce este problema topológico a un problema algebraico, y muestra la estrecha relación entre las aplicaciones de recubrimiento y el grupo fundamental de los espacios:

Proposición 1.1.12. *Si Y es conexo y localmente conexo por caminos, existe el levantamiento $\widetilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ con $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x_0}$ si, y solo si, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$.*

En concreto, si el espacio Y es simplemente conexo, el levantamiento de la aplicación existe siempre. Veamos otro ejemplo de aplicación del resultado anterior que permite probar que dos espacios son homeomorfos.

Ejemplo 1.1.13. Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ una aplicación de recubrimiento. Entonces, $\widetilde{X}$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^*$.

Dado $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{x_0}) = z_0$, el conjunto $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ es un subgrupo de $\pi_1(\mathbb{D}^*, z_0) \cong \mathbb{Z}$. Los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma

$$k\mathbb{Z} = \{kn : n \in \mathbb{Z}\}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) \cong k\mathbb{Z}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Considérese la aplicación de recubrimiento (ver Ejemplo 1.1.7)

$$\begin{aligned} p_k : \mathbb{D}^* &\longrightarrow \mathbb{D}^* \\ z &\longmapsto z^k. \end{aligned}$$

Dado $w \in \mathbb{D}^*$, se tiene que

$$(p_k)_*(\pi_1(\mathbb{D}^*, w)) \cong k\mathbb{Z}.$$

Por tanto, sea $w_0 \in \mathbb{D}^*$ tal que $p_k(w_0) = z_0$ se cumple que

$$(p_k)_*(\pi_1(\mathbb{D}^*, w_0)) = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})).$$

En consecuencia, por la Proposición 1.1.12, existen levantamientos $\widetilde{p} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ y $\widetilde{p_k} : \mathbb{D}^* \longrightarrow \widetilde{X}$ haciendo conmutativos los diagramas siguientes

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}^* \arrow[ur, "\widetilde{p_k}"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{D}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{D}^* \arrow[d, "p_k"] \\ \widetilde{X} \arrow[ur, "\widetilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & \mathbb{D}^* \end{tikzcd}$$

con $\widetilde{p}(\widetilde{x_0}) = w_0$ y $\widetilde{p_k}(w_0) = \widetilde{x_0}$. La composición de ambas aplicaciones $\widetilde{p} \circ \widetilde{p_k} : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{D}^*$ cumple que

$$p_k \circ (\widetilde{p} \circ \widetilde{p_k})(z) = (p_k \circ \widetilde{p}) \circ \widetilde{p_k}(z) = p \circ \widetilde{p_k}(z) = p_k(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}^*$. Luego, $\widetilde{p} \circ \widetilde{p_k}$ es un levantamiento de p_k. Además, tenemos que $\widetilde{p} \circ \widetilde{p_k}(w_0) = \widetilde{p}(\widetilde{x_0}) = w_0$. Como la aplicación identidad $Id_{\mathbb{D}^*}$ es otro levantamiento de p_k que envía w_0 en w_0, por la Proposición 1.1.9 tenemos que $\widetilde{p} \circ \widetilde{p_k} = Id_{\mathbb{D}^*}$. Por el mismo argumento, $\widetilde{p_k} \circ \widetilde{p} = Id_{\widetilde{X}}$ y se tiene que $\widetilde{p_k} = \widetilde{p}^{-1}$. Luego, tenemos un homeomorfismo entre $\widetilde{X}$ y $\mathbb{D}^*$.

1.1.2. Recubrimiento universal

Un caso especial de recubrimiento es aquel en el que el espacio recubridor es simplemente conexo.

Definición 1.1.14. Dado un espacio topológico X, se llama **recubrimiento universal** de X a cualquier espacio recubridor $\widetilde{X}$ que sea simplemente conexo.

El recubrimiento universal cumple dos propiedades que motivan su nombre. En primer lugar, si $\widetilde{X}$ es un recubrimiento universal de X y X' es otro recubrimiento de X, entonces $\widetilde{X}$ también recubre a X'. Además, si $\widetilde{X}$ y X' son dos recubrimientos simplemente conexos de X, entonces son homeomorfos entre sí.

No todo espacio topólogico posee un recubrimiento universal. Sin embargo, dado X un espacio topológico con recubrimiento universal $\widetilde{X}$ y α un lazo en X contenido en un abierto distinguido U, se ve que α tiene un levantamiento $\widetilde{\alpha}$ que es un lazo. Por ser $\widetilde{X}$ simplemente conexo, se ve que $\widetilde{\alpha}$ es homótopo en $\widetilde{X}$ al lazo constante, por lo que $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$ también es homótopo a un lazo constante en X. Esto induce la siguiente definición:

Definición 1.1.15. Un espacio topológico X se dice que es **semilocalmente simplemente conexo** si cada punto $x \in X$ tiene un entorno U con la propiedad de que todo lazo con base en x contenido en U es homótopo en X al lazo constante en x.

Esta condición es necesaria para poseer un recubrimiento universal y, de hecho, como muestra el siguiente teorema, es también suficiente.

Teorema 1.1.16. *Sea X un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos. Entonces, el espacio X tiene un recubrimiento universal si y solo si X es semilocalmente simplemente conexo.*

Aunque no incluya todo tipo de espacios, esta propiedad la verifican muchos espacios topológicos, como las variedades complejas, que serán estudiadas más adelante. La existencia de recubrimiento universal será fundamental para clasificar los tipos de recubrimientos de estos espacios.

1.2. Aplicaciones de recubrimiento y grupo fundamental

Esta sección busca profundizar en las acciones que varios grupos definen sobre el espacio de recubrimiento y sus propiedades.

Aunque una aplicacion de recubrimiento p determina un subgrupo del grupo fundamental (ver (1.1)), en general, este grupo depende del punto base escogido. En efecto, el subgrupo determinado puede cambiar, pero lo hace de maneras concretas, como se verá en el proximo teorema. Antes de enunciarlo, recordamos que, dado un grupo G, y $H, S \subset G$ subgrupos, decimos que H y S son subgrupos **conjugados** si existe un $g \in G$ tal que $H = g^{-1}Sg$. La relación de ser conjugados es de equivalencia y determina una clase en los subgrupos de G.

Teorema 1.2.1. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento con X conexo y $\widetilde{X}$ conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Dados $q \in X$, y $q, q' \in p^{-1}(q)$, entonces $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ y $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, q)$.*

Además, dados $q \in X$, y $q \in p^{-1}(q)$, para cada subgrupo $H \subset \pi_1(X, q)$ conjugado a $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ existe un punto $q' \in p^{-1}(x)$ con $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') = H$.

Demostración. En primer lugar, se comienza viendo que dados $\widetilde{q}, \widetilde{q}' \in p^{-1}(q)$, los subgrupos $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ y $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ están conjugados. Para ello, sea $\widetilde{\tau}$ un camino en $\widetilde{X}$ desde $\widetilde{q}$ a $\widetilde{q}'$ y sea $\tau = p \circ \widetilde{\tau}$ el lazo en X con base q.

Consideramos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \Phi_\tau : \pi_1(X, q) &\longrightarrow \pi_1(X, q) \\ [\gamma] &\longmapsto [\tau]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [\tau], \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi_{\widetilde{\tau}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) &\longrightarrow \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') \\ [\gamma] &\longmapsto [\widetilde{\tau}]^{-1} \cdot [\gamma] \cdot [\widetilde{\tau}], \end{aligned} \tag{1.2}$$

que son un isomorfismo entre los grupos fundamentales (ver A.3). Entonces, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}) & \xrightarrow{\Phi_{\widetilde{\tau}}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}') \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, q) & \xrightarrow{\Phi_\tau} & \pi_1(X, q) \end{array}$$

que conmutativo, ya que, dado $[\gamma] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{q})$:

$$\begin{aligned} p_* \circ \Phi_\tau([\gamma]) &= p_*([\widetilde{\tau}^{-1} * \gamma * \widetilde{\tau}]) \\ &= [p \circ (\widetilde{\tau}^{-1} * \gamma * \widetilde{\tau})] \\ &= [(p \circ \widetilde{\tau}^{-1}) * (p \circ \gamma) * (p \circ \widetilde{\tau})] \\ &= [\tau^{-1}] \cdot p_*([\gamma]) \cdot [\tau] \\ &= \Phi_\tau \circ p_*([\gamma]). \end{aligned}$$

Por tanto, Φ_τ lleva el subgrupo $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ en $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$, por lo que es posible sustituir en el diagrama los grupos de la fila inferior por su imagen bajo p_*, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}) & \xrightarrow{\Phi_{\widetilde{\tau}}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{q}') \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) & \xrightarrow{\Phi_\tau} & p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') \end{array} \tag{1.3}$$

En este diagrama, las aplicaciones p_* son isomorfismos, por ser inyectivas y haber sido restringido el codominio a su imagen. Por otro lado, la aplicación $\Phi_{\widetilde{\tau}}$ es un isomorfismo también, por lo tanto Φ_τ es un isomorfismo también. Como Φ_τ es la aplicación que envía un subgrupo al conjugado por $[\tau]^{-1}$, esto muestra que, en efecto, $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ y $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ son subgrupos conjugados.

Recíprocamente, sea $\widetilde{q} \in p^{-1}(q)$ y sea H un subgrupo de $\pi_1(X, q)$ conjugado a $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$. Entonces, existe un lazo τ en X con base en q tal que $H = [\tau]^{-1} \cdot p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) \cdot [\tau]$. Sea $\widetilde{\tau}$ un levantamiento de τ con $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{q}$ y $\widetilde{\tau}(1) = \widetilde{q}'$. Entonces, por la construcción mostrada en el diagrama (1.3), se ve que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') = \Phi_\tau(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) = H$. □

Un caso especial sucede cuando el subgrupo $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es igual para todos los puntos de la fibra. Esto sucede si $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ fuera igual a cualquier subgrupo conjugado a sí mismo, lo cual ocurre cuando $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es un subgrupo normal en $\pi_1(X, q)$. Si para todo $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$, el subgrupo $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es normal se dice que el recubrimiento $p : \widetilde{X} \to X$ es **normal** o **galoisiano**.

Lema 1.2.2. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento tal que existe un punto $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ de manera que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es normal. Entonces, el recubrimiento p es normal.*

Demostración. Consideramos $\widetilde{q}, \widetilde{q}' \in \widetilde{X}$ y sean $q = p(\widetilde{q})$ y $q' = p(\widetilde{q}')$. Tomamos $\widetilde{\tau}$ un camino en $\widetilde{X}$ entre $\widetilde{q}$ y $\widetilde{q}'$ y sea $\tau = p \circ \widetilde{\tau}$ el camino en X desde q a q'. Por el diagrama (1.3) tenemos que la aplicación Φ_τ, que es un isomorfismo de grupos, envía $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ a $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$. Como un isomorfismo de grupos lleva subgrupos normales en subgrupos normales, concluimos que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, q)$.

□

Dado un grupo G y un espacio topológico X, una acción del grupo G sobre X es una aplicación

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto x \cdot g \end{aligned}$$

que cumple las siguiente propiedades:

(a) Existe un elemento neutro $e \in G$ tal que $x \cdot e = x$ para todo $x \in X$.

(b) Para $g_1, g_2 \in G$ se tiene que $x \cdot (g_1 * g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$.

A continuación, vemos que existe una acción natural del grupo fundamental $\pi_1(X, q)$ sobre la fibra $p^{-1}(q)$.

Teorema 1.2.3. *Sean $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento y $q \in X$. Entonces, existe una acción por la derecha transitiva de $\pi_1(X, q)$ sobre la fibra $p^{-1}(q)$ dada por*

$$\begin{aligned} p^{-1}(q) \times \pi_1(X, q) &\longrightarrow p^{-1}(q) \\ (\widetilde{q}, [\tau]) &\longmapsto \widetilde{q} \cdot [\tau] = \widetilde{\tau}(1) \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\tau}$ es el levantamiento de τ con $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{q}$.

Demostración. En primer lugar, veamos que la aplicación está bien definida y es independiente del representante de la clase. Sea $\widetilde{q} \in p^{-1}(q)$ y sea $[\tau] \in \pi_1(X, q)$. Por la Proposición 1.1.10 y por la Proposición 1.1.9, existe un único levantamiento $\widetilde{\tau}$ de τ con $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{q}$. Además, el Teorema de monodromía (ver Subsección 1.1.1) garantiza que el punto final $\widetilde{\tau}(1)$ depende exclusivamente de la clase de caminos de τ. Por tanto, $\widetilde{\tau}(1)$ es independiente del representante de la clase escogido y $\widetilde{q} \cdot [\tau]$ está bien definido.

Para ver que es una acción de grupo, se debe comprobar lo siguiente:

(a) Existe un elemento neutro $[e]$ tal que $\widetilde{q} \cdot [e] = \widetilde{q}$.

(b) Para $[\tau_1], [\tau_2] \in \pi_1(X, q)$ se tiene que $\widetilde{q} \cdot ([\tau_1] \cdot [\tau_2]) = (\widetilde{q} \cdot [\tau_1]) \cdot [\tau_2]$.

Comenzamo viendo (a). Para ello, se toma el lazo constante c_q en X con base en q. Su levantamiento con origen en $\widetilde{q}$ es el lazo constante $c_{\widetilde{q}}$. Por tanto, $\widetilde{q} \cdot [c_q] = c_{\widetilde{q}}(1) = \widetilde{q}$.

Para comprobar (b), se toman dos lazos τ_1, τ_2 en X con origen en q. Consideramos $\widetilde{\tau}_1$ al levantamiento de τ_1 con origen $\widetilde{\tau}_1(0) = \widetilde{q}$. Con ello, $\widetilde{q} \cdot [\tau_1] = \widetilde{\tau}_1(1)$. Tomando $\widetilde{\tau}_2$ como el levantamiento de τ_2 en $\widetilde{X}$ que comienza en $\widetilde{\tau}_1(1)$, entonces,

$$(\widetilde{q} \cdot [\tau_1]) \cdot [\tau_2] = \widetilde{\tau}_1(1) \cdot [\tau_2] = \widetilde{\tau}_2(1).$$

Por otro lado, $\widetilde{\tau}_1 * \widetilde{\tau}_2$ es el levantamiento de $\tau_1 * \tau_2$ en $\widetilde{X}$ comenzando en $\widetilde{q}$. Por ende:

$$\begin{aligned} \widetilde{q} \cdot ([\tau_1] \cdot [\tau_2]) &= \widetilde{q} \cdot [\tau_1 * \tau_2] \\ &= \widetilde{\tau}_1 * \widetilde{\tau}_2(1) \\ &= \widetilde{\tau}_2(1). \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que $\widetilde{q} \cdot ([\tau_1] \cdot [\tau_2]) = (\widetilde{q} \cdot [\tau_1]) \cdot [\tau_2]$.

Finalmente, se ve que la acción es transitiva. Sean $\widetilde{q}, \widetilde{q}' \in p^{-1}(q)$. Como $\widetilde{X}$ es conexo por caminos, existe un camino $\widetilde{\tau}$ en $\widetilde{X}$ entre $\widetilde{q}$ y $\widetilde{q}'$. Sea $\tau = p \circ \widetilde{\tau}$ un lazo en X con base q. Entonces, $\widetilde{\tau}$ se corresponde con el levantamiento de τ con $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{q}$ y que tiene como punto final $\widetilde{q}'$. Por tanto, se tiene que $\widetilde{q}' = \widetilde{q} \cdot [\tau]$ y se concluye que la acción es transitiva. $\square$

1.2.1. Homomorfismos de recubrimientos

Sean $X, \widetilde{X_1}$ y $\widetilde{X_2}$ espacios topológicos y $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ aplicaciones de recubrimiento sobre X. Un **homomorfismo de recubrimientos** del recubrimiento dado por p_1 al recubrimiento dado por p_2 es una aplicación continua $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$. Un homomorfismo de recubrimientos que es también un homeomorfismo se dice que es un **isomorfismo de recubrimientos**. Si existe un isomorfismo entre dos espacios recubridores, se dice que estos son **isomorfos**.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X_1} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X_2} \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Una propiedad interesante de los homomorfismos de recubrimientos es que son aplicaciones de recubrimiento, como se muestra en el próximo teorema.

Proposición 1.2.4. *Sean $X, \widetilde{X}$ y X' espacios topológicos y sean $p_1 : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $p_2 : X' \longrightarrow X$ aplicaciones de recubrimiento. Si $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ es un homomorfismo de recubrimientos entonces φ es una aplicación de recubrimiento.*

Demostración. En primer lugar, veamos que φ es una aplicación sobreyectiva. Sea $q_0' \in X'$ y $q_0 = p_2(q_0')$. Consideramos $\widetilde{q}_1 \in \widetilde{X}$ con $q_1 = p_1(\widetilde{q}_1)$ y sea $q_1' \in X'$ tal que $p_2(q_1') = q_1$. Por ser X' un espacio conexo por caminos, existe un camino

$$\widetilde{\tau}_{X'} : [0, 1] \to X'$$

tal que $\widetilde{\tau}_{X'}(0) = q_1'$ y $\widetilde{\tau}_{X'}(1) = q_0'$. Entonces $\tau = p_2 \circ \widetilde{\tau}_{X'}$ es un camino en X con origen q_1. Sea $\widetilde{\tau}_{\widetilde{X}} : [0, 1] \to \widetilde{X}$ el único levantamiento de τ sobre $\widetilde{X}$ con $\widetilde{\tau}(0) = \widetilde{q}_1$. Consideramos ahora el camino $\varphi \circ \widetilde{\tau}_{\widetilde{X}}$, que es un camino en X' con punto inicial $\varphi(\widetilde{q}_1) = q_1'$ y, además, satisface que $p_2 \circ \varphi \circ \widetilde{\tau}_{\widetilde{X}} = p_1 \circ \widetilde{\tau}_{\widetilde{X}} = \tau$, por lo que es el levantamiento de τ en X' con origen en q_1'. Como tanto $\varphi \circ \widetilde{\tau}_{\widetilde{X}}$ como $\widetilde{\tau}_{X'}$ son levantamientos del mismo lazo en X que comienzan en el mismo punto q_1', por unicidad del levantamiento se sigue que

$$\varphi \circ \widetilde{\tau}_{\widetilde{X}} = \widetilde{\tau}_{X'}.$$

En particular,

$$\varphi(\widetilde{\tau}_{\widetilde{X}}(1)) = \widetilde{\tau}_{X'}(1) = q_0',$$

lo cual prueba que φ es sobreyectiva.

Queda probar la existencia de abiertos distinguidos para cada punto de X'. Sea $q' \in X'$ tal que $p_2(q') = q \in X$. Sean $U_1, U_2 \subseteq X$ entornos abiertos de q regularmente cubiertos por $p_1 : \widetilde{X} \longrightarrow X$ y $p_2 : X' \longrightarrow X$, respectivamente. Sea U la componente conexa por caminos de $U_1 \cap U_2$ que contiene a q. Entonces, U está regularmente cubierto por ambas aplicaciones de recubrimiento.

Sea $V \subseteq X'$ la componente conexa de $p_2^{-1}(U)$ que contiene a q'. Vamos a ver que V está regularmente cubierto por φ. Como U es abierto distinguido de p_1, tenemos que

$$p_1^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \widetilde{U_j}$$

con los $\widetilde{U_j}$ disjuntos dos a dos y $p_1|_{\widetilde{U_j}} : \widetilde{U_j} \longrightarrow U$ un homeomorfismo.

El conjunto

$$I = \{i \in J : \varphi(\widetilde{U}_i) \cap V \neq \emptyset\}$$

es no vacío, ya que φ es sobreyectiva. Tomemos $i \in J$ tal que $\varphi(\widetilde{U}_i) \cap V \neq \emptyset$. Como $\varphi(\widetilde{U}_i)$ es un conjunto conexo con $\varphi(\widetilde{U}_i) \subset p_2^{-1}(U)$ y se tiene que V es una componente conexa de $p_2^{-1}(U)$, debe ser que $\varphi(\widetilde{U}_i) \subset V$. Recordamos que $p_1|_{\widetilde{U_1}}$ y $p_2|_V$ son homeomorfismos y que $p_1 = \varphi \circ p_2$. Por tanto, tenemos que

$$\varphi|_{\widetilde{U_i}} = (p_2|_V)^{-1} \circ (p_1|_{\widetilde{U_1}}).$$

Luego, $\varphi|_{\widetilde{U_i}}$ es un homeomorfismo, por ser composición de homeomorfismos.

Así, tenemos que

$$\varphi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} \widetilde{U}_i$$

con los $\widetilde{U}_i$ disjuntos dos a dos y $\varphi|_{\widetilde{U_i}}$ un homeomorfismo para todo $i \in I$. Por ende, φ es una aplicación de recubrimiento. $\square$

A continuación, veremos las condiciones necesarias y suficientes para que dos recubrimientos de un mismo espacio sean isomorfos.

Teorema 1.2.5. *Dos recubrimientos $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ y $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ son isomorfos si y solo si existen un punto $q \in X$ y elementos $\widetilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$ y $\widetilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q)$ tales que los subgrupos*

$$p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1) \quad y \quad p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2)$$

son conjugados en $\pi_1(X, q)$. Si esto se cumple, estos subgrupos son conjugados para cualquier elección de q, $\widetilde{q}_1$, y $\widetilde{q}_2$ en las fibras correspondientes.

Demostración. Si existe un isomorfismo $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, elegimos un punto $\widetilde{q}_1 \in \widetilde{X}_1$ y consideramos $\widetilde{q}_2 = \varphi(\widetilde{q}_1)$. Las aplicaciones φ y φ^{-1} son levantamientos de p_1 y p_2, respectivamente. Por la Proposición 1.1.12 tenemos que los subgrupos

$$p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1) \quad \text{y} \quad p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2)$$

están contenidos uno en el otro y por lo tanto son iguales.

Por el Teorema 1.2.1, $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1')$ y $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, q)$ para cualquier $\widetilde{q}_1' \in p_1^{-1}(q)$. De la misma manera, $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2')$ y $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, q)$ para cualquier $\widetilde{q}_2' \in p_2^{-1}(q)$. Por lo tanto, $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1')$ y $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2')$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, q)$ para cualquier $\widetilde{q}_1' \in p_1^{-1}(q)$ y $\widetilde{q}_2' \in p_2^{-1}(q)$.

Recíprocamente, supongamos que los dos subgrupos $p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1)$ y $p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2)$ son conjugados para alguna elección de q, $\widetilde{q}_1$ y $\widetilde{q}_2$. Por el Teorema 1.2.1, podemos cambiar a un nuevo punto base $\widetilde{q}_2' \in \widetilde{X}_2$ con $p_2(\widetilde{q}_2{}') = p_2(\widetilde{q}_2)$ tal que

$$p_{2*}\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2') = p_{1*}\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1).$$

Entonces, por la Proposición 1.1.12, existen homomorfismos φ de p_1 a p_2 y ψ de p_2 a p_1 tales que $\varphi(\widetilde{q}_1) = \widetilde{q}_2'$ y $\psi(\widetilde{q}_2') = \widetilde{q}_1$. La composición $\psi \circ \varphi$ es una transformación de recubrimiento de p_1 que fija $\widetilde{q}_1$, por lo tanto es la identidad. De manera similar, $\varphi \circ \psi$ es la identidad, así que φ es el isomorfismo requerido. □

1.2.2. Grupo de automorfismos del recubrimiento

Consideramos $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación de recubrimiento. En esta situación, al homomorfismo de recubrimientos $\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ lo denominamos **automorfismo del recubrimiento** o **transformación del recubrimiento**. Sea $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ el conjunto de automorfismos del recubrimiento respecto a p. La operación de composición de aplicaciones define sobre este conjunto una estructura de grupo. En efecto, dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$, su composición se encuentra en el conjunto:

$$p \circ (\varphi \circ \psi) = p \circ \varphi \circ \psi = p \circ \psi = p$$

Así mismo, como

$$p \circ \varphi^{-1} = p \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p$$

la inversa de un automorfismo del recubrimiento está en el conjunto $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$. Finalmente, la aplicación identidad es un homomorfismo que cumple la condición de llevar fibras en fibras, por lo que se concluye que $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ es un grupo que se denomina **grupo de recubrimiento** o **grupo de automorfismos del recubrimiento**.

Proposición 1.2.6. *Dado un recubrimiento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ el grupo de recubrimiento $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ verifica las siguientes propiedades*

(a) Si dos automorfismos del recubrimiento coinciden en un punto, entonces son idénticos.

(b) Para cada $q \in X$, cada automorfismo permuta los puntos de la fibra $p^{-1}(q)$.

(c) Para cada abierto distinguido $U \subseteq X$, cada automorfismo permuta las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.

Demostración. Se comienza probando (a). Un automorfismo del recubrimiento φ es, en particular, un levantamiento de p. Por la unicidad del levantamiento de aplicaciones (Proposición 1.1.9) se tiene que (a) se cumple.

Sean $q \in X$ y $\widetilde{q} \in p^{-1}(q)$. Dado un automorfismo φ del recubrimiento, se tiene que $p(\varphi(\widetilde{q})) = p \circ \varphi(\widetilde{q}) = p(\widetilde{q}) = q$ y $\varphi(\widetilde{q}) \in p^{-1}(q)$. Luego, $\varphi(p^{-1}(q)) \subset p^{-1}(q)$ y como es biyectiva, φ permuta los elementos de $p^{-1}(q)$, con lo que se cumple (b).

Finalmente, para probar (c) se toman $U \subset X$ un abierto distinguido y $V_i \subset \widetilde{X}$ una componente conexa de $p^{-1}(U)$. Como V_i es un conjunto conexo, se tiene que $\varphi(V_i)$ es conjunto conexo y por (b), se cumple que $\varphi(V_i) \subset p^{-1}(U)$. Por lo tanto, $\varphi(V_i)$ debe estar contenido en una de las componentes conexas de $p^{-1}(U)$, sea esta V_j. Se tiene, así, que $\varphi(V_i) \subset V_j$. Aplicando ahora la imagen inversa φ^{-1}, se obtiene que $V_i \subset \varphi^{-1}(V_j)$. Sin embargo, por el mismo argumento, $\varphi^{-1}(V_j)$ debe estar contenido en una de las componentes conexas de $p^{-1}(U)$, y solo puede ser que $V_i = \varphi^{-1}(V_j)$, lo que implica que $\varphi(V_i) = V_j$. Por tanto, se concluye que φ permuta las componentes conexas de $p^{-1}(U)$. □

Además, el grupo $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ de automorfismos del recubrimiento actúa sobre $\widetilde{X}$ de la siguiente manera.

Proposición 1.2.7. *El grupo $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ de automorfismos del recubrimiento define una acción por la izquierda libre sobre $\widetilde{X}$ dada por*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(\widetilde{X}) \times \widetilde{X} &\longrightarrow \widetilde{X} \\ (\varphi, \widetilde{q}) &\longmapsto \varphi(\widetilde{q}). \end{aligned}$$

Demostración. La aplicación $Id_{\widetilde{X}}$ es un automorfismo que fija cada punto de $\widetilde{X}$, por lo que existe un elemento neutro. Además, dados dos automorfismos del recubrimiento $\psi, \varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ y un punto $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ se tiene que

$$\psi(\varphi(\widetilde{q})) = (\psi \circ \varphi)(\widetilde{q}).$$

Con esto, se comprueba que es una acción.

Para ver que actúa de manera libre, utilizamos la Proposición 1.2.6(a). Dados $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ y $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ tales que $\varphi(\widetilde{q}) = \widetilde{q}$, se tiene que $Id_{\widetilde{X}}(\widetilde{q}) = \varphi(\widetilde{q})$. Por la Proposición 1.2.6(a), debe ser que $\varphi = Id_{\widetilde{X}}$ y la acción es libre. □

La acción de $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ sobre $\widetilde{X}$ no es transitiva en general. Veamos cuándo dos puntos de una fibra se encuentran en la misma órbita bajo la acción de $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$.

Proposición 1.2.8. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento y $q \in X$.*

(a) Dos puntos $\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2} \in p^{-1}(q)$ pertenecen a la misma órbita bajo la acción de $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ si y solo si $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_1}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_2})$.

(b) $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ actúa transitivamente en cada fibra si y solo si p es un recubrimiento normal.

Demostración. Se comienza probando (a). Sean $\widetilde{q_1}, \widetilde{q_2} \in p^{-1}(q)$. Si existe un automorfismo del recubrimiento φ tal que $\varphi(\widetilde{q_1}) = \widetilde{q_2}$, entonces, por ser φ un homeomorfismo, la aplicación inducida entre grupos fundamentales $\varphi_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_1}) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_2})$ es un isomorfismo. Por tanto, se tiene que

$$p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_1}) = (p_* \circ \varphi_*)\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_1}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \varphi(\widetilde{q_1})) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_2}).$$

Por otro lado, si $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_1}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q_2})$, entonces, por la Proposición 1.1.12 existe un levantamiento $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ de p, que cumple $p \circ \varphi = p$ y tal que $\varphi(\widetilde{q_1}) = \widetilde{q_2}$. De la misma manera, existe un levantamiento $\psi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \psi = p$ y $\psi(\widetilde{q_2}) = \widetilde{q_1}$. Basta ver que φ y ψ se corresponden con homeomorfismos y cada uno es inverso del otro. Como la composicón $\varphi \circ \psi$ y la aplicación $Id_{\widetilde{X}}$ son levantamientos de p que envían $\widetilde{q_1}$ a $\widetilde{q_1}$, por la unicidad del levantamiento (ver Proposición 1.1.9), se concluye que $\varphi \circ \psi = Id_{\widetilde{X}}$. Igualmente, se ve que $\psi \circ \varphi = Id_{\widetilde{X}}$. Por tanto, obtenemos que φ es una transformación del recubrimiento con $\varphi(\widetilde{q_1}) = \widetilde{q_2}$.

A continuación, probaremos (b). Supongamos que p es un recubrimiento normal, entonces, para cada $\widetilde{q}, \widetilde{q}' \in p^{-1}(q)$, se cumple que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$. Por tanto, por la parte (a), se concluye que existe una transformación del recubrimiento que envía $\widetilde{q}$ en $\widetilde{q}'$. Por otro lado, si $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ actúa transitivamente en cada fibra, entonces, para cada $\widetilde{q}, \widetilde{q}' \in p^{-1}(q)$, existe una transformación del recubrimiento φ tal que $\varphi(\widetilde{q}) = \widetilde{q}'$. Por lo que, de nuevo por (a), tanto, se tiene que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$. Esto prueba que p es un recubrimiento normal. □

1.2.3. Acciones propiamente discontinuas

Diremos que una acción de un grupo G **actúa de manera propiamente discontinua** sobre un espacio topológico X si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto $U \subset X$ tal que $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$ distinto del elemento unidad.

Proposición 1.2.9. *Sea $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación de recubrimiento entre espacios topológicos. El grupo de automorfismos del recubrimiento $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ actúa de manera propiamente discontinua sobre $\widetilde{X}$.*

Demostración. Sea $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ con $q = p(\widetilde{q})$. Tomamos $U \subset X$ un abierto distinguido de p con $q \in U$ tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i$, los V_i sean disjuntos dos a dos y $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ sea un homeomorfismo para todo $i \in I$. Sea $i_0 \in I$ tal $\widetilde{q} \in V_{i_0}$. Por la Proposición 1.2.6(c) tenemos que el grupo de automorfismos permuta las componentes conexas de $p^{-1}(U)$. Por tanto, dado $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ se cumple que $\varphi(V_{i_0}) \cap V_{i_0} = V_j \cap V_{i_0} = \emptyset$ para algún $j \in I$, por lo que $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ actúa de manera propiamente discontinua sobre $\widetilde{X}$ como se quería ver. □

En estas condiciones, es posible enunciar el siguiente teorema, que permitirá obtener aplicaciones de recubrimiento.

Teorema 1.2.10. *Sea X un espacio topológico conexo, localmente conexo por caminos, localmente compacto y Hausdorff. Sea G un grupo que actúe de manera libre y propia en X. Entonces, el espacio X/G es Hausdorff, la aplicación cociente $\pi : X \longrightarrow X/G$ es un recubrimiento normal y el grupo de automorfismos del recubrimiento es $\mathcal{C}_\pi(X) = G$.*

Como ejemplo, construiremos un recubrimiento del toro $\mathbb{T}^2$ a partir de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.2.11. Sea G el grupo generado por los homeomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dados por

$$f(x, y) = (x + 1, y), g(x, y) = (x, y + 1).$$

Tenemos, entonces, que los elementos de G serán de la forma $f^n \circ g^m(x, y) = (x + n, g + m)$. El grupo G actúa de manera propiamente discontinua sobre $\mathbb{R}^2$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, basta tomar la bola abierta de radio $1/2$ centrada en el punto $U = B((x, y), 1/2)$ y se comprueba que $(f^n \circ g^m(U)) \cap U = \emptyset$ para todo n y m distintos de 0.

Sabemos que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/G$. Por el Teorema 1.2.10 tenemos entonces que la proyección $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ es una aplicación de recubrimiento y, por tanto, $\mathbb{R}^2$ es un recubrimiento universal de $\mathbb{T}^2$.

1.3. Clasificación de recubrimientos

Dado G un grupo y $H \subset G$ un subgrupo, se llama **normalizador de H en G** al conjunto de elementos de G dado por

$$N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

El conjunto $N(H)$ es un subgrupo de G que contiene a H. En particular, si H es un subgrupo normal de G, entonces $N(H) = G$. Además, $N(H)$ es el subgrupo más grande de G en el cual H es normal.

Teorema 1.3.1. *Sea $p\colon \widetilde{X} \to X$ una aplicación de recubrimiento y sea $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$. Entonces, el grupo de recubrimiento $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ es isomorfo al cociente*

$$\frac{N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}))}{p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})}.$$

Demostración. Vamos a construir el isomorfismo entre ambos grupos tomando la aplicación que envíe cada $[\tau] \in N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}))$ al automorfismo del recubrimiento $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ que envía $\widetilde{q}$ a $\widetilde{q} \cdot [\tau]$. Para ello, primero es necesario ver que para cada $[\tau] \in N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}))$ existe dicho automorfismo del recubrimiento $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$.

Sea $[\tau] \in N(H)$ y sea $\widetilde{q}' = \widetilde{q} \cdot [\tau]$. Recordemos que, en este caso, $\widetilde{q}'$ es el punto final del levantamiento $\widetilde{\tau}$ de τ que comienza en $\widetilde{q}$. Por la Proposición 1.2.8, basta probar que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ para tener que existe un automorfismo del recubrimiento $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ con $\varphi(\widetilde{q}) = \widetilde{q}'$. Sea $\Phi_{\widetilde{\tau}} : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) \to \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$ el isomorfismo dado en (1.2), que envía $[\sigma]$ en $[\widetilde{\tau}^{-1} * \sigma * \widetilde{\tau}]$. Por el diagrama conmutativo (1.3), se concluye que

$$\begin{aligned} p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') &= p_*\Phi_{\widetilde{\tau}}(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) \\ &= \Phi_\tau(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) \\ &= [\tau]^{-1} \cdot H \cdot [\tau] = H \\ &= p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}). \end{aligned}$$

Por tanto, existe un automorfismo del recubrimiento φ tal que $\varphi(\widetilde{q}) = \widetilde{q}'$, el cual es único por el teorema 1.2.6(a).

Tomamos la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) &\longrightarrow \mathcal{C}_p(\widetilde{X}) \\ [\tau] &\longmapsto \varphi \end{aligned}$$

donde φ es el automorfismo del recubrimiento que lleva $\widetilde{q}$ a $\widetilde{q}\cdot[\tau]$. Sea $q = p(\widetilde{q})$ y denotamos $H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) \subset \pi_1(X, q)$. Si vemos que la aplicación α es un homomorfismo sobreyectivo cuyo núcleo es H, por el primer teorema de isomorfía, el resultado quedaría probado.

Comenzamos viendo que α es un homomorfismo. Sean $[\tau_1], [\tau_2] \in N(H)$ y sea, $\alpha([\tau_i]) = \varphi_i$, para $i \in \{1, 2\}$, la transformación de recubrimiento que lleva $\widetilde{q}$ a $\widetilde{q} \cdot [\tau_i]$. Sea $\varphi_{12} = \alpha([\tau_1 * \tau_2])$ la transformación de recubrimiento que lleva $\widetilde{q}$ a $\widetilde{q}\cdot[\tau_1 * \tau_2]$. Queremos comprobar que $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_{12}$, para lo que basta ver que ambos automorfismos del recubrimiento llevan $\widetilde{q}$ al mismo punto. Lo que equivale a ver que $\widetilde{\tau_1 * \tau_2}(1) = \varphi_1(\widetilde{\tau}_2(1)))$. Donde $\widetilde{\tau_1 * \tau_2}$ y $\widetilde{\tau}_2$ son los levantamientos de $\tau_1 * \tau_2$ y τ_2, respectivamente, con origen en $\widetilde{q}$.

Como $p \circ \varphi_1 = p$, se tiene que $\varphi_1 \circ \widetilde{\tau}_2$ es un levantamiento de τ_2, que empieza en $\varphi_1(\widetilde{q}) = \widetilde{q} \cdot [\tau_1] = \widetilde{\tau}_1(1)$. Por tanto, tenemos que $\widetilde{\tau}_1 * (\varphi_1 \circ \widetilde{\tau}_2)$ es un camino en $\widetilde{X}$ que comienza en $\widetilde{q}$ y es levantamiento de $\tau_1 * \tau_2$, porque $p \circ (\widetilde{\tau}_1 * (\varphi_1 \circ \widetilde{\tau}_2)) = (p \circ \widetilde{\tau}_1) * (p \circ \varphi_1 \circ \widetilde{\tau}_2) = \tau_1 * \tau_2$.

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\widetilde{q}) &= \widetilde{\tau_1 \cdot \tau_2}(1) \\ &= (\widetilde{\tau}_1 * (\varphi_1 \circ \widetilde{\tau}_2))(1) \\ &= \varphi_1(\widetilde{\tau}_2(1)) \\ &= \varphi_1(\varphi_2(\widetilde{q})) \end{aligned}$$

Lo que prueba que $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_{12}$. Por tanto, se concluye que α es un homomorfismo de grupos.

Ahora, veamos que α es sobreyectiva. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ y sea $\widetilde{q}' = \varphi(\widetilde{q})$. Consideramos $\widetilde{\tau}$ un camino en $\widetilde{X}$ entre $\widetilde{q}$ y $\widetilde{q}'$. Entonces, $\tau = p \circ \widetilde{\tau}$ es un lazo en X. Además, la Proposición 1.2.8(a) muestra que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}')$, ya que se encuentran en la misma órbita. Por otro lado, por el diagrama conmutativo (1.3) se tiene que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}') = \Phi_\tau(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}))$. A partir de ambas igualdades, se concluye que $\Phi_\tau(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$, esto quiere decir que $[\tau] \in N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}))$. Además, $\widetilde{q}' = \widetilde{q} \cdot [\tau]$. Por tanto, $\alpha([\tau]) = \varphi$. Esto prueba que α es sobreyectiva.

Finalmente, es necesario ver que el núcleo de α es H. Sea $[\tau] \in N(H)$ y consideramos $\widetilde{\tau}$ el levantamiento de τ que comienza en $\widetilde{q}$. Denotamos $\varphi = \alpha([\tau])$. Entonces, φ es la transformación identidad si y solo si $\varphi(\widetilde{q}) = \widetilde{\tau}(1) = \widetilde{q}$, lo que significa que $\widetilde{\tau}$ es un lazo en $\widetilde{q}$. Por tanto, φ es la identidad si y solo si $[\tau] = [p \circ \widetilde{\tau}] = p_*([\widetilde{\tau}])$ para algún $[\widetilde{\tau}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$. Esto implica entonces que $[\tau] \in H = p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$. Por tanto, se concluye que el núcleo de α es H y obtenemos que α es un isomorfismo entre el cociente $N(H)/H$ y el grupo de recubrimiento $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$. □

De este teorema se derivan los siguientes resultados.

Corolario 1.3.2. *Sean $\widetilde{X}$ y X espacios topológicos junto a la aplicación de recubrimiento $\widetilde{p} : \widetilde{X} \longrightarrow X$. Sean $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{q}) = q \in X$. Si p es un recubrimiento de Galois, entonces*

$$\mathcal{C}_p(\widetilde{X}) \cong \frac{\pi_1(X, q)}{p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})}$$

Demostración. Como el recubrimiento es de Galois, se tiene que $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, q)$. Por tanto, $N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) = \pi_1(X, q)$ y aplicando el Teorema 1.3.1 se obtiene el resultado. □

Corolario 1.3.3. *Sean $\widetilde{X}$ y X espacios topológicos junto a la aplicación de recubrimiento $\widetilde{p} : \widetilde{X} \longrightarrow X$. Sean $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ con $p(\widetilde{q}) = q \in X$. Si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, entonces*

$$\mathcal{C}_p(\widetilde{X}) \cong \pi_1(X, q)$$

Demostración. Si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es el subgrupo trivial. Por ende, tenemos $N(p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})) = \pi_1(X, q)$ y el cociente $\pi_1(X, q)/p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$ es isomorfo a $\pi_1(X, q)$, completando la demostración. □

El Corolario 1.3.3 motiva la definición que dan algunos autores como Douady (ver [3] Definición 4.5.1) como el grupo de automorfismos del funtor entre la categoría de recubrimientos del espacio X y sus fibras.

Con este resultado, ya es posible clasificar los recubrimientos de un espacio topológico X suficientemente bueno. El siguiente teorema mostrará la correspondencia entre las clases conjugadas de subgrupos del grupo fundamental y las clases bajo isomorfismo de recubrimientos del espacio topológico X.

Teorema 1.3.4. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y conexo, semilocalmente simplemente conexo y localmente compacto. Dado $x \in X$, entonces existe una biyección entre las clases de recubrimientos de X y las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x)$. Dado un recubrimiento $p' : X' \to X$ con $x' \in X'$ tal que $p'(x') = x$, esta correspondencia asocia el recubrimiento p' con la clase de conjugación de $p'_*\pi_1(X', x')$ en $\pi_1(X, x)$.*

Demostración. El Teorema 1.2.5 muestra que por cada clae de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x)$ hay, como máximo, una clase de isomorfismos del recubrimiento. Por tanto, es necesario mostrar que hay al menos una. Sea $H \subset \pi_1(X, x)$ un subgrupo en una clase de conjugación dada. Como X es semilocalmente simplemente conexo, por el Teorema 1.1.16 X tiene un recubrimiento universal. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ el recubrimiento universal de X. Como $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, por el Corolario 1.3.3 tenemos que $\pi_1(X, x)$ es isomorfo al grupo de recubrimiento $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ a través de la aplicación definida en la demostración del Teorema 1.3.1 $\alpha : \pi_1(X, x) \to \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ que envía la clase de lazos $[\sigma]$ al único automorfismo del recubrimiento φ que envía $\widetilde{x}$ al punto $\widetilde{x} \cdot [\sigma]$. Sea $\widetilde{H} = \alpha(H) \subset \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$.

Como $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ actúa de manera propiamente discontinua sobre $\widetilde{X}$, también $\widetilde{H}$ actúa de manera propiamente discontinua sobre $\widetilde{X}$. Sea $X' = \widetilde{X}/\widetilde{H}$ el espacio cociente de $\widetilde{X}$ por la acción de $\widetilde{H}$ y sea $\pi : \widetilde{X} \to X'$ la proyección canónica. Por el Teorema 1.2.10, la aplicación π es un recubrimiento normal. Vamos a tomar la siguiente aplicación de X' en X:

$$\begin{aligned} p' : X' &\longrightarrow X \\ x' = [\widetilde{x}] &\longmapsto p'(x') = p(\widetilde{x}). \end{aligned}$$

El objetivo será ver que esta aplicación es de recubrimiento. En primer lugar, vemos que la aplicación p está bien definida. Dados $\widetilde{x_1}$ y $\widetilde{x_2}$ tales que $[\widetilde{x_1}] = [\widetilde{x_2}]$, se tiene que $\widetilde{x_2} = \varphi(\widetilde{x_1})$ con $\varphi \in \widetilde{H} \subset \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$. Por tanto, $p(\widetilde{x_2}) = p(\varphi(\widetilde{x_1})) = p(\widetilde{x_1})$ y, por tanto, $p'([\widetilde{x_1}]) = p'([\widetilde{x_2}])$. Con esto, tenemos que está bien definida. Además, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, se cumple que $p(\widetilde{x}) = p'([\widetilde{x}]) = p' \circ \varphi(\widetilde{x})$, por lo que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ & X' \arrow[dl, "p'"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Continuamos viendo que la aplicación p' es continua. Para ello, tendremos en cuenta que por ser π una proyección, un conjunto $V \subset X'$ es abierto si y solo $\pi^{-1}(V)$ es abierto en $\widetilde{X}$. Tomamos $U \subset X$ un conjunto abierto. Entonces, por lo que acabamos de recordar, $p'^{-1}(U)$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(p'^{-1}(U)) = (p' \circ \pi)^{-1}(U)$. Como $p' \circ \pi = p$, tenemos que $p'^{-1}(U)$ es abierto en X' si y solo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $\widetilde{X}$ lo cual ocurre por ser p una aplicación continua. Concluimos que p' es una aplicación continua.

Tenemos que p' es una aplicación bien definida y es continua. Veamos que es de recubrimiento. Comenzamos comprobando que es sobreyectiva. Dado $x \in X$, tenemos que $x = p(\widetilde{x})$ para un $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, ya que p es una aplicación sobreyectiva por ser un recubrimiento. Sea $x' = [\widetilde{x}]$, entonces $p'(x') = p'([\widetilde{x}]) = p(\widetilde{x}) = x$. por tanto, p' es sobreyectiva.

Vamos a ver que para cada $x \in X$ existe un abierto distinguido U de p' que lo contiene. Sea $x \in X$ y sea $U \subset X$ un abierto distinguido de p con $x \in U$. Queremos ver que U también es un abierto distinguido para p'. Tenemos que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \widetilde{V_j}$ con los $\widetilde{V_j}$ disjuntos dos a dos y $p|_{\widetilde{V_j}} : \widetilde{V_j} \longrightarrow U$ un homeomorfismo. Además, $p'^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$ con $V_i \subset X'$ siendo las componentes conexas de $p'^{-1}(U)$. También, se da que $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{k_i \in K_i} W_{k_i}$ con los W_{k_i} las componentes conexas de $\pi^{-1}(V_i)$ que son disjuntas entre sí y para cada $i \in I$. Como $p = \pi \circ p'$, tenemos que

$$\bigcup_{j \in J} \widetilde{V_j} = p^{-1}(U) = \pi^{-1} \circ p'^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k_i \in K_i} W_{k_i}.$$

Como los W_{k_i} y los $\widetilde{V_j}$ son componentes conexas, para cada $j \in J$ deben existir un $i \in I$ y un $k_i \in K_i$ de manera que $\widetilde{V_j} = W_{k_i}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{V_j} \arrow[dd, "p|_{\widetilde{V_j}}"'] \arrow[dr, "\pi|_{\widetilde{V_j}}"] & \\
& V_i \arrow[dl, "p'|_{V_i}"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

donde $p|_{\widetilde{V_j}} = p'|_{V_i} \circ \pi|_{\widetilde{V_j}}$ es un homeomorfismo. Por tanto, $\pi|_{\widetilde{V_j}}$ es una aplicación inyectiva. Veamos que $\pi|_{\widetilde{V_j}}$ es una aplicación sobreyectiva también. Para ello, recordamos que, por la Proposición 1.2.6(c), los elementos de $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ permutan las componentes conexas de las contraimagenes de los abiertos distinguidos por p. En consecuencia, los elementos de $\widetilde{H} \subset \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ también permutan estas componentes conexas. Veamos entonces que

$$\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{k_i \in K_i} W_{k_i} = \bigcup_{\varphi \in \widetilde{H}} \varphi(\widetilde{V_j}).$$

Si $\widetilde{x_1} \in \pi^{-1}(V_i)$ entonces $\widetilde{x_1}$ está en una componente conexa de $\pi^{-1}(V_i)$ que es de la forma $\varphi(\widetilde{V_j})$ para algún $\varphi \in \widetilde{H}$. Luego, $\pi^{-1}(V_i) \subset \bigcup_{\varphi \in \widetilde{H}} \varphi(\widetilde{V_j})$. De la misma manera, si $\widetilde{x_1} \in \varphi(\widetilde{V_j})$ para algún $\varphi \in \widetilde{H}$ entonces $\widetilde{x_1} = \varphi(\widetilde{x_2})$ con $\widetilde{x_2} \in \widetilde{V_j}$. Por tanto, $\pi(\widetilde{x_1}) = \pi(\varphi(\widetilde{x_2})) = \pi(\widetilde{x_2}) \in V_i$ por lo que $\widetilde{x_1} \in \pi^{-1}(V_i)$ y tenemos que $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup_{\varphi \in \widetilde{H}} \varphi(\widetilde{V_j})$.

Con esto, tenemos que $\pi(\pi^{-1}(V_i)) = \bigcup_{\varphi \in \widetilde{H}} \pi(\varphi(\widetilde{V_j})) = \pi(\widetilde{V_j})$. Como π es una aplicación sobreyectiva, cumple que $\pi(\pi^{-1}(V_i)) = V_i$. Por tanto, concluimos que $\pi(\widetilde{V_j}) = V_i = \pi(\pi^{-1}(V_i))$.

Por lo tanto, $\pi|_{\widetilde{V_j}}$ es una aplicación continua, inyectiva y sobreyectiva. Como π es abierta, concluimos que $\pi|_{\widetilde{V_j}}$ es un homeomorfismo. En consecuencia, tenemos que

$$p'|_{V_i} = (p|_{\widetilde{V_j}}) \circ (\pi|_{\widetilde{V_j}})^{-1}$$

es un homeomorfismos por ser composición de homeomorfismos. Así, tenemos que U es un abierto distinguido de p'. En consecuencia, p' es una aplicación de recubrimiento.

Finalmente, basta ver que $p'_*\pi_1(X',x') = H$, para algún $x' \in p'^{-1}(x)$. Sea $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ tal que $x' = \pi(\widetilde{x})$. Se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X',q') & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{C}_\pi(\widetilde{X}) \\ \downarrow p'_* & & \downarrow i \\ \pi_1(X,q) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{C}_p(\widetilde{X}) \end{array}$$

donde α' y α son los isomorfimos dados por el Teorema 1.3.1 e i es la inclusión. Si este diagrama conmuta, tenemos el resultado, puesto que entonces:

$$\begin{aligned} p'_*\pi_1(X',x') &= \alpha^{-1} \circ i \circ \alpha'(\pi_1(X,x)) \\ &= \alpha^{-1} \circ i(\mathcal{C}_\pi(\widetilde{X})) \\ &= \alpha^{-1}(\widetilde{H}) = H. \end{aligned}$$

Para ver que el diagrama conmuta, tomamos $[\tau] \in \pi_1(X',x')$ y consideramos $\varphi = \alpha'([\tau])$ de manera que $\varphi(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \cdot [\tau] = \widetilde{\tau}(1)$, donde $\widetilde{\tau}$ es el levantamiento en $\widetilde{X}$ de τ que comienza en $\widetilde{x}$. Entonces, $i \circ \alpha'([\tau]) = i(\varphi) = \varphi$, como un elemento de $\mathcal{C}_p(\widetilde{X})$. Por otro lado, $\alpha \circ p'_*[\tau] = \alpha([p' \circ \tau])$, es la transformación $\psi \in \mathcal{C}_p(\widetilde{X})$ que lleva $\widetilde{x}$ a $\widetilde{x} \cdot [p' \circ \tau] = \widetilde{p' \circ \tau}(1)$. Ahora, $p \circ \widetilde{\tau} = p' \circ \pi \circ \widetilde{\tau} = p' \circ \tau$, por lo que $\widetilde{\tau}$ es un levantamiento de $p' \circ \tau$ que comienza en $\widetilde{x}$, lo que implica que $\widetilde{p' \circ \tau}(1) = \widetilde{\tau}(1)$. Por tanto, $\varphi = \psi$ y se concluye que el diagrama conmuta. Se termina así la prueba. $\square$

Interludio

Variedades complejas y superficies de Riemann

Esta sección de la memoria sirve como puente entre los capítulo 1 y 2. Cambiamos el marco de trabajo hacia las variedades complejas y las superficies de Riemann, objetos de los cuales aportamos definición y propiedades. También incluimos en esta parte ejemplos de superficies de Riemann para ilustrar este tipo de espacios. Terminamos el capítulo comentando las aplicaciones holomorfas y meromorfas entre variedades complejas.

Los resultados se darán sin demostrar y podrán consultarse en [6] en la sección 0.2 o también en [11] en el capítulo 1.

I.1. Cartas y atlas complejos

Comenzamos este capítulo definiendo los conceptos de carta y atlas complejos, que permitirán introducir la noción de variedad compleja.

Definición I.1.1. Sea X un conjunto y $U \subset X$ un subconjunto. Se denomina **carta compleja** a toda aplicación $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ que sea inyectiva y satisfaga que $\varphi(U)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}^n$ con la topología usual. El conjunto U se llamará **dominio de la carta** y se denotará a la carta como (U, φ).

Definición I.1.2. Dadas dos cartas (U, φ) y (V, ψ) en X se dice que son **cartas complejas compatibles** si, cuando la intersección de los dominios $U \cap V$ es no vacía, se cumplen las siguientes condiciones:

- $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{C}^n$.
- La aplicación $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es biholomorfa (es decir, es biyectiva, holomorfa y de inversa holomorfa).

La aplicación $\psi \circ \varphi^{-1}$, se llama **cambio de cartas**.

Observación I.1.3. Sean (U, φ) una carta sobre un conjunto X y $V \subset U$ un subconjunto tal que $\varphi(V) \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto. Entonces, $(V, \varphi|_V)$ es también una carta y es compatible con (U, φ).

Definición I.1.4. Un conjunto $\mathcal{A}$ de cartas complejas sobre X se denomina un **atlas complejo** si los dominios de las cartas recubren X y todas las cartas en $\mathcal{A}$ son compatibles entre sí.

Definición I.1.5. Dos atlas complejos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ sobre X se denominan **compatibles** si el conjunto $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ es un atlas complejo.

Definición I.1.6. Un atlas complejo $\mathcal{A}$ se denomina **atlas complejo maximal** si no puede ser contenido en otro.

La siguiente proposición nos muestra cómo los atlas pueden clasificarse según el atlas maximal en el que se encuentren contenidos.

Proposición I.1.7. *Cada atlas complejo se encuentra contenido en un único atlas complejo maximal.*

Por tanto, dos atlas complejos compatibles se encuentran contenidos en un mismo atlas complejo maximal, ya que ambos se encuentran contenidos en su unión y esta, a su vez, está contenida en un único atlas complejo maximal. Esto nos permite dar la definición de variedad compleja.

Definición I.1.8. Un conjunto X dotado de un atlas complejo maximal se denomina **variedad compleja de dimensión n**.

Por simplificar la notación, en lo sucesivo llamaremos a las cartas complejas y atlas complejos simplemente cartas y atlas, sin el adjetivo complejo.

La siguiente proposición muestra cómo dotar a una variedad compleja de estructura de espacio topológico.

Proposición I.1.9. *Sea X una variedad compleja con un atlas maximal $\mathcal{A}$. Los dominios de cartas del atlas maximal definen una base para una topología sobre X.*

Diremos que esta es la **topología inducida por la estructura de variedad compleja** sobre el conjunto X. En lo sucesivo, cuando nos refiramos a la topología de una variedad compleja se asumirá que es esta y no se especificará como tal.

Observación I.1.10. Sea X un conjunto con estructura de variedad compleja, las cartas sobre X son aplicaciones continuas entre X y $\mathbb{C}^n$. En efecto, sea $\varphi : U \subset X \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$ una carta y sea $W \subset \varphi(U)$ un conjunto abierto. Por la Observación I.1.3 se tiene que $\varphi^{-1}(W)$ es dominio de carta, y por tanto, un conjunto abierto en X. De hecho, las cartas son homeomorfismos entre el dominio y su imagen.

Esta estructura topológica permite considerar las variedades complejas como espacios topológicos localmente homeomorfos a $\mathbb{C}^n$. Por tanto, podemos introducir sobre las variedades propiedades topológicas. Esto nos lleva a la siguiente sección.

I.2. Superficies de Riemann

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición I.2.1. Sea X una variedad compleja de dimensión 1. Si X es Hausdorff con la topología inducida por la estructura de variedad compleja decimos que X es una **superficie de Riemann**.

Incluimos algunos ejemplos de superficie de Riemann para ilustrar este tipo de objetos.

Ejemplo I.2.2. La superficie de Riemann más simple consiste en tomar el plano complejo $\mathbb{C}$ junto con el atlas construido a través de la carta global dada por la aplicación identidad $Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Así, el conjunto $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}, Id_{\mathbb{C}})\}$ define un atlas sobre $\mathbb{C}$ que le dota de estructura de espacio complejo y que es Hausdorff por serlo $\mathbb{C}$, por lo que es una superficie de Riemann.

Ejemplo I.2.3. Consideramos la extensión de $\mathbb{C}$ dada por la **compactificación de Alexandroff**, que se denota por el conjunto,

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

y tomamos los subconjuntos $V_0 = \mathbb{C}$ y $V_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ junto a las aplicaciones

$$\begin{aligned} \psi_0 : V_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \psi_1 : V_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \begin{cases} 1/z & \text{si } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{si } z = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos que tanto ψ_0 como ψ_1 son aplicaciones inyectivas y que $\psi_0(V_0) = \psi_1(V_1) = \mathbb{C}$ es un conjunto abierto. Por tanto, (V_0, ψ_0) y (V_1, ψ_1) son cartas complejas de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Veamos que (V_0, ψ_0) y (V_1, ψ_1) son cartas compatibles y, por tanto, constituyen un atlas complejo en $\widehat{\mathbb{C}}$. Para ello, primero notamos que $V_0 \cap V_1 = \mathbb{C}^*$ y que $\psi_0(V_0 \cap V_1) = \psi_1(V_0 \cap V_1) = \mathbb{C}^*$ un abierto de $\mathbb{C}$. Nos falta ver que la aplicación cambio de cartas

$$\psi_0 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(V_0 \cap V_1) \longrightarrow \psi_0(V_0 \cap V_1)$$

es un biholomorfismo. Dado $z \in \psi_1(V_0 \cap V_1) = \mathbb{C}^*$ tenemos que $\psi_0 \circ \psi_1^{-1}(z) = \psi_0(1/z) = 1/z$ que es un biholomorfismo en $\mathbb{C}^*$. Por tanto, las cartas son compatibles y el conjunto $\mathcal{A} = \{(V_0, \psi_0), (V_1, \psi_1)\}$ es un atlas.

Queda ver que $\widehat{\mathbb{C}}$ es Hausdorff con la topología heredada por $\mathcal{A}$. Para ello, tomamos dos puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Si estos son 0 e ∞ tenemos que, por ser las cartas homeomorfismos, $\psi_0^{-1}(B(0,1))$ y $\psi_1^{-1}(B(0,1))$ son abiertos disjuntos que contienen a 0 e ∞, respectivamente. En otro caso, ambos puntos se encuentran en V_0 o V_1, que son conjuntos homeomorfos a $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es Hausdorff, existen los abiertos que buscamos. Concluimos que $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio Hausdorff con la topología del atlas $\mathcal{A}$ y por tanto $\widehat{\mathbb{C}}$ es una superficie de Riemann.

Otros ejemplos de superficies de Riemann son la esfera en $\mathbb{R}^3$ junto a las cartas dadas por la proyección estereográfica (Ver el Ejemplo D.1) y el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^1$ (Ver el Ejemplo D.2) que son superficies de Riemann equivalentes a $\widehat{\mathbb{C}}$. Una superficie de Riemann diferente es el toro complejo (Ver el Ejemplo D.3).

I.3. Aplicaciones entre variedades complejas

En esta sección veremos como las aplicaciones holomorfas pueden extenderse de manera natural sobre las variedades complejas.Comenzamos introduciendo aquellas entre una variedad compleja y $\mathbb{C}^n$.

Definición I.3.1. Sean X una variedad compleja y $f : X \to \mathbb{C}^n$ una aplicación.

(a) Se dice que f es una **función holomorfa** en $x \in X$ si para toda carta (U, φ) de X cuyo dominio contenga al punto x, resulta que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa en $\varphi(x)$.

(b) Se dice que f es **función holomorfa en** X si lo es en todo punto $x \in X$.

Observación I.3.2. Para ver que una función f es holomorfa un punto p, basta comprobar que la aplicación $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa para una carta (U, φ) con $p \in U$. Dada otra carta (V, ψ) con $p \in V$, se tiene que $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ que es holomorfa en $\psi(p)$ por ser composición de aplicaciones holomorfa.

Entre variedades complejas la definición natural es similar.

Definición I.3.3. Sean X e Y variedades complejas y $F : Y \to X$ una aplicación.

(a) Se dice que F es una **aplicación holomorfa en** $x \in X$ si, para toda carta (U, φ) de X tal que $x \in U$, y para toda carta (V, ψ) de Y con $F(x) \in V$, la aplicación

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es holomorfa como aplicación de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. La aplicación $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ se denomina **expresión local de F**.

(b) Se dice que F es una **aplicación holomorfa en** X si lo es en todo punto $x \in X$.

(c) Se dice que F es una **aplicación biholomorfa** si es holomorfa, biyectiva, y su inversa F^{-1} también es holomorfa.

Por un argumento similar al que se utilizó con las funciones complejas, para ver que F es holomorfa basta comprobar que para dos cartas concretas la expresión local de F es holomorfa.

Observación I.3.4. Las aplicaciones holomorfas entre variedades complejas también son aplicaciones continuas con la topología inducida por la estructura de variedad.

Las aplicaciones biholomorfas permiten establecer una equivalencia entre variedades complejas

Definición I.3.5. Dadas X e Y dos variedades complejas. Si existe una aplicación $F : Y \longrightarrow X$ biholomorfa entonces diremos que X e Y son **equivalentes con la estructura de variedad compleja**.

Además del concepto de función holomorfa, también se puede extender a las variedades complejas el concepto de función meromorfa.

Definición I.3.6. Sea X una variedad compleja. Se dice que una aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ es una **función meromorfa** si cumple las siguientes condiciones:

(a) Existe un subconjunto $S \subset X$, cerrado y discreto, tal que f es holomorfa en $X \setminus S$.

(b) Para toda carta (U, φ), la expresión local $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$.

El siguiente resultado será de utilidad más adelante en el trabajo, e ilustra como las aplicaciones meromorfas pueden extenderse a aplicaciones holomorfas.

Proposición I.3.7. *Sea Y una superficie de Riemann conexa y $S \subset Y$ un conjunto discreto y cerrado. Dada f una función meromorfa no constante sobre Y y holomorfa en $Y \setminus S$, entonces f admite una extensión holomorfa $\widehat{f}$ cuyo espacio imagen sea la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Se define $\widehat{f}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \widehat{f} : Y &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ y &\longmapsto \begin{cases} f(y) \text{ si } y \in Y \setminus S, \\ \infty \text{ si } y \in S. \end{cases} \end{aligned}$$

Para ver que $\widehat{f}$ es holomorfa, tomamos un punto $y \in Y$ y escogemos una carta (V, ψ) sobre Y con $y \in V \subset Y$. Sea B el conjunto que contiene los ceros y polos de la función f. Por el teorema de la identidad (Ver C.4) B es discreto y cerrado, ya que si B tuviera puntos de acumulación, la función sería o bien idénticamente 0 o bien no estaría definida. Por tanto, puede escogerse V de manera que $(\overline{V} \setminus \{y\}) \cap B = \emptyset$. Luego, por no contener polos de f, se tiene que en el conjunto $V \setminus \{y\}$ la aplicación f es holomorfa.

Para ver que $\widehat{f}$ es holomorfa, consideraremos las cartas $(V_0, \psi_0), (V_1, \psi_1)$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ definidas como en el Ejemplo I.2.3. Supongamos que f es holomorfa en y. Entonces, en V tenemos que f y $\widehat{f}$ coinciden. Por tanto,

$$\psi_0 \circ \widehat{f} \circ \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow \psi_0(V_0)$$

es holomorfa en $\psi(V)$, ya que $\widehat{f} \circ \psi^{-1} = f \circ \psi^{-1}$ que es holomorfa por definición y ψ_0 se corresponde con $Id_{\mathbb{C}}$ que es holomorfa. Por ende, $\widehat{f}$ es holomorfa en y.

En cambio, si f no es holomorfa en y entonces y es un polo de f. Como hemos escogido V de manera que $(\overline{V} \setminus \{y\}) \cap B = \emptyset$ y tenemos que y es un polo, se concluye que en $\overline{V}$ no hay ningún cero de f. Por lo tanto, tenemos que para todo $z \in V$, la norma de $1/f(z)$ está acotada por el máximo de $1/f(w)$ con $w \in \overline{V}$ y este máximo es finito. Veamos que la aplicación

$$\psi_1 \circ \widehat{f} \circ \psi^{-1} : \psi(V \setminus \{y\}) \longrightarrow \psi_1(V_1)$$

es holomorfa $\psi(V \setminus \{y\})$. Dado $z \in V \setminus \{y\}$ tenemos que $\psi_1 \circ \widehat{f}(z) = \psi_1 \circ f(z) = \frac{1}{f(z)}$ que es una aplicación holomorfa en $V \setminus \{y\}$ ya que el conjunto no contiene ceros de f. En consecuencia, la aplicación $\psi_1 \circ \widehat{f} \circ \psi^{-1}$ es holomorfa y como hemos mencionado previamente, es acotada. Por el teorema de la singularidad evitable de Riemann (Ver C.1), se tiene que $\varphi_1 \circ \widehat{f} \circ \psi^{-1}$ se extiende a una función holomorfa en todo $\psi(V)$. Por tanto, $\widehat{f}$ es holomorfa en y.

Se concluye de esta manera que $\widehat{f}$ es holomorfa, como se quería probar. $\square$

Capítulo 2

Aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann

En este capítulo nos centraremos en el estudio de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. En primer lugar, veremos cómo es la expresión local de las aplicaciones holomorfas. A partir de esta expresión local, obtendremos propiedades de las funciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Además, introduciremos los conceptos de aplicación propia y de aplicación de recubrimiento ramificado y probaremos que para las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann, ambas definiciones son equivalentes. Finalmente, definiremos el grupo de automorfismos de un recubrimiento ramificado a partir del de un recubrimiento. A partir de esto, introduciremos el concepto de recubrimiento ramificado de Galois y veremos las propiedades estos recubrimientos especiales.

En su mayoría, en la realización de este capítulo se ha seguido la sección 3.2 de [16]. También se ha consultado [11] y [3].

2.1. Expresión local de las aplicaciones

Las propiedades que vamos a obtener son todas para aplicaciones holomorfas no constantes en cada compononente conexa. Por lo tanto, de aquí en adelante **vamos a suponer que las aplicaciones holomorfas de las que se hablan son no constantes en cada componente conexa**.

Se comienza demostrando algunos resultados acerca de las cartas. Estos resultados nos garantizan la posibilidad de escoger cartas que faciliten el estudio de las aplicaciones entre superficies de Riemann.

Proposición 2.1.1. *Sean X una superficie de Riemann y $x_0 \in X$ un punto. Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, existe una carta (U, φ) de X tal que $x_0 \in U$ y $\varphi(x_0) = z_0$.*

Demostración. Como X es una superficie de Riemann, existe una carta (U, φ') con $x_0 \in U \subset X$, donde $\varphi' : U \to \varphi'(U)$ es un homeomorfismo con $\varphi'(U)$ un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Sea $w_0 := \varphi'(x_0) \in \mathbb{C}$.

Se define la aplicación traslación por el vector $z_0 - w_0$ como:

$$\begin{aligned} T_{z_0 - w_0} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z + z_0 - w_0. \end{aligned}$$

Tomamos $V = T_{z_0 - w_0}(\varphi'(U))$ y consideramos la composición:

$$\begin{aligned} \varphi := T_{z_0 - w_0} \circ \varphi' : U &\longrightarrow V \subset \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \varphi'(z) + z_0 - w_0 \end{aligned}$$

que es continua, biyectiva y su inversa también es continua, porque es la composición de homeomorfismos. Luego φ es un homeomorfismo de U sobre un abierto V de $\mathbb{C}$, por lo tanto (U, φ) es una carta.

Además, tenemos

$$\varphi(x_0) = T_{z_0-w_0}(\varphi'(x_0)) = T_{z_0-w_0}(w_0) = z_0,$$

como queríamos.

Veamos ahora que φ es compatible con φ'. El cambio de coordenadas $\varphi \circ (\varphi')^{-1} : \varphi'(U) \longrightarrow \varphi(U)$ entre φ y φ' está dado por

$$\varphi \circ \varphi'^{-1}(z) = T_{z_0-w_0}(z) = z + z_0 - w_0,$$

que es una función biholomorfa en $\mathbb{C}$, por ser una traslación.

Por tanto, la carta (U,φ) es compatible con (U,φ'), y como (U,φ') pertenece al atlas maximal de X, también lo hace (U,φ). Así, (U,φ) es una carta compatible de X con $\varphi(x_0) = z_0$. □

De hecho, veamos que es posible tomar una carta (U,φ) de forma que $\varphi(U)$ sea un disco de $\mathbb{C}$.

Proposición 2.1.2. *Sean X una superficie de Riemann y $x_0 \in X$ un punto. Entonces, existe una carta (U,φ) de X tal que $x_0 \in U$, $\varphi(x_0) = 0$, y $\varphi(U) = \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.1 existe una carta (U',φ') tal que $x_0 \in U'$ y $\varphi'(x_0) = 0$. Como $\varphi'(U') \subset \mathbb{C}$ es abierto y contiene al origen, existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B(0,\varepsilon) \subset \varphi'(U')$.

Consideramos $U = \varphi'^{-1}(B(0,\varepsilon)) \subset X$, que es un abierto en X con $x_0 \in U$ y se toma la restricción $\varphi'|_U : U \to B(0,\varepsilon)$, que sigue siendo una carta por la Observación I.1.3.

Sea ahora la homotecia

$$\begin{aligned} S_{1/\varepsilon} : B(0,\varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{D}, \\ z &\longmapsto \frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}$$

que es un homeomorfismo. Se define la nueva carta como:

$$\varphi := S_{1/\varepsilon} \circ \varphi'|_U : U \to \mathbb{D}.$$

Esta composición es un homeomorfismo, por tanto (U,φ) es una carta.

Queda verificar que es compatible con φ'. El cambio de coordenadas es:

$$\varphi \circ \varphi'^{-1}(z) = S_{1/\varepsilon}(z) = \frac{z}{\varepsilon},$$

que es una función biholomorfa en $\mathbb{C}$. Así, (U,φ) y (U,φ') son cartas compatibles y por tanto, (U,φ) es una carta del atlas maximal de X que satisface $\varphi(x_0) = 0$ y $\varphi(U) = \mathbb{D}$. □

La siguiente proposición determina la expresión local de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Proposición 2.1.3. *Sean X e Y superficies de Riemann y $F : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante en cada componente conexa. Dados $y \in Y$ y su imagen $x = F(y) \in X$, existen cartas (V,ψ) en Y y (U,φ) en X, con $y \in V$, $x \in U$, tales que $\psi(y) = \varphi(x) = 0$ y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ \psi(V) \subset \mathbb{C} \arrow[r, "z \mapsto z^{k_y}"] & \varphi(U) \subset \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

de forma que, dado $z \in \psi(V)$, la expresión local de F en las cartas anteriores es $\widetilde{F}(z) = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}(z) = z^{k_y}$, para algún $k_y \in \mathbb{N}$. Este número es independiente de la selección de cartas.

Demostración. Realizaremos la demostración en dos partes. En primer lugar, se verá la existencia de cartas bajo las cuales las expresión local de F adquiere la forma deseada. En la segunda parte, se comprobará que el número k_y es independiente de la selección de las cartas.

La Proposición 2.1.1 garantiza la existencia de una carta (U, φ) de X con $x = F(y) \in U$ tal que $\varphi(x) = 0$. Como F es una aplicación holomorfa, por la Observación I.3.4 tenemos que es continua, por lo que $F^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en Y con $y \in F^{-1}(U)$. Como los dominios de cartas del atlas maximal son base de la topología de Y, existe un conjunto $V' \subset F^{-1}(U)$ entorno abierto de y y dominio de una carta (V', ψ') en Y. De nuevo, por la Proposición 2.1.1 es posible escoger ψ' para que $\psi'(y) = 0$. Con esto, tenemos que $F(V') \subset U$.

Como F es una aplicación holomorfa, la expresión local de F en estas cartas

$$\widetilde{F} = \varphi \circ F \circ (\psi')^{-1} : \psi'(V') \to \varphi(U),$$

es una aplicación holomorfa. La aplicación $\widetilde{F}$ está definida entre dos abiertos de $\mathbb{C}$ que contienen a 0. Por lo tanto, admite un desarrollo en serie de potencias centrado en 0. Además, como $\widetilde{F}(0) = 0$, el término independiente de la serie se anula. Así, existe un $k_y \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\widetilde{F}(z) = \sum_{n=k_y}^{\infty} a_n z^n = z^{k_y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_y} z^n \right) = z^{k_y} H(z),$$

donde la aplicación

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_y} z^n$$

es holomorfa en $\psi'(V')$ y, además, $H(0) = a_{k_y} \neq 0$.

Dado que $H(0) \neq 0$, se puede tomar una rama del logaritmo en un entorno abierto de $H(0)$, y, por tanto, existe un entorno abierto $W \subset \mathbb{C}$ de 0 sobre el cual la siguiente aplicación:

$$h(z) = e^{\frac{1}{k_y} \log H(z)}$$

es holomorfa.

Sea $V'' = \psi'^{-1}(W \cap \psi'(V'))$, y la carta (V'', ψ') obtenida al restringir el dominio. Sobre el conjunto $\psi'(V'')$ se cumple que $h(z)^{k_y} = H(z)$.

Consideramos las siguientes funciones auxiliares:

$$g_1(z) = zh(z), \quad g_2(z) = z^{k_y},$$

de manera que:

$$\varphi \circ F \circ (\psi')^{-1}(z) = g_2 \circ g_1(z) = (zh(z))^{k_y} = z^{k_y} H(z).$$

El siguiente paso será probar que g_1 es invertible cerca de 0. Se demostrará utilizando el Teorema de la función inversa (ver C.3).

La derivada de g_1 es:

$$g_1'(z) = h(z) + zh'(z),$$

y en particular,

$$g_1'(0) = h(0) = e^{\frac{1}{k_y} \log H(0)} \neq 0.$$

Por el Teorema de la función inversa, esto implica que g_1 es un biholomorfismo local en un entorno abierto W' de 0. Consideramos el abierto $V = \psi'^{-1}(W' \cap \psi'(V'')) \subset Y$ tal que para todo $z \in V$ se cumple que

$$\varphi \circ F \circ (\psi')^{-1} \circ g_1^{-1}(z) = g_2(z) = z^{k_y}.$$

Definimos ahora una nueva aplicación:

$$\psi = g_1 \circ \psi' : V \to \psi(V) \subset \mathbb{C},$$

que es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Como está definido sobre un conjunto abierto, es una carta.

Falta comprobar que sea compatible con la estructura de variedad compleja de Y para completar la prueba. Con este fin, se verá que la carta (V, ψ) es compatible con $(V, \psi'|_V)$. Basta verificar que el cambio de cartas $\psi \circ (\psi')^{-1} : \psi'(V) \longrightarrow \psi(V)$ es un biholomorfismo. Como

$$\psi \circ (\psi')^{-1} = g_1,$$

se tiene que es cierto, ya que g_1 es una aplicación biholomorfa en el dominio $\psi'(V)$. Por lo tanto, (V, ψ) es una carta de Y compatible con su estructura de variedad compleja. Luego, las cartas (V, ψ) de Y y (U, φ) de X prueban el enunciado.

Para concluir la demostración, queda comprobar la independencia de k_y de las cartas escogidas. Para ello, se toman dos cartas con el mismo dominio (V, ψ) y (V, ψ') en Y con $y \in V$ y otras dos (U, φ) y (U, φ') en X con $x \in U$. Se escogen dichas cartas de forma que las expresiones locales sean de la forma del enunciado

$$\begin{aligned} \widetilde{F} := \varphi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(V) &\longrightarrow \varphi(U) \\ z &\longmapsto z^{k_y}, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \widetilde{F'} := \varphi' \circ F \circ \psi'^{-1} : \psi'(V) &\longrightarrow \varphi'(U) \\ z &\longmapsto z^{k'_y}, \end{aligned}$$

con k_y y k'_y en $\mathbb{N}$.

Como $\psi(V)$ es abierto en $\mathbb{C}$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(0;\varepsilon) \subset \psi(V)$. Consideramos $\widetilde{Z} = B(0;\varepsilon) \subset \psi(V)$ y $\widetilde{W} = \widetilde{F}(B(0;\varepsilon)) = B(0;\varepsilon^{k_y}) \subset \varphi(U)$. Denotando los cambios de cartas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \beta &:= \psi' \circ \psi^{-1} : \psi(V) \longrightarrow \psi'(V), \\ \alpha &:= \varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi'(U), \end{aligned}$$

tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z} \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{W} \arrow[d, "\alpha"] \\ \beta(\widetilde{Z}) \arrow[r, "\widetilde{F'}"] & \alpha(\widetilde{W}) \end{tikzcd}$$

que es conmutativo, ya que, dado $z \in \widetilde{Z}$

$$\begin{aligned} \alpha \circ \widetilde{F}(z) =& \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ F \circ \psi^{-1}(z) = \varphi' \circ F \circ \psi^{-1}(z) \\ =& \varphi' \circ F \circ \psi' \circ \psi'^{-1} \circ \psi^{-1}(z) \\ =& \widetilde{F'} \circ \beta(z). \end{aligned}$$

Si tomamos $w \in \widetilde{W} \setminus \{0\}$, sabemos que hay k_y elementos en $\widetilde{F}^{-1}(w)$, que se corresponden con las raíces de w. De la misma manera, sea $w' = \alpha(w) \neq 0$, sabemos que hay k'_y elementos en $\widetilde{F'}^{-1}(w')$. Comprobando que β es una biyección entre $\widetilde{F}^{-1}(w)$ y $\widetilde{F'}^{-1}(w')$ obtendremos que $k_y = k'_y$.

Si $z \in \widetilde{F}^{-1}(w)$, entonces $\widetilde{F}'(\beta(z)) = \alpha(\widetilde{F}(z)) = \alpha(w) = w'$. Luego $\beta(z)$ es un elemento de $\widetilde{F}'^{-1}(w')$. Por lo tanto, $\beta(\widetilde{F}^{-1}(w)) \subset \widetilde{F}'^{-1}(w')$. Con el mismo argumento, se tiene que $\beta^{-1}(\widetilde{F}'^{-1}(w')) \subset \widetilde{F}^{-1}(w)$. Tenemos así que

$$\beta(\widetilde{F}^{-1}(w)) = \widetilde{F}'^{-1}(w')$$

y por lo tanto $k_y = k'_y$. □

Definición 2.1.4. El entero k_y se denonomina **índice de ramificación** o **multiplicidad** de F en y y se denotará por $\mathrm{mult}_y(F)$. Si $k_y > 1$ entonces el punto y se denomina **punto de ramificación** y a su imagen $F(y) = x$ se la denomina **valor crítico**. El conjunto de puntos de ramificación de F se denotará por S_F.

Observación 2.1.5. Dada una aplicación holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ entre dos superficies de Riemann X e Y, se tiene que F es un biholomorfismo local entorno al punto $y \in Y$ si y solo si el índice de ramificación de y es 1.

La Proposición 2.1.3 establece que, de manera local, las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann son de la forma $z \longmapsto z^k$. Como consecuencia de esto, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.6. *Sea $F : X \to Y$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann no constante. Entonces, F es una aplicación abierta.*

Demostración. Para demostrar que F es una aplicación abierta, es necesario probar que si $V \subset Y$ es un conjunto abierto entonces $F(V) \subset X$ es un conjunto abierto.

En primer lugar, probaremos que la aplicación

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^k, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{N}$ es una aplicación abierta.

Como se demostró en el Ejemplo 1.1.5 la aplicación

$$\begin{aligned} p|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto z^k, \end{aligned}$$

es una aplicación de recubrimiento. Por la Proposición 1.1.6(a) una aplicación de recubrimiento es abierta, por lo que p es abierta definida sobre $\mathbb{C}^*$. Así, la imagen de cualquier abierto que no contenga al 0 por p será un conjunto abierto. Falta comprobar qué ocurre en un abierto que contenga al 0.

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $0 \in U$. Veamos que $p(U)$ es abierto. Sea $z \in p(U) \setminus \{0\}$ y $w \in U$ con $p(w) = z$. Como $\mathbb{C}$ es un espacio Hausdorff, existe un abierto W con $w \in W \subset \mathbb{C}^*$. Podemos considerar $W \subset U$. Como $W \subset \mathbb{C}^*$ y p es una aplicación de recubrimiento en $\mathbb{C}^*$, tenemos que $p(W) \subset U$ es un conjunto abierto con $z \in p(W)$. Queda ver que existe un entorno abierto del 0 contenido en $p(U)$.

Las bolas abiertas son base de la topología usual de $\mathbb{C}$, por tanto, existe algún $r > 0$ tal que la bola abierta

$$B(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

está contenida en U. Su imagen por la aplicación p está dada por:

$$p(B(r, 0)) = \{w \in \mathbb{C} : w = z^k,\ |z| < r\} = B(0, r^k).$$

Como $B(0, r^k)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y está contenido en $p(U)$, se tiene un entorno abierto de 0 contenido en $p(U)$. Con esto, se concluye que $p(U)$ es abierto, lo que prueba que p es una aplicación abierta en $\mathbb{C}$.

Veamos ahora que F es una aplicación abierta. Sea $W \subset Y$ un conjunto abierto y $x \in F(W) \subset X$. Por la Proposición 2.1.3 tenemos que existen cartas (U, φ) de X y (V, ψ) de Y con $x = F(y) \in U$ e $y \in V \subset W$

tales que las expresión local de F en estas cartas sea $\widetilde{F}(z) = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}(z) = z^k$, que es una aplicación abierta. Por tanto, $F(z) = \varphi^{-1} \circ \widetilde{F} \circ \psi(z)$ es una aplicación abierta en V, por ser composición de aplicaciones abiertas. Luego, $F(V) \subset F(W)$ es un conjunto abierto con $x \in F(V)$.

Tenemos que para cada $x \in F(W)$ existe un abierto $F(V) \subset F(W)$ con $x \in F(V)$. Por lo tanto, $F(W)$ es un conjunto abierto y se termina la demostración. □

Como consecuencia, por ser $\mathbb{C}$ una superficie de Riemann, se tiene que toda aplicación holomorfa no constante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es abierta. Este resultado se conoce como **Teorema de la aplicación abierta**.

El siguiente corolario describe propiedades de la fibra y del conjunto de puntos de ramificación de una aplicación entre superficies de Riemann. Recordamos que un conjunto S de un espacio topológico Y es **discreto** si para todo $x_0 \in S$ existe un abierto $U \subset Y$ tal que $U \cap S = \{y\}$.

Corolario 2.1.7. *Dado un $x \in X$, las fibras $F^{-1}(x)$ de la aplicación holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ entre superficies de Riemann y el conjunto S_F de puntos de ramificación son subconjuntos discretos y cerrados de Y.*

Demostración. Se comienza la demostración viendo que dado $x \in X$, las fibras $F^{-1}(x)$ cumplen las propiedades deseadas. Como X es un espacio Hausdorff, se tiene que los conjuntos unipuntuales son cerrados. Por tanto, $F^{-1}(x)$ es cerrado, ya que es la contraimagen a través de una aplicación continua de un conjunto cerrado.

Para ver que $F^{-1}(x)$ es discreto, comprobaremos que dado $y \in F^{-1}(x)$ existe un abierto $V \subset Y$ con $V \cap F^{-1}(x) = \{y\}$. Por la Proposición 2.1.3 se tiene que existe un abierto $V \subset Y$ entorno de y y un abierto $U \subset X$ entorno del punto $x = F(y)$, tales que bajo una selección correcta de cartas (U, φ) de X y (V, ψ) de Y, la expresión local de F es de la forma

$$\widetilde{F}(z) = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}(z) = z^{k_y}$$

con $k_y \in \mathbb{N}$ y con $\psi(y) = \varphi(x) = 0$.

Como $\varphi(x) = 0$, tenemos una biyección entre $F^{-1}(x) \cap V$ y $\widetilde{F}^{-1}(0) \cap \psi(V)$ dada por la carta ψ. Debido a que $\widetilde{F}^{-1}(0) = 0$ el conjunto $\widetilde{F}^{-1}(0) \cap \psi(V)$ tiene cardinal uno. Por lo tanto, en $F^{-1}(x) \cap V$ hay un único elemento también. Como $y \in F^{-1}(x) \cap V$ concluimos que $F^{-1}(x) \cap V = \{y\}$ y $F^{-1}(x)$ es un conjunto discreto.

Comprobemos que estas propiedades se cumplen también para el conjunto S_F. Para ello, vamos a ver que dado $y \in Y$ existe un entorno abierto punteado de y en el cual no hay elementos de S_F. Tomamos cartas que cumplan la Proposición 2.1.3. Entonces, en un entorno abierto $V \subset Y$ de y, existe una carta (V, ψ) con $\psi(y) = 0$ bajo la cual, la expresión local de F toma la forma

$$\widetilde{F}(z) = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}(z) = z^{k_y}$$

que se sabe es una aplicación de recubrimiento en $\mathbb{C}^*$ por el Ejemplo 1.1.5.

Por tanto, dado $w \in V \setminus \{y\}$ con $\psi(w) = z$, se tiene que existe un entorno abierto Z de z con $Z \subset \psi(V)$ en el cual $\widetilde{F}|_Z : Z \longrightarrow \widetilde{F}(Z)$ es un homeomorfismo. Entonces, por ser composición de homeomorfismos, tenemos que $F|_{\psi^{-1}(Z)} : \psi^{-1}(Z) \longrightarrow F(\psi^{-1}(Z))$ es un homeomorfismo también. Así, la expresión local de F entorno a w debe ser un homeomorfismo y por la Observación 2.1.5 tenemos que la multiplicidad de w es 1. Por lo tanto, $(V \setminus \{y\}) \bigcap S_F = \emptyset$.

Con esto, tenemos que si $y \in S_F$ existe un abierto $V \subset Y$ con $V \cap S_F = \{y\}$ por lo que S_F es un conjunto discreto. En cambio, si $y \notin S_F$ tenemos que existe un abierto $V \subset Y$ con $y \in V$ que cumple $V \cap S_F = \emptyset$. Por lo tanto, S_F es un conjunto cerrado.

□

2.2. Aplicaciones propias entre superficies de Riemann

Sean X e Y dos superficies de Riemann junto a una aplicación holomorfa $F : Y \to X$. Dado $x \in X$ un valor crítico de $\widetilde{F}$, en general no es posible afirmar que todo $y \in F^{-1}(x)$ sea un punto de ramificación. Sin embargo, si F cumple ciertas propiedades, entonces será posible obtener información valiosa acerca de las fibras de la aplicación y sus índices de ramificación. Por este motivo, introducimos la noción de aplicación propia.

Definición 2.2.1. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : Y \to X$ una aplicación continua. La aplicación f se denomina **aplicación propia** si por cada conjunto compacto $K \subset X$ se tiene que $f^{-1}(K)$ es compacto en Y.

Queremos estudiar las propiedades de las aplicaciones propias entre superficies de Riemann. Para ello, vamos a probar una propiedad de las aplicaciones propias entre espacios localmente compactos y Hausdorff.

Proposición 2.2.2. *Sea $f : Y \to X$ una aplicación continua entre espacios topológicos localmente compactos y Hausdorff. Si f es propia, entonces f es una aplicación cerrada.*

Demostración. Sea $K \subset Y$ un conjunto cerrado. Veamos que $f(K)$ es un conjunto cerrado de Y, es decir, que $Y \setminus f(K)$ es un conjunto abierto.

Sea $x \in X \setminus f(K)$. Como X es localmente compacto, existe un entorno abierto U de x con $\overline{U}$ compacto. Como f es propia, entonces $f^{-1}(\overline{U})$ es un conjunto compacto de Y y, por lo tanto, $f^{-1}(\overline{U})$ es cerrado por ser Y un espacio Hausdorff.

Consideramos $C = K \cap f^{-1}(\overline{U})$ que es un conjunto cerrado contenido en K compacto y por lo tanto es compacto. Luego, $f(C) = \overline{U} \cap f(K)$ es un conjunto compacto de X y como X es Hausdorff, entonces $f(C)$ es un conjunto cerrado de X.

Por lo tanto, $V = U \setminus f(C) = U \setminus f(K)$ es un conjunto abierto con $x \in V \subset U \setminus f(K)$. Concluimos que $X \setminus f(K)$ es un conjunto abierto y por tanto $f(K)$ es un conjunto cerrado. □

Por tanto, se tiene que las aplicaciones propias entre superficies de Riemann son cerradas, al ser las superficies de Riemann espacios Hausdorff y localmente compactos.

Observación 2.2.3. Sea $F : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa y propia entre dos superficies de Riemann con $S_F \subset Y$ el conjunto de puntos de ramificación. El conjunto $B_F = F(S_F) \subset X$ de valores críticos de la aplicación F es cerrado. En efecto, por el Corolario 2.1.7 el conjunto S_F es cerrado y por la Proposición 2.2.2 F es una aplicación cerrada. En consecuencia, $F(S_F) \subset X$ es un conjunto cerrado.

A continuación, veremos que toda aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas es propia.

Ejemplo 2.2.4. Una aplicación holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ entre superficies de Riemann con Y compacto es una aplicación propia. Dado un conjunto $K \subset X$ compacto, por ser X un espacio Hausdorff, se tiene que K es cerrado. Por tanto, $F^{-1}(K) \subset Y$ es un conjunto cerrado. Como todo conjunto cerrado contenido en un conjunto compacto es compacto, se tiene así que $F^{-1}(K)$ es compacto.

El siguiente lema muestra que las aplicaciones propias se encuentran relacionadas con las aplicaciones de recubrimiento. Esto servirá para ver propiedades de las aplicaciones propias y holomorfas entre superficies de Riemann más adelante.

Lema 2.2.5. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento finito con k hojas entre espacios topológicos. Entonces, p es una aplicación propia.*

Demostración. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Queremos probar que $L = p^{-1}(K)$ es compacto en $\widetilde{X}$. Tomamos $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recubrimiento abierto de L, es decir, $L \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} T_\alpha$. Por la Proposición 1.1.6(a) como p es una aplicación de recubrimiento es abierta. Así, se tiene que el conjunto $\{p(T_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un recubrimiento abierto de K. Además, para cada punto $x \in K$, existe un entorno distinguido U_x, contenido en uno de los

$p(T_\alpha)$, ya que basta tomar la intersección entre un abierto distinguido y $p(T_\alpha)$. Por la Proposición 1.1.6(b), la preimagen de U_x por p se puede escribir como $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i=1}^{k} V_x^i$. Como hay una cantidad finita de abiertos V_x^i, puede tomarse U_x de manera que si $V_x^i \cap L \neq \emptyset$ entonces $V_x^i \subset T_{\alpha_i}$ para algún $\alpha_i \in \mathcal{A}$.

Por como se encuentran definidos los abiertos U_x, tenemos que la familia $\{U_x\}_{x\in X}$ es un recubrimiento abierto de K un conjunto compacto. Por tanto, admite un subrecubrimiento finito. Sea $\{U_{x_j}\}_{j=1}^{m}$ dicho subrecubrimiento. Entonces, tenemos que $L \subset \bigcup_{j=1}^{m} p^{-1}(U_{x_j}) = \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{k} V_{x_j}^i$. Por construcción, cada conjunto $V_{x_j}^i \cap L$ no vacío está contenido en algún $T_{\alpha_{i,j}}$, así que $L \subset \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{k}(V_{x_j}^i \cap L)$ es un recubrimiento finito de L por subconjuntos contenidos en los $T_{\alpha_{i,j}}$. De esta forma, se tiene que $L \subset \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{k} T_{\alpha_{i,j}}$, por lo que $\{T_{\alpha_{i,j}}\}_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le m}}$ es un subrecubrimiento finito de $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ concluyendo así que L es compacto. □

De hecho, una aplicación de recubrimiento es finita si y solo si es propia. Si la aplicación de recubrimiento es propia, las fibras deben de ser un conjunto compacto, pues $\{x\}$ es un conjunto compacto. Además, las fibras de una aplicación de recubrimiento son discretas. Para que sean discretas y compactas al mismo tiempo, las fibras deben de ser un conjunto finito, por lo que la aplicación de recubrimiento es finita.

La siguiente proposición muestra como una aplicación holomorfa propia entre superficies de Riemann induce una aplicación de recubrimiento entre subconjuntos de estas superficies.

Proposición 2.2.6. *Sean X e Y superficies de Riemann con X conexa. Consideremos $F : Y \to X$ una aplicación holomorfa propia no constante en cada componente conexa y $S_F \subset Y$ los puntos de ramificación de F. Entonces, la aplicación F es sobreyectiva con fibras finitas y su restricción a $Y \setminus F^{-1}(F(S_F))$ es un recubrimiento topológico finito sobre $X \setminus F(S_F)$.*

Demostración. Como F es una aplicación holomorfa no constante en cada componente conexa entre superficies de Riemann, entonces F es abierta por el Corolario 2.1.6. Asimismo, por la Proposición 2.2.2, debido a que F es propia entre espacios Hausdorff localmente compactos, entonces F es una aplicación cerrada. Por tanto, $F(Y)$ es un conjunto abierto y cerrado, por lo que debe corresponderse con una componente conexa de X. Como X es conexo, solo puede ser que $F(Y) = X$.

Por el Corolario 2.1.7, las fibras de F son discretas por ser una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann. Además, para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es compacto. Por tanto, $F^{-1}(x)$ es un conjunto compacto, al ser la contraimagen de un compacto por una aplicación propia. Por tanto, como $F^{-1}(x)$ es un conjunto compacto y discreto, es un conjunto finito.

Queda ver que F es una aplicación de recubrimiento finita al restringirse sobre $Y' = Y \setminus F^{-1}(F(S_F))$. Sea $X' = X \setminus F(S_F)$. Como F es sobreyectiva, entonces

$$F(Y \setminus F^{-1}(F(S_F))) = X \setminus F(S_F)$$

por lo que $F|_{Y'}$ es sobreyectiva.

Para terminar de ver que $F|_{Y'}$ es una aplicación de recubrimiento, queda ver que para cada $x \in X'$ existe un abierto distinguido que lo contenga. Sea $x \in X'$ y sea $F^{-1}(x) = \{y_i\}_{i=1}^{k}$ su fibra. Por la Observación 2.2.3 se tiene que el conjunto $F(S_F)$ de valores propios es cerrado, por lo que $X \setminus F(S_F)$ es abierto. En consecuencia, existe un abierto $\widetilde{U}$ con $x \in \widetilde{U} \subset X \setminus F(S_F)$ y, además, $F^{-1}(\widetilde{U})$ no contiene puntos de ramificación. Por la Proposición 2.1.3, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ existen cartas $(\widetilde{V}_i, \psi_i)$ en Y y (U_i, φ_i) en X, definidas sobre entornos de y_i y x, respectivamente, tales que la expresión local de F es la identidad. Tomamos cada U_i de manera que $U_i \subset \widetilde{U}$ y los $\widetilde{V}_i$ disjuntos dos a dos, lo cual podemos hacer por ser Y' un espacio Hausdorff. Sea entonces

$$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$$

la intersección de dichos entornos abiertos de x. Entonces, $F^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ con $V_i \subset \widetilde{V}_i$ abierto y $F|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ un homeomorfismo. Con esto, cumple las propiedades de aplicación de recubrimiento y queda probada la proposición. □

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.7. Sean X e Y espacios topológicos y $p : Y \to X$ una aplicación continua. Si existe un conjunto $B \subset X$ denso en ninguna parte (es decir, $\mathring{\overline{B}} = \emptyset$) tal que

$$p|_{Y \setminus f^{-1}(B)} : Y \setminus f^{-1}(B) \longrightarrow X \setminus B$$

es una aplicación de recubrimiento sobre $X \setminus B$, entonces p se denomina un **recubrimiento ramificado**.

Si $p|_{Y \setminus f^{-1}(B)}$ es un recubrimiento finito de grado k, entonces se dice que p es un **recubrimiento ramificado finito de grado k**.

Por la Proposición 2.1.7 el conjunto $S_F \subset Y$ de puntos de ramificación es discreto y cerrado. En consecuencia, S_F es un conjunto denso en ninguna parte. Luego, por la proposición 2.2.6 se tiene que una aplicación holomorfa propia entre superficies de Riemann se corresponde con un recubrimiento ramificado finito. Al grado k de la aplicación F vista como recubrimiento ramificado se le denota por $d(F)$.

Con esto, ya es posible relacionar el índice de ramificación de los puntos de una fibra de la aplicación holomorfa propia F con el grado del recubrimiento $d(F)$.

Corolario 2.2.8. *Sean X e Y superficies de Riemann con X conexa. Consideramos $F : Y \to X$ una aplicación holomorfa propia. Dado $x \in X$, entonces*

$$d(F) = \sum_{y \in F^{-1}(x)} mult_y(F).$$

Demostración. Sea $B_F = F(S_F)$ el conjunto de valores críticos de F. Denotamos $X' = X \setminus B_F$ e $Y' = Y \setminus F^{-1}(B_F)$. Por la Proposición 2.2.6, tenemos que

$$F|_{Y'} : Y' \longrightarrow X'$$

es una aplicación de recubrimiento. Por tanto, si $x_0 \notin B_F$, existe un abierto distinguido $U \subset X'$ con $x_0 \in U$. Así, para cada $y \in F^{-1}(x_0)$, se tiene que existe un abierto $V \subset Y'$ tal que

$$F|_V : V \longrightarrow U$$

es un homeomorfismo. Por la Observación 2.1.5 tenemos que $\mathrm{mult}_y(F) = 1$, ya que F es un homeomorfismo local para y. Así,

$$\sum_{y \in F^{-1}(x_0)} \mathrm{mult}_y(F) = |F^{-1}(x_0)| = d(F),$$

como se quería probar.

Queda comprobar el resultado para los puntos de B_F. Sea $x_0 \in B_F$ con $F^{-1}(x_0) = \{y_1, ..., y_s\}$ y sea $\mathrm{mult}_{y_i}(F) = n_i$.

De la demostración de la independencia del índice de ramificación de las cartas escogidas en la Proposición 2.1.3 se deduce que para cada $j \in \{1, ..., s\}$ existen entornos abiertos V_j de los y_j, disjuntos dos a dos, y que existen entornos abiertos U_j de x_0 tales que para todo $x \in U_j \setminus \{x_0\}$, se cumple que

$$|F^{-1}(x) \cap V_j| = n_j.$$

Supongamos que, dado $V = \bigcup_{j=1}^{s} V_j$ con $F^{-1}(x_0) \subset V$, existe un abierto $U \subset \bigcap_{j=1}^{s} U_j$ tal que $F^{-1}(U) \subset V$. Entonces, dado $x \in (X \setminus B_F) \cap U$ se tendría que $F^{-1}(x) \subset \bigcup_{j=1}^{s} V_j$ y cada componente conexa V_j contendría n_j elementos de la contraimagen de x. En total, $|F^{-1}(x)| = \sum_{j=1}^{s} n_i$ y como $x \in X'$ se tiene que

$$d(F) = |F^{-1}(x)| = \sum_{j=1}^{s} n_i = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{mult}(y_i) = \sum_{y_i \in F^{-1}(x_0)} \mathrm{mult}(y_i),$$

como se desea probar.

Por tanto, se probará la existencia del abierto U para concluir la demostración. Sea $x \in X$. Dado V un abierto que contenga $F^{-1}(x)$, se tiene que su complementario, $Y \setminus V$, es cerrado. Como F es una aplicación cerrada, $A = F(X \setminus V)$ es cerrado y se tiene que $x \notin A$. Sea $U = X \setminus A$, tenemos que

$$F^{-1}(U) = F^{-1}(X \setminus F(Y \setminus V)) = Y \setminus F^{-1}(F(Y \setminus V))$$

y como $Y \setminus V \subset F^{-1}(F(Y \setminus V))$ se tiene que $Y \setminus F^{-1}(F(Y \setminus V)) \subset V$, por lo que $F^{-1}(U) \subset V$. Con esto, se concluye la prueba. □

2.3. Superficies de Riemann a partir de recubrimientos ramificados

En la sección anterior hemos visto que una aplicación holomorfa propia no constante entre superficies de Riemann induce una aplicación de recubrimiento fuera de las fibras de los valores críticos. En esta sección, se probará que dado un recubrimiento ramificado sobre una superficie de Riemann, este recubrimiento induce una aplicación propia entre dos superficies de Riemann.

Se comienza probando la situación más sencilla, en la que se tiene un recubrimiento no ramificado sobre una superficie de Riemann. Utilizaremos este caso para construir la situación más general.

Proposición 2.3.1. *Sean Y un espacio topológico y X una superficie de Riemann con la topología heredada de su estructura de variedad compleja. Sea $p : Y \to X$ una aplicación de recubrimiento. Entonces, existe una única estructura de variedad compleja sobre Y tal que la aplicación p sea holomorfa.*

Demostración. Comenzaremos la prueba construyendo un atlas complejo sobre Y que haga Y Hausdorff con la topología inducida. Después, veremos que este atlas hace holomorfa la aplicación p y acabaremos comprobando la unicidad del atlas.

Vamos a construir el atlas complejo a partir de los conjuntos $V \subset Y$ que se aplican de manera homeomorfa sobre los abiertos distinguidos de X a través de la aplicación de recubrimiento p. Para ello, tomamos un punto $y \in Y$ tal que $p(y) = x \in X$. Dado que p es una aplicación de recubrimiento, puede encontrarse un entorno abierto $V_y \subset Y$ de y tal que la restricción $p|_{V_y} : V_y \to p(V_y) = U_x$ sea un homeomorfismo. Además, escogemos V_y para que $p(V_y) = U_x$ sea dominio de una carta $\varphi_x : U_x \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos la aplicación:

$$\psi_y = \varphi_x \circ p|_{V_y} : V_y \to \mathbb{C}.$$

que nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V_y \arrow[r, "p|_{V_y}"] \arrow[dr, "\psi_y"'] & U_x \arrow[d, "\varphi_x"] \\
& \psi(V_y) = \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que la aplicación ψ_y es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos y, por tanto, (V_y, ψ_y) determina una carta en Y. Definimos el conjunto $\mathcal{A} = \{(V_y, \psi_y)\}_{y \in Y}$ como colección de cartas sobre Y. El siguiente paso es comprobar que $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre Y. Para ello, debe verse que las cartas son compatibles.

Supongamos que se tienen dos cartas (V_y, ψ_y), $(V_{y'}, \psi_{y'})$ de $\mathcal{A}$ con intersección no vacía $V_y \cap V_{y'} \neq \emptyset$. Denotamos $x = p(y), x' = p(y')$. Como $V_y \cap V_{y'} \neq \emptyset$ es abierto y $\psi_y, \psi_{y'}$ son homeomorfismos, se tiene que los conjuntos

$$\psi_y(V_y \cap V_{y'}), \psi_{y'}(V_y \cap V_{y'})$$

son abiertos en X. Veamos que el cambio de coordenadas

$$\psi_y \circ \psi_{y'}^{-1} : \psi_{y'}(V_y \cap V_{y'}) \longrightarrow \psi_y(V_y \cap V_{y'})$$

es un biholomorfismo.

Dado $z \in \psi_{y'}(V_y \cap V_{y'})$, se tiene

$$\psi_y \circ \psi_{y'}^{-1}(z) = (\varphi_x \circ p|_{V_y}) \circ (\varphi_{x'} \circ p|_{V_{y'}})^{-1}(z) = \varphi_x \circ p|_{V_y} \circ p|_{V_{y'}}^{-1} \circ \varphi_{x'}^{-1}(z) = \varphi_x \circ \varphi_{x'}^{-1}(z),$$

ya que en el conjunto $V_y \cap V_{y'}$, las aplicaciones $p|_{V_y}$ y $p|_{V_{y'}}$ coinciden. Dado que (U_x, φ_x) y $(U_{x'}, \varphi_{x'})$ son cartas sobre X, el cambio de coordenadas $\varphi_x \circ \varphi_{x'}^{-1}$ es un biholomorfismo, por lo que la compatibilidad queda verificada. Así, la colección $\mathcal{A}$ define una estructura de variedad compleja de dimensión 1 sobre Y.

Queda ver que Y es un espacio Hausdorff con la topología inducida por la estructura de variedad compleja del atlas $\mathcal{A}$. Dados $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$. Si $p(y) = p(y') = x$, entonces, por ser p una aplicación de recubrimiento, existe un abierto distinguido U_x con $x \in U_x$. Luego, $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$ con V_i abiertos de Y disjuntos dos a dos con $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U_x$ un homeomorfismo. Como $y \neq y'$, existen V_i, V_j tales que $y \in V_i$ e $y' \in V_j$. Por tanto, los abiertos V_y y $V_{y'}$ son dominios de cartas del atlas $\mathcal{A}$ y por tanto, son abiertos inducidos por la estructura de variedad compleja que separan y e y'.

Si $p(y) = x \neq x' = p(y')$, entonces, por ser X un espacio Hausdorff, existen abiertos distinguidos disjuntos $U_x, U_{x'} \subset X$ entornos de x y x', respectivamente. De nuevo, $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{i \in I} V_i$ e $p^{-1}(U_{x'}) = \bigcup_{j \in J} W_j$ con los conjuntos V_i y W_j abiertos tales que $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U_x$ $p|_{W_j} : W_j \longrightarrow U_{x'}$ son homeomorfismos. Además, estos abiertos verifican que $V_{i_1} \cap V_{i_2} = \emptyset$ si $i_1 \neq i_2$, $W_{j_1} \cap W_{j_2} = \emptyset$ si $j_1 \neq j_2$ y $V_i \cap W_j = \emptyset$ para todos $i \in I$, $j \in J$. Así, existen V_i, W_j disjuntos entre sí tales que $y \in V_i$ e $y' \in W_j$. Los conjuntos V_i y W_j son dominios de cartas del atlas $\mathcal{A}$ y por tanto, son abiertos inducidos por la estructura de variedad compleja que separan y e y'. Esto prueba que Y es Hausdorff con la topología heredada por la estructura de variedad compleja y, por tanto, que el atlas $\mathcal{A}$ determina una estructura de superficie de Riemann en Y.

Se comprobará ahora que p es una aplicación holomorfa respecto a esta estructura. Para ello, veremos que su expresión en coordenadas locales es holomorfa. Sea $y \in Y$ con $p(y) = x$ y consideramos (V_y, ψ_y) una carta de Y con $y \in Y$ y (U_x, φ_x) una carta de X tal que $p(y) = x$ definidas como al comienzo de la demostración. Entonces, la expresión local de p está dada por

$$\varphi_x \circ p \circ \psi_y^{-1} : \psi_y(V_y) \longrightarrow \varphi_x(U_x),$$

luego si $z \in \psi_y(V_y)$ tenemos

$$\varphi_x \circ p \circ \psi_y^{-1}(z) = \varphi_x \circ p \circ (\varphi_x \circ p|_{V_y})^{-1}(z) = z$$

que es un biholomorfismo.

Por tanto, se ha comprobado que existe una estructura de superficie de Riemann sobre Y que hace holomorfa la aplicación p. Queda ver que esta estructura es única.

Supongamos que hay otro atlas $\mathcal{A}' = \{(V'_j, \psi'_j)\}_{j \in J}$ que dota a Y de estructura de superficie de Riemann y que hace la aplicación p holomorfa. Por tanto, dado $y \in Y$ con $p(y) = x \in X$ entonces dadas dos cartas (U, φ) y (V'_J, ψ'_j) de X e Y tales que $x \in U$ e $y \in V$ tenemos que

$$\varphi \circ p \circ (\psi'_j)^{-1} : \psi'_j(V'_j) \longrightarrow \varphi(U)$$

es una aplicación holomorfa en $\mathbb{C}$.

Consideramos la aplicación $Id_Y : (Y, \mathcal{A}') \longrightarrow (Y, \mathcal{A})$ con $\mathcal{A}$ el atlas que hemos construido. Vamos a ver que Id_Y es un biholomorfismo entre superficies de Riemann y que, por tanto, los dos atlas definen la misma estructura de variedad compleja en Y.

Sea $y \in Y$ junto a un entorno abierto de este $V \subset Y$ que se aplique de manera homeomorfa sobre su imagen a través de p. Tomamos V de manera que sea dominio de una carta de $\mathcal{A}'$. Por la construcción de las cartas de $\mathcal{A}$ tenemos que V es dominio de una carta de este atlas. Elegimos así las cartas (V, ψ'_j) de $\mathcal{A}'$ y (V, ψ_y) de $\mathcal{A}$ con $\psi_y = \varphi_x \circ p|_V$ donde (U_x, φ_x) es una carta de X con $p(y) = x \in U_x$.

Dado $z \in \psi'_j(V)$, la expresión local de Id_Y en estas cartas viene dada por

$$\psi_y \circ Id_Y \circ (\psi'_j)^{-1}(z) = \varphi_x \circ p|_V \circ (\psi'_j)^{-1}(z)$$

que es holomorfa por hipótesis y biyectiva por ser composición de aplicaciones biyectivas. Por tanto, es biholomorfa. Como Id_Y es un biholomorfismo local y es biyectiva, tenemos que es un biholomorfismo global y se concluye la demostración.

□

Observación 2.3.2. La estructura de superficie de Riemann conserva la topología preexistente en Y.

Una vez probado el resultado para recubrimientos, vamos a probar la existencia de una aplicación propia entre superficies de Riemann dado un recubrimiento ramificado.

Proposición 2.3.3. *Sean X una superficies de Riemann conexa e Y' un espacio topológico conexo. Consideremos $S \subset X$ un subconjunto discreto cerrado de X y $F' : Y' \to X'$ una aplicación de recubrimiento finito, con $X' = X \setminus S$. Entonces, existen una superficie de Riemann Y, tal que Y' está contenida en Y como un conjunto abierto, y una aplicación holomorfa propia $F : Y \to X$ tal que $F|_{Y'} = F'$ e $Y' = Y \setminus F^{-1}(S)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.1 tenemos que Y' adquiere una estructura de superficie de Riemann que hace F' holomorfa a partir de la estructura de X'. El objetivo es construir una superficie de Riemann Y que contenga a Y' y de manera que la estructura de superficie de Riemann de Y' sea compatible con la de Y.

Comenzamos viendo cómo actúa F' sobre los puntos de S. Sea $x_0 \in S$. Por la Proposición 2.1.2, encontramos un entorno abierto conexo $U_{x_0} \subset X$ de x_0 que no contiene otros puntos de S, y una carta compleja (U_{x_0}, φ_{x_0}) con $\varphi_{x_0}(U_{x_0}) = \mathbb{D}$ y $\varphi_{x_0}(x_0) = 0$.

Sea $U^*_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset X'$ un entorno punteado de x_0. El conjunto $U^*_{x_0}$ es abierto por ser X un espacio Hausdorff. Tenemos que

$$F'^{-1}(U^*_{x_0}) = \bigcup_{i \in I} V^*_{x_0,i}$$

donde cada $V^*_{x_0,i}$ se corresponde con una componente conexa de $F'^{-1}(U^*_{x_0})$. Además, por la Proposición 1.1.6(c) F' es una aplicación de recubrimiento sobre $F'^{-1}(U^*_{x_0})$, por ser la contraimagen de un abierto. Queremos ver cómo actúa F' en cada componente conexa de $F'^{-1}(U^*_{x_0})$ y, para ello, comezaremos probando que

$$F'_i = F'|_{V^*_{x_0,i}} : V^*_{x_0,i} \longrightarrow U^*_{x_0}$$

es una aplicación de recubrimiento finita para cada componente conexa.

El primer paso es ver que F'_i es una aplicación sobreyectiva. Dado $x_1 \in U^*_{x_0}$, tomamos $x_2 \in U^*_{x_0}$ de manera que exista $y_2 \in V^*_{x_0,i}$ con $x_2 = F'(y_2)$. Entonces, como $U^*_{x_0}$ es conexo por caminos, existe un camino

$$\sigma : [0,1] \longrightarrow U^*_{x_0}$$

con origen x_2 y final x_1. Consideramos el levantamiento de σ en $F'^{-1}(U^*_{x_0})$ con origen en y_2,

$$\widetilde{\sigma} : [0,1] \longrightarrow F'^{-1}(U^*_{x_0})$$

que da lugar a un camino que termina en un punto $y_1 \in F'^{-1}(U^*_{x_0})$ con $F'(y_1) = x_1$. Como y_1 se encuentra en la misma componente conexa por caminos que y_2 de $F'^{-1}(U^*_{x_0})$ tenemos que $y_1 \in V^*_{x_0,i}$. Así, para cada $x_1 \in U^*_{x_0}$ existe un punto $y_1 \in V^*_{x_0,i}$ con $F'(y_1) = x_1$. Por tanto, en cada componente conexa, F'_i es sobreyectiva.

Queda ver que para $x \in U_{x_0}^*$ existe un entorno abierto distinguido cuya contraimagen se encuentre contenida en $V_{x_0,i}^*$. Dado $x \in U_{x_0}^*$ tomamos $U \subset U_{x_0}^*$ un abierto distinguido de la aplicación F' con $x \in U$. Si el grado del recubrimiento F' es k, tenemos que, $(F')^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{k} V_j$ con los V_j disjuntos dos a dos y $F'|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ un homeomorfismo. Entonces,

$$(F_i')^{-1}(U) = V_{x_0,i}^* \bigcap F'^{-1}(U) = V_{x_0,i}^* \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k} V_j \right) = \bigcup_{j=1}^{k} V_j \cap V_{x_0,i}^* = \bigcup_{j=1}^{k} \widetilde{V_j}$$

con $V_j \cap V_{x_0,i}^* = \widetilde{V_j}$ para todo $j \in \{1, ...k\}$. Sea $\{\widetilde{V_{j_s}}\}_{s\in\{1,...,n\}}$ el subconjunto de $\{\widetilde{V_j}\}_{j\in\{1,...,k\}}$ formado por los abiertos distinto del vacío. Tenemos que los $\widetilde{V_{j_s}}$ son disjuntos dos a dos y como $F_i'|_{\widetilde{V_j}}$ es la restricción del homeomorfismo $F'|_{V_j}$ al abierto $V_{x_0,i}^* \cap V_j \subset V_j$ tenemos que es un homeomorfismo también. Por lo tanto, $F_i' : V_{x_0,i}^* \longrightarrow U_{x_0}^*$ es una aplicación de recubrimiento para cada componente conexa $V_{x_0,i}^*$ de $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$.

Como F_i' es la restricción de F' al subconjunto $V_{x_0,i}^*$ se tiene que la cantidad de elementos en $(F_i')^{-1}(x)$ es menor o igual que en $(F')^{-1}(x)$. Por lo tanto, F_i' es una aplicación de recubrimiento finita, ya que el cardinal de $(F')^{-1}(x)$ está acotado.

Veamos que la cantidad de componentes conexas de $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$ es finita. Dado $x \in U_{x_0}^*$, en cada componente conexa de $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$ hay como mínimo un elemento de la fibra $F^{-1}(x)$. Por tanto, se tiene que la cantidad de componentes conexas en $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$ es menor o igual que el cardinal de la fibra, que es un conjunto finito porque $F' : Y' \longrightarrow X'$ es una aplicación de recubrimiento finito. Concluimos que la cantidad de componentes conexas en $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$ es finita. Vamos a denominar m_{x_0} a la cantidad de componentes conexas en $F'^{-1}(U_{x_0}^*)$.

Consideramos la componente $V_{x_0,i}^*$ junto a $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. El siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_{x_0,i}^* \arrow[r, "F'|_{V_{x_0,i}^*}"] \arrow[dr, "\varphi_{x_0} \circ F'|_{V_{x_0,i}^*}"'] & U_{x_0}^* \arrow[d, "\varphi_{x_0}"] \\ & \mathbb{D}^* \end{tikzcd}$$

induce una aplicación de recubrimiento de $V_{x_0,i}^*$ sobre $\mathbb{D}^*$ vía la composición de $F'|_{V_{x_0,i}^*}$ con la carta φ_{x_0}. Es sobreyectiva por ser composición de aplicaciones sobreyectivas y los abiertos distinguidos de $\mathbb{D}^*$ pueden tomarse como la imagen por φ_{x_0} de los abiertos distinguidos de $U_{x_0}^*$.

Como se vio en el Ejemplo 1.1.13, todo espacio recubridor conexo de $\mathbb{D}^*$ a través de una aplicación de recubrimiento finita es homeomorfo a $\mathbb{D}^*$. En consecuencia, como $\varphi_{x_0} \circ F'|_{V_{x_0,i}^*} : V_{x_0,i}^* \longrightarrow \mathbb{D}^*$ es una aplicación de recubrimiento finito con $V_{x_0,i}^*$ conexo, tenemos que $V_{x_0,i}^*$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^*$. De la misma manera, podemos considerar cualquier $x \in S$ y tenemos que $V_{x,i}^*$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^*$ para todo $i \in \{1, ..., m_x\}$ con m_x el número de componentes conexas del conjunto $F'^{-1}(U_x^*)$. Consideramos

$$\rho_x^i : V_{x,i}^* \longrightarrow \mathbb{D}^*$$

el homeomorfismo entre ambos conjuntos para cada $x \in S$ y cada $i \in \{1, ..., m_x\}$. Con esto, resulta el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V^*_{x,i} \arrow[r, "F'|_{V^*_{x,i}}"] \arrow[d, "\rho^i_x"'] & U^*_x \arrow[d, "\varphi_x"] \\ \mathbb{D}^* \arrow[r, "p_{k^i_x}"] & \mathbb{D}^* \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

donde $p_{k^i_x}$ es la aplicación de recubrimiento (ver Ejemplo 1.1.7)

$$\begin{aligned} p_{k^i_x} : \mathbb{D}^* &\longrightarrow \mathbb{D}^* \\ z &\longmapsto z^{k^i_x} \end{aligned}$$

con $k^i_x \in \mathbb{N}$. Luego ρ^i_x es un homomorfismo entre los recubrimientos $\varphi_x \circ F'|_{V^*_{x,i}} : V^*_{x,i} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ y $p_{k^i_x} : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{D}^*$.

Tenemos entonces lo siguiente. Para cada $x \in S$, existe $U^*_x \subset X'$ un entorno punteado de x que es homeomorfo a $\mathbb{D}^*$ tal que las componentes conexas de $(F')^{-1}(U^*_x)$ son también homeomorfas al disco punteado $\mathbb{D}^*$. Además, estas componentes conexas de $(F')^{-1}(U^*_x)$ recubren U^*_x mediante aplicaciones de recubrimiento isomorfas al recubrimiento dado por $p_{k^i_x}$.

Para construir el conjunto Y lo que haremos será "rellenar" los huecos de cada componente conexa, añadiendo puntos nuevos a Y'. Lo hacemos de la siguiente manera. Se considera una colección de puntos "abstractos" $\{y^i_x : x \in S \wedge i \in \{1, ..., m_x\}\}$ que incluye uno por cada $x \in S$ y por cada $i \in \{1, ..., m_x\}$. Sea

$$Y = Y' \cup \{y^i_x : x \in S, i \in \{1, ..., m_x\}\},$$

tomamos $V_{x,i} = V^*_{x,i} \cup \{y^i_x\}$ y consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}^i_x : V_{x,i} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \begin{cases} \rho^i_x(z), & \text{si } z \in V^*_{x,i}, \\ 0, & \text{si } z = y^i_x. \end{cases} \end{aligned}$$

que es la extensión de la aplicación ρ^i_x al conjunto $V_{x,i}$.

Por la Proposición 2.3.1 existe una estructura de variedad compleja sobre el espacio Y'. Por darse que $Y' \subset Y$, la cartas del atlas de Y' definen cartas sobre Y, viendo los dominios de las cartas de Y' como subconjuntos de Y. Sea $\mathcal{A}_{Y'}$ el atlas maximal de Y'. El objetivo es comprobar que $\{(V_{x,i}, \widetilde{p}^i_x)\}_{\substack{x \in S \\ 1 \le i \le m_x}}$ son cartas sobre Y y que $\mathcal{A}_{Y'} \cup \{(V_{x,i}, \widetilde{p}^i_x)\}_{\substack{x \in S \\ 1 \le i \le m_x}}$ es un atlas sobre Y.

En primer lugar, por ser una biyección, cada $\widetilde{p}^i_x$ es inyectiva y su imagen es $\mathbb{D}$, un abierto de $\mathbb{C}$. Luego $(V_{x,i}, \rho^i_x)$ determina una carta para cada $x \in S$ y cada $i \in \{1, ..., m_x\}$. Queda ver que estas cartas son compatibles con las del conjunto $\mathcal{A}_{Y'}$.

Por la demostración de la Proposición 2.3.1 se sabe que los abiertos $W \subset Y'$ que son llevados de manera homeomórfica sobre los abiertos distinguidos de X' con la aplicación F' son dominio de cartas de Y'. Tomamos $W \subset V^*_{x,i}$ un abierto de este tipo con $U = F'(W) \subset X'$ y (U, φ) una carta de X' y consideramos la aplicación

$$\psi := \varphi_x \circ F'|_W : W \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Luego, (W, ψ) es una carta del atlas $\mathcal{A}_{Y'}$ por la demostración de la Proposición 2.3.1.

Veamos que (W, ψ) y $(V_{x,i}, \widetilde{\rho}^i_x)$ son cartas compatibles. Como $W \subset V^*_{x,i}$, se tiene que $W \cap (V^*_{x,i} \cup \{y^i_x\}) = W$ y $\widetilde{\rho}^i_x|_W = \rho^i_x$, por lo que se utilizará ρ^i_x en vez de $\widetilde{\rho}^i_x$. Como (W, ψ) es una carta de $\mathcal{A}_{Y'}$ el conjunto $\psi(W)$ es abierto. Así mismo, como W es un abierto y ρ_x^i es un homeomorfismo, se tiene que $\rho_x^i(W)$ es también un abierto. Queda comprobar que el cambio de cartas

$$\psi^{-1} \circ \rho_x^i : \rho_x^i(W) \longrightarrow \psi(W)$$

es un biholomorfismo.

Como $\psi = \varphi_x \circ F'|_W$, se tiene un diagrama obtenido al restringir (2.2) a W dado por

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F'|_W"] \arrow[d, "\rho_x^i"'] & F'(W) \arrow[d, "\varphi_x"] \\ \rho_x^i(W) \arrow[r, "p_{k_x^i}|_{\rho_x^i(W)}"] & \psi(W) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

La aplicación ρ_x^i es un isomorfismo de recubrimientos, por tanto, si W es una componente conexa de la contraimagen de un abierto distinguido de $\mathbb{D}^*$, se tiene que $\rho_x^i(W)$ también lo es. Por ende, $p_{k_x^i}|_{\rho_x^i(W)}$ es un homeomorfismo entre $\rho_x^i(W)$ y $\psi(W)$. Tenemos así que $p_{k_x^i}|_{\rho_x^i(W)} = \rho_x^i \circ \psi^{-1}$ es un holomorfismo y homeomorfismo. Por la Observación 2.1.5 tenemos que $p_{k_x^i}|_{\rho_x^i(W)}$ es un biholomorfismo y concluimos que las cartas son compatibles.

Por lo tanto, hemos probado que Y es una superficie de Riemann tal que $Y' \subset Y$ es un conjunto abierto ya que todo punto de Y' posee una carta contenida en Y'. Se define la extensión F de F' a Y de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F : Y &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \begin{cases} F'(y) \text{ si } y \in Y', \\ x \text{ si } y = y_x^i \text{ con } x \in S. \end{cases} \end{aligned}$$

Veamos que F es holomorfa en Y. Si $y \in Y'$, entonces, existe un entorno abierto de y en el que F es holomorfa, ya que F' es holomorfa. Si $y \in Y \setminus Y'$, entonces, $y = y_x^i$ para algún $x \in S$. Como se ve en el diagrama (2.2), en el entorno punteado $V_{x,i}^*$ de y_x^i la aplicación F tiene una expresión local en cartas de la forma $z \longmapsto z^k$, que es holomorfa. Si se extiende al entorno abierto $V_{x,i} = V_{x,i}^* \cup \{y_x^i\}$ se tiene que $F(y_x^i) = x$ y la expresión local de F sigue siendo de la forma $z \longmapsto z^k$, que es holomorfa.

Por último, queda ver que la aplicación F es propia. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Tomando $K_S = S \cap K$, entonces, $K = K' \cup K_S$ con $K' \subset X$. Por tanto, $F^{-1}(K) = F^{-1}(K') \cup F^{-1}(K_S)$. Se tiene que $F^{-1}(K') = F'^{-1}(K')$ que es un conjunto compacto de Y' ya que, por el Lema 2.2.5, la aplicación F' es propia por ser una aplicación de recubrimiento finita. El conjunto K_S es un conjunto finito por ser un conjunto discreto contenido en un conjunto compacto. Además, las fibras de F son finitas por ser F' una aplicación de recubrimiento finita. Por tanto, $F^{-1}(K_S)$ es un conjunto discreto y finito, por ende, es compacto en Y. Por ser $F^{-1}(K)$ unión de dos compactos, se concluye que es compacto y, por tanto, F es una aplicación propia, como se quería. $\square$

Con esto, tenemos que dada una aplicación de recubrimiento ramificado finita sobre una superficie de Riemann X podemos obtener una superficie de Riemann Y junto a una aplicación holomorfa propia entre ambas. A continuación, vamos a ver que, de hecho, los homomorfismos del recubrimiento inducen aplicaciones holomorfas.

Teorema 2.3.4. *Sean X, Y, Z superficies de Riemann y $F : Y \longrightarrow X$ y $G : Z \longrightarrow X$ aplicaciones holomorfas propias. Sea $B \subset X$ un conjunto cerrado y discreto que contenga los valores críticos de F y de G y sean $X' = X \setminus B$, $Y' = F^{-1}(X')$, $Z' = G^{-1}(X')$. Dado un homomorfismo de recubrimientos $H' : Y' \longrightarrow Z'$ tal que para todo $z \in Y'$ cumpla*

$$G|_{Z'} \circ H'(z) = F|_{Y'}(y),$$

se puede extender a una aplicación holomorfa propia $H : Y \longrightarrow Z$.

Demostración. Vamos a considerar $F' = F|_{Y'}$ y $G' = G|_{Z'}$. También, consideraremos $S = G^{-1}(B) \subset Z$ que es un conjunto discreto y cerrado por serlo las fibras de una aplicación holomorfa (ver el Corolario 2.1.7).

Por la Proposición 1.2.4, se tiene que H' es una aplicación de recubrimiento por ser un homomorfismo de recubrimientos. Por tanto, por la Proposición 2.3.1, H' es una aplicación holomorfa para una única estructura de variedad compleja sobre Y'. Esta estructura debe ser la misma que la que teníamos previamente sobre Y, ya que la aplicación $F' = G' \circ H'$ es holomorfa para ambas estructuras y, por la Proposición 2.3.1 esta debe ser única.

Ya solo queda extender H' a una aplicación de Y en Z. Esto lo haremos de manera parecida a la demostración de la Proposición 2.3.3. Para cada $y \in F^{-1}(B)$ buscaremos un punto $z \in G^{-1}(B)$ al que enviarle. Por la demostración de la Proposición 2.3.3 sabemos que dado $x \in S$, existe un entorno punteado U_x^* de x de manera que $F^{-1}(U_*)$ y $G^{-1}(U_x^*)$ sean unión de componentes conexas cada una de las cuales recubre a U_x^*. Sea $y \in F^{-1}(U_x^*)$ y V_y^* una componente conexa de $F^{-1}(U_*)$ que recubra U_y^*. Tenemos que $H'(V_y^*) \subset Z'$ es un conjunto conexo y que, además, $G' \circ H'(V_y^*) = F'(V_y^*) = U_x^*$. Por tanto, $H'(V_y^*)$ debe estar contenido en una componente conexa de $G^{-1}(U_x^*)$. Sea esta componente conexa W_z^* con $z \in G^{-1}(x)$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & V_y^* \arrow[dl, "H'|_{V_y^*}"'] \arrow[d, "F'|_{V_y^*}"] \\
W_z^* \arrow[r, "G'|_{W_z^*}"'] & U_x^*
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

que muestra como la aplicación $H'|_{V_y^*}$ es un homomorfismo de los recubrimientos $F'|_{V_y^*} : V_y^* \longrightarrow U_x^*$ y $G'|_{W_z^*} : W_z^* \longrightarrow U_x^*$. Por tanto, $H'|_{V_y^*}$ es un recubrimiento de V_y^* en W_z^* por la Proposición 1.2.4. Similar a como sucedía en la demostración de la Proposición 2.3.3 tenemos que sobre entornos punteados de los $z \in S$ la aplicación H' actúa como un recubrimiento. En la demostración de la Proposición 2.3.3 "rellenamos" los abiertos punteados introduciendo un conjunto de puntos 'abstractos' y dando una estructura de variedad compleja al nuevo conjunto. En esta situación, ya tenemos esos puntos en Y junto a una estructura de variedad compleja que es compatible por la dada por H' como recubrimiento de Z'. Por lo tanto, extendemos la aplicación H' a Y de manera que para cada $y \in F^{-1}(B)$ se tenga que $H(y) = z$ a un $z \in S$ correspondiente. La demostración de que H es holomorfa y propia sigue los mismos argumentos que en la demostración de la Proposición 2.3.3 y por lo tanto no lo veremos. Se concluye que H es un holomorfismo propio entre Y y Z como quería verse. □

Consideramos la siguiente definición

Definición 2.3.5. Sea X una superficie de Riemann conexa y $S \subset X$ un subconjunto discreto y cerrado. Se denota por $\mathrm{Hol}_{X,S}$ al conjunto de superficies de Riemann Y junto a una aplicación propia holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ cuyos puntos de ramificación se encuentran contenidos en S. Los elementos de $\mathrm{Hol}_{X,S}$ se denotarán por (Y, F).

De los resultados anteriores se obtiene el siguiente corolario

Corolario 2.3.6. *Existe una equivalencia entre el conjunto $Hol_{X,S}$ y el de recubrimiento finitos de $X \setminus S$ donde a cada aplicación propia holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ con conjunto de valores críticos S se le asigna la aplicación de recubrimiento $F|_{Y\setminus F^{-1}(S)} : Y \setminus F^{-1}(S) \longrightarrow X \setminus S$.*

Además, los homomorfismos del recubrimiento se extienden a aplicaciones holomorfas propias entre elementos de $Hol_{X,S}$ y viceversa.

Por homología con los homomorfismos del recubrimiento, llamaremos a las aplicaciones holomorfas propias entre elementos de $\mathrm{Hol}_{X,S}$ homomorfismos del recubrimiento ramificado. Esto lleva a considerar lo siguiente. Sea X una superficie de Riemann conexa con $S \subset X$ un subconjunto discreto y cerrado e (Y, F) un elemento de $\mathrm{Hol}_{X,S}$. Tomamos el conjunto $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ de aplicaciones holomorfas propias $\Psi : Y \longrightarrow Y$ tales que para todo $y \in Y$ se tiene que $F \circ \Psi(y) = F(y)$. Llamaremos a estas aplicaciones automorfismos del recubrimiento ramificado e igual que como vimos con los automorfismos del recubrimiento, tenemos que con la operación composición el conjunto $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ es un grupo.

Proposición 2.3.7. *Sea $F : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa propia entre superficies de Riemann. Sea $B_F \subset X$ el conjunto de valores propios de F. Consideramos $Y' = Y \setminus F^{-1}(B_F)$ y $F' = F|_{Y'} : Y' \longrightarrow X \setminus B_F$ una aplicación de recubrimiento. Entonces,*

$$\mathrm{Aut}_F(Y|X) \cong \mathcal{C}_{F'}(Y')$$

donde $\mathcal{C}_{F'}(Y')$ es el grupo de automorfismos del recubrimiento F'.

Demostración. Por el Corolario 2.3.6, los automorfismos del recubrimiento ramificado restringidos al conjunto $Y' = Y \setminus F^{-1}(S)$ se corresponden con automorfismos del recubrimiento $F' = F|_{Y'} : Y' \longrightarrow X \setminus S$. La aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathrm{Aut}_F(Y|X) &\longrightarrow \mathcal{C}_{F'}(Y') \\ \Psi &\longmapsto \Psi|_{Y'} \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos ya que

$$\Lambda(\Psi) \circ \Lambda(\Sigma) = \Psi|_{Y'} \circ \Sigma|_{Y'} = (\Psi \circ \Sigma)|_{Y'} = \Lambda(\Psi \circ \Sigma).$$

Además, por el Teorema 2.3.4 tenemos que Λ es inyectivo y por la Proposición 2.2.6 tenemos que Λ es sobreyectiva. En consecuencia, Λ es un isomorfismo de grupos y por tanto

$$\mathrm{Aut}_F(Y|X) \cong \mathcal{C}_{F|_{Y'}}(Y').$$

□

La equivalencia entre ambos grupos suscita la siguiente definición.

Definición 2.3.8. Sean X e Y superficies de Riemann con X conexo y $F : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa propia con $B_F \subset X$ el conjunto de valores críticos de F. Diremos que un F es un **recubrimiento ramificado de Galois** si $F|_{Y\setminus F^{-1}(B)} : Y \setminus F^{-1}(B) \longrightarrow X \setminus B$ es un recubrimiento de Galois.

Acabamos con unos resultados acerca de los recubrimientos ramificados de Galois que rematarán algunos de los puntos que quedaron abiertos durante esta sección acerca del grado de ramificación de las fibras de un punto.

Proposición 2.3.9. *Sea $F : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa y propia entre superficies de Riemann conexas que además sea topológicamente un recubrimiento ramificado de Galois. Entonces*

(a) El grupo $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ actúa de manera transitiva en las fibras de F.

(b) Si $y \in Y$ es un punto con multiplicidad k entonces también lo son todos los puntos del conjunto $F^{-1}(F(y))$.

Demostración. Comenzamos probando (a). Sea $B_F \subset X$ el conjunto de valores propios y $S_F \subset Y$ el conjunto de puntos de ramificación. Consideramos $X' = X \setminus B_F$ e $Y' = Y \setminus F^{-1}(B_F)$. Si F es un recubrimiento ramificado de Galois entonces $F|_{Y'} : Y' \longrightarrow X'$ es un recubrimiento de Galois. Por lo tanto, por la Proposición 1.2.8 el grupo $\mathcal{C}_{F|_{Y'}}(Y')$ actúa transitivamente en Y' y tenemos que el grupo $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ actúa de manera transitiva en Y' ya que por la Proposición 2.3.7 en Y' los elementos de ambos grupos actúan igual. Queda ver que $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ actúa de manera transitiva para los elementos de $F^{-1}(B_F)$.

Tomamos $y \in F^{-1}(B_F)$ con $F(y) = x \in B_F$. Sea $y' \in F^{-1}(x)$. Tomamos un entorno abierto punteado $V'^*_{y'} \subset Y'$ de y' tal que $F|_{V'^*_{y'}} : V'^*_{y'} \longrightarrow U^*_x$ sea un recubrimiento. Igualmente, escogemos un entorno abierto punteado $V^*_y \subset Y'$ de y tal que $F|_{V^*_y} : V^*_y \longrightarrow U^*_x$ sea un recubrimiento. Sean $z \in V^*_y$ y $z' \in V'^*_{y'}$ tales que $F(z) = F(z')$. Como $F(z) \notin B_F$, tenemos que existe un automorfismo $\Psi \in \mathrm{Aut}_F(Y|X)$ tal que $\Psi(z) = (z')$. Ajustando el diagrama (2.4) a esta situación obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & V^*_y \arrow[dl, "\Psi'|_{V^*_y}"'] \arrow[d, "F|_{V^*_y}"] \\ V'^*_{y'} \arrow[r, "F|_{V'^*_{y'}}"'] & U^*_x \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Por la construcción de los automorfismos del recubrimiento ramificado en la demostración del Teorema 2.3.4 tenemos que $\Psi(y) = y'$ y concluimos que $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ actúa de manera transitiva en las fibras de F.

Para demostrar (b) consideramos $y \in Y$ con $x = F(y) \in X$. Si $x \notin B_F$ entonces tenemos que para todo $y' \in F^{-1}(x)$ la multiplicidad de y' es 1, por lo que se cumple lo que pedimos. Ahora, supongamos que $x \in B_F$ y consideramos $\Psi \in \mathrm{Aut}_F(Y|X)$ con $\Psi' = \Psi|_{Y'}$ el automorfismo del recubrimiento $F|_{Y'} : Y' \longrightarrow X'$ asociado. Supongamos que $y' = \Psi(y)$. Si observamos el diagrama (2.5) tenemos que V^*_y y $V'^*_{y'}$ son entornos abiertos punteados respectivamente de y e y' los cuales recubren el entorno abierto punteado U^*_x de x. Recordemos que todos los entornos son homeomorfos a $\mathbb{D}^*$. Podemos ver el diagrama en la expresión local de las funciones, donde resulta

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D}^* \arrow[dl, "\Phi"'] \arrow[d, "p_k"] \\ \mathbb{D}^* \arrow[r, "p_{k'}"'] & \mathbb{D}^* \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

donde bajo unas cartas adecuadas tenemos que $p_k(z) = z^k$ es la expresión local de $F|_{V^*_y}$, $p_{k'}(z) = z^{k'}$ es la expresión local de $F|_{V'^*_{y'}}$ y Φ es la expresión local de $\Psi'|_{V^*_y}$, que se corresponde con un homeomorfismo del disco por ser $\Psi'|_{V^*_y}$ un homeomorfismo también. Por el Ejemplo 1.1.13 tenemos que los recubrimientos solo pueden ser isomorfos si $k = k'$ y, por lo tanto, la multiplicidad de y y de y' es la misma. □

Capítulo 3

Relación con la teoría de cuerpos

En el capítulo 1 hemos visto una relación entre el grupo fundamental de un espacio y sus espacios recubridores. En el interludio I, introdujimos el concepto de variedad compleja y de superficie de Riemann. En el capítulo 2, vimos que las aplicaciones holomorfas propias entre superficies de Riemann son recubrimientos ramificados y que el grupo de automorfismos del recubrimiento coincide con el del recubrimiento ramificado. Esto nos da la idea de que, de la misma manera que existe una clasificación de recubrimientos a partir del grupo fundamental, también deberá haberla para una clasificación de recubrimientos ramificados.

En este capítulo, relacionaremos todo lo visto anteriormente con la teoría de cuerpos, más en concreto, las extensiones del cuerpo de funciones meromorfas de un espacio. Veremos que una aplicación holomorfa propia entre dos superficies de Riemann conexas induce una extensión de los cuerpos de funciones meromorfas. A partir del Teorema de existencia de Riemann, comprobaremos que si las dos superficies de Riemann son compactas entonces el grado de la extensión de cuerpos coincidirá con el grado del recubrimiento ramificado.

Construiremos una superficie de Riemann a partir de un polinomio con coeficientes en el cuerpo de funciones meromorfas de otra superficie de Riemann y utilizaremos esta construcción para dar sin demostrar una equivalencia entre recubrimientos ramificados de superficies de Riemann y extensiones del cuerpo de funciones meromorfas.

También, veremos que una extensión del cuerpo de funciones meromorfas es de Galois si lo es el grupo de automorfismos del recubrimiento ramificado y concluimos mostrando como todos los grupos finitos aparecen como el grupo de Galois de una extensión de $\mathbb{C}(t)$.

Se ha incluido en el Apéndice B una sección con nociones básicas de teoría de Galois, que sirve como recordatorio de algunos conceptos y resultados que trataremos.

Para el desarrollo de este capítulo principalmente se han seguido la sección 3.3 de [16] y la sección 6 de [2].

3.1. El cuerpo de funciones meromorfas

Se comienza esta sección estudiando las propiedades del conjunto de funciones meromorfas sobre una superficie de Riemann X. Recordamos que estas son las funciones que son holomorfas en $X \setminus B$, donde B es un conjunto cerrado y discreto que se corresponde con los polos de la función f. Denotaremos al conjunto de funciones meromorfas sobre la superficie de Riemann X como $\mathcal{M}(X)$.

Observemos que $(\mathcal{M}(X), +, \cdot)$ es un anillo con la suma y producto usual de funciones definido de la siguiente manera para dos funciones $f, g \in \mathcal{M}(X)$ y un punto $x \in X$:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Además, si X es una superficie de Riemann conexa, el anillo $(\mathcal{M}(X), +, \cdot)$ es un cuerpo.

Proposición 3.1.1. *Sea X una superficie de Riemann conexa y $\mathcal{M}(X)$ el conjunto de funciones meromorfas definidas sobre este. Entonces, $(\mathcal{M}(X), +, \cdot)$ es un cuerpo.*

Demostración. Hay que comprobar que dada una función $f \in \mathcal{M}(X)$ distinta del 0, se tiene que $1/f \in \mathcal{M}(X)$. Es un resultado del análisis complejo que el conjunto de ceros de una función f se corresponde con el conjunto de polos de su inversa $1/f$. Por lo tanto, para ver que el conjunto $P(1/f)$ de polos de la función $1/f$ es discreto, basta comprobar que el conjunto $Z(f)$ de zeros de f es discreto y cerrado.

Supongamos $Z(f)$ que no es discreto ni cerrado, por lo que tiene puntos de acumulación. Consideramos $x_0 \in Z(f)$ un punto de acumulación de $Z(f)$ junto a (U, φ) una carta de X tal que $x_0 \in U$. El conjunto de ceros de la aplicación

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow f(U)$$

tiene un punto de acumulación en $\varphi(x_0)$. Por el Teorema de la Identidad del análisis complejo (Véase C.4), se concluye que $f \circ \varphi^{-1}$ es idénticamente nula en $\varphi(U)$ y en consecuencia, f se anula en todo U.

Consideramos el conjunto

$$A = \{x \in X : \exists U \subset X \text{ abierto} : x \in U,\ f(U) = 0\},$$

de los puntos tales que poseen un entorno abierto contenido en X en el que f se anula. El conjunto A es abierto por definición y es cerrado porque, como se vió en el párrafo anterior, para todo punto de acumulación $x_0 \in A$ existe un entorno abierto U que lo contiene en el que f se anula. Por tanto, A es un conjunto abierto y cerrado dentro de X que un espacio conexo, por lo que debe ser $A = X$. Entonces, se tendría que f es la aplicación nula y concluimos de esta manera que si $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ entonces $1/f \in \mathcal{M}(X)$, por lo que $\mathcal{M}(X)$ es un cuerpo. □

El anillo $\mathcal{M}(X)$ contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{C}$ dado por las funciones constantes. Por lo tanto, la característica de $\mathcal{M}(X)$ es 0, puesto que contiene a $\mathbb{C}$ como subanillo y $\mathbb{C}$ tiene característica 0.

En el caso en el que X es una superficie de Riemann compacta, no es sencillo ver que haya más funciones en $\mathcal{M}(X)$. El siguiente resultado, que se dará sin demostrar, nos garantiza que dentro de $\mathcal{M}(X)$ existe funciones no constantes y que podemos escogerlas para que tomen ciertos valores deseados.

Teorema 3.1.2 (Teorema de existencia de Riemann)**.** *Sea X una superficie de Riemann compacta. Dados $x_1, ..., x_n \in X$ y $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, entonces, existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que f es holomorfa en x_i y $f(x_i) = a_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Una demostración del teorema puede encontrarse en [5], Corolario 14.13. □

3.1.1. Extensión del cuerpo de funciones meromorfas

Consideramos una aplicación holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ entre dos superficies de Riemann X e Y que no sea constante en cada componente. Entonces, F induce un homomorfismo de anillos vía la aplicación

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow \mathcal{M}(Y) \\ f &\longmapsto F^*(f) = f \circ F \end{aligned}$$

Veamos que si X es conexo y F es una aplicación propia, tenemos que F^* es una aplicación inyectiva. Como F es propia, por la Proposición 2.2.6 se tiene que F es una aplicación sobreyectiva. Por tanto, dado $x \in X$, existe un $y \in Y$ tal que $F(y) = x$. Entonces, dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{M}(X)$ tales que $F^*(f) = F^*(g)$ se tiene que

$$F^*(f)(y) = F^*(g)(y) \Longrightarrow f(F(y)) = g(F(y)) \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

para todo $x \in X$. Por tanto, $f = g$ y se comprueba que F es inyectiva. Por lo tanto, tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} F^* : \mathcal{M}(X) &\longrightarrow F^*(\mathcal{M}(X)) \\ f &\longmapsto F^*(f) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de cuerpos.

Si además requerimos que Y sea conexa, tenemos que $\mathcal{M}(Y)$ es una extensión de cuerpos de $F^*(\mathcal{M}(X))$. Esto lo denotaremos por $F^*(\mathcal{M}(X)) \hookrightarrow \mathcal{M}(Y)$ o por $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$. El objetivo será probar que dicha extensión es finita. Para ello, será necesario el siguiente lema.

Lema 3.1.3. *Sea $F : Y \to X$ una aplicación holomorfa propia entre superficies de Riemann conexas con grado d como recubrimiento ramificado. Cada función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ satisface una ecuación polinómica (no necesariamente irreducible) de grado d sobre $F^*(\mathcal{M}(X))$.*

Demostración. Sea $S_F \subset Y$ el conjunto de puntos de ramificación de F y $B_F = F(S_F)$ el conjunto de valores críticos. Consideramos $x_0 \in X \setminus F(S_F)$. Por ser F una aplicación de recubrimiento sobre el espacio $X \setminus F(S_F)$, se tiene que existe un abierto distinguido $U_0 \subset X \setminus F(S_F)$ con $x_0 \in U_0$. Se toma $F^{-1}(U_0) = \bigcup_{i=1}^{d} V_i^0$ con la restricción $F|_{V_i^0} : V_i^0 \longrightarrow U$ un homeomorfismo. Sea entonces

$$\begin{aligned} s_i^0 : U_0 &\longrightarrow \quad V_i^0 \\ z &\longmapsto (F|_{V_i^0})^{-1}(z), \end{aligned}$$

la aplicación inversa de $F|_{V_i^0}$ definida sobre U_0. Como $F|_{V_i^0}$ es una aplicación holomorfa y biyectiva, por lo tanto es un biholomorfismo. En consecuencia, tenemos que s_i^0 es un biholomorfismo también. Se considera para cada $i \in \{1, ..., d\}$ la aplicación

$$f_i^0 := f \circ s_i^0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$$

que es meromorfa en U_0 por ser composición de aplicaciones meromorfas. Estas aplicaciones son raíz del siguiente polinomio

$$P_0(T) = \prod_{i=1}^{d} (T - f_i^0) = T^d + a_{d-1}^0 T^{d-1} + \cdots + a_0^0 \in \mathcal{M}(U_0)[T], \tag{3.1}$$

cuyos coeficientes $\{a_i^0\}_{i \in \{0,...,d-1\}}$ se corresponden con los polinomios simétricos elementales de las funciones del conjunto $\{f_i^0\}_{i \in \{1,...,d\}}$ y, por tanto, son funciones meromorfas en U_0, al ser suma y producto finito de aplicaciones meromorfas.

Tomamos otro punto $x_1 \in X \setminus F(S_F)$ junto al entorno distinguido U_1 de manera que $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, ..., d\}$ se definen las aplicaciones $s_i^1 : U_1 \longrightarrow V_i^1$ y $f_i^1 := f \circ s_i^1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ de la misma manera que s_i^0 y f_i^0. Además, consideramos el polinomio $P_1(T) \in \mathcal{M}(U_1)[T]$ cuyas raíces son los f_i^1 construido como (3.1).

En la intersección entre ambos dominios $U = U_0 \cap U_1$, fijado un $i \in \{1, ..., d\}$, debe haber un $j \in \{1, ..., d\}$ tal que

$$s_i^0|_U = s_j^1|_U$$

ya que estas funciones se corresponden con las diferentes contraimagenes de $F|_U$. Así, podemos tomar $s_i^0|_U = s_i^1|_U$. Para cada $i \in \{1, ..., d\}$ tenemos entonces que las aplicaciones s_i^0 y s_i^1 son holomorfas y que coinciden en la intersección de sus dominios. Por lo tanto, se pueden extender a una aplicación holomorfa definida en la unión de los dominios. De manera similar, tomando todos los abiertos distinguidos en cada punto de $X \setminus F(S_F)$ es posible obtener una extensión holomorfa

$$s_i : X \setminus F(S_F) \longrightarrow Y \setminus S_F \tag{3.2}$$

sobre todo el dominio. A partir de esta, para cada $i \in \{1, ..., d\}$ es posible tomar la función meromorfa

$$f_i := f \circ s_i : X \setminus F(S_F) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{3.3}$$

con la que se extiende el polinomio (3.1) a todo $X \setminus F(S_F)$ con

$$P(T) = \prod_{i=1}^{d}(T - f_i) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{M}(X \setminus F(S_F))[T].$$

Queda ver que los coeficientes de $P(T)$ son meromorfos en todo X. Sea $x \in B_F$ un valor crítico y consideramos la carta (U, φ) de X con $x \in U$ y tal que $\varphi(x) = 0$. Entonces, fijado $i \in \{1, ..., d\}$, se toma $y_i \in F^{-1}(x)$ junto a la carta (V_i, ψ_i) de Y con $y_i \in V_i$ y tal que $V_i \cap F^{-1}(B_F) = \{y_i\}$ lo cual se puede hacer porque $F^{-1}(B_F)$ es un conjunto cerrado y discreto por la Proposición 2.1.7 y por la Observación 2.2.3. Consideramos la aplicación $\widetilde{F} = \varphi \circ F : V_i \longrightarrow \mathbb{C}$ que es holomorfa por ser composición de aplicaciones holomorfas y que cumple que $\widetilde{F}(y_i) = \varphi(F(y_i)) = \varphi(x) = 0$. Tenemos que $\widetilde{F}$ tiene un cero en el punto y_i, que es el único polo de f dentro del dominio de carta V_i. Por lo tanto, existe un $k_i > 0$ tal que $\widetilde{F}^{k_i} \cdot f : V_i \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. Tomando $k = \max_{1 \leq i \leq d}\{k_i\}$ tenemos que $\widetilde{F}^k \cdot f$ es holomorfa enV_i para todo $i \in \{1, ..., d\}$. En particular, tenemos que $\widetilde{F}^k \cdot f$ está acotada en $V_i \setminus \{y\}$. Por lo tanto, en el conjunto $V_i \setminus \{y\}$ donde se cumple que $F \circ s_i = Id_{X \setminus B_F}$, tenemos que la composición

$$(\widetilde{F}^k \cdot f) \circ s_i = (\varphi \circ F \circ s_i)^k \cdot (f \circ s_i) = \varphi^k \cdot f_i$$

es una aplicación meromorfa y acotada en $U \setminus \{x\}$ para todo $i \in \{1, ..., d\}$. Como los coeficientes a_j del polinomio $P(T)$ son suma y producto finito de las aplicaciones f_i, tenemos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que los a_j cumplen que $\varphi^m \cdot a_j$ está acotado en el conjunto $U \setminus \{x\}$ para cualquier $j \in \{0, ...d-1\}$. Por lo tanto, por el Teorema de la singularidad evitable de Riemann (Ver C.1) tenemos que cada $\varphi^m \cdot a_j$ se puede extender a una función holomorfa en U. En consecuencia, cada a_j es una aplicación meromorfa en U y, en concreto, en los puntos de B_F. Por tanto, los a_j se extienden como funciones meromorfas en todo X y se puede tomar $P \in \mathcal{M}(X)[T]$.

Consideramos el polinomio

$$\widetilde{P}(T) = T^d + F^*(a_{d-1})T^{d-1} + \cdots + F^*(a_0) \in F^*(\mathcal{M}(X))[T]$$

y veamos que $\widetilde{P}(f) = 0$ para concluir la demostración. Para cada $y \in Y \setminus F^{-1}(B_F)$ con $x = F(y)$ tenemos que $y = s_i(x)$ para algún $i \in \{1, ..., d\}$. Por tanto, en $Y \setminus F^{-1}(B_F)$ tenemos que

$$\widetilde{P}(f)(y) = \widetilde{P}(f)(s_i(x)) = (\widetilde{P} \circ s_i)(f \circ s_i)(x) = P(f_i)(x) = 0$$

ya que f_i es raíz de $P(T)$. Como para todo $y \in Y \setminus F^{-1}(B_F)$ tenemos que $\widetilde{P}(f)(y) = 0$, por el Teorema de identidad (Ver C.4) tenemos que $\widetilde{P}(f)$ se anula en todo Y con lo que se concluye la demostración. □

El lema que acabamos de probar sirve para demostrar que, dada una aplicación $F : Y \longrightarrow X$ holomorfa y propia entre superficies de Riemann, la extensión de cuerpos $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ es finita y de grado a lo sumo el grado d de la aplicación F como recubrimiento ramificado. El siguiente teorema nos demuestra que el grado de la extensión es exactamente d.

Teorema 3.1.4. *Sea $F : Y \longrightarrow X$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann conexas y compactas con grado d. Entonces, $\mathcal{M}(Y)/F^*\mathcal{M}(X)$ es una extensión de cuerpos finita y de grado d.*

Demostración. Se comenzará probando que existe una función $f \in \mathcal{M}(Y)$ que satisface una ecuación irreducible de grado d. Sean $S_F \subset Y$ el conjunto de puntos de ramificación de la aplicación F y $B_F = F(S_F)$ el conjunto de valores críticos de F. Se toma $x_0 \in X \setminus B_F$ y el conjunto de sus contraimágenes $F^{-1}(x_0) =$

$\{y_1, ..., y_d\}$. Por el Teorema de existencia de Riemann (Ver 3.1.2) se tiene que existe una función $f \in \mathcal{M}(Y)$ que es holomorfa en un entorno de y_i para todo $i \in \{1, ..., d\}$ y que cumple que $f(y_i) \neq f(y_j)$ si $i \neq j$. Por el lema 3.1.3 se tiene que existe un polinomio en $F^*(\mathcal{M}(X))[T]$ de grado d, no necesariamente irreducible, del que f es raíz. Consideramos entonces el polinomio irreducible

$$\widetilde{P}(T) = F^*(a_n)T^n + F^*(a_{n-1})T^{n-1} + \cdots + F^*(a_0) \in F^*(\mathcal{M}(X))[T], \tag{3.4}$$

de grado $n \leq d$ del cual f es raíz. Supongamos que para todo $j \in \{0, ...n\}$ se tiene que a_j es holomorfo en x_0. Entonces, dado $i \in \{1, ..., d\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} F^*(a_n)(y_i)f^n(y_i) + F^*(a_{n-1})(y_i)f^{n-1}(y_i) + \cdots + F^*(a_0)(y_i) = \\ a_n(F(y_i))f^n(y_i) + a_{n-1}(F(y_i))f^{n-1}(y_i) + \cdots + a_0(F(y_i)) = \\ a_n(x_0)f^n(y_i) + a_{n-1}(x_0)f^{n-1}(y_i) + \cdots + a_0(x_0) = 0, \end{aligned}$$

ya que f es solución del polinomio de la Ecuación (3.4) y por tanto, al evaluarse en un punto de Y también se anulará.

En consecuencia, tenemos que el polinomio de grado n

$$P_{x_0}(t) = a_n(x_0)t^n + a_{n-1}(x_0)t^{n-1} + \cdots + a_0(x_0) \in \mathbb{C}[t],$$

tiene d raíces distintas, una para cada contraimagen de x_0 por F. Por lo tanto $n = d$.

Hemos visto qué sucede si todos los a_j son holomorfos en x_0. Queda ver el caso en el que para algún $j \in \{0, ..., n\}$, se tiene que a_j no es holomorfa en x_0. Lo que vamos a hacer es buscar otro punto x_0' en el que todos los coeficientes sean holomorfos y que cumpla que dados $y_i', y_j' \in F^{-1}(x_0')$ se tenga que $f(y_i') \neq f(y_j')$ si $i \neq j$.

Comenzamos viendo que podemos encontrar un abierto U con $x_0 \in U$ que no contenga ni polos de f ni valores propios de F ya que el conjunto de estos puntos es discreto y cerrado. Así, podemos escoger U de manera que sea un abierto distinguido del recubrimiento $F|_{Y \setminus F^{-1}(B_F)}$ y que sea dominio de una carta (U, φ). Tomamos las aplicaciones dadas en (3.2)

$$s_i : U \longrightarrow F^{-1}(U)$$

de la demostración anterior. Tenemos entonces que dado $x \in U$, si $y \in F^{-1}(x)$ entonces $y = s_i(x)$ para algún i. Denotemos $y_i = s_i(x)$ para cada $i \in \{1, ..., d\}$ y consideremos las aplicaciones

$$f_i = f \circ s_i : U \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si existe un $x \in U$ tal que $f_i(x) = f_j(x)$ entonces $f(y_j) = f(y_i)$. Supongamos que en todo abierto U' que contenga a x_0 se tiene que existen $i, j \in \{1, ..., d\}$ y un $x' \in U'$ tales que $f_i(x') = f_j(x')$. En ese caso, x_0 sería el punto de acumulación de una sucesión de puntos en la que $f_i = f_j$. Por ser dominio de carta U es un abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}$, por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de la identidad (ver C.4) y tenemos que $f_i = f_j$ en todo U, incluido x_0. En consecuencia, existen $y_i, y_j \in F^{-1}(x_0)$ tales que $f(y_i) = f(y_j)$ lo cual no es posible por hipótesis. En conclusión, podemos tomar un conjunto U sin valores propios de F, sin polos de f y de tal manera que, para todo $x \in U$, la función f envía a cada punto de $F^{-1}(x)$ a un valor distinto.

Para continuar, consideramos el conjunto A de puntos en U en los que a_j no es holomorfa para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Tenemos que A es un conjunto discreto por ser unión finita de conjuntos discretos. Como U no es discreto, se tiene que $U \neq A$, por lo que existe un punto $x_0' \in U_0 \setminus A$ en el que a_j es holomorfa para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Aplicamos sobre el punto x_0' los argumentos que aplicamos previamente sobre x_0 y concluimos que $n = d$.

Para terminar la demostración, veremos que $\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(X)(f)$. Sea $g \in \mathcal{M}(Y)$ una función distinta de f. Por el Teorema del elemento primitivo (ver B.9), se tiene que existe una función $h \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $\mathcal{M}(X)(f, g) \cong \mathcal{M}(X)(h)$. En particular, se cumple que

$$\mathcal{M}(X)(f) \subset \mathcal{M}(X)(h).$$

Como h es un elemento de grado a lo sumo d por el lema 3.1.3, y la extensión $\mathcal{M}(X)(f)$ es de grado d, se tiene que $\mathcal{M}(X)(f) = \mathcal{M}(X)(h)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(X)(f) \subset \mathcal{M}(Y)$. □

Como consecuencia del teorema de existencia de Riemann, tenemos que para toda superficie de Riemann conexa y compacta Y existe una aplicación meromorfa no constante $f \in \mathcal{M}(Y)$. Por la Proposición I.3.7 vemos que la aplicación f puede extenderse a una aplicación holomorfa $\widehat{f} : X \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, aplicando el teorema 3.1.4 obtenemos que $\mathcal{M}(Y)$ es extensión finita del cuerpo de funciones meromorfas de $\widehat{f}^*(\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}))$. El cuerpo $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ es isomorfo al cuerpo $\mathbb{C}(t)$ (ver [11], Teorema 2.1) que es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{C}[t]$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(Y)$ es una extensión finita de $\mathbb{C}(t)$.

3.2. Superficie de Riemann a partir de una extensión de cuerpos

Acabamos de probar que, dada una aplicación holomorfa propia $F : Y \longrightarrow X$ entre dos superficies de Riemann conexas y compactas X e Y, se tiene que la extensión de cuerpos $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ es finita y de grado el grado de F como recubrimiento ramificado. El objetivo ahora es probar que, dada una extensión de cuerpos $A/\mathcal{M}(X)$, existe una superficie de Riemann conexa Y junto a una aplicación holomorfa propia $F : Y \longrightarrow X$ tal que $\mathcal{M}(Y)$ sea isomorfo a A como extensión de $\mathcal{M}(X)$. Para ello, será necesario el siguiente lema, en el que se construirá una superficie de Riemann a partir de un polinomio sobre $\mathcal{M}(X)[t]$.

Lema 3.2.1. *Sea X una superficie de Riemann conexa y compacta y*

$$P(T) = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{M}(X)[T]$$

un polinomio mónico irreducible de grado d con coeficientes en el cuerpo de funciones meromorfas de X. Sea $S \subset X$ un conjunto cerrado y discreto tal que los coeficientes de $P(T)$ sean holomorfos en $X' = X \setminus S$. Además, supongamos que el polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$

$$P_x(t) = t^d + a_{d-1}(x)t^{d-1} + \cdots + a_0(x) \in \mathbb{C}[t]$$

cumple que sus raíces son simples para todo $x \in X'$. Entonces, existen una superficie de Riemann conexa Y junto a una aplicación holomorfa propia

$$F : Y \longrightarrow X$$

de grado d como recubrimiento ramificado y tal que la extensión de cuerpos $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ es generada por una raíz f del polinomio $P(T)$.

Demostración. Se comienza la demostración buscando un espacio topológico Y' junto a una aplicación de recubrimiento $F' : Y' \longrightarrow X'$. Así, aplicando la Proposición 2.3.3 se obtendrá la superficie de Riemann Y junto a la aplicación holomorfa propia F. Podríamos pensar en tomar como espacio recubridor

$$Z' = \{z \in \mathbb{C} : P_x(z) = 0 \text{ para algún } x \in X'\}$$

con la topología heredada por $\mathbb{C}$ y como aplicación la que manda cada $z \in Z'$ a aquel $x \in X'$ tal que $P_x(z) = 0$. Sin embargo, el punto z puede ser solución del polinomio $P_x(t)$ para varios puntos de X' y, por tanto, no sería una aplicación válida ya que en ese caso, un punto tendría dos imágenes. Hacemos entonces lo siguiente. Tomamos el producto $X' \times Z'$ con la topología producto y el subespacio

$$Y' = \{(x, z) \in X' \times Z' : P_x(z) = 0\}$$

con la topología de subespacio. Por ser P_x un polinomio de grado d con raíces simples, se tiene que por cada $x \in X'$ hay d puntos distintos en Y', uno para cada raíz. Vamos a ver una manera de clasificar los d elementos de Y' para cada x. Lo haremos aplicando el teorema de la función implicita (Ver C.2).

Tomamos un punto $x_0 \in X'$ junto a una carta $(\widetilde{U}, \varphi)$ de X' con $x_0 \in \widetilde{U}$ y consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} P_{\widetilde{U}} : \varphi(\widetilde{U}) \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi(x), z) &\longmapsto P_x(z). \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$P_{\widetilde{U}}(\varphi(x), z) = a_n(x) \cdot z^n + a_{n-1}(x) \cdot z^{n-1} + \cdots + a_0(x).$$

Como $x_0 \in X'$, tenemos que existen d puntos en $\mathbb{C}$ que son raices del polinomio $P_{x_0}(t)$. Vamos a denotar estos puntos por z_i^0 con $i \in \{1, ..., d\}$. Los z_i^0 también cumplen que $P_{\widetilde{U}}(\varphi(x_0), z_i^0) = 0$. Como las raíces de $P_{x_0}(t)$ son simples, tenemos que $P_{x_0}(t)$ y su derivada $P'_{x_0}(t)$ no tienen ceros comunes. En consecuencia,

$$\frac{\partial P_{\widetilde{U}}(\varphi(x), z)}{\partial z}\Big|_{(\varphi(x_0), z_0^i)} \neq 0.$$

Tenemos entonces una función $P_{\widetilde{U}}$ definida sobre el producto de dos conjuntos abiertos, que se anula en los puntos $(\varphi(x_0), z_i^0)$ contenidos en el producto de los abiertos tal que su derivada en una de las coordenadas no lo hace. Podemos aplicar el teorema de la función implicita (Ver C.2) para cada z_i^0. Tenemos entonces que existen un conjunto abierto $\varphi(U_i) \subset \varphi(\widetilde{U})$ con $\varphi(x_0) \in \varphi(U_i)$ y un conjunto abierto $\widetilde{V_i} \subset \mathbb{C}$ con $z_0^i \in \widetilde{V_i}$ entre los que existe una aplicación holomorfa

$$\begin{aligned} \widetilde{w_i} : \varphi(U_i) &\longrightarrow \widetilde{V_i} = \widetilde{w_i}(\varphi(U)) \\ x &\longmapsto \widetilde{w_i}(x), \end{aligned}$$

que cumple que

$$\widetilde{P}(x, \widetilde{w_i}(x)) = 0 \tag{3.5}$$

para todo $x \in \varphi(U_i)$. Tomamos el conjunto $U = \bigcap_{1 \leq i \leq d} U_i$ en el que se cumple la ecuación (3.5) para todo $i \in \{1, ..., d\}$.

La aplicación $\widetilde{w_i}$ induce una aplicación definida sobre el conjunto $U \subset \widetilde{U}$ que viene dada por

$$\begin{aligned} w_i := \widetilde{w_i} \circ \varphi : U &\longrightarrow \widetilde{V_i} \\ x &\longmapsto \widetilde{w_i}(\varphi(x)), \end{aligned}$$

y que cumple que

$$P_x(w_i(x)) = 0$$

para cualquier $x \in U$.

El siguiente paso es ver que la aplicación w_i se puede extender a todo X'. Sean $x_1, x_2 \in X'$ puntos con junto a respectivos entornos abiertos $U_1, U_2 \subset X'$ que se corresponden con los dominios obtenidos por el teorema de la función implicita. Consideramos las aplicaciones obtenidas por el teorema de la función implicita $\{w_i^1\}_{i \in \{1,...,d\}}$ y $\{w_i^2\}_{i \in \{1,...,d\}}$, definidas sobre U_1 y U_2, respectivamente. Suponemos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces, dado $x \in U_1 \cap U_2$, se tiene que los conjuntos $\{w_i^1(x)\}_{i \in \{1,...,d\}}$ y $\{w_i^2(x)\}_{i \in \{1,...,d\}}$ contienen ambos las d raíces distintas del polinomio $P_x(t)$. Por tanto, ambos conjuntos coinciden y consideramos que $w_i^1(x) = w_i^2(x)$ para todo $i \in \{1, ..., d\}$.

Sea $z_i = w_i^1(x) = w_i^2(x)$, tenemos entonces que $P_x(z_i) = 0$. El teorema de la función implicita nos dice que existen un entorno abierto $U_i \subset U_1 \cap U_2$ de x y un entorno abierto $V_i \subset \mathbb{C}$ de z_i entre los que existe una única aplicación $w_i : U_i \longrightarrow V_i$ con $P_x(w_i(x)) = 0$. Tomamos el conjunto $U = \bigcap_{1 \leq i \leq d} U_i \subset U_1 \cap U_2$. Por el teorema de la función implicita tenemos entonces que para todo $x' \in U$ se cumple que $w_i^1(x') = w_i^2(x')$.

Como las aplicaciones w_i^1 y w_i^2 coinciden en un conjunto denso U contenido en el abierto $U_1 \cap U_2$ tenemos, por el teorema de la identidad (Ver C.4), que w_i^1 y w_i^2 coinciden en todo $U_1 \cap U_2$. Por tanto, las aplicaciones $w_i^1 : U_1 \longrightarrow V_i$ pueden extenderse como aplicaciones holomorfas al conjunto $U_1 \cup U_2$. Aplicando la misma técnica, es posible extenderlas a aplicaciones holomorfas en todo X'

$$w_i : X' \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Esto nos permite clasificar los elementos de Y', que, cuando sea conveniente, denotaremos por $y_x^i = (x, w_i(x))$ con $x \in X'$ e $i \in \{1, ..., d\}$.

Continuamos con la demostración viendo que la aplicación

$$\begin{aligned} F' : \quad Y' &\longrightarrow X' \\ (x,z) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

es de recubrimiento. Para ello, comenzamos viendo que F' es una aplicación continua. Esto se comprueba notando que F' es la restricción al conjunto Y' de la proyección

$$\begin{aligned} \pi : X' \times Z' &\longrightarrow X' \\ (x,z) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Tenemos que π es una aplicación continua por ser una proyección. Entonces, la aplicación F' es continua, por ser la restricción de una aplicación continua a un subespacio.

El siguiente paso para ver que F' es una aplicación de recubrimiento es comprobar que sea sobreyectiva. El polinomio P_x tiene raíces para cualquier $x \in X'$, luego para todo $x \in X'$ habrá un elemento $y_x^i \in Y'$ con $F'(y_x^i) = x$, por lo que F' es una aplicación sobreyectiva.

Queda entonces encontrar un abierto distinguido para cada $x \in X'$. Dado $x \in X'$ vamos a considerar el abierto $U \subset X'$ que se obtiene al aplicar el teorema de la función implita y vamos a ver que es un abierto distinguido de la aplicación F'. Para ello, probaremos que

$$F'^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$$

con $V_i = \{(x, w_i(x)) : x \in U\} = (U \times \widetilde{V}_i) \cap Y'$. También, veremos que los conjuntos V_i son abiertos disjuntos dos a dos y que $F'|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para cada $i \in \{1, ..., d\}$.

Comenzamos viendo la igualdad entre ambos conjuntos. Sea $y_x^i = (x, z) \in F'^{-1}(U)$. Se tiene que $z = w_i(x)$ para algún $i \in \{1, ..., d\}$, por lo que $y_x^i \in V_i$ y, por tanto, $F'^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^d V_i$. Por otra parte, sea $y_x^i = (x, w_i(x)) \in V_i$. Entonces, $F'(y_x^i) = x \in U$ y, por lo tanto, $y_x^i \in F'^{-1}(x)$. En consecuencia, $\bigcup_{i=1}^d V_i \subset F'^{-1}(U)$ y se tiene que $F'^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^d V_i$.

Cada V_i es abierto en Y', ya que $V_i = (U \times \widetilde{V}_i) \cap Y'$ y el producto de abiertos es abierto en el espacio producto y la intersección de abiertos con el subespacio es abierta en la topología del subespacio. Para ver que los conjuntos V_i son disjuntos dos a dos suponemos que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$. Sea $(x, z) \in V_i \cap V_j$ con $i \neq j$. Entonces, $z = s_i(x) = s_j(x)$ y, por tanto, z es raíz múltiple de P_x. Esto no es posible por hipótesis, por lo que $i = j$ y, por tanto $V_i = V_j$.

Finalmente, comprobaremos que la restricción de F' a cada V_i es un homeomorfismo. Veamos que es inyectiva. Dados dos elementos $(x_1, w_i(x_1)), (x_2, w_i(x_2)) \in V_i$, si $x_1 = F'(x_1, w_i(x_1)) = F'(x_2, w_i(x_2)) = x_2$, entonces $x_1 = x_2 = x \in U$. Por tanto, $(x_1, w_i(x_1)) = (x_2, w_i(x_2))$. Además, para todo $x \in U$ se tiene que $(x, w_i(x)) \in V_i$ y $F'(x, w_i(x)) = x$ por lo que $F'|_{V_i}$ es una aplicación sobreyectiva. Por otra parte, $F'|_{V_i}$ es continua por ser restricción a un conjunto de una aplicación continua. Finalmente, se tiene que $(F'|_{V_i})^{-1}(x) = (x, w_i(x))$ que es una aplicación continua por ser continua en cada componente. Por tanto, $F|_{V_i}$ es un homeomorfismo.

Hemos probado que la aplicación F' es de recubrimiento entre el espacio topológico Y' y X'. Por la Proposición 2.3.3, para cada componente conexa Y_j' de Y', existe una superficie de Riemann Y_j junto a una aplicación propia holomorfa de la forma

$$F_j : Y_j \longrightarrow X.$$

Vamos a ver que el conjunto $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ tiene una única componente conexa. Para ello, consideramos la función

$$\begin{aligned} f_i : Y' &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y_x^i &\longmapsto f_i(y_x^i) = w_i \circ F'(y_x^i) = z_x^i. \end{aligned}$$

donde z_x^i es la i-ésima raíz de $P_x(t)$. La aplicación f_i es holomorfa en Y' por ser composición de aplicaciones holomorfas. Consideramos el polinomio

$$\widetilde{P}(T) = (a_n \circ F')T^n + (a_{n-1} \circ F')T^{n-1} + \cdots + a_0 \circ F' \in \mathcal{M}(Y')$$

Tenemos que, dado $y_x^i \in Y'$,

$$\begin{aligned} (a_n \circ F'(y_x^i))f_i(y_x^i)^n + (a_{n-1} \circ F'(y_x^i))f_i(y_x^i)^{n-1} + \cdots + a_0 \circ F'(y_x^i) &= \\ a_n(x)(z_x^i)^n + a_{n-1}(x)(z_x^i)^{n-1} + \cdots + a_0(x) &= \\ P_x(z_x^i) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las aplicaciones f_i se corresponden con las raíces del polinomio $\widetilde{P}(T)$. En consecuencia, $\widetilde{P}(T)$ factoriza como

$$\widetilde{P}(T) = \prod_{i=1}^{d}(T - f_i).$$

Vamos a ver que f_i admite una extensión meromorfa a todo Y utilizando este resultado.

Por hipótesis, $P(T) \in \mathcal{M}(X)[t]$. Por ende, a_i es meromorfa en X para todo $i \in \{1, ..., d\}$. Se consideran un punto $x_0 \in S$ y una carta (U, φ) con $\varphi(x_0) = 0$ y con $U \cap S = \{x_0\}$ que se puede tomar ya que S es discreto y cerrado en un espacio Hausdorff. Sea $y_i \in F_j^{-1}(x_0)$ con $y_i \in Y_j$. Entonces, se tiene que $(\varphi \circ F_j)(y_i) = 0$. Por tanto, como cada a_n es meromorfa, se tiene que existe un $k > 0$ lo suficientemente grande como para que $(a_n \circ F) \cdot (\varphi \circ F)^k$ está acotado en todo Y_j y para todo n.

Ahora, dado $s \in \mathbb{N}$, fijémonos en que los coeficientes del polinomio

$$Q(T) = \prod_{i=1}^{d}(T - (\varphi \circ F_j)^s \cdot f_i)$$

son de la forma $(\varphi \circ F_j)^{s(n-i)} \cdot a_n$ donde a_n es un coeficiente del polinomio $P(T)$. Como $a_d = 1$, se toma $s \geq k$. De esta manera, los coeficientes de $Q(T)$ están acotados en Y_j. Dado un polinomio mónico

$$H(t) = t^n + b_{n-1} \cdot t^{n-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{C}[t]$$

con $a \in \mathbb{C}$ una raíz de H se tiene que $|a| \leq 1 + \max_{1\leq i\leq n-1}\{|b_i|\}$ (ver [10] Teorema (27,2)). De la misma manera, tenemos que

$$|(\varphi \circ F_j(y))^s \cdot f_i(y)| \leq 1 + \max_{1\leq i\leq d-1}\{|q_i(y)|\}$$

donde los q_i se corresponden con los coeficientes de $Q(T)$. Como los coeficientes de $Q(T)$ están acotados en Y_j concluimos que $(\varphi \circ F_j)^s \cdot f_i$ está acotado en Y_j. Así, se concluye que f_i admite extensión meromorfa a Y_j.

Vamos a ver que Y es conexo. Tenemos que f_i como elemento de $\mathcal{M}(Y_j)$ tiene un polinomio mínimo $G \in F_j^*(\mathcal{M}(X))[t]$ de grado como mucho d_j, siendo este el grado del recubrimiento finito F_j. Sin embargo, como hemos visto, $P(f_i) = 0$, por lo tanto, tenemos que G divide a P. Como P es irreducible, debe darse entonces que $P = G$ y que $d_j = d$ por lo que Y es conexo. □

El mismo resultado que conseguimos del Lema 3.2.1 puede obtenerse sin pedir en el enunciado que el polinomio $P_x(t)$ tenga raíces simples en el complementario de un conjunto cerrado y discreto. Se verá esto mismo en la demostración de la siguiente proposición, obteniendo el conjunto S cerrado y discreto tal que $P_x(t)$ es simple en $X \setminus S$ sin imponerlo por hipótesis.

Proposición 3.2.2. *Sea X una superficie de Riemann compacta y conexa. Se considera A una extensión finita sobre $\mathcal{M}(X)$. Entonces, existe una superficie de Riemann compacta y conexa Y junto a una aplicación holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ tal que $\mathcal{M}(Y)$ como extensión de $F^*(\mathcal{M}(X))$ es isomorfa a A como extensión de $\mathcal{M}(X)$.*

Demostración. Sea $\alpha \in A$ un elemento primitivo de la extensión $A/\mathcal{M}(X)$, $P(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ el polinomio mínimo de α y d el grado de F. Por ser $P(T)$ un polinomio mínimo y $\mathcal{M}(X)$ un cuerpo de característica 0 tenemos que $P(T)$ es separable sobre $\mathcal{M}(X)$ (ver B). Por tanto, es coprimo con su derivada (ver la Proposición B.7) y existen $A, B \in \mathcal{M}(X)$ tales que

$$AP + BP' = 1. \tag{3.6}$$

Escribimos el polinomio P como

$$P(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{M}(X)[T],$$

y denotamos por $P_x(t)$ al polinomio en $\mathbb{C}[t]$ que se obtiene al evaluar los coeficientes de $P(T)$ en un punto $x \in X$ tal que cada coeficiente es holomorfo en x, es decir,

$$P_x(t) = a_n(x) t^n + a_{n-1}(x) t^{n-1} + \cdots + a_0(x) \in \mathbb{C}[t].$$

De la ecuación (3.6) se deduce que, dado $x \in X$, para que P_x y P'_x compartan una raíz es necesario que A o B tengan un polo en el punto x, para cancelar un cero con un polo y que no se anule el lado izquierdo de la ecuación. Sea $S \subset X$ el conjunto, discreto y cerrado, que contiene todos los polos de A, B y de los coeficientes de P. Entonces, en $X' = X \setminus S$ todos los coeficientes de F son holomorfos y $P_x(z) = 0$ para $z \in \mathbb{C}$ implica que $P'_x(z) \neq 0$. Además, se tiene que, dado $x \in X'$, el polinomio $P_x(z)$ posee d raíces diferentes, ya que en caso contrario, en la raíz repetida se anularía también $P'_x(z)$. Por lo tanto, es posible aplicar el Lema 3.2.1 y se tiene una superficie de Riemann conexa Y, junto a una aplicación holomorfa propia $F : Y \longrightarrow X$ con una función $f_i \in \mathcal{M}(Y)$ que resuelve la siguiente ecuación polinómica

$$f_i^d + F^*(a_{d-1}) f_i^{d-1} + \cdots + F^*(a_0) = 0$$

y obtenemos así su polinomio mínimo que tiene grado d.

Finalmente, queda ver que $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ y $A/\mathcal{M}(X)$ son isomorfos como extensiones de cuerpos. Tenemos que $F^*(\mathcal{M}(X)) \cong \mathcal{M}(X)$. Además, el elemento generador de $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ es f y tiene como polinomio mínimo $F^*(P)$, donde P es el polinomio mínimo de la extensión $A/\mathcal{M}(X)$. Por el Teorema B.3 tenemos que son extensiones isomorfas. □

La superficie de Riemann Y obtenida es única en el siguiente sentido.

Teorema 3.2.3. *Sea X una superficie de Riemann conexa y $A/\mathcal{M}(X)$ una extensión de cuerpos de $\mathcal{M}(X)$. Sean Y, Z superficies de Riemann conexas junto a las aplicaciones holomorfas propias $F : Y \longrightarrow X$ y $G : Z \longrightarrow X$ con $f \in \mathcal{M}(Y)$ y $g \in \mathcal{M}(Z)$ elementos generadores de las extensiones $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ y $\mathcal{M}(Z)/G^*(\mathcal{M}(X))$, respectivamente. Si las extensiones de cuerpos $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ y $\mathcal{M}(Z)/G^*(\mathcal{M}(X))$ son isomorfas a $A/\mathcal{M}(X)$ entonces existe una aplicación biholomorfa $H : Z \longrightarrow Y$ tal que $F \circ H(z) = G(z)$ y $g(z) = f \circ H(z)$ para todo $z \in Z$.*

Demostración. La demostración utiliza gérmenes de funciones meromorfas y prolongación meromorfa, por lo que escapa del objetivo de este trabajo. Puede encontrarse en el Teorema 6.4.5 de [2].

□

El Teorema 3.1.4 nos dice que una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas y conexas induce una extensión entre los cuerpos de funciones meromorfas. La Proposición 3.2.2 nos da la implicación contraria y nos dice como obtener una superficie de Riemann a partir de una extensión del cuerpo de funciones meromorfas. Finalmente, el 3.2.3 nos dice que dicha superficie de Riemann es única. Dada una superficie de Riemann compacta y conexa X tenemos así una biyección entre las extensiones de cuerpos de $\mathcal{M}(X)$ y los recubrimientos ramificados $F : Y \longrightarrow X$ con Y conexa y compacta.

3.3. Grupo de automorfismos de la extensión de cuerpos

Sean X e Y dos superficies de Riemann junto a una aplicación holomorfa propia $F : Y \longrightarrow X$, y consideramos $\Sigma \in \mathrm{Aut}_F(Y|X)$. Dado $f \in \mathcal{M}(Y)$, se tiene que $f \circ \Sigma^{-1} \in \mathcal{M}(Y)$ por ser composición de dos aplicaciones meromorfas. Además, si tomamos $g \in \mathcal{M}(X)$ dado $y \in Y$ con $F(y) = x$, se tiene que, $F^*(g) \circ \Sigma^{-1}(y) = g(F(\Sigma^{-1}(y)) = g(x) = F^*(g)(y)$. Por lo tanto, la aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda(\Sigma) : \mathcal{M}(Y) &\longrightarrow \mathcal{M}(Y) \\ f &\longmapsto f \circ \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

es un $F^*(\mathcal{M}(X))$-Automorfismo de $\mathcal{M}(Y)$.

Por lo tanto, es posible definir una aplicación

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathrm{Aut}_F(Y|X) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)|\mathcal{M}(X)) \\ \Sigma &\longmapsto \Lambda(\Sigma) \end{aligned}$$

que envía automorfismos del recubrimiento ramificado en automorfismos de la extensión de cuerpos. Esta aplicación es un homomorfismo de grupos, puesto que dados $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}_F(Y|X)$, se tiene que

$$\Lambda(\sigma \circ \tau)(f) = f \circ (\sigma \circ \tau)^{-1} = f \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \Lambda(\tau)(f) \circ \sigma^{-1} = \Lambda(\sigma)(\Lambda(\tau)(f))$$

y, por tanto, $\Lambda(\sigma \circ \tau) = \Lambda(\sigma)\Lambda(\tau)$.

Teorema 3.3.1. *Sean X, Y superficies de Riemann junto a una aplicación propia holomorfa $F : Y \longrightarrow X$ con grado d como recubrimiento ramificado. Sea $f \in \mathcal{M}(Y)$ un elemento generador de la extensión $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ con polinomio mínimo $P(t)$. La aplicación*

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathrm{Aut}_F(Y|X) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)|\mathcal{M}(X)) \\ \Sigma &\longmapsto \Lambda(\Sigma) \end{aligned}$$

que envía automorfismos del recubrimiento ramificado en automorfismos de la extensión de cuerpos es un isomorfismo de grupos. Además, la aplicación F es un recubrimiento ramificado de Galois si y solo si la extensión $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$ es de Galois.

Demostración. Veamos primero que Λ es inyectiva. Para ello, probamos que el núcleo de Λ es la identidad. Sea $\Sigma \in \mathrm{Aut}_F(Y|X)$ distinto de la identidad y sea $x \in X$ un punto que no sea valor crítico de F cuya fibra sea $F^{-1}(x) = \{y_1, ..., y_d\}$. Entonces, por el teorema de existencia de Riemann (ver 3.1.2) existe una aplicación meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ tal que la imagen de cada elemento de la fibra de x es distinta. Como Σ permuta los elementos de la fibra, se tiene que $f(y_i) \neq f \circ \Sigma^{-1}(y_i)$. Por tanto, $f = f \circ \Sigma^{-1}$ si y solo si Σ es la identidad, por lo que el núcleo de Λ es la identidad y se concluye que Λ es inyectiva.

Para ver que es sobreyectiva, se toma $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)|\mathcal{M}(X))$. Entonces, $\alpha(f)$ también es un elemento generador de la extensión de cuerpos. Por el Teorema 3.2.3 tenemos que existe un automorfismo del recubrimiento ramificado Σ tal que $\alpha(f) = f \circ \Sigma$. Tomamos entonces $\Lambda(\Sigma^{-1})$ y tenemos que

$$\Lambda(\Sigma^{-1})(f) = f \circ \Sigma = \alpha(f)$$

por lo que la aplicación Λ es sobreyectiva.

Que la extensión $\mathcal{M}(Y)/F^*(\mathcal{M}(X))$ sea de Galois es equivalente a que $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)|\mathcal{M}(X))$ tenga d elementos (ver B.12) y que $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ sea de Galois equivale a que tenga d elementos. Esto es puesto que si $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ es de Galois actúa de manera transitiva sobre las fibras. Como fuera de los puntos de ramificación por cada fibra hay d puntos, hacen falta d automorfismos. En consecuencia, como $\mathrm{Aut}_F(Y|X)$ y $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)|\mathcal{M}(X))$ son isomorfos, se comprueba que si uno de ellos es de Galois el otro también lo es. □

Recordamos que el problema inverso de Galois plantea si todo grupo finito puede ser el grupo de Galois de alguna extensión del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$. El siguiente resultado dará el broche final a esta memoria y aplicando los resultados obtenidos a lo largo del trabajo resuelve una versión de este problema en el cuerpo $\mathbb{C}(t)$.

Corolario 3.3.2. *Cada grupo finito se obtiene como el grupo de Galois de una extensión finita del cuerpo de fracciones $\mathbb{C}(t)$ de funciones complejas.*

Demostración. Sean $\widehat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann y $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un subconjunto. El grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ está dado por

$$\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1, ..., x_n\}, x_0) = \{\gamma_1, ..., \gamma_n | \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1\}$$

donde cada generador γ_i es un lazo entorno al punto x_i con base en x_0. Este grupo es isomorfo al grupo libre de $n-1$ generadores $\mathcal{F}_{n-1}$. En particular, conocemos que cada grupo finito es cociente del grupo libre $\mathcal{F}_n$ para algún n (ver [14], p. 345).

Sea G un grupo finito. Consideramos $n \in \mathbb{N}$ y el subgrupo $H \subset \mathcal{F}_{n-1}$ tal que $G \cong \frac{\mathcal{F}_{n-1}}{H}$. El conjunto $\widehat{\mathbb{C}}_n = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$ cumple las condiciones del Teorema 1.3.4 ya que es conexo, Hausdorff y por ser localmente homeomorfo a $\mathbb{C}$ es semilocalmente simplemente conexo y localmente compacto. Por lo tanto, existe un espacio topológico $\widetilde{X'}$ junto a una aplicación de recubrimiento de Galois $p : \widetilde{X'} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_n$ de manera que dado $\widetilde{x} \in \widetilde{X'}$ tenemos que $p_*\pi_1(\widetilde{X'}, \widetilde{x}) = H$ es un subgrupo normal de $\mathcal{F}_{n-1}$. Por el Teorema 1.3.1 tenemos que

$$\mathcal{C}_p(\widetilde{X'}) \cong \frac{N(p_*\pi_1(\widetilde{X'}, \widetilde{x}))}{p_*\pi_1(\widetilde{X'}, \widetilde{x})} = \frac{\mathcal{F}_{n-1}}{H} \cong G.$$

Por la Proposición 2.3.3 tenemos que la aplicación $p : \widetilde{X'} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}_n$ puede extenderse a una aplicación holomorfa y propia $P : \widetilde{X} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con $\widetilde{X'} \subset \widetilde{X}$ y $P|_{\widetilde{X'}} = p$. Además, por la Proposición 2.3.7 tenemos que $\mathrm{Aut}_P(\widetilde{X}|\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{C}_p(\widetilde{X'}) \cong G$. Por la Definición 2.3.8 tenemos que la aplicación P es un recubrimiento ramificado de Galois, ya que p es una aplicación de recubrimiento de Galois.

Por el Teorema 3.1.4 tenemos que P induce una extensión de cuerpos finita $\mathcal{M}(\widetilde{X})/P^*(\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}))$. Como $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}(t)$ tenemos que induce una extensión de cuerpos $\mathcal{M}(\widetilde{X})/\mathbb{C}(t)$ de $\mathbb{C}(t)$ a $\mathcal{M}(\widetilde{X})$. Por el Teorema 3.3.1 tenemos entonces la siguiente equivalencia entre grupos de automorfismos

$$\mathrm{Aut}_P(\mathcal{M}(\widetilde{X})|\mathbb{C}(t)) \cong \mathrm{Aut}_P(\widetilde{X}|\widehat{\mathbb{C}}) \cong G$$

y también que la extensión $\mathcal{M}(\widetilde{X})/\mathbb{C}(t)$ es de Galois por ser P un recubrimiento ramificado de Galois. Concluimos que existe una extensión de Galois de $\mathbb{C}(t)$ cuyo grupo de automorfismos es G. □

Bibliografía

[1] N. Corral, Apuntes de topología algebraica, Universidad de Cantabria, s.f.

[2] I. Cortázar Múgica, *Superficies de Riemann compactas y teorema de Riemann-Roch*, UNED, Colección Geometría y Topología, s.f.

[3] R. Douady and A. Douady, *Algèbre et Théories Galoisiennes*, CEDIC/Fernand Nathan, Paris, 1979.

[4] D. S. Dummit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd ed., Wiley, Hoboken, NJ, 2004.

[5] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 81, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[7] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[8] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 202, Springer, 2000.

[9] E. L. Lima, *Fundamentos de Topologia*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1964.

[10] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

[11] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 5, American Mathematical Society, 1995.

[12] H. Poincaré, *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique, Série 2, Vol. 1 (1895), pp. 1–121.

[13] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Doctoral dissertation, Universität Göttingen, 1851. Reprinted in *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876.

[14] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[16] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 117, Cambridge University Press, 2009.

Apéndice A

Nociones básicas del grupo fundamental

En este apéndice se recogen nociones básicas acerca del grupo fundamental y caminos en un espacio topológico. Para realizar esta sección se ha seguido [1]. También podrán encontrarse estos resultados en [8].

De ahora en adelante se denotará por I al intervalo unidad, $I = [0, 1]$.

Definición A.1. Sea X un espacio topológico. Se denomina **camino** a toda aplicación continua

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \sigma(t). \end{aligned}$$

Los puntos $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ se denominan, respectivamente, **origen** y **extremo** del camino. Si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ entonces el camino se denomima **lazo con base** x_0.

Dados dos caminos $\gamma, \delta : I \to X$, se dice que γ es **homótopo** a δ relativamente a $\{0, 1\}$ si existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que:

$$\begin{aligned} &F(s, 0) = \gamma(s), && \forall s \in I, \\ &F(s, 1) = \delta(s), && \forall s \in I, \\ &F(0, t) = \gamma(0) = \delta(0), && \forall t \in I, \\ &F(1, t) = \gamma(1) = \delta(1), && \forall t \in I. \end{aligned}$$

En este caso, se dice que F es una **homotopía de caminos** entre γ y δ, y se escribe $\gamma \sim_{\{0,1\}} \delta$.

Por otro lado, dados dos caminos $\gamma, \delta : I \to X$, si coincide el extremo de γ con el origen de δ es posible establecer una aplicación entre ambos, que devuelva el camino obtenido al recorrer ambos. Esta operación se denomina **producto** o **concatenación** y está definida por:

$$(\gamma * \delta)(s) = \begin{cases} \gamma(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

La relación de equivalencia previamente dada, junto a la operación de concatenación de caminos, sirven para sentar las bases del grupo fundamental.

Definición A.2. Dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$, se denota por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de clases de equivalencia $[\gamma]$ de lazos con base en x_0. Se define el producto $[\gamma] \cdot [\delta] = [\gamma * \delta]$, el cual dota a $\pi_1(X, x_0)$ de estructura de grupo. El elemento neutro es el lazo constante e_{x_0} y el elemento inverso de $[\gamma]$ es $[\gamma^{-1}]$, con $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$. Este grupo se denomina **grupo fundamental**.

La siguiente proposición muestra que dos puntos unidos por un camino definen sobre X grupos fundamentales isomorfos.

Proposición A.3. *Sea X un espacio topológico y $x_1, x_2 \in X$ dos puntos unidos por el camino τ con $\tau(0) = x_1$ y $\tau(1) = x_2$. Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi_\tau : \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_2) \\ [\sigma] &\longmapsto [\tau]^{-1} \cdot [\sigma] \cdot [\tau] \end{aligned}$$

define un isomorfismo entre ambos grupos fundamentales.

Por tanto, cuando X es un espacio conexo por caminos, en algunas ocasiones el grupo fundamental se denotará $\pi_1(X)$, omitiendo la dependencia en el punto.

Definición A.4. Un espacio topológico X es **simplemente conexo** si X es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es el grupo trivial.

Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua con $f(x_0) = y_0$. Entonces, f induce un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ f_*([\sigma]) &\longmapsto [f \circ \sigma], \end{aligned} \tag{A.1}$$

que verifica:

- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$,
- $(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Observemos que las propiedades anteriores nos permiten ver que si f es un homeomorfismo, entonces f_* es un isomorfismo. Ya que $f_* \circ f_*^{-1} = (f \circ f^{-1})_* = (Id_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$, con lo que f_* es sobreyectiva. Recíprocamente, se ve que f_* es inyectiva ya que $f_*^{-1} \circ f_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$. Se tiene así que f_* es un homomorfismo biyectivo, por lo que es un isomorfismo de grupos.

Apéndice B

Nociones básicas de teoría de Galois

En este apéndice se recogen algunas nociones de la teoría de Galois que se utilizan durante la memoria. Para realizarlo, se han consultado los capítulos 13 y 14 de [4] y los capítulos 5 y 6 de [7].

Comenzamos aportando la definición de extensión de cuerpos.

Definición B.1. Sean K y L dos cuerpos. Se dice que L es una **extensión de cuerpos** de K, y se denota L/K, si K es un subcuerpo de L.

En esta situación, L puede considerarse como un espacio vectorial sobre K. El **grado de la extensión $\boldsymbol{L/K}$**, denotado por $[L : K]$, se define como la dimensión de L como espacio vectorial sobre K:

$$[L : K] := \dim_K L.$$

Si $[L : K] < \infty$, se dice que L/K es una **extensión finita**.

Diremos que un elemento $\alpha \in L$ es **algebraico** sobre K si existe un polinomio $p(x) \in K[x]$ con $p(x) \neq 0$ tal que $p(\alpha) = 0$. Si todo elemento de L es algebraico sobre K entonces diremos que L es una **extensión algebraica** de K

Definición B.2. Sea α un elemento algebraico sobre un cuerpo K. Definimos por **polinomio mínimo** de α sobre K al único polinomio mónico irreducible $m(x) \in K[x]$ tal que $m(\alpha) = 0$.

Diremos que L es una extensión **finitamente generada** de K si hay una cantidad finita de elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ tales que $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Si L es una extensión generada por un único elemento $\alpha \in L$ entonces diremos que es una extensión **simple** y α se denominará como el **elemento primitivo** de la extensión.

Teorema B.3. *Sea $\Psi : K \longrightarrow K'$ un isomorfismo de cuerpos. Sean $p(x) \in K[x]$ un polinomio irreducible y $p'(x) \in K'[x]$ el polinomio irreducible obtenido al aplicar Ψ sobre los coeficientes de $p(x)$. Consideramos α una raíz de $p(x)$ y β una raíz de $p'(x)$. Entonces, existe un isomorfismo $\Phi : K(\alpha) \longrightarrow K'(\beta)$ tal que $\Phi(\alpha) = \beta$ y tal que $\Phi|_K = \Psi$.*

Demostración. Ver el Teorema 8 del Capítulo 13 de [4]. □

Proposición B.4. *Sean K y L dos cuerpos y L/K una extensión finita. Entonces L es una extensión finitamente generada de K.*

Demostración. Ver la Proposición 1.5 del capítulo 5 de [7]. □

Diremos que L es **algebraicamente cerrado** si cada polinomio no constante en $L[x]$ tiene al menos una raíz en L.

Definición B.5. Sea K un cuerpo. Se dice que un cuerpo $\overline{K}$ es una **clausura algebraica** de K si cumple las siguientes condiciones:

1. $\overline{K}$ es una extensión de K: $K \subseteq \overline{K}$,

2. $\overline{K}$ es **algebraicamente cerrado**,

3. $\overline{K}$ es una **extensión algebraica** de K.

Damos la definición de polinomio separable y una condición para que un polinomio lo sea.

Definición B.6. Sea K un cuerpo y $f \in K[x]$ un polinomio. Se dice que f es **separable** si no tiene raíces múltiples en una clausura algebraica de K.

Proposición B.7. *Sea K un cuerpo y $f \in K[x]$ un polinomio. El polinomio f es separable si y solo si* $\gcd(f, f') = 1$, *donde f' denota la derivada de f.*

Demostración. Ver la Proposición 33 del Capítulo 13 de [4]. □

Como corolario, se obtiene que cada polinomio irreducible en un cuerpo de característica 0 es separable (ver Corolario 34 del capítulo 13 de [4]).

A partir de la definición de polinomio separable se obtiene la de extensión de cuerpos separable.

Definición B.8. Sea L/K una extensión algebraica de cuerpos. Se dice que L es **separable** sobre K si todo elemento $\alpha \in L$ es raíz de un polinomio separable en $K[X]$.

De manera equivalente, tenemos que la extensión L/K es separable si el polinomio mínimo de cada $\alpha \in L$ sobre K es separable.

Teorema B.9 (Teorema del elemento primitivo)**.** *Sea L/K una extensión finita y separable. Entonces, existe $\alpha \in L$ tal que $L = K(\alpha)$.*

Demostración. Ver el Teorema 4.6 del Capítulo 5 de [7] □

Definición B.10. Sea L/K una extensión de cuerpos. Se dice que la extensión L/K es **normal** si se cumple una de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Todo polinomio $f \in K[X]$ irreducible que tiene alguna raíz en L se descompone completamente en $L[X]$, es decir, todos sus raíces pertenecen a L.

2. L es el cuerpo de descomposición de una familia de polinomios de $K[X]$. Esto quiere decir que existe una cantidad finito de polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$ tal que L es el menor cuerpo que contiene a K y a todas las raíces de esos polinomios.

Definición B.11. Sea L/K una extensión de cuerpos. Se define el conjunto de **automorfismos de L que fijan K** o **K-automorfismos de L**, denotado $\mathrm{Aut}(L/K)$, como el conjunto de todos los isomorfismos de cuerpos $\sigma : L \to L$ tales que $\sigma(k) = k$ para todo $k \in K$.

El conjunto $\mathrm{Aut}(L/K)$ es un grupo con la composición de aplicaciones.

Una extensión algebraica L de un cuerpo K se dice que es **una extensión de Galois** si es normal y separable. En este caso, el grupo $\mathrm{Aut}(L/K)$ de automorfismos de L se llama **grupo de Galois** de L sobre K.

La siguiente proposición a veces se da como la definición de grupo de Galois, por lo tanto, no se aportará referencia a una demostración.

Proposición B.12. *La extensión de cuerpos L/K es de Galois si y solo si el grado de la extensión coincide con el orden del grupo de Galois:*

$$[L : K] = |\,\mathrm{Aut}(L/K)|.$$

Apéndice C

Resultados de variable compleja

En esta sección del apéndice aportamos resultados de variable compleja que utilizaremos con frecuencia a lo largo de la memoria.

Teorema C.1 (Singularidad evitable de Riemann)**.** *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $a \in D$ un punto, y $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.*

Si existe un abierto $U \subset D$ con $a \in U$ tal que la aplicación f está acotada en $U \setminus \{a\}$, entonces f se puede extender holomórficamente a todo D definiendo

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z).$$

*En este caso, se dice que el punto a es una **singularidad evitable** de f.*

Demostración. Puede encontrarse una demostración en [15] en el Teorema 10.20. □

Teorema C.2 (Teorema de la función implícita)**.** *Sea $F : U \subseteq \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}^2$. Supongamos que $(z_0, w_0) \in U$ y que $F(z_0, w_0) = 0$.*

Si además

$$\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0,$$

entonces existen entornos abiertos $V \subseteq \mathbb{C}$ de z_0 y $W \subseteq \mathbb{C}$ de w_0, y una única función holomorfa $\varphi : V \to W$ tal que

$$F(z, \varphi(z)) = 0, \quad \forall z \in V.$$

Además, $\varphi(z_0) = w_0$.

Demostración. Puede encontrarse una demostración en [6] en la página 19. □

Teorema C.3 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, y sea $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$.*

Entonces, existe un entorno abierto $V \subset U$ de z_0 tal que la restricción $f|_V : V \to f(V)$ es un biholomorfismo.

Demostración. Puede encontrarse una demostración en [6] en la página 18. □

Teorema C.4 (Teorema de la identidad)**.** *Sean f y g funciones analíticas definidas en un conjunto abierto y conexo $U \subset \mathbb{C}$.*

Sea $S = \{z \in U : f(z) = g(z)\}$. Si S tiene un punto de acumulación $z_0 \in U$, entonces

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in U.$$

Demostración. Puede encontrarse una demostración en [15] en el Teorema 10.18. □

Apéndice D

Más ejemplos de superficies de Riemann

Esta sección del apéndice incluye más ejemplos de superficies de Riemann. Estos pueden encontrarse en [6] en la sección 0.2 y también en [11] en el capítulo 1.

Ejemplo D.1 (Esfera en $\mathbb{R}^3$)**.** Considérese la esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

se le va a dotar de estructura de variedad compleja mediante la proyección estereográfica.

Denotamos $n = (0, 0, 1)$ y $s = (0, 0, -1)$ a los polos norte y sur de la esfera, respectivamente y definimos los siguientes abiertos

$$U_0 = \mathbb{S}^2 \setminus \{n\} = \left\{p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z < 1\right\},$$
$$U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{s\} = \left\{p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > -1\right\}.$$

Tomamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}, \end{aligned}$$

que se obtienen a partir de la proyección estereográfica al identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$.

Veamos que $\mathcal{A} = \{(U_0, \varphi_0), (U_1, \varphi_1)\}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{S}^2$. Comenzamos probando que cada (U_i, φ_i) define una carta compleja. La proyección estereográfica es un homeomorfismo entre el plano y la esfera sin un punto, por tanto, es sobreyectiva, y se tiene que $\varphi_i(U_i) = \mathbb{C}$, un abierto. Además, por ser un homeomorfismo, es una aplicación inyectiva. Por lo tanto, son cartas complejas.

Para comprobar que son cartas compatibles miramos la intersección de los dominios de las cartas $U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{n, p\}$. Tenemos que

$$\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*,$$

es un abierto de $\mathbb{C}$.

Queda comprobar que el cambio de cartas es una aplicación biholomorfa. A partir de la inversa de la proyección estereográfica obtenemos que

$$\varphi_0^{-1}(w) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(w)}{1+|w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(w)}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{1+|w|^2}\right).$$

Por lo tanto, la aplicación de cambio de carta

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_1 \cap U_0) \to \varphi_1(U_0 \cap U_1),$$

para $w = a + ib \in \mathbb{C}^*$ resulta:

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(w) = \varphi_1\left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{a^2+b^2-1}{1+a^2+b^2}\right) = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{1}{w}. \tag{D.1}$$

que es una aplicación biholomorfa en $\mathbb{C}^*$. Luego, el cambio de cartas es biholomorfo y comprobamos que el conjunto $\mathcal{A}$ define un atlas sobre $\mathbb{S}^2$.

Para terminar, vemos que la topología inducida por el atlas $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{S}^2$ es Hausdorff. Tomamos dos puntos y vemos que existen abiertos disjuntos en X tales que cada punto está contenido en uno de los abiertos. Si los puntos son p y n, basta tomar como abiertos las contraimágenes de la bola abierta unidad $B(0,1)$ a través de las cartas φ_0 y φ_1. Si es otra situación, ambos puntos estarán contenidos en U_0 o en U_1. Como estos dominios son homeomorfos a $\mathbb{C}$, que es un espacio Hausdorff, se tiene que existen abiertos con la propiedad buscada. Se concluye entonces que $\mathbb{S}^2$ con el atlas $\mathcal{A}$ tiene estructura de superficie de Riemann. Esta estructura se denomina **esfera de Riemann**.

Ejemplo D.2 (Recta proyectiva compleja)**.** Consideramos el espacio $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y la acción del grupo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ ((\zeta_0, \zeta_1), t) &\longmapsto (t\zeta_0, t\zeta_1). \end{aligned}$$

la recta proyectiva compleja se define como el espacio cociente:

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

Dado un punto $v = (\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, su clase de equivalencia se denota de la siguiente manera $[v] = [\zeta_0 : \zeta_1]$. Esta clase de equivalencia representa la recta vectorial compleja en $\mathbb{C}^2$ que pasa por este punto. Es decir, una clase de equivalencia $[v] = [\zeta_0 : \zeta_1] \in \mathbb{P}^1$ representa la recta compleja $\langle v \rangle = \{\lambda v \in \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\}$, generada por el vector $v = (\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

El objetivo es definir una estructura de variedad compleja sobre $\mathbb{P}^1$. Para ello, se comienza tomando los conjuntos

$$\begin{aligned} U_0 &= \{[\zeta_0 : \zeta_1] \in \mathbb{P}^1 : \zeta_0 \neq 0\}, \\ U_1 &= \{[\zeta_0 : \zeta_1] \in \mathbb{P}^1 : \zeta_1 \neq 0\}, \end{aligned}$$

sobre los que se definen las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} Z_0 : U_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ {[\zeta_0 : \zeta_1]} & \longmapsto & \dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ {[\zeta_0 : \zeta_1]} & \longmapsto & \dfrac{\zeta_0}{\zeta_1}. \end{array}$$

Vamos a comprobar que el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_0, Z_0), (U_1, Z_1)\}$ determina un atlas complejo sobre $\mathbb{P}^1$. Se realizará la comprobación sólamente con Z_0, pues ambas son parecidas.

En primer lugar, se comprueba que Z_0 es inyectiva. Supongamos que $Z_0([\zeta_0 : \zeta_1]) = Z_0([\xi_0 : \xi_1])$. Entonces

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_0} = \frac{\xi_1}{\xi_0} = \lambda.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} [\zeta_0 : \zeta_1] &= [\zeta_0 : \lambda\zeta_0] = [1 : \lambda], \\ [\xi_0 : \xi_1] &= [\xi_0 : \lambda\xi_0] = [1 : \lambda], \end{aligned}$$

y por tanto, $[\zeta_0 : \zeta_1] = [\chi_0 : \chi_1]$, lo cual prueba que Z_0 es inyectiva.

Además, Z_0 es sobreyectiva puesto que, para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $Z_0([1 : z]) = z$. Por tanto, $Z_0(U_0) = \mathbb{C}$, que es un conjunto abierto. Esto prueba que (U_0, Z_0) constituye una carta en $\mathbb{P}^1$. La prueba para (U_1, Z_1) es idéntica.

El siguiente paso es comprobar que las cartas son compatibles. En primer lugar, se tiene que

$$Z_0(U_0 \cap U_1) = Z_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$$

que es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Falta comprobar que el cambio de cartas es una aplicación biholomorfa. Para $w \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$Z_0^{-1}(w) = [1 : w], \quad Z_1^{-1}(w) = [w : 1].$$

Por tanto, el cambio de cartas resulta

$$\begin{aligned} Z_0 \circ Z_1^{-1} : Z_1(U_1 \cap U_0) &\longrightarrow \quad Z_0(U_0 \cap U_1) \\ z \qquad &\longmapsto Z_0([z : 1]) = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

que es una aplicación biholomorfa. Por tanto, se ha comprobado que $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{P}^1$.

La similitud entre este ejemplo y la esfera de Riemann va más allá de la coincidencia. De hecho, ambos conjuntos son el mismo, aunque no se realizará la demostración aquí.

Ejemplo D.3 (Toro complejo)**.** Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$ (es decir, con diferente argumento). Consideramos el grupo Λ generado por los homeomorfismos $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow C$

$$f(z) = z + \omega_1, \qquad g(z) = z + \omega_2.$$

con la operación dada por la composición de aplicaciones. Tenemos, entonces, que los elementos de Λ serán de la forma $f^n \circ g^m(z) = z + n\omega_1 + m\omega_2$. De manera similar al Ejemplo 1.2.11 tenemos que el grupo Λ actúa de manera propiamente discontinua sobre $\mathbb{C}$ y, por lo tanto, aplicando el Teorema 1.2.10 la proyección $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ es una aplicación de recubrimiento. Definimos el toro complejo $\mathbb{T}^2$ como el cociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Lambda$.

Para construir un atlas complejo en $\mathbb{T}^2$, consideramos para cada $z \in \mathbb{T}^2$ un abierto distinguido $U \subset \mathbb{T}^2$ con $z \in U$. Tenemos que existe un abierto $V \subset \mathbb{C}$ tal que la aplicación

$$\pi|_V : V \longrightarrow U$$

es un homeomorfismo. Consideramos la aplicación

$$\varphi = (\pi|_V)^{-1} : U \longrightarrow V$$

que también es un homeomorfismo. Además, para todo $z' \in U$ se cumple que $\varphi(z') = z' + n\omega_1 + m\omega_2$. Como φ es un homeomorfismo definido sobre un conjunto abierto, tenemos que (U, φ) es una carta compleja.

Tomamos el conjunto $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ que contiene todos los abiertos distinguidos $U_i \subset \mathbb{T}^2$ con la aplicación φ_i definida como φ. Vamos a ver que $\mathcal{A}$ es un atlas complejo sobre $\mathbb{T}^2$. En primer lugar, los dominios de cartas de $\mathcal{A}$ recubren $\mathbb{T}^2$ porque los abiertos distinguidos recubren el espacio base. Tomamos dos cartas (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) de $\mathcal{A}$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Por ser homeomorfismos, tenemos que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ y $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ son conjuntos abiertos. Para cada $z \in U_i \cap U_j$ tenemos que la aplicación cambio de carta

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

cumple que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z) = z + n\omega_1 + m\omega_2$ que es una aplicación biholomorfa.

Concluimos que el toro complejo $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Lambda$ es una variedad compleja.

Queda ver que esta variedad es Hausdorff. Tomamos $z_1, z_2 \in \mathbb{T}^2$. Si existen dos abiertos distinguidos $U_1, U_2 \subset \mathbb{T}^2$ disjuntos tales que $z_1 \in U_1$ y $z_2 \in U_2$ hemos terminado. En caso de que no existan dichos abiertos distinguidos tenemos que existe un abierto distinguido $U \subset \mathbb{T}^2$ dominio de la carta φ tal que $z_1, z_2 \in U$. Como U es homeomorfo a $\varphi(U)$ un abierto de $\mathbb{C}$ y por tanto un conjunto Hausdorff concluimos que podemos tomar abiertos disjuntos contenidos en U que contengan cada uno a un punto. Con esto, $\mathbb{T}^2$ es una variedad compleja de dimensión 1 y Hausdorff por lo tanto, es una superficie de Riemann.